NGUYEN XUAN HUY

INEQUALITIES

Hà Nội rạng sáng ngày 12/08/2010
Email:nguyenxuanhuydhxd@gmai.com

CHƯƠNG 1:ĐỀ VÀ LỜI GIẢI

Bài 1:Cho x,y,z là các số thực dương có tích bằng 1.Chứng minh:

$$(xy+yz+zx)^2(x+y+z)\ge 24+x^2+y^2+z^2$$

Lời giải 1:Bất đẳng thức tương đương:

$$(xy+yz+zx)^2(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx})\ge 24+x^2+y^2+z^2$$

Áp dụng holder ta có:

$$(xy+yz+zx)^2(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx})=(xy+yz+zx)(yz+zx+xy)(\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz})\ge(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2})^3$$

Sử dụng bất đẳng thức với a,b,c>0 thì $(a+b+c)^3\ge 24abc+a^3+b^3+c^3$ ta được:

$$(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}+\sqrt[3]{z^2})^3\ge 24\sqrt[3]{x^2y^2z^2}+x^2+y^2+z^2=24+x^2+y^2+z^2$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Lời giải 2:Bất đẳng thức tương đương với:

$$(x+y+z)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)+4(xy+yz+zx)+x^2+y^2+z^2\ge 24$$

Sử dụng cauchy ta dễ có điều này.

Bài 2:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{1+2ab}+\frac{1}{1+2bc}+\frac{1}{1+2ca}\ge 1$

Chứng minh rằng: $a+b+c\ge 3abc$

Lời giải: (Em trai:Nguyễn Tấn sang-10A1-Chuyên Phan Bội Châu)

Ta có $\frac{1}{1+2ab}\le\frac{1}{9}(1+\frac{2}{ab})\Leftrightarrow a^2b^2+1\ge 2ab$ hiển nhiên.

Do đó:$1\le\frac{1}{9}(3+2(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca})\Rightarrow a+b+c\ge 3abc$,suy ra điều phải chứng minh.

Bài 3:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$.Chứng minh;

$$(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}})(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})\ge 9$$

Lời giải: (Em trai:Nguyễn Tấn sang-10A1-Chuyên Phan Bội Châu)

Đặt $x=\sqrt{ab},y=\sqrt{bc},z=\sqrt{ca}$,khi đó $x^2+y^2+z^2=3$

Ta cần chứng minh: $(\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x})(x+y+z)\ge 9$

Thật vậy ta có: $\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}\ge\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx}$.Ta đi chứng minh: $(x+y+z)^3\ge 9(xy+yz+zx)$

Mà $(x+y+z)^3=(x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx))^{\frac{3}{2}}\ge(3\sqrt[3]{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)^2})^{\frac{3}{2}}$

$$=(3\sqrt[3]{3(xy+yz+zx)^2})^{\frac{3}{2}}=9(xy+yz+zx)$$

Điều phải chứng minh.

Bài 4:Chứng minh rằng với các số thực x,y,z ta luôn có:

$$(x^3+y^3+z^3)^2+3(xyz)^2\ge 4(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3)$$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương: $x^6+y^6+z^6+3(xyz)^2\ge 2(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3)$

Mà theo schur ta có: $x^6+y^6+z^6+3(xyz)^2 \geq \sum x^2y^2(x^2+y^2) \geq \sum x^3y^3$.Điều phải chứng minh.

Bài 5:Cho a,b,c là các số thực không âm có $a+b+c=1$ và không có hai số nào đồng thời bằng 0,chứng minh: $\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab} \geq 64\sum_{cyc}\frac{a(1-a)^2}{(a+1)^4}$

Lời giải:

Ta có $\frac{b+c}{a^2+bc}=\frac{a(b+c)^2}{(a^2+bc)(ab+ac)} \geq \frac{4a(b+c)^2}{(a+b)^2(a+c)^2} \geq \frac{64a(b+c)^2}{(b+c+2a)^4}=\frac{64a(1-a)^2}{(a+1)^4}$

Làm tương tự ta có điều phải chứng minh.

Bài 6:Cho x,y,z là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx \geq 2(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})$$

Lời giải 1:Bất đẳng thức tương đương: $\sum (x^2+\frac{1}{x}-2\sqrt{x}) \geq 0$,hiển nhiên

Lời giải 2:

$VP=2(xy+yz+zx)+\frac{1}{2}\sum (x-y)^2 \geq 2(xy+yz+zx)=\sum (xy+yz) \geq 2\sum y = VT$

Bài 7:Cho x,y,z là các số thực,chứng minh rằng:

$$(x^2+3)(y^2+3)(z^2+3) \geq \frac{4}{27}(3xy+3yz+3zx+xyz)^2$$

Lời giải:Ta biến đổi bất đẳng thức về dạng p,q,r như sau:

$243p^2+45q^2+23r^2-24qr-162pr-486q+729 \geq 0$

$\Leftrightarrow 11(3p-r)^2+12(q-r)^2+(q-27)^2+144(p^2-3q)+32(q^2-3pr) \geq 0$

Hiển nhiên,dễ dàng kiểm tra điều này.Ta có điều phải chứng minh,dấu bằng xảy ra khi va chỉ khi x = y = z = 3

Bài 8:Tìm min và max của $p=\frac{(\sin x\text{+siny)sinz+cosxcosycosz}}{1+\sin x \sin y}$

Lời giải:Ta có

$\left|(\sin x\text{+siny)sinz+cosxcosycosz}\right| \leq \sqrt{\sin^2 z+\cos^2 z}.\sqrt{(\sin x\text{+siny})^2+(\text{cosxcosy})^2}$

$=\sqrt{\sin^2 x+2\sin x\text{siny+}\sin^2 y+(1-\sin^2 x)(1-\sin^2 y)}$

$=\sqrt{\sin^2 x\sin^2 y+2\sin x\text{siny+1}}=\left|\sin x\text{siny+1}\right|$

Do đó: $|p| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq p \leq 1$

Vậy:max p = 1 $\Leftrightarrow x=y=z=0$

Min p = -1 $\Leftrightarrow x=y=0, z=\pi$

Bài 9:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{abc}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3} \geq \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương:

$$\frac{3(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)}{a^2+b^2+c^2} \ge \frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^3+b^3+c^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2(a^2+b^2+c^2)}\sum(a-b)^2 \ge \frac{a+b+c}{2(a^3+b^3+c^3)}\sum(a-b)^2$$

Do đó ta cần chứng minh: $3(a^3+b^3+c^3) \ge (a^2+b^2+c^2)(a+b+c)$,ta dễ có bất đẳng thức này.

Bài 10:Tìm min của biểu thức: A = $\frac{x}{\sqrt{y}}+\frac{y}{\sqrt{z}}+\frac{z}{\sqrt{x}}$,với x,y,z >0 và $x+y+z \ge 3$.

Lời giải 1: $A^2 = \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+2x\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{z}}+2y\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}}+2z\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$,theo Cauchy ta có:

$$\sum(\frac{x^2}{y}+x\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{z}}+x\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{z}}+z) \ge \sum 4x \to A^2 \ge 3(x+y+z) \ge 9 \to A \ge 3$$

Vậy min A = 3 khi và chỉ khi a = b = c = 1.

Lời giải 2:Theo svac-xơ ta có:

$$A \ge \frac{(x+y+z)^2}{x\sqrt{y}+y\sqrt{z}+z\sqrt{x}} \ge \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{(x+y+z)(xy+yz+zx)}}$$

$$\ge \frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{(x+y+z).\frac{(x+y+z)^2}{3}}} = \sqrt{3(x+y+z)} \ge \sqrt{9} = 3$$

Bài 11:cho x,y,z là các số thực thỏa mãn: $x+y+z=0$,chứng minh:

$$6(x^3+y^3+z^3)^2 \le (x^2+y^2+z^2)^3$$

Lời giải:Chúng ta có: $z=-(x+y)$ và

$$(x^2+y^2+z^2)^3 = (x^2+y^2+(x+y)^2)^3 \ge (\frac{3}{2}(x+y)^2)^3 = \frac{27}{8}(x+y)^4(x+y)^2$$

$$\ge \frac{27}{8}.16(xy)^2(x+y)^2 = 6.(3xy(x+y))^2 = 6(x^3+y^3-(x+y)^3)^2 = 6(x^3+y^3+z^3)^2$$

Bài 12:Cho a,b,c là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0.Chứng minh rằng:

$$\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}+\frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)}+\frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)} \le \frac{1}{a+b+c}$$

Gợi ý:Ta chỉ cần chứng minh:

$\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)} \le \frac{a}{(a+b+c)^2} \Leftrightarrow (a^2+ab+ac)^2 \le (2a^2+b^2)(2a^2+c^2)$,điều này đúng,theo bunhiacop-xki.

Bài 13:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.Chứng minh;

$$5(a+b+c)+\frac{3}{abc} \ge 18$$

Lời giải:Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng: $5p+\frac{3}{r} \ge 18$

Từ giả thiết ta có $p^2 = 2q+3 \Rightarrow p > \sqrt{3}$.Mà $q^2 \ge 3pr \Rightarrow \frac{1}{r} \ge \frac{3p}{q^2}$,vậy ta cần chứng minh;

$$5p + \frac{9p}{q^2} \ge 18 \Leftrightarrow 5p + \frac{36}{(p^2-3)^2} - 18 \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(p-3)^2(5p^3+12p^2-3p-18)}{(p^2-3)^2} \ge 0$$

Mà $5p^3+12p^2-3p-18 = p^2(5p+12-\frac{3}{p}-\frac{18}{p^2}) > p^2(5\sqrt{3}+12-\sqrt{3}-6) > 0$

Hoàn tất việc chứng minh.

Bài 14:Cho a,b,c là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng không.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \ge \frac{3}{ab+bc+ca}$$

Lời giải:Để ý $\frac{ab+bc+ca}{a^2+bc} = 1 + \frac{a(b+c-a)}{a^2+bc}$,bất đẳng thức được viết lại thành:

$$\frac{a(b+c-a)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a-b)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b-c)}{c^2+ab} \ge 0$$

Giả sử $a \le b \le c \Rightarrow b+c-a > 0$ nên ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{b(c+a-b)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b-c)}{c^2+ab} \ge 0 \Leftrightarrow (b-c)^2(a-b)(a-c) + abc(2a+b+c) \ge 0$$

Hiển nhiên,vì $a \le b \le c$

Bài 15:Cho a,b,c là các số thực dương,thỏa mãn $a+b+c=1$.Chứng minh:

$$\frac{a^2}{ab+bc} + \frac{b^2}{bc+ca} + \frac{c^2}{ca+ab} + \frac{3abc}{a^3b+b^3c+c^3a+abc} \ge 3$$

Lời giải:

Áp dụng Svac-xơ ta có:

$$\frac{a^2}{ab+bc} + \frac{b^2}{bc+ca} + \frac{c^2}{ca+ab} \ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^3b+b^3c+c^3a+abc(a+b+c)} \ge \frac{3(a^3b+b^3c+c^3a)}{a^3b+b^3c+c^3a+abc}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 16:Cho a,b,c,d là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=4$.Chứng minh:

$$a^3+b^3+c^3+d^3 \le 8$$

Gợi ý: $a^3 \le 2a^2$

Bài 17:Cho a,b,c là các số thựuc không âm,chứng minh:

$$a^3+b^3+c^3-3abc \ge 2(\frac{b+c}{2}-a)^3$$

Lời giải:Nếu $\frac{b+c}{2}-a \le 0$,hiển nhiên

Nếu $\frac{b+c}{2}-a > 0$,đặt $b=a+2x, c=a+2y$ thì ta có:

$$a^3+b^3+c^3-3abc-2(\frac{b+c}{2}-a)^3 = 12a(x^2-xy+y^2)+6(x+y)(x-y)^2 \ge 6(x+y)(x-y)^2$$

$$= \frac{3}{2}(\frac{b+c}{2}-a)(a-b)^2 \ge 0 \text{,hiển nhiên.}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)=(1,1,1);(0,1,1)$

Bài 18:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[5]{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương:

$$(a+b+c)^5\ge 81abc(a^2+b^2+c^2)$$

Mà ta có $(ab+bc+ca)^2\ge 3abc(a+b+c)$,do đó ta cần chứng minh:

$$(a+b+c)^6\ge 27(ab+bc+ca)^2(a^2+b^2+c^2)\Leftrightarrow p^6-27q^2(p^2-2q)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (p^2-3q)^2(p^2+6q)\ge 0$$,hiển nhiên.

Bài 19:Cho a,b,c là các số thực không âm,chứng minh:

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ca)$$

Lời giải 1:Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $(1-b)(1-c)\ge 0$

Bất đẳng thức viết lại: $(a-1)^2+(b-c)^2+2a(1-b)(1-c)\ge 0$

Lời giải 2:Ta xét:

$$(a+b+c)(1+2abc+a^2+b^2+c^2-2(bc+bc+ca))=((a^3+b^3+c^3+3abc)-\sum ab(a+b))$$
$$+\sum a(bc^2+cb^2+1-3bc)\ge 0$$

Đúng,theo Cauchy và schur.Suy ra điều phải chứng minh.

Lời giải 3:Đặt $a=x^3,b=y^3,c=z^3$,chúng ta có:

$$x^6+y^6+z^6+x^3y^3z^3+x^3y^3z^3+1\ge x^6+y^6+z^6+3x^2y^2z^2\ge\sum(x^4y^2+x^2y^4)\ge 2\sum x^3y^3$$

Suy ra điều phải chứng minh.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c =1.

Lời giải 4:Ta có theo Cauchy và schur bậc 1:

$$a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge a^2+b^2+c^2+\frac{3abc}{\sqrt[3]{abc}}\ge a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c}$$
$$\ge a^2+b^2+c^2+4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2=2(ab+bc+ca)$$

Điều phải chứng minh.

Bài 20:Cho a,b,c,k là các số thực không âm,chứng minh:

$$(a^2+k+1)(b^2+k+1)(c^2+k+1)\ge (k+2)^2(ab+bc+ca+k-1)^2$$

Lời giải:Xét:

$$(a^2+k+1)(b^2+k+1)(c^2+k+1)-(k+2)^2(ab+bc+ca+k-1)^2$$
$$=\frac{1}{2}((b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2)k^2+((b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2+(bc-1)^2$$
$$+(ca-1)^2+(ab-1)^2)k+(bc-1)^2+(ca-1)^2+(ab-1)^2+(abc-1)^2$$
$$+((1+2abc+a^2+b^2+c^2)-(2ab+2bc+2ca))\ge 0$$

Đúng,theo bài toán trên.suy ra đpcm

Bài 21:Cho a,b,c là các số thưục phân biệt,chứng minh rằng:

$$\left(\frac{a}{b-c}\right)^2+\left(\frac{b}{c-a}\right)^2+\left(\frac{c}{a-b}\right)^2\ge 2$$

Lời giải:Đặt $x=\frac{a}{b-c},y=\frac{b}{c-a},z=\frac{c}{a-b}$ thì ta có $xy+yz+zx=-1$

$$VT=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2+2\ge 2$$

Bài 22:Cho a,b,c là các số thực không âm,chứng minh:

$$(a^2-bc)\sqrt{b+c}+(b^2-ca)\sqrt{c+a}+(c^2-ab)\sqrt{a+b}\ge 0$$

Lời giải:Đặt $b+c=2x^2, c+a=2y^2, a+b=2z^2 (x,y,z\ge 0)$

Bất đẳng thức tương đương $\sum_{cyc} xy(x^3+y^3)\ge \sum_{cyc} x^2y^2(x+y) \Leftrightarrow \sum_{cyc} xy(x+y)(x-y)^2\ge 0$

Bài 23:Cho a,b,c,d là các số thực không âm,chứng minh:

$$\frac{a-b}{a+2b+c}+\frac{b-c}{b+2c+d}+\frac{c-d}{c+2d+a}+\frac{d-a}{d+2a+b}\ge 0$$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương:

$$\sum_{cyc}(\frac{a-b}{a+2b+c}+\frac{1}{2})\ge 2 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{3a+c}{a+2b+c}\ge 4$$

Mà theo Svac-xơ thì:

$$\sum_{cyc}\frac{3a+c}{a+2b+c}\ge \frac{(\sum_{cyc}(3a+c))^2}{\sum_{cyc}(3a+c)(a+2b+c)}=\frac{16(a+b+c+d)^2}{4(a+b+c+d)^2}=4$$

Bài 24:Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=a+b+c$

Chứng minh: $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le ab+bc+ca$

Lời giải:Từ giả thiết ta có:

$$a^4+b^4+c^4-a^2-b^2-c^2=2(ab+bc+ca-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2)$$

Nên ta cần chứng minh:

$$a^4+b^4+c^4\ge a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow (a+b+c)^2(a^4+b^4+c^4)\ge (a^2+b^2+c^2)^3$$

Đúng,theo Holder,dấu bằng xảy ra khi $(a,b,c)=(1,1,1);(0,0,0);(0,1,1)$

Bài 25:Cho a,b,c là các số thực dương và giả sử:

$E(a,b,c)=a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b)$,chứng minh rằng:

a) $(a+b+c)E(a,b,c)\ge ab(a-b)^2+bc(b-c)^2+ca(c-a)^2$

b) $2(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})E(a,b,c)\ge (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$

Lời giải:

a)Theo Schur ta có $\sum_{cyc} a^2(a-b)(a-c)\ge 0$

$$(a+b+c)E(a,b,c)=\sum_{cyc} a^2(a-b)(a-c)+\sum_{cyc} a(b+c)(a-b)(a-c)$$

$$\ge \sum_{cyc} a(b+c)(a-b)(a-c)=\sum_{cyc} ab(a-b)^2\ge 0$$,hiển nhiên.

b)Ta có

$$(ab+bc+ca)E(a,b,c)=abc\sum_{cyc}(a-b)(a-c)+\sum_{cyc}(ab+ac)a(a-b)(a-c)$$

$$=\frac{abc}{2}\sum_{cyc}(a-b)^2+\sum_{cyc} bc(b+c-a)(b-c)^2\ge 0$$

Chúng ta dễ có điều này,theo Schur suy rộng.

Bài 26:Cho $a,b,c \in \left[\frac{1}{3};3\right]$,chứng minh rằng:

$$f(a,b,c)=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}\ge \frac{7}{5}$$

Lời giải:Không mất tính tổng quát ta giả sử a = max{a,b,c}

Ta xét $f(a,b,c)-f(a,b,\sqrt{ab})=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{ab}-c)^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(b+c)(c+a)}\ge 0 \Leftrightarrow f(a,b,c)\ge f(a,b,\sqrt{ab})$

Mà $f(a,b,\sqrt{ab})-\frac{7}{5}=\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{2}{x+1}-\frac{7}{5}=\frac{(3-x)(x^2+(1-x)^2)}{5(x^2+1)(x+1)}\ge 0$

Với $x=\sqrt{\frac{a}{b}}\le 3$

Bài 27:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+2=abc$,chứng minh:

$$2(a^2+b^2+c^2)+2(a+b+c)\ge (a+b+c)^2$$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương: $p^2+2p-4q\ge 0$

Ta có $p+2\le \frac{p^3}{27}\Leftrightarrow (p-6)(p+3)^2\ge 0\Rightarrow p\ge 6$

Theo schur bậc 1 ta có: $p+2=r\ge \frac{p(4q-p^2)}{9}\Rightarrow 4q\le \frac{p^3+9p+18}{p}$

Vậy ta cần chứng minh:

$p^2+2p-\frac{p^3+9p+18}{p}\ge 0\Leftrightarrow 2p^2-9p-18\ge 0\Leftrightarrow (p-6)(2p+3)\ge 0$,hiển nhiên

Bài 28:Cho a,b,c,x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=x+y+z$

Chứng minh: ax(a+x)+by(b+y)+cz(c+z) $\ge$ 3(abc+xyz)

Lời giải:Ta dễ có:

$$(a^2x+b^2y+c^2z)(yz+zx+xy)\ge xyz(a+b+c)^2=xyz(x+y+z)^2$$
$$\ge 3xyz(xy+yz+zx)\Leftrightarrow a^2x+b^2y+c^2z\ge 3xyz$$

Tương tự ta có $ax^2+by^2+cz^2\ge 3abc$,suy ra được đpcm.

Bài 29:Cho a,b,c là các số thực không âm,chứng minh:

$$4(a+b+c)^3\ge 27(ab^2+bc^2+ca^2+abc)$$

Lời giải:

Giả sử a = min{a,b,c},đặt $b=a+x, c=a+y (x,y\ge 0)$ .Bất đẳng thức tương đương:

$$9(x^2-xy+y^2)a+(2x-y)^2(x+4y)\ge 0 \text{,hiển nhiên}$$

Dấu bằng xảy ra $(a,b,c)=(1,1,1);(0,1,2)$ và các hoán vị.

Bài 30:Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$ .Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2ab^2+1}+\frac{1}{2bc^2+1}+\frac{1}{2ca^2+1}\ge 1$$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương:

$$ab^2+bc^2+ca^2+1-4a^3b^3c^3\ge 0$$

Mà $ab^2+bc^2+ca^2+1-4a^3b^3c^3\ge 3abc-4a^3b^3c^3+1=(1-abc)(1+2abc)^2\ge 0$

Bài 31:Cho a,b,c là các số dương,chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{b^2+bc}+\frac{1}{c^2+cd}+\frac{1}{d^2+da}\ge\frac{4}{ac+bd}$$

Lời giải:bất đẳng thức tương đương:

$$\sum_{cyc}(\frac{ac+bd}{a^2+ab}+1)\ge 8\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{c+a}{a+b}+\sum_{cyc}\frac{b(d+a)}{a(a+b)}\ge 8$$

Nhưng: $\sum_{cyc}\frac{b(d+a)}{a(a+b)}\ge 4$,theo cauchy.

$$\sum_{cyc}\frac{c+a}{a+b}=(a+c)(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+d})+(b+d)(\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c})$$

$$\ge\frac{4(a+c)}{a+b+c+d}+\frac{4(b+d)}{a+b+c+d}=4$$

Bài 32:Chứng minh rằng nếu $a,b,c\in\left[\frac{1}{\sqrt{2}};\sqrt{2}\right]$ thì

$$\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}\ge\frac{2}{3}(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})$$

Lời giải:Bất đẳng thức viét dưới dạng:

$$\sum_{cyc}(\frac{3}{a+2b}-\frac{2}{a+b}+\frac{1}{6a}-\frac{1}{6b})\ge 0\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{(2b-a)(a-b)^2}{6ab(a+2b)(a+b)}\ge 0$$

Vì $2b-a\ge\frac{2}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}=0$

Bài 33:Cho a,b,c,d là các số không âm sao cho $a^2-ab+b^2=c^2-cd+d^2$

Chứng minh: $(a+b)(c+d)\ge 2(ab+cd)$

Lời giải:Đặt $x=a^2-ab+b^2=c^2-cd+d^2$.Không mất tính tổng quát ta giả sử $ab\ge cd$.

Ta có $x\ge ab\ge cd$.Bình phương hai vế ta có:

$$(x+3ab)(y+3cd)\ge 4(ab+cd)^2$$

Vì $x\ge ab$ nên:

$$(x+3ab)(y+3cd)-4(ab+cd)^2\ge 4ab(ab+3cd)-4(ab+cd)^2=4cd(ab-cd)\ge 0$$

Dấu bằng xảy ra khi $(a,b,c,d)=(1,1,1,1);(0,1,1,1)$ và các hoán vị.

Bài 34:Cho a,b,c,d là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\ge 1$$

Lời giải:Để ý với x,y dương thì ta có: $\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}\ge\frac{1}{1+xy}$,thật vậy,bđt này tương đương với: $(1+xy)(x-y)^2\ge 0$,đúng.Do đó:

$$VT\ge\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+cd}=\frac{2+ab+cd}{1+ab+cd+abcd}=\frac{2+ab+cd}{2+ab+cd}=1\to(\text{đpcm})$$

Bài 35:Cho a,b,c,d là các số thực không âm sao cho $a^2+b^2+c^2+d^2=1$,chứng minh:

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\ge abcd$$

Lời giải 1:Ta cần chứng minh:

$$\begin{cases}(1-a)(1-b)\ge cd\\(1-c)(1-d)\ge ab\end{cases}$$

Dễ có vì $2cd \le c^2+d^2=1-a^2-b^2$,do đó:

$$2(1-a)(1-b)-2c\ge 2(1-a)(1-b)-1+a^2+b^2=(1-a-b)^2\ge 0$$

Lời giải 2: Đặt $x=\dfrac{1-a}{a},y=\dfrac{1-b}{b},z=\dfrac{1-c}{c},t=\dfrac{1-d}{d}$,thì ta có:

$\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+y)^2}+\dfrac{1}{(1+z)^2}+\dfrac{1}{(1+t)^2}=1$,ta đi chứng minh: $xyzt\ge 1$.

Giả sử $xyzt<1$ thì tồn tai số $k>1$ thỏa mãn $k^4xyzt=1$,do đó theo bài toán trên ta có:

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}>\frac{1}{(1+kx)^2}+\frac{1}{(1+ky)^2}+\frac{1}{(1+kz)^2}+\frac{1}{(1+kt)^2}\ge 1$$

Vô lý,vậy ta có đpcm.

Bài 36:Cho a,b,c là các số thực không âm,thì ta có:

$$3(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2)\ge 1+abc+a^2b^2c^2$$

Lời giải:Ta có:

$$2(1-a+a^2)(1-b+b^2)=1+a^2b^2+(a-b)^2+(1-a)^2(1-b)^2\ge 1+a^2b^2$$

Ta chỉ cần chứng minh:

$$3(1+a^2b^2)(1-c+c^2)\ge 2(1+abc+a^2b^2c^2)\Leftrightarrow (3+a^2b^2)c^2-(3+2ab+3a^2b^2)c+1+3a^2b^2\ge 0$$

Xét $\Delta=-3(1-ab)^4\le 0$,ta có điều phải chứng minh.

Bài 37:Chứng minh rằng nếu a,b,c,x,y,z là các số thực,thì

$$4(a^2+x^2)(b^2+y^2)(c^2+z^2)\ge 3(bcx+cay+abz)^2$$

Lời giải:SD bunhiacop-xki:

$$(a^2+x^2)((cy+bz)^2+b^2c^2)\ge (a(cy+bz)+bcx)^2$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$4(b^2+y^2)(c^2+z^2)\ge 3((cy+bz)^2+b^2c^2)\Leftrightarrow (cy-bz)^2+(bc-2yz)^2\ge 0$$

Hiển nhiên.Trong trường hợp $abc\ne 0$ thì dấu bằng xảy ra khi $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{c}{z}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 38:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\sqrt{(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})}\ge 1+\sqrt{1+\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})}}$$

Lời giải:Ta có:

$$(\sum_{cyc}a)(\sum_{cyc}\frac{1}{a})=\sqrt{(\sum_{cyc}a^2+2\sum_{cyc}ab)(\sum_{cyc}\frac{1}{a^2}+2\sum_{cyc}\frac{1}{ab})}\ge\sqrt{(\sum_{cyc}a^2)(\sum_{cyc}\frac{1}{a^2})}+2\sqrt{(\sum_{cyc}ab)(\sum_{cyc}\frac{1}{ab})}$$

$$=\sqrt{(\sum_{cyc}a^2)(\sum_{cyc}\frac{1}{a^2})}+2\sqrt{(\sum_{cyc}a)(\sum_{cyc}\frac{1}{a})}\Leftrightarrow(\sqrt{(\sum_{cyc}a)(\sum_{cyc}\frac{1}{a})}-1)^2\ge 1+\sqrt{(\sum_{cyc}a^2)(\sum_{cyc}\frac{1}{a^2})}$$

Từ đây ta suy ra được điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)=0$

Bài 39:Cho a,b,clà các số thực dương,chứng minh:

$$5+\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})-2}\ge (a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

Lời giải1:Đặt $x=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}, y=\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$,do đó ta cần chứng minh:

$$5+\sqrt{(x+y-2)^2+(x-y)^2}\ge x+y+3$$

Hiển nhiên vì:

$$5+\sqrt{(x+y-2)^2+(x-y)^2}\ge 5+x+y-2=x+y+3$$

Lời giải 2:Bất đẳng thức tương đương:

$$\sqrt{2(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})-2}\ge (a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})-5$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\sum_{sym}a^4b^2+2a^2b^2c^2)}{a^2b^2c^2}\ge (\frac{\sum_{sym}a^2b-2abc}{abc})^2$$

$$\Leftrightarrow 2(\sum_{sym}a^4b^2+2a^2b^2c^2)\ge (\sum_{sym}a^2b)^2+4a^2b^2c^2-4abc(\sum_{sym}a^2b)+2\prod_{sym}a^2b.b^2c$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym}a^4b^2+2abc(\sum_{sym}a^2b)\ge 2\sum_{sym}a^3b^3+2abc(a^3+b^3+c^3)+6a^2b^2c^2$$

$\Leftrightarrow (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\ge 0$,đúng.Ta có điều phải chứng minh.

Bài 40:Cho a,b,c là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng không.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2}+\frac{1}{a^2-ab+b^2}\ge \frac{3}{ab+bc+ca}$$

Lời giải: Đặt $f(a,b,c)=\frac{ab+bc+ca}{b^2-bc+c^2}+\frac{ab+bc+ca}{c^2-ca+a^2}+\frac{ab+bc+ca}{a^2-ab+b^2}$,giả sử $a\le b\le c$

Ta có:

$$f(a,b,c)-f(0,b,c)=\frac{a(b+c)}{b^2-bc+c^2}+\frac{a(c^2+2bc-ab)}{c^2-ca+a^2}+\frac{a(b^2+2bc-ac)}{a^2-ab+b^2}$$

$$\ge \frac{a(b+c)}{b^2-bc+c^2}+\frac{a(bc-ab)}{c^2-ca+a^2}+\frac{a(bc-ac)}{a^2-ab+b^2}\ge 0$$

Và $f(0,b,c)-3=\frac{bc}{b^2-bc+c^2}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-3=\frac{(b-c)^4}{bc(b^2-bc+c^2)}\ge 0$

Hoàn tất việc chứng minh.

Bài 41:Cho a,b,c là các số thực bất kì thì ta có:

$$2(1+abc)+\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}\ge (1+a)(1+b)(1+c)$$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương:

$$\sqrt{2(p^2+q^2+r^2-2rp-2q+1)}\ge p+q-r-1$$

Ta chỉ cần chứng minh:

$$2(p^2+q^2+r^2-2rp-2q+1)\ge (p+q-r-1)^2 \Leftrightarrow (p-q-r+1)^2\ge 0$$

Hiển nhiên.

Lời giải 2:

$$\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} = \sqrt{[(a+b)^2+(ab-1)^2][(c+1)^2+(1-c)^2]}$$
$$\geq (a+b)(c+1)+(ab-1)(1-c)$$

Do đó $VT \geq (a+b)(c+1)+(ab-1)(1-c)+2(abc+1)=(1+a)(1+b)(1+c)=VP$

Ta có đpcm.

Bài 42: Cho a,b,c là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng không.Chứng minh rằng:

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq 2$$

Lời giải 1:Gỉa sử $a \geq b \geq c$,bất đẳng thức được viết lại dưới dạng:

$$\frac{b(c+a)}{b^2+ca} \geq \frac{(a-b)(a-c)}{a^2+bc}+\frac{(a-c)(b-c)}{c^2+ab}$$

Vì $\begin{cases} \dfrac{(a-b)(a-c)}{a^2+bc} \leq \dfrac{a(a-b)}{a^2+bc} \leq \dfrac{a-b}{a} \\ \dfrac{(a-c)(b-c)}{c^2+ab} \leq \dfrac{a(b-c)}{c^2+ab} \leq \dfrac{b-c}{b} \end{cases}$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{b(c+a)}{b^2+ca} \geq \frac{a-b}{b}+\frac{b-c}{b} \Leftrightarrow (ab-b^2-ac)^2+ab^2c \geq 0$$

Lời giải 2:Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq 2+\frac{8a^2b^2c^2}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^4(b^2+c^2)+3abc\sum_{cyc} a^2(b+c) \geq \sum_{cyc} a^3b^3+2abc\sum_{cyc} a^3+12a^2b^2c^2$$
$$\Leftrightarrow ((ac+bc-ab)^2+c^2(4ab+c^2-2ac-2bc))(a-b)^2+abc(a+b)(a-c)(b-c) \geq 0$$

Hiển nhiên đúng,nếu ta giả sử c = min{a,b,c}

Bài 43:Cho a,b,c là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng không.Chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \geq 2$$

Lời giải 1:Gỉa sử $a \geq b \geq c$,bình phương 2 vế ta có:

$$\sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{a^2+bc}+2\sum_{cyc} \sqrt{\frac{bc(a+b)(a+c)}{(b^2+ca)(c^2+ab)}} \geq 4$$

Sử dụng kết quả của bài trên,nên ta chỉ cần chứng minh:

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{bc(a+b)(a+c)}{(b^2+ca)(c^2+ab)}} \geq 1$$

Bình phương một lần nửa và cuối cùng ta chỉ cần chứng minh:

$$\sum_{cyc} \frac{bc(a+b)(a+c)}{(b^2+ca)(c^2+ab)} \geq 1$$

Mà $\sum_{cyc}\frac{bc(a+b)(a+c)}{(b^2+ca)(c^2+ab)}\geq\sum_{cyc}\frac{bc(a^2+bc)}{(b^2+ca)(c^2+ab)}=1+\frac{4a^2b^2c^2}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}\geq 1$

Hoàn tất việc chứng minh.

Lời giải 2:Ta có:

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a\left(b+c\right)}{a^2+bc}}=\sum_{cyc}\frac{a\left(a+b\right)}{\sqrt{\left(a^2+bc\right)\left(ab+bc\right)}}\geq\sum_{cyc}\frac{2a\left(b+c\right)}{a^2+bc+ab+bc}=\sum_{cyc}\frac{2a\left(b+c\right)}{\left(a+b\right)\left(c+a\right)}$$

Vậy,cuối cùng ta cần chứng minh: $\sum_{cyc}\frac{2a\left(b+c\right)}{\left(a+b\right)\left(c+a\right)}\geq 2$

$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a\left(b+c\right)^2\geq\prod_{cyc}\left(a+b\right)\Leftrightarrow 4abc\geq 0$,hiển nhiên.Vậy ta có đpcm.

Bài 44: Cho a,b,c là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng không.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{a}{a^2+bc}+\frac{b}{b^2+ca}+\frac{c}{c^2+ab}$$

Lời giải:Gỉa sử a = min{a,b,c}.Ta có:

$$VT-VP=\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)(a^2+bc)}$$

Ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{(b-c)(b-a)}{(c+a)(b^2+ca)}+\frac{(c-a)(c-b)}{(a+b)(c^2+ab)}\geq 0\Leftrightarrow(b-c)[(\mathrm{b}^2-a^2)(c^2+ab)+(a^2-c^2)(b^2+ca)]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow a(b-c)^2(b^2+c^2-a^2+ab+bc+ca)\geq 0$$

Đúng vì a = min{a,b,c}.Điều phải chứng minh.

Bài 45:Cho a,b,c là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng không.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq 2(\frac{a}{3a^2+bc}+\frac{b}{3b^2+ca}+\frac{c}{3c^2+ab})$$

Lời giải:Ta có:

$$VT-VP=\sum_{cyc}(\frac{1}{b+c}-\frac{2a}{3a^2+bc})=\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)+a(2a-b-c)}{(b+c)(3a^2+bc)}$$

$$=\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)(3a^2+bc)}+\sum_{cyc}\frac{a(2a-b-c)}{(b+c)(3a^2+bc)}$$

Ta chỉ cần chứng minh: $\begin{cases}\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)(3a^2+bc)}\geq 0\\ \sum_{cyc}\frac{a(2a-b-c)}{(b+c)(3a^2+bc)}\geq 0\end{cases}$

Giả sử a = min{a,b,c},thì với bất đẳng thức thứ nhất-ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{(b-c)(b-a)}{(c+a)(3b^2+ca)}+\frac{(c-a)(c-b)}{(a+b)(3c^2+ab)}\geq 0\Leftrightarrow a(b-c)^2(b^2+c^2-a^2+3ab+bc+3ca)\geq 0$$

Với bất đẳng thức thứ hai:

$$\sum_{cyc}\frac{a(2a-b-c)}{(b+c)(3a^2+bc)}=\sum_{cyc}\frac{a(a-b)}{(b+c)(3a^2+bc)}+\sum_{cyc}\frac{a(a-c)}{(b+c)(3a^2+bc)}=\sum_{cyc}\frac{a(a-b)}{(b+c)(3a^2+bc)}+\sum_{cyc}\frac{b(b-a)}{(c+a)(3b^2+ca)}$$

$$=\sum_{cyc}(a-b)[\frac{a}{(b+c)(3a^2+bc)}-\frac{b}{(c+a)(3b^2+ca)}]=\sum_{cyc}\frac{c(a-b)^2[(a-b)^2+c(a+b)]}{(b+c)(c+a)(3a^2+bc)(3b^2+ca)}\ge 0$$

Hoàn tất việc chứng minh.

Bài 46:Cho a,b,c là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng không.Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2}+\frac{b^2(c+a)}{c^2+a^2}+\frac{c^2(a+b)}{a^2+b^2}\ge a+b+c$$

Lời giải 1:

$$\sum_{cyc}(\frac{a^2(b+c)}{b^2+c^2}-a)=\sum_{cyc}\frac{ab(a+b)(a-b)^2}{(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\ge 0$$

Lời giải 2:theo svac-xơ ta có: $VT\ge\dfrac{(\sum_{cyc}a^2(b+c))^2}{\sum_{cyc}a^2(b+c)(b^2+c^2)}$ .Ta cần chứng minh:

$(\sum_{cyc}a^2(b+c))^2\ge(a+b+c)(\sum_{cyc}a^2(b+c)(b^2+c^2))$,tương đương với:

$r(p^3+9r-4pq+p^2-3q)\ge 0$,đúng-theo schur bậc 1

Bài 47:Cho x_i là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{x_1^3}{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}+\frac{x_2^3}{x_2^2+x_2x_3+x_3^2}...+\frac{x_n^3}{x_n^2+x_nx_1+x_1^2}\ge\frac{x_1+x_2+...+x_n}{3}$$

Lời giải:Để ý $(x_1-x_2)+(x_2-x_3)+...+(x_n-x_1)=0=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^3-x_{i+1}^3}{x_i^2+x_ix_{i+1}+x_{i+1}^2}$,$(x_{n+1}=x_1)$

Do đó: $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^3}{x_i^2+x_ix_{i+1}+x_{i+1}^2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^3+x_{i+1}^3}{x_i^2+x_ix_{i+1}+x_{i+1}^2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i+x_{i+1}).\frac{x_i^2-x_ix_{i+1}+x_{i+1}^2}{x_i^2+x_ix_{i+1}+x_{i+1}^2}$

Sử dụng $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\ge\dfrac{1}{3}$,ta có đpcm.

Bài 48:Cho a,b,c là các số thực dương sao cho $a+b\ge c,b+c\ge a,c+a\ge b$.

Chứng minh: $2\sum_{cyc}a^2(b+c)\ge a^3+b^3+c^3+9abc$

Lời giải:Đặt $a=y+z,b=z+x,c=x+y(x,y,z\ge 0)$ .Bất đẳng thức tương đương:

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge\sum_{cyc}xy(x+y)\text{ ,đúng.}$$

Từ đây ta dễ có điều phải chứng minh.

Bài 49:Gỉa sử $n\ge 2$ là một số tự nhiên cố định và giả sử a_i là các số thực dương có tổng bằng 1.Chứng minh rằng với bất kì các số dương x_i có tổng bằng 1,ta có:

$$2\sum_{i<j}x_ix_j\le\frac{n-2}{n-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ix_i^2}{1-a_i}$$

Lời giải: $VT = 1 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2$,bất đẳng thức tương đương: $\frac{1}{n-1} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{1-a_i}$ .Theo svac-xơ:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{1-a_i} \ge \frac{(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2}{n - \sum_{i=1}^{n} a_i} = \frac{1}{n-1}$$

Bài 50:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}} \ge \sqrt{2}$$

Lời giải:Theo Cauchy ta có $\frac{1}{2} + (b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}) \ge \sqrt{\frac{1}{2}.(b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2})} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}} \ge \frac{\sqrt{2}}{1+\frac{1}{a}+b}$

Cuối cùng ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}} \ge \sqrt{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{a}+b} + \frac{1}{1+\frac{1}{b}+c} + \frac{1}{1+\frac{1}{c}+a}\right) = \sqrt{2}$$

Dấu bằng không xảy ra.

Bài 51:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \ge a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

Lời giải:

Ta có $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(b-c)^2}{c} + \frac{(c-a)^2}{a} + a+b+c$

$$\ge a+b+c+\frac{(a-b)^2}{b} + \frac{(a-b)^2}{c+a} \ge a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}$$

Điều phải chứng minh.

Bài 52:Cho x,y,z,a,b,c là các số thực dương bất kì,chứng minh:

$$(a\sqrt{yz} + b\sqrt{zx} + c\sqrt{xy})^2 \le 3(yza^2 + zxb^2 + xyc^2)$$

Theo bunhiacopxki ta có:

$$(a\sqrt{yz} + b\sqrt{zx} + c\sqrt{xy})^2 \le (a^2+b^2+c^2)(xy+yz+zx)$$

Theo bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$yza^2 + zxb^2 + xyc^2 \ge yzb^2 + zxc^2 + xya^2$$

$$yza^2 + zxb^2 + xyc^2 \ge xyb^2 + zxa^2 + yzc^2$$

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Ta có điều phải chứng minh,đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a =b = c.

Bài 53:Cho $a,b,c \in R^+$, $a+b+c=3$.Chứng minh rằng:

$$a^2b^2c^2 \ge (3-2a)(3-2b)(3-2c)$$

Lời giải:

Từ giả thiết ta có bất đẳng thức tương đương với:

$$27a^2b^2c^2 \ge (a+b+c)^3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b \ge c$ .Thì,nếu $b+c-a \le 0 \Rightarrow VT \ge 0 \ge VP$
Còn nếu $b+c-a \ge 0$ thì ta đặt $a = x+y, b = y+z, c = z+x$ .Bất đẳng thức tương đương với: $27(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \ge 64xyz(x+y+z)^3$,hiển nhiên,vì:

$$27(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2 \ge \frac{64}{3}(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2$$

$$\ge \frac{64}{3}(x+y+z)^2.3xyz(x+y+z) = 64xyz(x+y+z)^3$$

Bài 54:Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1,chứng minh rằng:

$$(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2) \ge abc(3-a)(3-b)(3-c)$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Lời giải:Bất đẳng thức được chuyển về dạng đồng bậc sau:

$$(a+b)(b+c)(c+a)(2a+b+c)(2b+c+a)(2c+a+b) \ge abc(2a+3b+3c)(2b+3c+3a)(2c+3a+3b)$$

Đặt $x = a+b, y = b+c, z = c+a$,bất đẳng thức trở thành:

$$xyz(x+y)(y+z)(z+x) \ge \frac{(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)}{8}(x+y+2z)(y+z+2x)(z+x+2y)$$

Sử dụng:

$$\begin{cases} (x+y)(y+z)(z+x) \ge 8xyz \\ (x+y+2z)(y+z+2x)(z+x+2y) \le \dfrac{64(x+y+z)^3}{27} \\ (x+y+z)^3(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \le 27x^2y^2z^2 \end{cases}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 55:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+2 = abc$,chứng minh:

$$abc(a-1)(b-1)(c-1) \le 8$$

Lời giải:Từ giả thiết ta có thể đặt $a = \frac{y+z}{x}, b = \frac{z+x}{y}, c = \frac{x+y}{z}$,bất đẳng thức trở thành:

$$(x+y)(y+z)(z+x)(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \le 8x^2y^2z^2$$

Đến đây ta có hai lời giải:

Lời giải 1:Sử dụng:

$$\begin{cases} (x+y)(y+z)(z+x) \le \dfrac{8(x+y+z)^3}{27} \\ (x+y+z)^3(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) \le 27x^2y^2z^2 \end{cases}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Lời giải 2:Ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp x,y,z là độ dài ba cạnh của một tam giác.Ta dễ có: $(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y) = \dfrac{x^2y^2z^2}{(x+y+z)R^2}$

Mà $9R^2 \ge x^2+y^2+z^2$,nên ta sẽ chứng minh:

$$8(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \ge 9(x+y)(y+z)(z+x)$$

Theo Holder thì:

$$\frac{8}{3}(1+1+1)(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \geq \frac{8}{3}(x+y+z)^3 = \frac{1}{3}[(x+y)+(y+z)+(z+x)]^3 \geq 9(x+y)(y+z)(z+x)$$

Điều phải chứng minh.

Bài 56:Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=9$ .Chứng minh rằng:

$$(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) \geq 8(a+b+c)^3$$

Lời giải:Ta có:

$$(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) \geq \frac{8}{9}(a^3+b^3+c^3)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)$$

Theo Holder ta có:

$$9(x^3+y^3+z^3) = (1^3+1^3+1^3)(1^3+1^3+1^3)(x^3+y^3+z^3) \geq (x+y+z)^3$$

Do đó:

$$(a^3+b^3)(b^3+c^3)(c^3+a^3) \geq \frac{8}{9^3}(a+b+c)^3(ab+bc+ca)^3 = 8(a+b+c)^3$$

Vì $ab+bc+ca=9$.Điều phải chứng minh.

Bài 57:Chứng minh rằng với mọi số thực x,y,z ta luôn có bđt sau:

$$(x^2+y^2+z^2)^3 \geq (x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$$

Lời giải:Ta có:

$$(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$$

$$=(x^2+y^2+z^2+(2xy+yz+zx))(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

$$\leq \left(\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{3}\right)^3 = (x^2+y^2+z^2)^3 \rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 58:Cho $x,y,z \in R^+, x+y+z=1$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{z+xy}+\sqrt{y+zx}+\sqrt{x+yz} \geq \sqrt{1+9(xy+yz+zx)}$$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương với:

$$1+xy+yz+zx+2\sum\sqrt{(x+yz)(y+zx)} \geq 1+9(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow \sum\sqrt{(x+yz)(y+zx)} \geq 4(xy+yz+zx)(i)$$

Dể ý:

$$x+yz = x(x+y+z)+yz = x(x+y)+xz+yz = x(x+y)+z(x+y) = (x+y)(x+z)$$

Do đó:

$$VT(i) = \sum(x+y)\sqrt{(x+z)(y+z)} \geq \sum(x+y)(z+\sqrt{xy})$$

$$=2(xy+yz+zx)+\sum(x+y)\sqrt{xy} \geq 4(xy+yz+zx)$$

Bài 59:Cho x,y,z >0, $x^3+y^3+z^3=1$,chứng minh:

a) $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2} \geq x+y+z+\frac{x^4+y^4+z^4}{xyz}$

b) $x^2+y^2+z^2 > x^5+y^5+z^5+2(x+y+z)x^2y^2z^2$

Lời giải:

a) Bất đẳng thức $\Leftrightarrow \sum\left(\frac{y^3}{x^2}+\frac{y^3}{z^2}\right) \geq \sum\frac{y^3}{zx} \Rightarrow (\text{đpcm})$

b) Bất đẳng thức $\Leftrightarrow (x^2+y^2+z^2)(x^3+y^3+z^3) > x^5+y^5+z^5+2(x+y+z)x^2y^2z^2$

$$\Leftrightarrow x^2(y^3+z^3)+y^2(z^3+x^3)+z^2(x^3+y^3)>2(x+y+z)x^2y^2z^2 (i)$$

$VT(i)\ge x^2yz(y+z)+y^2zx(z+x)+z^2xy(x+y)$,cuối cùng ta cần chứng minh:

$x^2yz(y+z)+y^2zx(z+x)+z^2xy(x+y)\ge 2(x+y+z)x^2y^2z^2$,điều này tương đương với:

$$\frac{x+y}{xy}+\frac{y+z}{yz}+\frac{z+x}{zx}\ge 2(x+y+z)\Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge x+y+z$$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx\ge xyz(x+y+z)$$

Mà $xy+yz+zx\ge \sqrt{3xyz(x+y+z)}$,do đó,ta cần chứng minh:

$$3xyz(x+y+z)>(xyz(x+y+z))^2\Leftrightarrow xyz(x+y+z)<3$$

Mà ta dễ có $xyz\le \frac{x^3+y^3+z^3}{3}=\frac{1}{3}, x+y+z\le \sqrt[3]{9}$

Suy ra $xyz(x+y+z)\le \frac{1}{3}.\sqrt[3]{9}<1<3\to$ (đpcm)

Bài 60:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $c\le a$ và $3a^2+4b^2+5c^2\le 12$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$

Lời giải:

Áp dụng Cauchy ta có:

$$P=\frac{1}{2}(2.\frac{1}{a}+4.\frac{1}{b}+6.\frac{1}{c})\ge \frac{6}{\sqrt[12]{a^2.b^2.b^2.c^2.c^2.c^2}}\ge \frac{6}{\sqrt[12]{(\frac{a^2+2b^2+3c^2}{6})^2}}$$

$$=\frac{6}{\sqrt[12]{(\frac{2a^2+4b^2+6c^2}{12})^2}}\ge \frac{6}{\sqrt[12]{(\frac{3a^2+4b^2+5c^2}{12})^2}}\ge 6$$

Bài 61:Cho $a,b,c\in R^+$,chứng minh:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge \sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}$$

Lời giải 1:bất đẳng thức tương đương với:

$$2\sum(\frac{a^2}{b}-2a+b)\ge \sum(2\sqrt{a^2-ab+b^2}-(a+b))\Leftrightarrow 2\sum\frac{(a-b)^2}{b}\ge 3\sum\frac{(a-b)^2}{2\sqrt{a^2-ab+b^2}+a+b}$$

$$\Leftrightarrow S_c(a-b)^2+S_b(c-a)^2+S_a(b-c)^2\ge 0$$

Điều này hiển nhiên đúng vì:

$$S_c=\frac{2}{b}-\frac{3}{2\sqrt{a^2-ab+b^2}+a+b}\ge \frac{2}{b}-\frac{3}{\sqrt{3}b+b}=\frac{1}{b}(2-\frac{3}{\sqrt{3}+1})>0$$

Lời giải 2:Ta dễ có $VT=\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$

Mà $VT=\frac{a^2-ab+b^2}{b}+\frac{b^2-bc+c^2}{c}+\frac{c^2-ca+a^2}{a}$

Do đó ta có: $2VT \ge \sum(\frac{a^2-ab+b^2}{b}+b) \ge 2VP \Leftrightarrow VT \ge VP$

Điều phải chứng minh.

Lời giải 3:

Trước tiên ta đi chứng minh: $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \ge \frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2}$.

Bất đẳng thức tương đương : $M(a-b)^2+N(a-c)(b-c) \ge 0$

$$\text{Với:} \begin{cases} M = \frac{a+b}{ab} - \frac{2(a+b)}{a^2+b^2+c^2} \\ N = \frac{b+c}{ac} - \frac{a+b+2c}{a^2+b^2+c^2} \end{cases}$$

Giả sử c = min{a,b,c} thì dễ có $M \ge 0$

Và $N \ge 0 \Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)(b+c) \ge ac(a+b+2c)$.Mà

$$(a^2+b^2+c^2)(b+c) \ge 2c(a^2+b^2+c^2) = c(a^2+(\frac{a^2}{8}+2b^2)+(\frac{a^2}{2}+2c^2)+\frac{3}{8}a^2)$$

$$\ge c(a^2+ab+2ac) = ac(a+b+2c) \Rightarrow N \ge 0$$

Cuối cùng ta cần chứng minh:

$$\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2} \ge \sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}$$

Mà ta dễ có: $\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a^2+b^2+c^2} \ge 3\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}}$

Và $\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2} \le \sqrt{3[2(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)]}$

Vậy,trước khi kết thúc ta cần chứng minh:

$$\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c} \ge 2(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc \ge \sum ab(a+b)$$

Đúng,theo schur bậc 3.

Bài 62:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a} \le \frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}$$

Lời giải 1:Bất đẳng thức tương đương với:

$3x^2y+xy^2+6xy-5x^2-y^2-24x+3y-27 \ge 0$ (với $x=a+b+c, y=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}, x,y \ge 3$)

$\Leftrightarrow (15x^2+27x)(y-3)+3y^2(x-3)+(12x+3y+27)(xy-9)+3x(y^2-9) \ge 0$

Hiển nhiên đúng vì x,y $\ge$ 3.

Hoặc đặt $f(x)=3x^2y+xy^2+6xy-5x^2-y^2-24x+3y-27, x \ge 3, y \ge 3$

Ta có: $f'(x)=6xy+y^2+6y-10x-24 > 8x-24 \ge 0$

Suy ra $f(x) \ge f(3) = 2y^2+42y-144 \ge 2.3^2+42.3-144 = 0$

Suy ra đpcm

Lời giải 2:Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử: $0 < a \le b \le c \Rightarrow \begin{cases} 0 < 1+a+b \le 1+c+a \le 1+b+c \\ 0 < 2+a \le 2+b \le 2+c \end{cases}$,do đó:

$$VT - VP = \sum \frac{b-1}{(2+a)(1+a+b)} \ge \frac{b-1}{(2+c)(1+b+c)} + \frac{c-1}{(2+c)(1+b+c)} + \frac{a-1}{(2+c)(1+b+c)}$$

$$= \frac{a+b+c-3}{(2+c)(1+b+c)} \ge 0$$,Đúng,theo Cauchy.

Vậy ta có điều phải chứng minh,đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c =1.

Bài 63:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a \le b \le c$ .Chứng minh:

$$\frac{bc}{\sqrt{(a^2+ab+b^2)(a^2+ac+c^2)}} + \frac{ca}{\sqrt{(b^2+bc+c^2)(b^2+ba+a^2)}} + \frac{ab}{\sqrt{(c^2+ca+a^2)(c^2+cb+b^2)}} \le \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Lời giải:Để ý:

$$\frac{bc}{\sqrt{(a^2+ab+b^2)(a^2+ac+c^2)}} = \frac{bc}{\sqrt{((a-b)^2+3ab)((a-c)^2+3ac)}} \le \frac{bc}{3a\sqrt{bc}} = \frac{\sqrt{bc}}{3a}$$

Do đó:

$$\sum_{cyc} \frac{bc}{\sqrt{(a^2+ab+b^2)(a^2+ac+c^2)}} \le \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{bc}}{a}+\frac{\sqrt{ca}}{b}+\frac{\sqrt{ab}}{c}\right) \le \frac{1}{3}\sqrt{\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)}$$

Mà $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a} \Leftrightarrow (b-c)(a-c)(b-a) \ge 0$,đúng theo giả thiết.

Do đó: $\sum_{cyc} \frac{bc}{\sqrt{(a^2+ab+b^2)(a^2+ac+c^2)}} \le \frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)$

Bài 64:Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=1$.Chứng minh rằng:

$$\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{z+x}{2}\right)^2} \ge \sqrt{6}$$

Lời giải:

Bình phương hai vế ta có:

$$3 - \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx) + 2\sum_{cyc}\sqrt{1-\left(\frac{x+y}{2}\right)^2}.\sqrt{1-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2} \ge 6$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\sqrt{4-(x+y)^2}.\sqrt{4-(y+z)^2} - (xy+yz+zx) \ge 7$$

Để ý: $\begin{cases} 4-(x+y)^2 = 2+2(x^2+y^2+z^2)-(x^2+2xy+y^2) = (x-y)^2+2(1+z^2) \\ 4-(y+z)^2 = (y-z)^2+2(1+x^2) \\ 4-(z+x) = (z-x)^2+2(1+y^2) \end{cases}$

Ta cần chứng minh:

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \sqrt{(x-y)^2+2(1+z^2)}.\sqrt{(y-z)^2+2(1+x^2)}-(xy+yz+zx) \ge 7\ ,(*)$$

Sử dụng bunhiacop-xki ta có:

$$VT(*) \ge \sum_{cyc}(x-y)(z-y)+2\sqrt{(1+z^2)(1+x^2)} \ge \sum_{cyc}(zx-xy-yz+y^2)+2(1+zx)$$

$$=\sum_{cyc}(y^2+3zx-xy-yz+2) = (x^2+y^2+z^2)+3(xy+yz+zx)-2(xy+yz+zx)+6 = xy+yz+zx+7$$

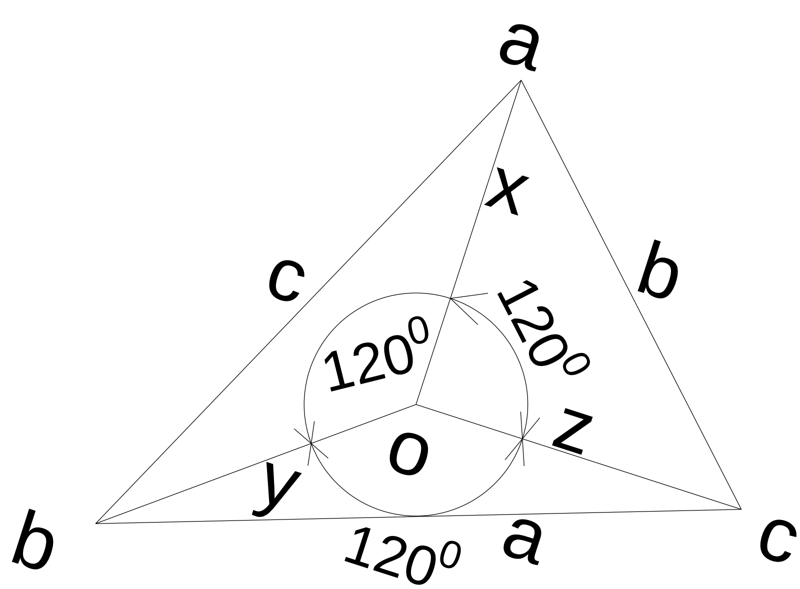
Do đó: $\sum_{cyc}\sqrt{4-(x+y)^2}.\sqrt{4-(y+z)^2}-(xy+yz+zx) \ge xy+yz+zx+7-(xy+yz+zx) = 7$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 65:Cho các số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=1$,chứng minh rằng:

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}\sqrt{z^2+zx+x^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}\sqrt{x^2+xy+y^2} \ge 1$$

Lời giải 1:Các kí hiệu xem hình vẻ.



Từ hình vẽ trên ta có: $a=\sqrt{y^2+yz+z^2}\,, b=\sqrt{z^2+zx+x^2}\,, c=\sqrt{x^2+xy+y^2}$

Ta được: $\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 2(x^2+y^2+z^2)+(xy+yz+zx) \\ S = S_{OAB}+S_{OBC}+S_{OCA} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx) \end{cases}$

Chúng ta cần chứng minh $ab+bc+ca \ge 1\,(1)$

Thật vậy $(1) \Leftrightarrow 2(ab+bc+ca) \ge 2$

Mà ta lại dễ có $2(ab+bc+ca) \ge a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S$,(với S là diện tích của tam giác ABC.),bất đẳng thức này khá quên thuộc rồi.

Mà $a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S = 2(x^2+y^2+z^2)+(xy+yz+zx)+4\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx)$

$$= 2(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx) = 2(x+y+z)^2 = 2$$

Điều phải chứng minh.Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Lời giải 2:Ta viết lại bất đẳng thức lại dưới dạng:

$$\sum\sqrt{((x+\frac{y}{2})^2+\frac{3y^2}{4})((x+\frac{z}{2})^2+\frac{3z^2}{4})} \ge \sum((x+\frac{y}{2})(x+\frac{z}{2})+\frac{3yz}{4}) = (x+y+z)^2 = 1$$

Điều phải chứng minh.

Bài 66:Cho a,b,c là các số thực lớn hơn 1 thỏa mãn $a+b+c \le 6$,tìm giá trị lớn nhất của

$$A = \frac{a^2+b^2+2a^2b}{a^2+b^2+2b} + \frac{b^2+c^2+2b^2c}{b^2+c^2+2c} + \frac{c^2+a^2+2c^2a}{c^2+a^2+2a}$$

Lời giải:

Để ý: $\frac{a^2+b^2+2a^2b}{a^2+b^2+2b} \le a \Leftrightarrow (a-1)(a-b)^2 \ge 0$

Làm tương tự ta có Max A = 6 khi và chỉ khi a = b = c = 2.

Bài 67:Cho và b là các số thực dương,chứng minh:

$$\text{Min}\{\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2};\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\} \ge \max\{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a};\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\}$$

Lời giải: Thực ra bài này,chúng ta chỉ cần đi chứng minh:

$$\begin{cases} \frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2} \ge \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \Leftrightarrow a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \ge abc(a^2c+b^2a+c^2b) \\ \frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2} \ge \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \Leftrightarrow a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \ge abc(b^2c+c^2a+a^2b) \\ \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab} \ge \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 \ge a^2c+b^2a+c^2b \\ \frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2} \ge \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c} \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 \ge b^2c+c^2a+a^2b \end{cases}$$

Có thể sử dụng Cauchy một cách rất dễ dàng,chẳng hạn như đi chứng minh

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \ge abc(a^2c+b^2a+c^2b)$$

Theo Cauchy ta có: $a^3b^3+a^3b^3+b^3c^3 \ge 3a^2cb^3 = 3abc.ab^2$ làm tương tự ta dễ có điều phải chứng minh.

Bài 68:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1.Chứng minh:

$$\frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2} \ge 3$$

Lời giải 1:(Võ Quốc Bá Cẩn)

Không mất tính tổng quát ta giả sử $(a-1)(b-1) \ge 0 \Rightarrow a+b \le 1+ab$

Ta dễ có $\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}\ge\frac{1}{1+ab}=\frac{c}{c+1}$ và $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\ge\frac{4}{a+b+2}\ge\frac{4}{ab+3}=\frac{4c}{1+3c}$

Do đó $\frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}=2[\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}]+\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\ge\frac{2c}{1+c}+\frac{4c}{1+3c}$

Vậy,cuối cùng ta chỉ cần chứng minh:

$\frac{2c}{1+c}+\frac{4c}{1+3c}+\frac{c+3}{(c+1)^2}\ge 3\Leftrightarrow (c-1)^2\ge 0$,hiển nhiên.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1, a\to+\infty, b\to+\infty, c\to 0$

Lời giải 3:Đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z},xyz=1$,bđt cần chứng minh tương đương với:

$$\frac{3x^2+x}{(x+1)^2}+\frac{3y^2+y}{(y+1)^2}+\frac{3z^2+z}{(z+1)^2}\ge 3\Leftrightarrow\frac{2x^2-x-1}{(x+1)^2}+\frac{2y^2-y-1}{(y+1)^2}+\frac{2z^2-z-1}{(z+1)^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x^2}{(x+1)^2}+\frac{2y^2}{(y+1)^2}+\frac{2z^2}{(z+1)^2}\ge\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}$$

Vậy,ta chỉ cần chứng minh:

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{(x+1)^2}+\frac{y^2}{(y+1)^2}\ge\frac{1}{z+1}=\frac{xy}{xy+1}\Leftrightarrow x^3y^3+x^2+y^2-2x^2y^2-xy\ge 0$$

Đúng,vì $x^3y^3+x^2+y^2-2x^2y^2-xy\ge x^3y^3+2xy-2x^2y^2-xy=xy(xy-1)^2\ge 0$

Làm tương tự thêm 2 bđt nửa,ta có đpcm.

Bài 69:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{9}{2}$$

Lời giải:Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng:

$$\frac{3}{4}\sum_{cyv}\frac{a+b}{c}+\frac{a}{4}\sum_{cyv}(\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{9}{2}$$

Hiển nhiên,vì theo Cauchy và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$

Bài 70:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a^5}{bc}+\frac{b^5}{ca}+\frac{c^5}{ab}+\frac{3}{2a^2b^2c^2}\ge 2(a^3+b^3+c^3)+\frac{9}{2}-6abc$$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương:

$$(\frac{a^5}{bc}+abc)+(\frac{b^5}{ca}+abc)+(\frac{c^5}{ab}+abc)+3(\frac{1}{2a^2b^2c^2}+\frac{abc}{2}+\frac{abc}{2}))\ge 2(a^3+b^3+c^3)+\frac{9}{2}$$

Sử dụng Cauchy ta có điều phải chứng minh.

Bài 71:Cho a,b,c > 0,có tổng bằng 1,chứng minh:

$$\frac{9}{10}\le\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}<1$$

Bài 72:Cho a,b,c là các số thực dương và $x,y,z\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$,$a+b+c=x+y+z=1$,chứng minh: $xa+yb+zx\ge 8abc$

Lời giải:Gỉa sử $a \le b \le c$, $4ab \le (a+b)^2 = (1-c)^2 \Rightarrow 8abc \le 2c(1-c)^2 \le \frac{1-c}{2}$

Vì $x, y, z \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \Rightarrow zc = c(\frac{1}{2} - x) + c(\frac{1}{2} - y) \ge a(\frac{1}{2} - x) + b(\frac{1}{2} - y) = \frac{a+b}{2} - (xa + yb)$

$$\Rightarrow xa + yb + zc \ge \frac{1-c}{2} \ge 8abc$$

Bài 73:Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 1,chứng minh:

$$\frac{1-a}{1+a} + \frac{1-b}{1+b} + \frac{1-c}{1+c} \ge \frac{3}{2}$$

Lời giải:Ta có:

$$VT = \frac{b+c}{2a+b+c} + \frac{c+a}{2b+c+a} + \frac{a+b}{2c+a+b} = \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \ge \frac{3}{2}$$

Bài 74:Cho a,b,c là các số thực dương phân biệt,chứng minh:

$$\frac{\sum_{cyc} ab(a+b)}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} \ge \frac{16abc}{(a+b+c)^2}$$

Lời giải:Bất đẳng thức được đưa về dạng:

$$p^3q + 48qr \ge 19rp^2$$

Mà theo Cauchy ta có:

$$p^3q + 48qr = \frac{p^3q}{2} + \frac{p^3q}{2} + 48qr \ge 3\sqrt[3]{12}p^2q\sqrt[3]{r} \ge 9\sqrt[3]{12}rp^2 = 20,605rp^2 > 19rp^2$$

Điều phải chứng minh,dấu bằng không xảy ra.

Bài 75:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$a^3b + b^3c + c^3a \ge a + b + c$$

Lời giải:Ta dễ có bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \ge a + b + c \text{ ,hiển nhiên.}$$

Bài 76:Cho $x, y, z, t \in R, (x+y)(z+t) + xy + 88 = 0$,chứng minh:

$$x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 24t^2 \ge 352$$

Lời giải:Hiển nhiên vì:

$$x^2 + 9y^2 + 6z^2 + 24t^2 + 4(x+y)(z+t) + 4xy = (x + 2y + 2z + 2t)^2 + (2y - z)^2 + (z - 4t)^2 + (y - 2t)^2 \ge 0$$

Bài 77:Cho $0 < a, b, c < 1$,chứng minh:

$$\frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-c} + \frac{c}{1-a} \ge \frac{3\sqrt[3]{abc}}{1 - \sqrt[3]{abc}}$$

Lời giải:SD Cauchy:

$$\frac{a}{1-b} + \frac{b}{1-c} + \frac{c}{1-a} \ge \frac{3\sqrt[3]{abc}}{\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)}} \ge \frac{9\sqrt[3]{abc}}{3 - (a+b+c)}$$

Cần chứng minh: $\frac{9\sqrt[3]{abc}}{3 - (a+b+c)} \ge \frac{3\sqrt[3]{abc}}{1 - \sqrt[3]{abc}} \Leftrightarrow a + b + c \ge 3\sqrt[3]{abc}$

Bài 78:Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn: $xyz=-1$
Chứng minh rằng:

$$x^4+y^4+z^4+3\left(x+y+z\right)\geq \frac{x^2}{y}+\frac{x^2}{z}+\frac{y^2}{x}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x}+\frac{z^2}{y}$$

Lời giải:(Em trai:Nguyễn Tấn Sang-10A1 chuyên Phan Bội Châu)
BĐT cần chứng minh tương đương với:

$$x^4+y^4+z^4+3\left(x+y+z\right)+x^3\left(y+z\right)+y^3\left(z+x\right)+z^3\left(x+y\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^3+y^3+z^3+3\right)\left(x+y+z\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y+z\right)^2\left(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\right)\geq 0$$

Mà BĐT trên luôn đúng nên ta suy ra điều phải chứng minh.
Bài 79:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$a(b^2-\sqrt{b})+b(c^2-\sqrt{c})+c(a^2-\sqrt{a})\geq 0$$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương:

$$ab^2+bc^2+ca^2\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a}$$

Mà $(ab^2+bc^2+ca^2)^2\geq 3abc(a^2b+b^2c+c^2a)=3(a^2b+b^2c+c^2a)\geq (a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a})^2$
Đúng,theo bunhiacop-xki,ta có điều phải chứng minh.

Hoặc có thể đưa bài toán về dạng $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{z^2}+\frac{z^2}{x^2}\geq \frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$

Bài 80:Cho x,y,z là các số thực,chứng minh:

$$\frac{x^2-y^2}{2x^2+1}+\frac{y^2-z^2}{2y^2+1}+\frac{z^2-x^2}{2z^2+1}\leq 0$$

Lời giải:Bài toán có thể được chuyển về dạng:
Nếu a,b,c là các số thực không âm thì ta có:

$$\frac{b-a}{2a+1}+\frac{c-b}{2b+1}+\frac{a-c}{2c+1}\geq 0$$

Thật vậy,không mất tính tổng quát ta có thểgiả sử c là số nằm giữa a và b.

Ta có $\frac{b-a}{2a+1}+\frac{c-b}{2b+1}+\frac{a-c}{2c+1}=(c-b)(\frac{1}{2b+1}-\frac{1}{2a+1})+(a-c)(\frac{1}{2c+1}-\frac{1}{2a+1})$

$$=\frac{2(a-c)^2}{(2c+1)(2a+1)}+\frac{2}{(2b+1)(2a+1)}.(a-b)(c-b)\geq 0$$

Đúng,ta hoàn tất việc chứng minh.
Bài 81:Cho x,y,z là các số thực dương và $k\geq 1$,chứng minh:

$$\frac{x}{x+k(y+z)}+\frac{y}{y+k(z+x)}+\frac{z}{z+k(x+y)}\geq \frac{3}{2k+1}$$

Lời giải:SD svac-xơ ta có:

$$\frac{x}{x+k(y+z)}+\frac{y}{y+k(z+x)}+\frac{z}{z+k(x+y)}\geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2k(xy+yz+zx)}$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2k(xy+yz+zx)} \geq \frac{3}{2k+1} \Leftrightarrow 2(k-1)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx) \geq 0$$

Đúng,ta có điều phải chứng minh.

Bài 82:Cho x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 là các số thực dương,hãy xác định c bé nhất để:

$$c(x_1^{2005}+x_2^{2005}+...+x_5^{2005}) \geq x_1x_2x_3x_4x_5(x_1^{125}+x_2^{125}+...+x_5^{125})^{16}$$

Lời giải:Cho $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 \Rightarrow c \geq 5^{15}$,vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$5^{15}(x_1^{2005}+x_2^{2005}+...+x_5^{2005}) \geq x_1x_2x_3x_4x_5(x_1^{125}+x_2^{125}+...+x_5^{125})^{16}$$

Mà ta dễ có theo bunhiacop-xki thì:

$$(x_1^{125}+x_2^{125}+...+x_5^{125})^{16} \leq 5^{15}(x_1^{2000}+x_2^{2000}+...+x_5^{2000})$$

Vậy ta cần chứng minh:

$$x_1^{2005}+x_2^{2005}+...+x_5^{2005} \geq x_1x_2x_3x_4x_5(x_1^{2000}+x_2^{2000}+...+x_5^{2000})$$

Áp dụng Cauchy ta có:

$$2001x_1^{2005}+x_2^{2005}+x_3^{2005}+x_4^{2005}+x_5^{2005} \geq 2005x_1^{2001}x_2x_3x_4x_5$$

Làm tương tự ta có điều phải chứng minh.

Bài 83:Cho a,b,c là 3 số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{3b^2+8c^2+14bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{3c^2+8a^2+14ca}} \geq \frac{a+b+c}{5}$$

Lời giải 1:

Ta có: $\sqrt{3a^2+8b^2+14ab} = \sqrt{(a+4b)(3a+2b)} \leq \frac{4a+6b}{2} = 2a+3b$,làm tương tự ta có:

$$VT \geq \frac{a^2}{2a+3b}+\frac{b^2}{2b+3c}+\frac{c^2}{2c+3a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{5(a+b+c)} = \frac{a+b+c}{5}$$,đpcm

Lời giải 2: Ta đi chứng minh bổ đề:

$$8(a^4+b^4+c^4)+13(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq 21(a^3b+b^3c+c^3a)$$

Trước hết ta đi chứng minh: $8(a^4+b^4+c^4)+13(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq 7(a^2+b^2+c^2)^2 \Leftrightarrow \sum(a^2-b^2)^2$

Suy cuối cùng ta chỉ cần chứng minh: $(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a)$

Bất đẳng thức này đả quá quen thuộc rồi.Trở về bài toán

Áp dụng holder ta có:

$$\left(\sum \frac{a^2}{\sqrt{3a^2+8b^2+14ab}}\right)^2\left[\sum a^2(3a^2+8b^2+14ab)\right] \geq (a^2+b^2+c^2)^3$$

Ta cần chứng minh: $\frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{\sum a^2(3a^2+8b^2+14ab)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{25}$,mà

$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$,do đó cuối cùng ta cần chứng minh:

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum a^2(3a^2+8b^2+14ab)} \geq \frac{3}{25} \Leftrightarrow 8(a^4+b^4+c^4)+13(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \geq 21(a^3b+b^3c+c^3a)$$

Đúng,theo bổ đề trên.

Bài 84:Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$,tìm max của:

$$p = a\sqrt{b} + b\sqrt{c} + c\sqrt{a} - \sqrt{abc}$$

Lời giải:Đặt $x = \sqrt{a}, y = \sqrt{b}, z = \sqrt{c} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 3$.Khi đó: $p = x^2y + y^2z + z^2x - xyz$

Không mất tính tổng quát ta giả sử y là số nằm giữa x và z,khi đó ta có:

$$z(y-x)(y-z) \le 0 \Rightarrow -xyz \le yz^2 - zy^2 - xz^2$$

Suy ra:

$$p \le yz^2 + x^2y = y(z^2 + x^2) = y(3-y^2) = \frac{\sqrt{2y^2(3-y^2)^2}}{\sqrt{2}} \le \frac{\sqrt{\left(\frac{2y^2 + 3 - y^2 + 3 - y^2}{3}\right)^3}}{\sqrt{2}} = 2$$

Bài 85:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2 + (ab+bc+ca)^3 \ge 4abc(a+b+c)^3$$

Lời giải:Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$,bất đẳng thức trở thành:

$$(x+y+z)^2(xy+yz+zx)^2 + xyz(x+y+z)^3 \ge 4xyz(x+y+z)^3$$

Ta dễ có $xyz(x+y+z)^3 \ge 3xyz(x+y+z)(xy+yz+zx)$

Do đó ta cần chứng minh:

$$(x+y+z)^2(xy+yz+zx) + 3xyz(x+y+z) \ge 4(xy+yz+zx)^2$$

$$\Leftrightarrow xy(x-y)^2 + yz(y-z)^2 + zx(z-x)^2 \ge 0$$

Điều phải chứng minh.

Bài 86:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$,chứng minh:

$$\frac{1}{(2a+b+c)^2} + \frac{1}{(2b+c+a)^2} + \frac{1}{(2c+a+b)^2} \le \frac{3}{16}$$

Lời giải 1:Ta dễ có:$VT \le \frac{1}{4}\sum_{cyc}\frac{1}{(a+b)(a+c)} = \frac{a+b+c}{2(a+b)(b+c)(c+a)}$

Sử dụng $\begin{cases} (a+b)(b+c)(c+a) \ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca) \\ (ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c) \\ ab+bc+ca = abc(a+b+c) \end{cases}$

Ta có:

$$\frac{a+b+c}{2(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}.\frac{ab+bc+ca}{abc(a+b+c)}.\frac{abc(a+b+c)}{(ab+bc+ca)^2} \le \frac{9}{2.8}.1.\frac{1}{3} = \frac{3}{16}$$

Điều phải chứng minh.

Bài 87: Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca \le 3abc$,chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}} + 3 \le \sqrt{2}(\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a})$$

Lời giải:Theo bunhiacoxki ta có:

$$\sqrt{2}\sqrt{a+b}=2\sqrt{\frac{ab}{a+b}}\sqrt{\frac{1}{2}(2+\frac{a^2+b^2}{ab})}\ge 2\sqrt{\frac{ab}{a+b}}.\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{ab}})=\sqrt{\frac{2ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a+b}}$$

Tương tự ta có: $\begin{cases}\sqrt{2}\sqrt{b+c}\ge\sqrt{\frac{2bc}{b+c}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{b+c}}\\ \sqrt{2}\sqrt{c+a}\ge\sqrt{\frac{2ca}{c+a}}+\sqrt{\frac{c^2+a^2}{c+a}}\end{cases}$

Mà theo cauchy:

$$\sqrt{\frac{2ab}{a+b}}+\sqrt{\frac{2bc}{b+c}}+\sqrt{\frac{2ca}{c+a}}\ge 3\sqrt{\frac{3}{\frac{a+b}{2ab}+\frac{b+c}{2bc}+\frac{c+a}{2ca}}}=3\sqrt{\frac{3abc}{ab+bc+ca}}\ge 3$$

Điều phải chứng minh.

Bài 88:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{b^2+c^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{c^2+a^2}{(b+c)(b+a)}+\frac{a^2+b^2}{(c+a)(c+b)}\ge\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{2(ab+bc+ca)}$$

Lời giải:Chuẩn hóa $ab+bc+ca=1$,ta cần chứng minh:

$$\frac{2p^3-5p+3r}{p-r}\ge\frac{3(p^2-2)}{2}\Leftrightarrow p^3-4p+3p^2r\ge 0\Leftrightarrow p^2+3pr-4\ge 0$$

Ta xét,nếu $p\ge 2\Rightarrow$ Bất đẳng thức hiển nhiên

Nếu $\sqrt{3}\le p\le 2$ thì theo schur bậc 1 ta có: $r\ge\frac{p(4-p^2)}{9}$,do đó:

$$p^2+\frac{p^2(4-p^2)}{3}-4\ge 0\Leftrightarrow(p^2-3)(p^2-4)\le 0$$,hiển nhiên.

Điều phải chứng minh,dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

Bài 89:Cho x,y,z là các số thực không âm,chứng minh :

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\ge\sqrt{4-\frac{14xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}}$$

Lời giải:Đặt $a=\frac{x}{y+z},b=\frac{y}{z+x},c=\frac{z}{x+y};(a,b,c\ge 0)$,do đó ta dễ có:

$ab+bc+ca+2abc=1$.Các bạn tự kiểm tra.

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)+14abc-4\ge 0$$

$$\Leftrightarrow p^2+14r-4\ge 0;(q=1-2r)$$

Nếu $p\ge 2$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng

Nếu $\frac{3}{2}\le p\le 2$ thì theo schur bậc 1 $r\ge\frac{p(4q-p^2)}{9}=\frac{p(4(1-2r)-p^2)}{9}\Rightarrow r\ge\frac{4p-p^3}{9+8p}$

Vậy ta cần chứng minh:

$$p^2+\frac{14(4p-p^3)}{9+8p}-4\ge 0\Leftrightarrow 3(2p-3)(4-p^2)\ge 0$$,hiển nhiên.

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 90:Cho x,y,z là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{xy}{\sqrt{(x^2+z^2)(y^2+z^2)}}+\frac{yz}{\sqrt{(y^2+x^2)(z^2+x^2)}}+\frac{zx}{\sqrt{(z^2+y^2)(x^2+y^2)}}>1$$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương:

$$\sum_{cyc} xy\sqrt{x^2+y^2} \ge \sqrt{\prod_{cyc}(x^2+y^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} x^2y^2(x^2+y^2)+2\sum_{cyc} xy^2z\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)} \ge \sum_{cyc} x^2y^2(x^2+y^2)+2x^2y^2z^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} xy^2z\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)} \ge x^2y^2z^2$$

Hiển nhiên,vì: $\sum_{cyc} xy^2z\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)} \ge \sum_{cyc} xy^2z\sqrt{x^2z^2} = 3x^2y^2z^2 \ge x^2y^2z^2$

Điều phải chứng minh.

Bài 91:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+(a+b+c)^2 \ge 4\sqrt{3abc(a+b+c)}$$

Lời giải:Đặt $x=\sqrt{ab}, y=\sqrt{bc}, z=\sqrt{ca} \Rightarrow a=\frac{zx}{y}, b=\frac{xy}{z}, c=\frac{yz}{x}$

Ta lại đặt $a=xy, b=yz, c=zx$,vậy ta đi chứng minh:

$$a+b+c+\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{abc} \ge 4\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Để ý: $a+b+c-\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} = -\frac{\sum(a-b)^2}{a+b+c+\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}$

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{abc}-3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2)}}{abc}\left(\frac{(a^2+b^2+c^2)^3-27a^2b^2c^2}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^3}+3\sqrt{3}abc}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{abc(\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^3}+3\sqrt{3}abc)}\left(\sum a^6+3\sum a^2b^2(a^2+b^2)-21a^2b^2c^2\right)$$

Mà $\begin{cases} \sum a^6-3a^2b^2c^2 = \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)(\sum(a+b)^2(a-b)^2 \\ 3\sum a^2b^2(a^2+b^2)-18a^2b^2c^2 = 3\sum c^2(a+b)^2(a-b)^2 \end{cases}$

Thay vào và cuối cùng ta được bất đẳng thức:

$$\sum_{cyc}\left(\frac{(a^2+b^2+7c^2)(a+b)^2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2abc(\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^3}+3\sqrt{3}abc)}-\frac{1}{a+b+c+\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}\right)(a-b)^2 \ge 0$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{(a^2+b^2+7c^2)(a+b)^2\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2abc(\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^3}+3\sqrt{3}abc)}\ge\frac{1}{a+b+c+\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c+\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)})(a^2+b^2+7c^2)(a+b)^2\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ge 2abc(\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^3}+3\sqrt{3}abc)$$

Mà $(a+b)^2\sqrt{a^2+b^2+c^2}>4abc$,do đó ta cần chứng minh:

$$2(a+b+c+\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)})(a^2+b^2+7c^2)\ge\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^3}+3\sqrt{3}abc$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)(a^2+b^2+7c^2)+2(a^2+b^2+7c^2)\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}\ge\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^3}+3\sqrt{3}abc$$

Điều này hiển nhiên.

Làm tương tự ta có điều phải chứng minh.Dấu bằng xảy ra khi a=b=c.

Bài 92:Cho $x,y,z\ge 0$,chứng minh:

$$x^4+y^4+z^4+\frac{(x+y+z)^4}{27}\ge 2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$

Lời giải:Bất đẳng thức được chuyển về dạng:

$$S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\ge 0$$

Với $\begin{cases} S_x=7(y+z)^2+2yz-3x^2\\ S_y=7(z+x)^2+2zx-3y^2\\ S_z=7(x+y)^2+2xy-3z^2\end{cases}$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x\ge y\ge z$,khi đó ta dễ có:

$S_y,S_z\ge 0,S_z+S_x\ge 0,S_y+S_x\ge 0$,suy ra điều phải chứng minh.

Bài 93:Cho $a,b,c>0,a^2+b^2+c^2=1$,tìm min:

$$p=10(a^4+b^4+c^4)+(ab+bc+ca)^2$$

Lời giải:Ta dự đoán minp$=\frac{13}{3}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.Doo đó ta sẽ chứng minh:

$$10(a^4+b^4+c^4)+(ab+bc+ca)^2\ge\frac{13}{3}(a^2+b^2+c^2)^2$$

$$\Leftrightarrow 17(a^4+b^4+c^4)+6abc(a+b+c)-23(a^2b^2+c^2a^2+a^2b^2)$$

$$\Leftrightarrow S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$$

Với $\begin{cases} S_a=17(b+c)^2-6a^2\\ S_b=17(c+a)^2-6b^2\\ S_c=17(a+b)^2-6c^2\end{cases}$

Giả sử $a\ge b\ge c\Rightarrow\begin{cases} S_c,S_b\ge 0\\ S_c+S_a\ge 0\\ S_a+S_b\ge 0\end{cases}\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Bài 94:Cho $a,b,c>0$,chứng minh:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}+\frac{a+b+c}{2}\ge 2(\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a})$$

Lời giải:do hai vế đồng bậc nên ta chuẩn hóa $ab+bc+ca=1$,do đó:

Để ý: $\begin{cases} \dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{c+a}+\dfrac{c^2}{a+b}=\dfrac{p^4-3p^2+4pr}{p-r} \\ \dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{c^2}{c+a}=\dfrac{p^2-2pr-1}{p-r} \end{cases}$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{p^4-3p^2+4pr}{p-r}+\frac{p}{2}\geq\frac{p^2-2pr-1}{p-r}\Leftrightarrow 2p^4-9p^2+15pr+4\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(p^4+6pr+4)+3pr-9p^2-4\geq 0$$

Sử dụng schur bậc 2 ta có:

$VT\geq 10p^2+3pr-9p^2-4=p^2+3pr-4$

Ta cần chứng minh: $p^2+3pr-4\geq 0$

Ta xét,nếu $p\geq 2\Rightarrow$ Bất đẳng thức hiển nhiên

Nếu $\sqrt{3}\leq p\leq 2$ thì theo schur bậc 1 ta có: $r\geq\dfrac{p(4-p^2)}{9}$,do đó:

$p^2+\dfrac{p^2(4-p^2)}{3}-4\geq 0\Leftrightarrow (p^2-3)(p^2-4)\leq 0$,hiển nhiên.

Bài 95:Cho $a,b,c>0$,chứng minh:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}$$

Lời giải:Từ bài trên ta có:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}-\left(\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\right)\geq\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}-\frac{a+b+c}{2}$$

Mà ta dễ có $\dfrac{a^2}{a+b}+\dfrac{b^2}{b+c}+\dfrac{c^2}{c+a}-\dfrac{a+b+c}{2}\geq 0$,suy ra điều phải chứng minh.

Bài 96:Cho $a,b,c>0$ và số tự nhiên $n\geq 3$ thỏa mãn $a^n+b^n+c^n=3$,chứng minh:

$$(ab)^{n+1}+(bc)^{n+1}+(ca)^{n+1}\leq 3$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Lời giải:Theo cauchy ta có:

$$a^n+b^n+n-2\geq nab\Rightarrow n(ab)^{n+1}\leq a^nb^n(a^n+b^n+n-2)$$

$$\Rightarrow (ab)^{n+1}\leq\frac{a^nb^n(a^n+b^n+n-2)}{n}$$

Đặt $x=a^n,y=b^n,z=c^n\Rightarrow x+y+z=3$,ta cần chứng minh:

$xy(x+y+n-2)+yz(y+z+n-2)+zx(z+x+n-2)\leq 3n$

$\Leftrightarrow (x+y+z)(xy+yz+zx)+(n-2)(xy+yz+zx)\leq 3n+3xyz$

$\Leftrightarrow (n+1)(xy+yz+zx)\leq 3n+3xyz$

Theo schur bậc 1 ta dễ có $xyz\geq\dfrac{4(xy+yz+zx)-9}{3}$

Vậy ta cần chứng minh: $3(n-3) \geq (n-3)(xy+yz+zx) \Leftrightarrow xy+yz+zx \leq 3$

Hiển nhiên vì $xy+yz+\leq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{9}{3} = 3$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 97:Cho x,y,z>0,chứng minh:

$$(x+y+z)^3 \geq 3(xy+yz+zx)\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}$$

Lời giải : Ta chuẩn hóa $x+y+z=3$,bất đẳng thức tương đương $q^2(9-2q) \leq 27$

Hiển nhiên vì $q^2(9-2q) = q.q.(9-2q) \leq (\frac{9}{3})^3 = 27$

Bài 98:Cho a,b,c >0,chứng minh: $\frac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca} + \frac{3abc}{a+b+c} \geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)$

Lời giải:Ta chuẩn hóa $ab+bc+ca=1$,bất đẳng thức trở thành:

$$p^4-4p^2+2+4pr+\frac{3r}{p} \geq \frac{2}{3}(p^2-2)$$

$$\Leftrightarrow 3p^5-14p^3+10p+12p^2r+9r \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3p(p^4+6pr+4)-14p^3-6p^2r-2p+9r \geq 0$$

Theo schur bậc 2 ta có:

$VT \geq 15p^3-14p^3-6p^2r-2p+9r = (p^3+9r)-6p^2r-2p$

Theo schur bậc 1 thì:

$(p^3+9r)-6p^2r-2p \geq 4p-2p-6p^2r = 2p-6p^2r$

Vậy,cuối cùng ta cần chứng minh:

$2p-6p^2r \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq 3pr$,hiển nhiên vì $1=(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c) = 3pr$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 99:Cho a,b,c>0,chứng minh : $\frac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca} + \frac{6abc}{a+b+c} \geq a^2+b^2+c^2$

Lời giải:

Ta chuẩn hóa $ab+bc+ca=1$,bất đẳng thức trở thành:

$$p^4-4p^2+2+4pr+\frac{6r}{p} \geq p^2-2 \Leftrightarrow p(p^2-4)(p^2-1)+(4p^2+6)r \geq 0$$

Nếu $p \geq 2$,thi bất đẳng thức hiển nhiên đúng

Nếu $\sqrt{3} \leq p \leq 2$,sử dụng schur bậc 2 ta có $r \geq \frac{(4-q^2)(p^2-1)}{9}$

Ta cần chứng minh:

$$p(p^2-4)(p^2-1)+(4p^2+6)\frac{(4-q^2)(p^2-1)}{9} \geq 0$$

$\Leftrightarrow (4-q^2)(p^2-1)(4p^2-9p+6) \geq 0$,hiển nhiên

Ta có điều phải chứng minh

Bài 100:Cho a,b,c>0, $a+b+c=3$,chứng minh:

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}+5 \geq (a+b)(b+c)(c+a)$$

Lời giải:Bài này trên tạp chí toán học mới ra,mình không dám nêu ra lời giải cụ thể,chỉ gợi ý thế này thôi.
Sử dụng schur bậc 1 và cùng với kỉ thuật phân tách hợp lý và cuối cùng ta đi đến chứng minh bất đẳng thức sau

$$6(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})+5(a^2+b^2+c^2)\ge 33$$

Sử dụng Cauchy ta có: $\begin{cases} 2\sum(3\sqrt[3]{a}+2a^2)\ge 10(a+b+c)=30 \\ a^2+b^2+c^2\ge \dfrac{(a+b+c)^2}{3}=3 \end{cases}$,cộng hai bất đẳng thức trên lại ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét:Ta có thể sử dụng kết quả sau: $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\ge ab+bc+ca$ .Kết quả này đả được chứng minh tổng quát trong hai cuốn sách "Sáng Tạo Bất Đẳng Thức" của Phạm Kim Hùng và cuốn "Bất Đẳng Thức Và Những Lời Giải Hay" của Võ Quốc Bá Cẩn và Trần Quốc Anh.
Sửu dụng kết quả trên ta có:

$$6(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})+5(a^2+b^2+c^2)\ge 6(ab+bc+ca)+5(a^2+b^2+c^2)$$

$$=3(a+b+c)^2+2(a^2+b^2+c^2)\ge 3(a+b+c)^2+\frac{2(a+b+c)^2}{3}=33$$

Bài 101:Cho a,b,c,x,y,z>0, $ab+bc+ca\ge xy+yz+zx, bc\le yz$,chứng minh :

$$a\left(\frac{y^2}{b^3}+\frac{z^2}{c^3}\right)\ge x\left(\frac{y}{b^2}+\frac{z}{c^2}\right)$$

Lời giải :Sử dụng bất đẳng thức bunhiacop-xki ta có:

$\begin{cases} \left(\dfrac{y^2}{b^3}+\dfrac{z^2}{c^3}\right)\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge \left(\dfrac{y}{b^2}+\dfrac{z}{c^2}\right)^2 \\ \left(\dfrac{y}{b^2}+\dfrac{z}{c^2}\right)\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)\ge \left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)^2 \end{cases}$ và $a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge x\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)$,đúng theo giả thiết.

Nhân vế theo vế ba bất đẳng thức trên lại ta có điều phải chứng minh.

Bài 102:Cho x,y,z là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$\frac{(x+y-1)^2}{z}+\frac{(y+z-1)^2}{x}+\frac{(z+x-1)^2}{y}\ge x+y+z$$

Lời giải:Ta dễ có:

$$VT\ge \frac{(2(x+y+z)-3)^2}{x+y+z}\ge \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z}=x+y+z$$

Bài 103:Cho a,b là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2=4$,chứng minh :

$$\frac{ab}{a+b+2}\le \sqrt{2}-1$$

Lời giải :Ta dễ có $\dfrac{ab}{a+b+2}=\dfrac{a+b-2}{2}\le \dfrac{\sqrt{2(a^2+b^2)}}{2}-1=\sqrt{2}-1$

Bài 104:Cho $a,b,c,d\in[0,1], x,y,z,t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ thỏa mãn $a+b+c+d=x+y+z+t=1.$

Chứng minh :

a) ax+by+cz+dt $\geq$ min$\{\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2},\frac{c+d}{2},\frac{d+a}{2},\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\}$

b) ax+by+cz+dt $\geq$ 54abcd

Lời giải :

a) giả sử $a\leq b\leq c\leq d\Rightarrow$ min$\{\frac{a+b}{2},\frac{b+c}{2},\frac{c+d}{2},\frac{d+a}{2},\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\}=\frac{a+b}{2}$

Ta cần chứng minh: 2ax+2by+2cz+2dt-a-b ≥ 0

Từ $\begin{cases} x=1-y-z-t \\ c-a\geq b-a; d-a\geq b-a \\ x,y,z,t\geq 0 \end{cases}$ suy ra:

2ax+2by+2cz+2dt-a-b $=2y(b-a)+2z(c-a)+2t(d-a)-(b-a)\geq 2(b-a)(y+z+t-\frac{1}{2})\geq 0$

Hiển nhiên đúng,ta có điều phải chứng minh.

b) Từ câu trên ta cần chứng minh $\frac{a+b}{2}\geq 54abcd$ (1) với $a\leq b\leq c\leq d$

Nếu a = 0 thì hiển nhiên

Nếu $0<a\leq b\leq c\leq d$ thì (1) tương đương:

$a+b\geq 108abc(1-a-b-c)\Leftrightarrow (a+b)(1+108abc)+108abc^2-108abc\geq 0$

Để ý $(a+b)(1+108abc)\geq 2\sqrt{ab}.2\sqrt{108abc}=24ab\sqrt{3c}$,do đoa ta càn chứng minh:

$2\sqrt{3c}+9c^2-9c\geq 0\Leftrightarrow (\sqrt{3c}-1)^2(\sqrt{3c}+2)\geq 0$,hiển nhiên.

Bài 105:Cho a,b,c là các số thực dương có $a+b+c=6$,chứng minh:

$$6(a^2+b^2+c^2)-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq 24$$

Lời giải:Ta đưa bất đẳng thức về dạng đồng bậc:

$$\frac{(a+b+c)^2(a^2+b^2+c^2)}{6}-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq \frac{4(a+b+c)^4}{216}$$

Ta chuẩn hóa $q=ab+bc+ca=1$,bất đẳng thức cần chứng minh;

$\frac{p^2(p^2-2)}{6}-(1-2pr)\geq \frac{4p^4}{216}\Leftrightarrow 4p^4-9p^2+54pr-27\geq 0$

Ta xét:

Nếu $p\geq 2\Rightarrow 4p^4-9p^2+54pr-27=(p^2-4)(4p^2+7)+54pr+1\geq 54pr+1>0$,hiển nhiên.

Nếu $\sqrt{3}\leq p\leq 2$,theo schur bậc 1 ta có: $r\geq \frac{4p^2-p^3}{9}$,ta cần chứng minh:

$4p^4-9p^2+\frac{54p(4p^2-p^3)}{9}-27\geq 0\Leftrightarrow 2p^4-15p^2+27\leq 0$

$\Leftrightarrow (p^2-3)(2p^2-9)\leq 0$,hiển nhiên.

Ta kết thức việc chứng minh.

Bài 106:Cho a,b,c>0,abc = 1,chứng minh:

$$2(a^2+b^2+c^2)+12\geq 3(a+b+c+ab+bc+ca)$$

Lời giải:Bất đẳng thức được chuyển về dạng: $2p^2-3p-7q+12\geq 0$

Theo schur bậc 1: $9 = 9r \ge 4pq - p^3 \Rightarrow q \le \dfrac{9+p^3}{4p}$.Ta cần chứng minh:

$2p^2 - 3p - \dfrac{7(9+p^3)}{4p} + 12 \ge 0 \Leftrightarrow (p-3)(p^2 - 9p + 21) \ge 0$,hiển nhiên.

Bài 107:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \ge \frac{a+b+c}{2(ab+bc+ca)} + \frac{3}{a+b+c}$$

Lời giải:Chuẩn hóa $q = ab + bc + ca = 1$,bất đẳng thức trở thành:

$\dfrac{p^2+1}{p-r} \ge \dfrac{p}{2} + \dfrac{3}{p} \Leftrightarrow p^3 + p^2 r + 6r - 4p \ge 0$,hay

$(p^3 - 4p + 9r) + r(p^2 - 3) \ge 0$,hiển nhiên theo schur bậc 1 và $p \ge \sqrt{3}$

Bài 108:Cho a,b,c là các số thực không âm, $a+b+c=3$,chứng minh:

$$\frac{27}{2} \ge 4(ab+bc+ca) + \frac{a^2b^2}{a+b} + \frac{b^2c^2}{b+c} + \frac{c^2a^2}{c+a}$$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương:

$\dfrac{27}{2} \ge 4q + \dfrac{q^3 - 6qr + 3r^2}{3q - r} \Leftrightarrow f(r) = 6r^2 + (27 - 20q)r + 2q^3 + 24q^2 - 81q \le 0$

Với $\dfrac{4q-9}{3} \le r \le \dfrac{q}{3}$

Nếu $r \ge \dfrac{20q-27}{12} \Rightarrow f'(r) \ge 0 \Rightarrow$ ta cần chứng minh $f(\dfrac{q}{3}) \le 0$ tương đương với:

$6.\dfrac{q^2}{9} + (27-20q).\dfrac{q}{3} + 2q^3 + 24q^2 - 81q \le 0 \Leftrightarrow 6q(q-3)(q+12) \le 0$,hiển nhiên vì $q \le 3$

Nếu $r \le \dfrac{20q-27}{12} \Rightarrow f'(r) \le 0 \Rightarrow$ ta cần chứng minh $f(\dfrac{4q-9}{3}) \le 0$ tương đương với:

$6.\dfrac{(4q-9)^2}{9} + (27-20q).\dfrac{4q-9}{3} + 2q^3 + 24q^2 - 81q \le 0 \Leftrightarrow 3(q-3)(2q^2 + 14q + 9) \le 0$

hiển nhiên vì $q \le 3$.Ta có điều phải chứng minh.

Bài 109:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$\sqrt[3]{(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)} + 1 \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương:

$p^3 + q^3 - 6pq + 8 \ge (q-1)^3 \Leftrightarrow p^3 + 3q^2 + 9 - 6pq - 3q \ge 0$

$\Leftrightarrow (p^3 - 4pq + 9) + (3q^2 - 2pq - 3q) \ge 0$,theo schur bậc 1 ta có

$VT \ge 3q^2 - 2pq - 3q$.Ta cần chứng minh: $3q^2 - 2pq - 3q \ge 0$

Nếu $q \ge p$ thì $3q^2 - 2pq - 3q = q(3q - 2p - 3) \ge q(p-3) \ge 0$,hiển nhiên.

Nếu $p \ge q$,ta có theo cauchy: $p^3 + 3q^2 + 9q \ge 9pq$,do đó ta cần chứng minh:

$9pq + 9 \ge 6pq + 12q \Leftrightarrow pq + 3 \ge 4q$

Mà $pq + 3 - 4q \ge q^2 - 4q + 3 = (q-3)(q-1) \ge 0$.Ta có điều phải chứng minh.

Bài 110:Cho a,b,c>0, $a+b+c\geq 3$,chứng minh:

$$(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1)\geq 9(ab+bc+ca)$$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương với:

$$q^2+(p+r-10)q+p^2+(1-r)p+r^2-2r+1\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2q+p+r-10)^2+3(p^2+2(4-r)p+r^2+4r-32)\geq 0$$

Từ đây ta cần chứng minh: $p^2+2(4-r)p+r^2+4r-32\geq 0$

Nếu $r\leq 4$ thì ta có:

$p^2+2(4-r)p+r^2+4r-32\geq 9+6(4-r)+r^2+4r-32=(r-1)^2\geq 0$,hiển nhiên.

Nếu $r\geq 4$, $\Delta'=-12(r-4)\leq 0\Rightarrow p^2+2(4-r)p+r^2+4r-32\geq 0$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 111:Cho $a,b,c\geq 0; ab+bc+ca+6abc=9$,chứng minh:

$$a+b+c+3abc\geq 6$$

Lời giải:Từ giả thiết ta có $r=\dfrac{9-q}{6}$,bất đẳng thức cần chứng minh:

$$p+\frac{9-q}{2}\geq 6\Leftrightarrow 2p-q-3\geq 0$$

Từ giả thiết,ta dễ có $p,q\geq 3, p^2\geq 3q\geq 9$

Nếu $p\geq 6\Rightarrow$ hiển nhiên.

Nếu $3\leq p\leq 6$.

Ta xét:

Với $p^2\geq 4q\Rightarrow 2p-q-3\geq 2p-\dfrac{p^2}{4}-3=\dfrac{(p-2)(6-p)}{4}\geq 0$ hiển nhiên

Với $p^2\leq 4q$,theo schur bậc 1 ta có: $9\geq q+\dfrac{2p(4q-p^2)}{3}\Leftrightarrow q\leq\dfrac{2p^3+27}{8p+3}$

Ta cần chứng minh:

$2p-\dfrac{2p^3+27}{8p+3}-3\geq 0\Leftrightarrow p^3-8p^2+9p+18\leq 0\Leftrightarrow (p-6)(p-3)(p+1)\leq 0$,hiển nhiên.

Bài 112:Cho a,b,c là các số thực không âm,chứng minh:

$$(a^4+b^4+c^4)(ab+bc+ca)\geq (a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

Lời giải:Ta chuẩn hóa $q=ab+bc+ca=1$,bất đẳng thức trở thành:

$p^4-4p^2+4pr+2\geq (p^2-2)(1-2pr)$

$\Leftrightarrow p^4+2p^3r-5p^2+4\geq 0\Leftrightarrow (p^4+6pr+4-5p^2)+2pr(p^2-3)$

Hiển nhiên đúng theo schur bậc 2 và $p\geq\sqrt{3}$

Bài 113:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\leq\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Lời giải:Ta chuẩn hóa $q=ab+bc+ca=1$,bất đẳng thức trở thành:

$$\frac{2p^2-4pr-2}{p-r}\leq\frac{3p^2-6}{p}\Leftrightarrow p^3+p^2r-4p+6r\geq 0.$$

Mà theo schur bậc 1 và $p^2 \ge 3$ ta có:

$p^3 + p^2r - 4p + 6r = (p^3 - 4p + 9r) + r(p^2 - 3) \ge 0$,hiển nhiên.

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 114:Cho $x, y, z \ge 0$,chứng minh:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} + 2\left[\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}\right]^{\frac{2}{3}} \ge 2$$

Lời giải:Đặt $a = \frac{x}{y+z}, b = \frac{y}{z+x}, c = \frac{z}{x+y}$,ta dễ có $a+b+c \ge \frac{3}{2}; ab+bc+ca+2abc = 1$

Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng sau:

$$2\sqrt[3]{(abc)^2} \ge 2 - (a+b+c) \text{ hay } 8r^2 \ge (2-p)^3 \Leftrightarrow (p-2)^3 + 8r^2 \ge 0$$

Nếu $p \ge 2 \Rightarrow$ hiển nhiên

Nếu $\frac{3}{2} \le p \le 2$,theo schur bậc 1 ta có:

$$r \ge \frac{p(4q-p^2)}{9} = \frac{p(4(1-2r)-p^2)}{9} \Leftrightarrow r \ge \frac{p(4-p^2)}{8p+9}$$

Vậy ta cần chứng minh:

$$-(2-p)^3 + \frac{8p^2(p+2)^2(2-p)^2}{(8p+9)^2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2-p)^2(8p^4+96p^3+48p^2-207p-162)}{(8p+9)^2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2-p)^2(2p-3)(4p^3+108p^2+210p+107)}{(8p+9)^2} \ge 0$$

Hiển nhiên.

Bài 115:Cho $x, y, z \ge 0; xy+yz+zx = 3$,chứng minh: $x^2+y^2+z^2+3xyz \ge 6$

Lời giải:Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng: $p^2 + 3r - 12 \ge 0$

Nếu $p \ge 2\sqrt{3} \Rightarrow$ hiển nhiên

Nếu $3 \le p \le 2\sqrt{3}$,theo schur bậc 1 ta cần chứng minh:

$$p^2 + \frac{p(12-p^2)}{3} - 12 \ge 0 \Leftrightarrow p^3 - 3p^2 - 12p + 36 \le 0$$

$\Leftrightarrow (p-3)(p^2-12) \le 0$,hiển nhiên.

Bài 116:Cho x,y,z>0, $x^2+y^2+z^2 = 1$,chứng minh:

$$\frac{9}{4} \le \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+zx} \le \frac{27}{4(x+y+z)^2}$$

Lời giải :Vế trái là hiển nhiên,ta sẽ đi chứng minh vế phải.

Bất đẳng thức tương :

$$\frac{pr+2q+3}{1+q+pr+r^2} \le \frac{27}{4p^2} \Leftrightarrow 4p^3r + 8p^2q + 12p^2 \le 27 + 27q + 27pr + 27r^2$$

Thay $q=\dfrac{p^2-1}{2}$ vào và cuối cùng ta cần chứng minh :

$$f(r)=54r^2+(54p-8p^3)r-8p^4+11p^2+27\ge 0$$

Dể ý $54p-8p^3>0$

Ta xét :Nếu $0<p\le\sqrt{2}\Rightarrow f(r)>-(8p^2+5)(p^2-2)\ge 0\Rightarrow$ hiển nhiên

Nếu $\sqrt{2}\le p\le\sqrt{3}$,theo schur bậc 1, $r\ge\dfrac{p(p^2-2)}{9}$,ta cần chứng minh :

$$\frac{54p^2(p^2-2)^2}{81}+(54p-8p^3).\frac{p(p^2-2)}{9}-8p^4+11p^2+27\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 18p^6+234p^4-135p^2-2187\le 0$$

$\Leftrightarrow (p^2-3)(18p^4+288p^2+729)\le 0$,hiển nhiên

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 117:Cho $a,b,c>0;ab+bc+ca+abc=4$,chứng minh : $a^3+b^3+c^3+13abc\ge 16$

Lời giải :Ta dễ có $p,q\ge 3,r\le 1$

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow p^3-3pq+16r-16\ge 0$ hay $p^3-12p+(3p+16)r-16\ge 0$

Nếu $p\ge 4\Rightarrow p^3-12p+(3p+16)r-16=(p-4)(p-2)^2+(3p+16)r>0$

Nếu $3\le p\le 4$,theo schur bậc 1 ta dễ có $r\ge\dfrac{p(16-p^2)}{4p+9}$,do đó ta cần chứng minh :

$$p^3-12p-16+(3p+16).\frac{p(16-p^2)}{4p+9}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (4-p)(-p^3+15p^2+68p-36)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (4-p)[(p^2(4-p)+11p^2+68p-36]\ge 0$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 118:Cho x,y,z là các số thực không âm có tổng bằng 1,chứng minh :

$$(1-xy)(1-yz)(1-zx)\ge(\frac{8}{9})^3$$

Lời giải :Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng : $1-q+r(1-r)\ge(\dfrac{8}{9})^3$

Nếu $0\le q\le\dfrac{1}{4}\Rightarrow 1-q+r(1-r)\ge 1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}>(\dfrac{8}{9})^3$

Nếu $\dfrac{1}{4}\le q\le\dfrac{1}{3}$,ta có : $\begin{cases} r\ge\dfrac{4q-1}{9} \\ r\le\dfrac{q}{9}\end{cases}$,do đó ta cần chứng minh :

$$1-q+\frac{4q-1}{9}(1-\frac{q}{9})\ge(\frac{8}{9})^3\Leftrightarrow 9q^2+99q-34\le 0$$

$\Leftrightarrow (3q-1)(3q+34)\le 0$,hiển nhiên

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 119:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{2}(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}-\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca})\geq 4$$

Lời giải:Ta chuẩn hóa $q=ab+bc+ca$,bất đẳng thức được viết dưới dạng:

$$\frac{p^2}{p^2-2}+\frac{1}{2}(\frac{p^3-3p+3r}{r}-p^2+2)\geq 4 \Leftrightarrow p^5-5p^3+6p-(p^4-p^2-6)r\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (p^2-3)(p^3-2p-(p^2+2)r)\geq 0$$

Ta chỉ cần chứng minh: $p^3-2p-(p^2+2)r\geq 0$ .Vì $r\leq \frac{pq}{9}=\frac{p}{9}$ nên:

$$p^3-2p-(p^2+2)r\geq p^3-2p-\frac{(p^2+2)p}{9}=\frac{4p(2p^2-5)}{9}>0 \text{ vì } p^2\geq 3$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 120:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{2}(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}-\frac{a^3+b^3+c^3}{abc})\leq 2$$

Lời giải:Ta chuẩn hóa $q=ab+bc+ca$,bất đẳng thức được viết dưới dạng:

$$\frac{p^2}{p^2-2}+\frac{1}{2}(p^2-2-\frac{p^3-3p+3r}{r})\leq 2 \Leftrightarrow p^5-5p^3+6p-(p^4-9p^2+18)r\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (p^2-3)(p^3-2p-(p^2-6)r)\geq 0$$

Ta cần chứng minh: $p^3-2p-(p^2-6)r\geq 0$

Nếu $\sqrt{3}\leq p\leq\sqrt{6}\Rightarrow$ hiển nhiên

Nếu $p\geq\sqrt{6}\Rightarrow p^3-2p-(p^2-6)r\geq p^3-2p-\frac{(p^2-6)p}{9}=\frac{3p(3p^2-4)}{9}>0$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 121:Cho a,b,c>0,chứng minh: $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 4(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})$

Lời giải:Ta có $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}\Rightarrow c(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geq\frac{4c}{a+b}$

Làm tương tự ta có điều phải chứng minh.

Bài 122:Cho a,b,c,d là các số thực và $ad-bc=1$,chứng minh:

$$a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd\geq\sqrt{3}$$

Lời giải:

Bất đẳng thức $a^2+b^2+c^2+d^2+ac+bd-\sqrt{3}(ad-bc)\geq 0$

$$\Leftrightarrow (\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{b}{2}-c)^2+(\frac{b\sqrt{3}}{2}+\frac{a}{2}+d)^2\geq 0 \text{,hiển nhiên}$$

Bài 123 :Cho là độ dài ba cạnh của 1 tam giác,chứng minh :

$$\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}+\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}+\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}+1\geq 2\sum_{cyc}\frac{a^2}{a^2+(b+c)^2}$$

Lời giải 1:

Bất đẳng thức

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a(\frac{a^2}{a^3+(b+c)^3}+\frac{1}{a+b+c}-\frac{2a}{a^2+(b+c)^2}) \ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a(b+c)(b+c-a)^3}{[a^3+(b+c)^3][a^2+(b+c)^2]} \ge 0$$

Hiển nhiên

Lời giải 2:

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}+1=\sum_{cyc}(\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}+\frac{a}{a+b+c})\sum_{cyc}(\frac{1}{1+(\frac{b+c}{a})^3}+\frac{1}{1+\frac{b+c}{a}}) \ge \sum_{cyc}\frac{2}{1+(\frac{b+c}{a})^2}=VP$$

Bài 124:Chop a,b,c>0, $a+b+c=3$,chứng minh: $\frac{a-1}{a^2+3}+\frac{b-1}{b^2+3}+\frac{c-1}{c^2+3}<\frac{1}{6}$

Lời giải 1:Bất đẳng thức tương đương:

$$6(qr-q^2+21q-3r-54) \le 108-18r-18q+r^2+3q^2$$

$$\Leftrightarrow r^2-6qr+9q^2-144q+432 \ge 0$$

Ta có $\Delta = 144q-432 \le 0$,suy ra điều phải chứng minh.

Lời giải 2:Bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng:

$$\frac{(a-3)^2}{a^2+3}+\frac{(b-3)^2}{b^2+3}+\frac{(c-3)^2}{c^2+3}>2$$

Sử dụng bunhiacop-xki ta có:

$$VT.[\sum_{cyc}(a-2)^2(a^2+3)] \ge [\sum_{cyc}(a-2)(a-3)]^2=(a^2+b^2+c^2+3)^2$$

Do đó ta cần chứng minh:

$$(a^2+b^2+c^2+3)^2 > 2\sum_{cyc}(a-2)^2(a^2+3)$$

$\Leftrightarrow (12-2q)^2 \ge 2(36-14q+2q^2) \Leftrightarrow 5q<18$,hiển nhiên.

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 125:Cho x,y,z là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0,chứng minh:

$$(\frac{x}{y+z})^4+(\frac{y}{z+x})^4+(\frac{z}{x+y})^4+\frac{90x^2y^2z^2}{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2} \ge \frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Lời giải:Đặt $a=\frac{x}{y+z}, b=\frac{y}{z+x}, c=\frac{z}{x+y}$,ta dễ có $a+b+c \ge \frac{3}{2}; ab+bc+ca+2abc=1$

Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng sau:

$$98r^2+(8p^2+4p-8)r+p^4-4p^2-p+2 \ge 0$$

Nếu $p \ge 2$,suy ra:

$$98r^2+(8p^2+4p-8)r+p^4-4p^2-p+2 \ge p^4-4p^2-p+2=(p-2)(p^3+2p^2-1) \ge 0$$

Hiển nhiên

Nếu $\frac{3}{2} \le p \le 2$, theo schur bậc 1 ta có:

$$r \ge \frac{p(4q-p^2)}{9}=\frac{p(4(1-2r)-p^2)}{9} \Leftrightarrow r \ge \frac{p(4-p^2)}{8p+9}$$

Vậy ta cần chứng minh:

$$\frac{98(4p-p^3)^2}{(8p+9)^2}+\frac{(8p^2+4p-8)(4p-p^3)}{8p+9}+p^4-4p^2-p+2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (2-p)(-64p^5-110p^4+255p^3+474p^2+16p-63)\ge 0$$

Mà ta lại có:

$64p^5+110p^4-255p^3-474p^2-16p+63$

$=64p^3(p^2-4)+110p^2(p^2-4)+p^2(p^2-4)-34p^2-12p+63\le 0$

Hiển nhiên.Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 126:Cho a,b,c là các số thực không âm,chứng minh:

$$8(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\ge abc(a+b)(b+c)(c+a)$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Lời giải:

Ta có: $4(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)\ge (a^2+b^2)(b^2+c^2)\ge (ab+bc)^2=b^2(c+a)^2$

Làm tương tự ta được thêm 3 bất đẳng thức nửa,nhân vế theo vế ta suy ra điều phải chứng minh.

Hiển nhiên.Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 127:Cho a,b,c>0,abc = 1.Chứng minh:

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\ge \frac{1}{2}(a+b)(b+c)(c+a)-1$$

Lời giải :

Kết hợp với giả thiết ta có bất đẳng thức tương đương với:

$$2\sum_{cyc}a^3b^3\ge abc(a+b+c)(ab+bc+ca)-3a^2b^2c^2$$

$\Leftrightarrow (\sum_{cyc}a^3b^3+3a^2b^2c^2)+\sum_{cyc}a^3b^3\ge abc\sum_{cyc}ab(a+b)+3a^2b^2c^2$,điều này đúng,vì:

$$\begin{cases}\sum_{cyc}a^3b^3+3a^2b^2c^2\ge abc\sum_{cyc}ab(a+b), theo-schur\\ \sum_{cyc}a^3b^3\ge 3a^2b^2c^2, theo-cauchy\end{cases}$$

Bài 128:Cho và b là các số thực dương,chứng minh:

$$\mathrm{Min}\{\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2};\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\}\ge \max\{\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a};\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\}$$

Lời giải: Thực ra bài này,chúng ta chỉ cần đi chứng minh:

$$\begin{cases}\frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}\ge \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\Leftrightarrow a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\ge abc(a^2c+b^2a+c^2b)\\ \frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}\ge \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\Leftrightarrow a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\ge abc(b^2c+c^2a+a^2b)\\ \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\ge \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\ge a^2c+b^2a+c^2b\\ \frac{ab}{c^2}+\frac{bc}{a^2}+\frac{ca}{b^2}\ge \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\ge b^2c+c^2a+a^2b\end{cases}$$

Có thể sử dụng Cauchy một cách rất dễ dàng,chẳng hạn như đi chứng minh

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \geq abc(a^2c+b^2a+c^2b)$$

Theo Cauchy ta có: $a^3b^3+a^3b^3+b^3c^3 \geq 3a^2cb^3 = 3abc.ab^2$ làm tương tự ta dễ có điều phải chứng minh.

Bài 129:Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2+xyz=4$

Chứng minh: $0 \leq xy+yz+zx-xyz \leq 2$

Lời giải:

Ta chứng minh: $xy+yz+zx-xyz \leq 2$

Do vài trò bình đẳng,không giảm tính tổng quát ta g/s $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$ or $\begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 1 \end{cases}$

Suy ra: $xy \geq x+y-1 \Leftrightarrow xyz \geq xz+yz-z$

$$\Rightarrow xy+yz+zx-xyz \leq xy+yz+zx-(xz+yz-z) = xy+z$$

Ta cần chứng minh $xy+z \leq 2$ (i)

Theo giả thiết thì: $4 = x^2+y^2+z(z+xy) \geq 2xy+z(z+xy) \Leftrightarrow (z+2)(z+xy-2) \leq 0$

$$\Rightarrow z+xy \leq 2$$

Bài toán đả được chứng minh,đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$

Ta có thể chứng minh (i) bằng cách khác như sau

Ta xét phương trình bậc 2 biến z sau đây;

$z^2+xyz+x^2+y^2-4=0, z \geq 0$,giải ra ta được: $z = \dfrac{-xy+\sqrt{(4-x^2)(4-y^2)}}{2}$

Do đó (i) tgương đương với:

$$xy + \frac{-xy+\sqrt{(4-x^2)(4-y^2)}}{2} \leq 2 \Leftrightarrow 4-xy \geq \sqrt{(4-x^2)(4-y^2)}$$

$$\Leftrightarrow (4-xy)^2 \geq (4-x^2)(4-y^2) \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

b) Chứng minh $xy+yz+zx-xyz \geq 0$

nếu cả 3 số x,y,z đều lớn hơn 1 thì vô lí,do đó phải có 1 số không lớn hơn 1,g/s số đó là x,suy ra: $xy+yz+zx-xyz = xy+zx+yz(1-x) \geq 0$ (đpcm).

Bài 130:Cho a,b,c là các số thự dương thỏa mãn điều kiện: $a^2+b^2+c^2+abc=4$,chứng minh rằng: $a+b+c \leq 3$

Lời giải 1:Từ gt ta có:

$a^2+bca+b^2+c^2-4=0$ là 1 pt bậc 2 theo a,giải ra ta được:

$$a = \frac{-bc+\sqrt{(4-b^2)(4-c^2)}}{2} \leq \frac{-bc+\dfrac{(4-b^2)+(4-c^2)}{2}}{2} = \frac{8-(b+c)^2}{4}$$

Từ đó:

$$a+b+c \leq \frac{8-(b+c)^2+4(b+c)}{4} = \frac{12-(b+c-2)^2}{4} \leq 3 \text{,ta có đpcm}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Bài 131:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $5a^2+4b^2+3c^2+2abc=60$

Chứng minh: $a+b+c \leq 6$

Lời giải:Từ gt ta dễ thấy: $b^2<15, c^2<20$,ta coi điều kiện đề ra như một phương trình bậc hai với ẩn là a,giải ra ta được:

$$a=\frac{-bc+\sqrt{(15-b^2)(15-c^2)}}{5}\le\frac{-bc+\dfrac{(15-b^2)+(15-c^2)}{2}}{5}=\frac{35-(b+c)^2}{10}$$

Từ đó suy ra:

$$a+b+c\le\frac{35-(b+c)^2+10(b+c)}{10}=\frac{60-(b+c-5)^2}{10}\le 6\,(\text{đpcm})$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\begin{cases}b+c-5=0\\15-b^2=20-c^2\\a+b+c=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=2\\c=3\end{cases}$

Điều phải chứng minh,dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b = 1,c = 0 và các hoán vị.

Bài 132:Cho a,b,c là 3 số dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3$,chứng minh:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{abc}$$

Lời giải:Từ giả thiết ta có $0<abc\le 1$ suy ra:

$$\frac{1}{1+a^2(b+c)}\le\frac{1}{abc+a^2(b+c)}=\frac{1}{a(ab+bc+ca)}=\frac{1}{3a}$$

do đó $\frac{1}{1+a^2(b+c)}+\frac{1}{1+b^2(c+a)}+\frac{1}{1+c^2(a+b)}\le\frac{1}{3}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=\frac{ab+bc+ca}{3abc}=\frac{1}{abc}$

đpcm.

Bài 133:Cho a,b,c là 3 số thực không âm,trong đó không có 2 số nào đồng thời bằng 0,thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)=2$ .Chứng minh:

$$(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)\le 1$$

Lời giải : Bđt tương đương:

$$4(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)\le((a+b)(b+c)(c+a))^2$$

Ta giả sử $a\ge b\ge c$ khi đó ta dễ có $\begin{cases}(c+a)^2\ge a^2+bc\\b^2+ca+c^2+ab\le(a+b)(b+c)\end{cases}$ và theo Cauchy ta lại có: $4(b^2+ca)(c^2+ab)\le(b^2+ca+c^2+ab)^2$

Nhưng vậy:

$$((a+b)(b+c)(c+a))^2\ge(c+a)^2((b+c)(c+a))^2\ge 4(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)$$

Bđt được chứng minh,dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi (a,b,c) = (1,1,0) và các hoán vị.

Bài 134:Cho a,b,c là 3 số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca\ge 3$,chứng minh:

$$A=\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Lời giải :

Áp dụng holder ta có: $A^2(\sum a(a+b)\ge(a+b+c)^3$ .Vậy ta quy về chứng minh:

$$(a+b+c)^3\ge\frac{9}{2}(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)\Leftrightarrow 2(a+b+c)^3+9(ab+bc+ca)\ge 9(a+b+c)^2$$

Có:$VT \geq (a+b+c)^3+(a+b+c)^3+27 \geq 9(a+b+c)^2$,theo cô si.vật BĐT đả được chứng minh.

Bài 2135:Cho 3 số dương a,b,c và abc = 8,chưng minh : $\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1} \leq 0$

Lời giải:

$\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}+\frac{c-2}{c+1} \leq 0 \Leftrightarrow 3-3(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1} \geq 1$

Ta đặt $a=\frac{2x}{y}, b=\frac{2y}{z}, c=\frac{2z}{x}, x,y,z>0$

Ta được :

$$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}=\sum\frac{y^2}{2xy+y^2} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}=1$$

Bài 136:Cho x,y,z,t là các số thực không âm thỏa mãn: $x+y+z+t=1$,chứng minh:

$$\frac{xy}{x+y+1}+\frac{yz}{y+z+1}+\frac{zt}{z+t+1}+\frac{tx}{t+x+1}+\frac{ty}{t+y+1}+\frac{zx}{z+x+1} \leq \frac{1}{4}$$

Lời giải:Sử dụng $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$,ta có:

$$\frac{xy}{x+y+1}=\frac{xy}{(x+y+z)+(x+y+t)} \leq \frac{1}{4}(\frac{xy}{x+y+z}+\frac{xy}{x+y+t}),(1)$$

Áp dụng các bất đẳng thức tương tự với (1) suy ra cuối cùng ta chỉ cần chứng minh:

$$(\frac{xy}{x+y+z}+\frac{xy}{x+y+t})+(\frac{yz}{y+z+x}+\frac{yz}{y+z+t})+(\frac{zt}{z+t+z}+\frac{zt}{z+t+y})$$

$$+(\frac{tx}{t+x+y}+\frac{tx}{t+x+z})+(\frac{ty}{t+y+x}+\frac{ty}{t+y+z})+(\frac{zx}{z+x+y}+\frac{zx}{z+x+t}) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy+yz+zx}{x+y+z}+\frac{yz+zt+ty}{y+z+t}+\frac{xy+yt+tx}{x+y+t}+\frac{zt+tx+xz}{z+t+x} \leq 1,(2)$$

Để ý: $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{2}$

Suy ra: $VT(2) \leq \frac{1}{3}(x+y+z+y+z+t+x+y+t+z+t+x)=x+y+z+t=1$(ĐPCM)

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=t=\frac{1}{4}$.

Bài 137:Cho 4 số thực dương a,b,c,d,chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{b+c+d}+\frac{b^3+c^3+d^3}{c+d+a}+\frac{c^3+d^3+a^3}{d+a+b}+\frac{d^3+a^3+b^3}{a+b+c} \geq a^2+b^2+c^2+d^2$$

Lời giải:

$$VT=\sum a^3(\frac{1}{b+c+d}+\frac{1}{d+a+b}+\frac{1}{a+b+c}) \geq 9\sum\frac{a^3}{2a+3b+2c+2d}$$

$$=9\sum\frac{a^4}{a(2a+3b+2c+2d)} \geq \frac{9(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{2(a^2+b^2+c^2+d^2)+5(ab+bc+cd+da)+4(ca+bd)}$$

$$\geq \frac{9(a^2+b^2+c^2+d^2)^2}{9(a^2+b^2+c^2+d^2)} = a^2+b^2+c^2+d^2 \rightarrow \text{(đpcm)}.$$

Bài 138:Với các số thực không âm a,b,c,hãy chứng minh bđt sau:

$$\mathrm{A} = \frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{b(c+a)}{c^2+ca+a^2} + \frac{c(a+b)}{a^2+ab+b^2} \geq 2$$

Lời giải 1:

$$A = \frac{a(b+c)}{(b+c)^2-bc} + \frac{b(c+a)}{(c+a)^2-ca} + \frac{c(a+b)}{(a+b)^2-ab}$$

$$= \sum \frac{a}{b+c-\frac{bc}{b+c}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)-abc(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a})}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)-\frac{9abc}{2(a+b+c)}} = \frac{2(a+b+c)^3}{4(a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc}$$

Ta cần chứng minh:

$$\frac{2(a+b+c)^3}{4(a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc} \geq 2 \Leftrightarrow (a+b+c)^3+9abc \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

Suy ra đpcm,đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

Lời giải 2:Bất đẳng thức $\Leftrightarrow ab(a-b)(a^3-b^3)+bc(b-c)(b^3-c^3)+ca(c-a)(c^3-a^3) \geq 0$

Lời giải 3: Ta có

$$\frac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2} = \frac{a(b+c)(ab+bc+ca)}{(b^2+bc+c^2)(ab+bc+ca)} \geq \frac{4a(b+c)(ab+bc+ca)}{(b+c)^2(a+b+c)^2} = \frac{4a(ab+bc+ca)}{(b+c)(a+b+c)^2}$$

Vậy cuối cùng ta cần chứng minh:

$\dfrac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}) \geq \dfrac{1}{2}$,thật vậy:

$$\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}) \geq \frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}.\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{1}{2}$$

Ta có điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b = c hoặc a = 0,b = c và các hoán vị.

Bài 139:Cho $a,b,c \in R^+$,chứng minh:

$$\frac{a^2+bc}{b^2+bc+c^2} + \frac{b^2+ca}{c^2+ca+a^2} + \frac{c^2+ab}{a^2+ab+b^2} \geq 2$$

Lời giải :

Ta có: $\sum_{cyc} \dfrac{a(b+c)}{b^2+bc+c^2} \geq 2$,theo bài toán trên

Mà $a^2+bc-a(b+c)=(a-b)(a-c)$

Suy ra $x = \dfrac{1}{b^2+bc+c^2}, y = \dfrac{1}{c^2+ca+a^2}, z = \dfrac{1}{a^2+ab+b^2}$

Theo shur suy rộng ta có đpcm.

Bài 140:Cho 3 số thực không âm a,b,c,chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^2}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^2}{a^2-ab+b^2}\ge 2$$

Lời giải:

$VT\ge \dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-abc(a+b+c)}$,ta cần chứng minh:

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-abc(a+b+c)}\ge 2\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4+2abc(a+b+c)\ge 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

Mà theo bất đẳng thức schur bậc 2 ta có:

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\ge (a^3b+b^3a)+(a^3c+c^3a)+(b^3c+c^3b)\ge 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

Từ đây ta có đpcm.

Bài 141:Cho 3 số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$,chứng minh:

$$(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\le 12$$

Lời giải:

Giả sử $a\ge b\ge c$ thì ta có: $b^2-bc+c^2\le b^2, c^2-ca+a^2\le a^2$,khi đó

$$VT\le a^2b^2(a^2-ab+b^2)=a^2b^2[(a+b)^2-3ab]=12.\frac{ab}{2}.\frac{ab}{2}.[(a+b)^2-3ab]$$

$$\le\frac{12(a+b)^2}{9}\le 12,\text{vì } a+b\le 3.$$

Ta có đpcm,đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=2,b=1,c=0$ và các hoán vị.

Bài 142:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+ab+ac}+\frac{b^2-ca}{2b^2+bc+bc}+\frac{c^2-ab}{2c^2+ca+cb}\le 0$$

Lời giải:Bất đẳng thức được viết lại dưới dạng:

$$\sum_{cyc}\frac{a}{2a+b+c}-\sum_{cyc}\frac{bc}{a(2a+b+c)}\le 0$$

Ta dễ có $\begin{cases}\displaystyle\sum_{cyc}\frac{a}{2a+b+c}\le\sum_{cyc}a(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c})=\frac{3}{4}\\ \displaystyle\sum_{cyc}\frac{bc}{a(2a+b+c)}\ge\frac{(ab+bc+ca)^2}{\sum_{cyc}abc(2a+b+c)}=\frac{(ab+bc+ca)^2}{4abc(a+b+c)}\ge\frac{3}{4}\end{cases}$

Điều phải chứng minh.

Bài 143:Cho a,b,c>0,chứng minh: $(\dfrac{a}{a+b})^2+(\dfrac{b}{b+c})^2+(\dfrac{c}{c+a})^2\ge\dfrac{3}{4}$

Lời giải 1:Đặt $x=\dfrac{b}{a},y=\dfrac{c}{b},z=\dfrac{a}{c}\to xyz=1$,bđt tương đương với:

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}\ge\frac{3}{4}$$

Thật vậy: $VT \ge \frac{1}{1+xy}+\frac{1}{(1+z)^2}=\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{(1+\frac{1}{xy})^2}$,ta cần chứng minh:

$\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{(1+\frac{1}{xy})^2} \ge \frac{3}{4} \Leftrightarrow (xy-1)^2 \ge 0 \to$ (đpcm)

Lời giải 2:Ta chuẩn hóa $q=ab+bc+ca=1$.Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$4(a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2)-3r^2+p^2-10pr \ge 0$$

Mà theo Cauchy: $a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2 \ge 3r^2$,do đó ta cần chứng minh

$$p^2-10pr+9r^2 \ge 0$$

Mà $p^2-10pr+9r^2=(p^2+81r^2)-10pr-72r^2 \ge 8r(p-9r) \ge 0$ Vì $r \le \frac{pq}{9}=\frac{p}{9}$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 144:Cho a,b,c>0,chứng minh: $(\frac{a}{a+b})^3+(\frac{b}{b+c})^3+(\frac{c}{c+a})^3 \ge \frac{3}{8}$

Lời giải 1:Sử dụng bunhiacop-xki ta có: $VT.(\sum_{cyc} a(a+b)^3) \ge (a^2+b^2+c^2)^2$

Ta cần chứng minh:

$$8(a^2+b^2+c^2)^2 \ge 3\sum_{cyc} a(a+b)^3 = 3(\sum_{cyc} a^4+\sum_{cyc} ab^3+3\sum_{cyc} a^3b+3\sum_{cyc} a^2b^2)$$

Mà ta đả có bất đẳng thức:

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \ge \begin{cases} 3(a^3b+b^3c+c^3a) \\ 3(ab^3+bc^3+ca^3) \end{cases} \Rightarrow 3(\sum_{cyc} ab^3+3\sum_{cyc} a^3b) \le 4(a^2+b^2+c^2)^2$$

Do đó ta cần chứng minh:

$$4(a^2+b^2+c^2)^2 \ge 3(a^4+b^4+c^4)+9(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$\Leftrightarrow a^4+b^4+c^4 \ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$,hiển nhiên.

Ta có điều phải chứng minh.

Lời giải 2:Ta dễ có $x^3 \ge \frac{3}{4}x^2-\frac{1}{16}$,(x>0),lần lượt thay $x=\frac{a}{a+b},\frac{b}{b+c},\frac{c}{c+a}$

Và cuối cùng ta được:

$VT \ge \frac{3}{4}[(\frac{a}{a+b})^2+(\frac{b}{b+c})^2+(\frac{c}{c+a})^2]-\frac{3}{16} \ge \frac{3}{4}.\frac{3}{4}-\frac{3}{16}=\frac{3}{8}$,đúng theo bài toán trên.

Lời giải 3:Đặt $x=\frac{b}{a}, y=\frac{c}{b}, z=\frac{a}{c} \Rightarrow x,y,z>0, xyz=1$ .Vậy bất đẳng thức được viết lại dưới dạng: $\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+y)^3}+\frac{1}{(1+z)^3} \ge \frac{3}{8}$

Giả sư z = min{x,y,z} thì từ xyz = 1 suy ra $\begin{cases} z \le 1 \\ xy \ge 1 \end{cases}$.

Ta dễ có $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y} \ge \frac{2}{1+\sqrt{xy}} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2(\sqrt{xy}-1)}{(1+x)(1+y)} \ge 0$,đúng vì $xy \ge 1$

Và $\frac{1}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+y)^3}\geq\frac{1}{4}(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+y})^3\geq\frac{1}{4}(\frac{2}{1+\sqrt{xy}})^3$.Vậy cuối cùng ta đi chứng minh:

$\frac{2}{(\sqrt{xy}+1)^3}+\frac{1}{(1+z)^3}\geq\frac{3}{8}$.Đặt $a=\sqrt{xy}\Rightarrow\begin{cases}a\geq 1\\ z=\frac{1}{a^2}\end{cases}$.Bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{2}{(1+a)^3}+\frac{1}{(1+\frac{1}{a^2})^3}\geq\frac{3}{8}\Leftrightarrow(a-1)^2(5a^7+25a^5+51a^5+71a^4+55a^3+51a^2+17a+13)\geq 0$$

hiển nhiên vì $a\geq 1$.Ta có điều phải chứng minh.

Bài 145:Chứng minh rằng với $x,y,z\in[0,1]$ thì: $x^{2y}+y^{2z}+z^{2x}\geq\frac{3}{4}$

Lời giải:Ta có theo becnuli:

$$\frac{1}{x^y}=(1+\frac{1-x}{x})^y\leq 1+\frac{y(1-x)}{x}=\frac{x+y-xy}{x}\leq\frac{x+y}{x}\Leftrightarrow x^y\geq\frac{x}{x+y}\Leftrightarrow x^{2y}\geq(\frac{x}{x+y})^2$$

Vậy bđt $\Leftrightarrow(\frac{x}{x+y})^2+(\frac{y}{y+z})^2+(\frac{z}{z+x})^2\geq\frac{3}{4}\rightarrow$(đpcm).

Bài 146:Cho a,b,c là các số thực không âm,chứng minh:

$$3(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)\geq a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3$$

Lời giải:Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\geq b\geq c\geq 0$,ta đặt

$$f(a,b,c)=3(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)-a^3b^3-b^3c^3-c^3a^3$$

Ta xét:

$$f(a,b,c)-f(a,b,0)=(a^2-ab+b^2)[a(ab^2-c^3)+b(a^2b-c^3)+3c^2(c-b)(c-a)]\geq 0$$

Hiển nhiên vì $a\geq b\geq c\geq 0$.

Ta cần chứng minh:

$$f(a,b,0)\geq 0\Leftrightarrow 3(a^2-ab+b^2)a^2b^2-a^3b^3\geq 0\Leftrightarrow a^2b^2(3a^2+3b^2-2ab)\geq 0$$

Hiển nhiên.

Bài 147:Cho a,b,c là 3 số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$,chứng minh:

$$\sqrt{a+bc}+\sqrt{b+ca}+\sqrt{c+ab}\geq\sqrt{abc}+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Lời giải 1:

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{bc}}+\sqrt{\frac{1}{b}+\frac{1}{ca}}+\sqrt{\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}}\geq 1+\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}$

$$=(\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{bc}})+(\frac{1}{b}+\frac{1}{\sqrt{ca}})+(\frac{1}{c}+\frac{1}{\sqrt{ab}}).$$

Ta xét $\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{bc}}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{bc}}\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{bc}\geq\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a\sqrt{bc}}+\frac{1}{bc}\Leftrightarrow 1\geq\frac{1}{a}+\frac{2}{\sqrt{bc}}$

$$\Leftrightarrow\sqrt{bc}(1-a)+2a\leq 0\quad(1)$$

từ gt ta có: $bc=\frac{a}{a-1}(b+c)$ và $b+c=\frac{bc(a-1)}{a}\leq\frac{(b+c)^2(a-1)}{4a}\Leftrightarrow b+c\geq\frac{4a}{a-1}$

Do đó $VT(1)=-\sqrt{a(a-1)}\sqrt{b+c}+2a\le-\sqrt{a(a-1).\frac{4a}{a-1}}+2a=-2a+2a=0$

Tương tự ta có thêm 2 bất đẳng thức nửa,suy ra điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=3$.

Lời giải 2:Đặt $\frac{1}{a}=x,\frac{1}{b}=y,\frac{1}{c}=z\to x+y+z=1$

Ta cần chứng minh: $(\sqrt{x+yz}-\sqrt{yz})+(\sqrt{y+zx}-\sqrt{zx})+(\sqrt{z+xy}-\sqrt{xy})\ge 1$

Để ý rằng $x+yz=(x+y)(x+z)$ do đó

$$\sqrt{x+yz}-\sqrt{yz}=\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}+\sqrt{yz}}\ge\frac{x}{\frac{x+y+x+z}{2}+\frac{y+z}{2}}=x$$

Tương tự thêm 2 bđt nữa ta có đpcm.

Bài 148:Cho a,b,c,d là các số thực thỏa mãn: $4a^2+b^2=2,c+d=4$.

Chứng minh: $P=2ca+bd+cd\le 8$

Lời giải 1:Ta dự đoán dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a=\frac{1}{2},b=1,c=d=\frac{1}{2}$,do đó ta xét các

bất đẳng thức hiển nhiên sau: $\begin{cases}2ca\le 4a^2+\frac{c^2}{4}\\ bd\le b^2+\frac{d^2}{4}\\ cd=\frac{cd}{2}+\frac{cd}{2}\le\frac{cd}{2}+\frac{(c+d)^2}{8}\end{cases}$

Cộng vế theo vế các bđt trên lại ta được:

$$P\le(4a^2+b^2)+\frac{3(c+d)^2}{8}=8\text{ (đpcm)}$$

Lời giải 2:Từ gt ta có $d=4-c$,suy ra:

$$P=2ca+b(4-c)+c(4-c)=-c^2+(2a-b+4)c+4b=f(c)$$

Theo tính chất của tam thức bậc 2 ta có:

$$P=f(c)\le-\frac{\Delta}{4a}=\frac{(2a-b+4)^2+16b+16}{4}=\frac{4a^2+b^2-4ab+16a+8b+16}{4}$$

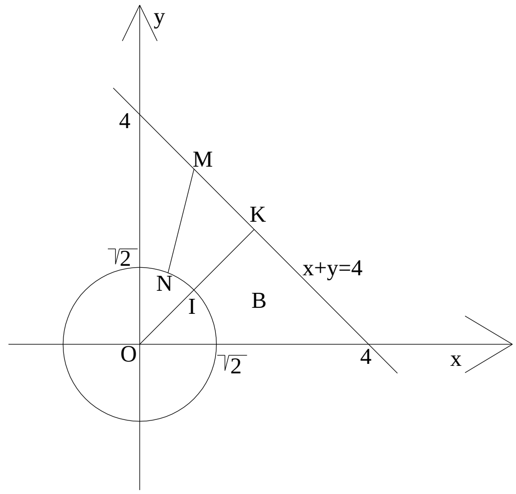
$$=\frac{2-((2a+b)^2-2)+16a+8b+16}{4}=\frac{-(2a+b)^2+8(2a+b)+20}{4}=\frac{-y^2+8y+20}{4}=\frac{f(y)}{4}$$

Với $y=2a+b,-2\le y\le 2$.

Ta xét $f(y)-32=-y^2+8y-12=(2-y)(y-6)\le 0$,đúng.

Do đó: $P\le\frac{32}{4}=8$ (đpcm).

Lời giải 3:



Đặt $z = 2a$,ta có: $P = za + bd + cd$ và $z^2 + b^2 = 2$

Ta xét phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 2$,có tâm tại gốc tọa độ,có bán kính bằng $\sqrt{2}$ và đường thẳng $x + y = 4$. (Xem hình vẻ)

Ta có:

$$MN = \sqrt{(c-z)^2 + (d-b)^2} = \sqrt{18 - 2P}; IK = 4.\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Mà $MN \ge IK \Leftrightarrow \sqrt{18-2P} \ge \sqrt{2} \Leftrightarrow P \le 8$ (ĐPCM).

Bài 149:Cho 3 số thực dương x,y,z thỏa mãn xyz=1.Chứng minh:

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)} \ge 1$$

Lời giải 1:

Trong ba số x,y,z l;uôn có hai số cùng lớn hơn hoặc cùng nhỏ hơn hoặc bằng 1,giả sử hai số đó là x và y.Suy ra $(x-1)(y-1) \ge 0 \Leftrightarrow xy + 1 \ge x + y$,(*)

Ta có $\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \ge \frac{1}{1+xy} \Leftrightarrow (x-y)^2(1+xy) \ge 0$,đúng.

Ta xét hai trường hợp:

<u>Trường hợp 1:</u>Nếu $xy + yz + zx \ge x + y + z$,thì ta dễ có:

$$\frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)} \ge \frac{1}{xy + yz + zx + 1}$$

Và $\frac{1}{xy + yz + zx + 1} \ge \frac{1}{(xy+1)(z+1)} \Leftrightarrow xyz + xy + z + 1 \ge xy + yz + zx + 1$

$\Leftrightarrow xyz + z \ge yz + zx \Leftrightarrow xy + 1 \ge x + y$,đúng,do (*)

Do đó: $VT \ge \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(xy+1)(z+1)} = \frac{z}{z+1} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{z}{(1+z)^2} = 1$

<u>Trường hợp 2:</u>Nếu $xy + yz + zx \le x + y + z$,thì ta dễ có:

$$\frac{2}{(x+1)(y+1)(z+1)} \ge \frac{1}{x + y + z + 1}$$

Và $\frac{1}{x+y+z+1} \ge \frac{1}{(xy+1)(z+1)} \Leftrightarrow xyz+xy+z+1 \ge x+y+z+1$

$\Leftrightarrow xyz+xy \ge x+y \Leftrightarrow 1+xy \ge x+y$,đúng-theo (*)

Do đó: $VT \ge \frac{1}{1+xy}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(xy+1)(z+1)} = \frac{z}{z+1}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{z}{(1+z)^2} = 1$

Vậy,bài toán đả được chứng minh hoàn toàn.

Lời giải 2:Chuyển về p,q,r với chú ý r = xyz = 1. ta có: $p^2 \ge 2q+3$

Mà ta lại có $p^2 \ge 3q = 2q+q \ge 2q+3$.Điều phải chứng minh.

Bài 150:Cho x,y,z là các số thực dương,chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{y(x^2+xy+y^2)}+\frac{y^2}{z(y^2+yz+z^2)}+\frac{z^2}{x(z^2+zx+x^2)} \ge \frac{3}{x+y+z}$$

Lời giải 1:Ta có thể chuẩn hóa $x+y+z=3$,ta cần chứng minh $VT \ge 1$

Sử dụng Cauchy ta có: $\begin{cases} \frac{x^2}{y(x^2+xy+y^2)}+\frac{xy}{3}+\frac{x^2+xy+y^2}{9} \ge x \\ \frac{y^2}{z(y^2+yz+z^2)}+\frac{yz}{3}+\frac{y^2+yz+z^2}{9} \ge y \\ \frac{z^2}{x(z^2+zx+x^2)}+\frac{zx}{3}+\frac{z^2+zx+x^2}{9} \ge z \end{cases}$

Cộng vế theo vế ba bất đẳng thức trên lại ta được:

$VT+\frac{2(x+y+z)^2}{9} \ge x+y+z \Leftrightarrow VT \ge 3-\frac{2.3^2}{9} = 3-2 = 1$

Ta có điều phải chứng minh.

Lời giải 2: Ta có:

$$\frac{x^2}{y(x^2+xy+y^2)} = \frac{1}{y}-\frac{x+y}{x^2+xy+y^2} \ge \frac{1}{y}-\frac{x+y}{\frac{3(x+y)^2}{4}} = \frac{1}{y}-\frac{4}{3(x+y)} \ge \frac{1}{y}-\frac{1}{3}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}) = \frac{2}{3y}-.\frac{1}{3x}$$

Làm tương tự ta có thêm 2 bđt nửa.Cộng vế theo vế các bất đẳng thức lại ta được:

$VT \ge \frac{2}{3}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})-\frac{1}{3}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) = \frac{1}{3}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) \ge \frac{3}{x+y+z}$.Đpcm.

Lời giải 3:Sử dụng bunhiacop-xki ta có:

$$VT = \frac{\frac{x^2z}{y}}{z(x^2+xy+y^2)}+\frac{\frac{y^2x}{z}}{x(y^2+yz+z^2)}+\frac{\frac{z^2y}{x}}{y(z^2+zx+x^2)} \ge \frac{(x\sqrt{\frac{z}{y}}+y\sqrt{\frac{x}{z}}+z\sqrt{\frac{y}{x}})^2}{(x+y+z)(xy+yz+zx)}$$

Do đó ta cần chứng minh: $(x\sqrt{\frac{z}{y}}+y\sqrt{\frac{x}{z}}+z\sqrt{\frac{y}{x}})^2 \ge 3(xy+yz+zx)$

Đặt $x=a^2, y=b^2, z=c^2$ thì bất đẳng thức được viết lại thành:

$$(a^2\frac{c}{b}+b^2\frac{a}{c}+c^2\frac{b}{a})^2 \ge 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2),(*)$$

Ta đi xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $a \le b \le c \Rightarrow (ab+bc+ca)(a-b)(b-c)(c-a) \ge 0$.Suy ra:

$$a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3 \ge a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2 \Leftrightarrow a^2\frac{c}{b}+b^2\frac{a}{c}+c^2\frac{b}{a} \ge a^2\frac{b}{c}+b^2\frac{c}{a}+c^2\frac{a}{b}$$

Nên :

$$(a^2\frac{c}{b}+b^2\frac{a}{c}+c^2\frac{b}{a})^2 \ge \frac{1}{4}(a^2\frac{c}{b}+a^2\frac{b}{c}+b^2\frac{a}{c}+b^2\frac{c}{a}+c^2\frac{b}{a}+c^2\frac{a}{b})^2 \ge (a^2+b^2+c^2)^2 \ge 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

Trường hợp 2:

Nếu $a \ge b \ge c \Rightarrow (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a) \le 0 \Leftrightarrow a^3b+b^3c+c^3a \ge ab^3+bc^3+ca^3$

Do đó từ (*):

$$a^4\frac{c^2}{b^2}+b^4\frac{a^2}{c^2}+c^4\frac{b^2}{a^2}+2(a^3b+b^3c+c^3a) \ge 3(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

Mà $2(a^3b+b^3c+c^3a) \ge (a^3b+b^3c+c^3a+ab^3+bc^3+ca^3) \ge 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$

Do đó ta cần chứng minh: $a^4\frac{c^2}{b^2}+b^4\frac{a^2}{c^2}+c^4\frac{b^2}{a^2} \ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$,điều này tương đương với:

$$\sum_{cyc}(a^4\frac{c^2}{b^2}-2c^2a^2+b^2c^2) \ge 0 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{c^2(a^2-b^2)^2}{b^2} \ge 0$$,hiển nhiên.

Ta đả hoàn tất việc chứng minh.

Lời giải 4: Ta có thể chuẩn hóa $x+y+z=3$,ta cần chứng minh $VT \ge 1$

Sử dụng svac-xơ ta có:

$$\sum_{cyc}\frac{x^2}{y(x^2+xy+y^2)} = \sum_{cyc}\frac{(\frac{x}{y})^2}{\frac{x^2+xy+y^2}{y}} \ge \frac{(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x})^2}{\sum_{cyc}\frac{x^2+xy+y^2}{y}} \ge \frac{3(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x})}{\sum_{cyc}\frac{x^2+xy+y^2}{y}} = \frac{(x+y+z)(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x})}{2(x+y+z)+(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x})}$$

Ta cần chứng minh: $\frac{(x+y+z)(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x})}{2(x+y+z)+(\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+\frac{z^2}{x})} \ge 1 \Leftrightarrow \frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y} \ge x+y+z$

Đúng,theo Cauchy.

Bài 151:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{9(ab+bc+ca)}{4(a+b+c)^2}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{9}{4}$$

Lời giải:

Ta có $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}$,đặt $\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}=y \ge 3.$

Cần chứng minh: $\frac{9}{4y}+\frac{y}{2} \ge \frac{9}{4} \Leftrightarrow 2y^2-9y+9 \ge 0 \Leftrightarrow 2(y-3)^2+3(y-3) \ge 0$ (đúng).

Bài 152:Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác,chứng minh:

$$a^3+b^3+c^3 \ge a(b-c)^2+b(c-a)^2+3abc$$

Lời giải:

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3 \ge a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)-abc$

$\Leftrightarrow a(a^2-b^2-c^2)+b(b^2-c^2-a^2)+abc+c^3 \ge 0$

$\Leftrightarrow -2abc\text{CosA-2abcCosB+abc+c}^3 \ge 0$

$\Leftrightarrow \text{CosA+CosB} \le \frac{1}{2}+\frac{c^2}{2ab}=\frac{1}{2}+\frac{Sin^2C}{2SinA.SinB}$ (i)

$VT(i)=2\text{Cos}\frac{A+B}{2}\text{Cos}\frac{A-B}{2} \le 2Sin\frac{C}{2}$

Xét vế phải của (i):

$SinA.SinB \le (\frac{SinA+SinB}{2})^2=(Sin\frac{A+B}{2}.\text{Cos}\frac{A-B}{2})^2 \le \text{Cos}^2\frac{C}{2}$

$\to VP(i) \ge \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\frac{SinC}{\text{Cos}\frac{C}{2}})^2=\frac{1}{2}+2Sin^2\frac{C}{2}$

Vậy cuối cùng ta cần chứng minh:

$2Sin\frac{C}{2} \le \frac{1}{2}+2Sin^2\frac{C}{2} \Leftrightarrow (Sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2})^2 \ge 0$ (đúng).

Bài 153:Cho x,y,z>0,chứng minh: $\sqrt[3]{xyz}+\frac{|x-y|+|y-z|+|z-x|}{3} \ge \frac{x+y+z}{3}$

Lời giải :Ta có thể giả sử $x \ge y \ge z$,bất đẳng thức cần chứng minh tương đương :

$$f(x)=\sqrt[3]{xyz}+\frac{x-y-3z}{3} \ge 0$$

Ta có $f'(x)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{yz}.\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}>0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến suy ra :

$f(x) \ge f(y)=\sqrt[3]{zy^2}-z$,ta cần chứng minh :

$\sqrt[3]{zy^2}-z \ge 0 \Leftrightarrow zy^2 \ge z^3 \Leftrightarrow y^2 \ge z^2$,hiển nhiên vì $x \ge y \ge z$.

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 154:Cho $a,b,c \in (0,1]$,chứng minh : $\frac{1}{a+b+c} \ge \frac{1}{3}+(1-a)(1-b)(1-c)$

Lời giải :

Ta có $VP \le \frac{1}{3}+(1-\frac{x}{3})^3$ với $0<x=a+b+c \le 3$

Ta cần chứng minh ;

$\frac{1}{x} \ge \frac{1}{3}+(1-\frac{x}{3})^3 \Leftrightarrow f(x)=x^3-6x^2+9x-9 \le 0$

Mà $x^3-6x^2+9x-9=(x-4)(x-1)^2-5 \le -5<0$.

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 155:Cho a,b,c,d>0,chứng minh :

$$\sqrt{a^4+c^4}+\sqrt{a^4+d^4}+\sqrt{b^4+c^4}+\sqrt{b^4+d^4} \ge 2\sqrt{2}(ad+bc)$$

Lời giải:Theo Cauchy ta có:

$$VT\ge 2\sqrt[4]{(a^4+c^4)(b^4+d^4)}+\sqrt{2}(ad+bc)\ge 2\sqrt[4]{\frac{(a^2+c^2)^2(b^2+d^2)^2}{4}}+\sqrt{2}(ad+bc)$$

$$=\sqrt{2}(ad+bc)+\sqrt{2}\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+d^2)}\ge 2\sqrt{2}(ad+bc)$$

Điều phải chứng minh.

Bài 156:Cho x,y,z>0, $x^2+y^2+z^2=3$,chứng minh :

$$\frac{x^{2009}-2008(x-1)}{y+z}+\frac{y^{2009}-2008(y-1)}{z+x}+\frac{z^{2009}-2008(z-1)}{x+y}\ge\frac{x+y+z}{2}$$

Lời giải :

Ta có theo cauchy : $x^{2009}-2008(x-1)=(x^{2009}+2008)-2008x\ge 2009x-2008x=x$

Suy ra $\frac{x^{2009}-2008(x-1)}{y+z}\ge\frac{x}{y+z}$,làm tương tự ta có :

$$VT\ge\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)}\ge\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}}{2}\ge\frac{x+y+z}{2}$$

Diều phải chứng minh.

Bài 157:Cho xyz là các số thực dương có tích không nhỏ hơn 1,chứng minh rằng:

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\ge 0$$

Lời giải 1:

$$\sum\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\ge\sum\frac{x^5-x^3yz}{x^5+xyz(y^2+z^2)}\ge\sum\frac{x^5-x^3yz}{x^5+x(y^4+z^4)}=\sum\frac{x^4-x^2yz}{x^4+y^4+z^4}$$

Ta cần chứng minh: $\sum\frac{x^4-x^2yz}{x^4+y^4+z^4}\ge 0\Leftrightarrow x^4+y^4+z^4-xyz(x+y+z)\ge 0$

Đúng,bất đẳng thức này quá quen rồi.

Lời giải 2: Bất đẳng thức tương đương với:

$$\sum\left(\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-1\right)\ge -3\Leftrightarrow\sum\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\le 3$$

Mà theo điều kiện xyz $\ge$ 1 và bất đẳng thứcbunhiacop-xki:

$$(x^2+y^2+z^2)^2\le(\sqrt{x^5yz}+y^2+z^2)^2\le(x^5+y^2+z^2)(yz+y^2+z^2)$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\le\frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

Làm tương tự ta có: $\sum\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}\le 2+\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}\le 3$

Đpcm.

Lời giải 3:

Ta có: $\sum\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\ge\sum\frac{x^5-x^3yz}{x^5+xyz(y^2+z^2)}\ge\sum\frac{x^4-x^2yz}{x^4+yz(y^2+z^2)}\ge\frac{2x^4-x^2(y^2+z^2)}{2x^4+(y^2+z^2)^2}$

Ta đặt: $a=x^2,b=y^2,c=z^2$,ta cần chứng minh:

$$\sum \frac{2a^2-2a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2} \ge 0 \Leftrightarrow \sum (a-b)(\frac{a}{2a^2+(b+c)^2}-\frac{b}{2b^2+(c+a)^2}) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum (a-b)^2 \frac{c^2+c(a+b)+a^2-ab+b^2}{(2a^2+(b+c)^2)(2b^2+(c+a)^2)} \ge 0$$

Hiển nhiên đúng,ta có điều phải chứng minh.

Lời giải 4:Để ý $\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{(x^3-1)^2(y^2+z^2)}{x(x^2+y^2+z^2)(x^5+y^2+z^2)} \ge 0$

Do đó ta có:

$$VT \ge \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2+z^2-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z})$$

$$=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2+z^2-\frac{xy+yz+zx}{xyz})$$

$$\ge \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx) \ge 0$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 158:Cho a,b,c >0, $a+b+c=abc$,chứng minh:

$$\frac{ab}{c(1+ab)}+\frac{bc}{a(1+bc)}+\frac{ca}{b(1+ca)} \ge \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Lời giải 1:Đặt $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c} \Rightarrow xy+yz+zx=1$

Ta có $VT=\frac{x}{1+yz}+\frac{y}{1+zx}+\frac{z}{1+xy}$.

Theo chebyshev ta có:

$$VT \ge \frac{1}{3}(x+y+z)(\frac{1}{1+yz}+\frac{1}{1+zx}+\frac{1}{1+xy})$$

$$\ge \frac{1}{3}\sqrt{3(xy+yz+zx}.\frac{9}{3+xy+yz+zx}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Điều phải chứng minh.

Lời giải 2:Sử dụng $\frac{1}{x+y} \le \frac{1}{4}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$ ta có:

$$VT=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\sum\frac{1}{a+abc}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\sum\frac{1}{(a+b)+(a+c)}$$

$$\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{4}\sum(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c})=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{2}\sum\frac{1}{a+b}$$

$$\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{8}\sum(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=\frac{3}{4}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) \ge \frac{3}{4}.\sqrt{3(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca})}$$

$$=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{3(ab+c+ca)}{abc}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Bài 159:Cho $0 \le x, y, z \le 1$và không có hai số nào đồng thời bằng 0.Chứng minh:

$$\frac{x}{1+y+zx}+\frac{y}{1+z+xy}+\frac{z}{1+x+yz} \le \frac{3}{x+y+z}$$

Lời giải:Từ giả thiết ta có:

$$(1-x)(1-z) \ge 0 \Leftrightarrow 1+zx \ge z+x \Rightarrow \frac{z}{1+y+zx} \le \frac{x}{x+y+z}$$

Làm tương tự ta có $VT \le \frac{x+y+z}{x+y+z} \le \frac{3}{x+y+z}$.Đpcm.

Bài 160:Cho a,b,c >0,và abc≥1.chứng minh:

$$\text{A} = \frac{a}{\sqrt{b+\sqrt{bc}}}+\frac{b}{\sqrt{c+\sqrt{ca}}}+\frac{c}{\sqrt{a+\sqrt{ab}}} \ge \frac{3}{\sqrt{2}}$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Lời giải 1: Áp dụng svac-xơ ta có: $A \ge \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{\sqrt{a+\sqrt{ab}}+\sqrt{b+\sqrt{bc}}+\sqrt{c+\sqrt{ca}}}$

Mà: $\sqrt{a+\sqrt{ab}}+\sqrt{b+\sqrt{bc}}+\sqrt{c+\sqrt{ca}} \le \sqrt{3(a+b+c+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})}$

$$= \sqrt{3((\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}))}$$

Để ý $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca} \ge 3\sqrt[4]{a^2b^2c^2} \ge 3$,đặt $x = \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \ge 3$,ta cần chứng minh:

$\frac{x^2}{\sqrt{3(x^2-3)}} \ge \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2x^4+81 \ge 27x^2 \Leftrightarrow (x^2-9)(2x^2-9) \ge 0$,hiển nhiên

Lời giải 2: Áp dụng svac-xơ ta có:

$$A \ge \frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc} a\sqrt{b+\sqrt{bc}}} \ge \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca+\sum_{cyc} a\sqrt{bc})}}$$

$$\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca+\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{2})}} \ge \frac{(a+b+c)\sqrt{3(ab+bc+ca)}}{\sqrt{2(a+b+c)(ab+bc+ca)}}$$

$$= \frac{\sqrt{3(a+b+c)}}{\sqrt{2}} \ge \frac{\sqrt{9\sqrt[3]{abc}}}{\sqrt{2}} \ge \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Bài 161:Cho a,b,c >0,và abc≥1.chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{a+1}}+\frac{b}{\sqrt{b+1}}+\frac{c}{\sqrt{c+1}} \ge \frac{3}{\sqrt{2}}$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Lời giải:

Ta có

$$VT \ge \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}} \ge \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{\sqrt{3(a+b+c+3)}} \ge \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{\sqrt{3(a+b+c+\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})}}$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{\sqrt{3((\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}))}}\ge\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{\sqrt{3((\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-3)}}=\frac{x^2}{\sqrt{3(x^2-3)}}$$

Ta cần chứng minh: $\frac{x^2}{\sqrt{3(x^2-3)}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow(x^2-9)(2x^2-9)\ge 0$,hiển nhiên.

Bài 162:Cho x,y,z>0, $x+y+z=1$,chứng minh: $\frac{x}{x+yz}+\frac{y}{y+zx}+\frac{z}{z+xy}\le\frac{9}{4}$

Lời giải :Ta có :

$$VT=\sum_{cyc}\frac{x}{x(x+y+z)+yz}=\sum_{cyc}\frac{x}{(x+y)(x+z)}=\frac{2(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)}\le\frac{2(xy+yz+zx).9}{8(x+y+z)(xy+yz+zx)}=\frac{9}{4}$$

Điều phải chứng minh.

Bài 163:Cho a,b,c>0, $ab+bc+ca=1$,chứng minh:

$$\frac{1}{ab(a+b)}+\frac{1}{bc(b+c)}+\frac{1}{ca(c+a)}\ge\frac{1}{abc}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$$

Lời giải:Bất đẳng tương đương với:

$p^3-2p+3r\ge p^2r+p\Leftrightarrow(p^2-3)(p-r)\ge 0$,hiển nhiên

Bài 164:Cho a,b>0,chứng minh: $\frac{(1+a^2b)(1+b^2)}{(a^2-a+1)(1+b^3)}\le 2$

Lời giải:Ta có:

$$\frac{(1+a^2b)(1+b^2)}{(a^2-a+1)(1+b^3)}\le 2\Leftrightarrow\frac{(a+1)(1+a^2b)(1+b^2)}{(a^3+1)(1+b^3)}\le 2$$

$$\Leftrightarrow 2a^3+2b^3+a^3b^3+1\ge a^3b+a^2b+ab^2+a^2b^3+a+b^2$$

Sử dụng Cauchy ta có: $\begin{cases}a^3+2\ge 3a\\ 2b^3+1\ge 3b^2\\ 3(a^3+b^3)\ge 3ab(a+b)\\ a^3b^3+2a^3\ge 3a^3b\\ 2a^3b^3+b^3\ge 3a^2b^3\end{cases}$,cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta

có đpcm.

Bài 165:Cho a,b,c>0,chứng minh: $\frac{1}{2}(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a})\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$

Lời giải:Ta có thể giả sử a = max{a,b,c}.Ta biến đổi bất đẳng thức về dạng:

$$(\frac{1}{2ab}-\frac{1}{(a+c)(b+c)})(a-b)^2+(\frac{1}{2ca}-\frac{a+b+2c}{2(a+b)(b+c)(c+a)})(a-c)(b-c)\ge 0$$

Hiển nhiên đúng.Ta có điều phải chứng minh.

Bài 166:Cho a,b,c là các số thực có tổng bằng 1,chứng minh:

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2c^2\ge 2abc[(ab+bc+ca)-1]$$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương với:

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2c^2\ge 2abc[(ab+bc+ca)-(a+b+c)]$

$\Leftrightarrow q^2-2pr+r^2+2pr-2qr\ge 0\Leftrightarrow q^2-2qr+r^2\ge 0\Leftrightarrow(q-r)^2\ge 0$

Hiển nhiên.

Bài 167:Cho a,b,c>0, $a+b+c=3$,chứng minh: $\frac{a+2b^2}{a+2c^2}+\frac{b+2c^2}{b+2a^2}+\frac{c+2a^2}{c+2b^2}\geq 3$

Lời giải:Ta có $VT\geq \frac{(2(a^2+b^2+c^2)+3)^2}{\sum_{cyc}(a+2b^2)(a+2c^2)}$

Do đó ta cần chứng minh:

$$\frac{(2(a^2+b^2+c^2)+3)^2}{\sum_{cyc}(a+2b^2)(a+2c^2)}\geq 3\Leftrightarrow \frac{(21-4q)^2}{9-2q+4(q^2-6r)+6(q-r)}\geq 3$$

$\Leftrightarrow 4q^2-180q+90r+378\geq 0\Leftrightarrow 4(q-3)(q-12)+10(27+9r-12q)\geq 0$,hiển nhiên

Theo schur bậc 1.Ta có điều phải chứng minh.

Bài 168:Cho a,b,c>0,chứng minh: $(1+\frac{a}{b})(1+\frac{b}{c})(1+\frac{c}{a})\geq 2(1+\frac{3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c})$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương với: $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq \frac{6\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{a+b+c}$

Ta chuẩn hóa $a^2+b^2+c^2=3=p^2-2q\Rightarrow p^2=3+2q$ .Bất đẳng thức tương đương với:

$$p^2q-3pr\geq 18r$$

Để ý: $q^2\geq 3pr$,nên ta cần chứng minh:

q(3+2q)-q^2 $\geq 18r\Leftrightarrow q^2+3q\geq 18r$ .Mà $q^2+3q\geq 2\sqrt{3q^3}\geq 2\sqrt{81r^2}=18r$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 169:Cho a,b,c>0, $ab+bc+ca=abc$,tìm max của: $p=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+1}}$

Lời giải:Từ giả thiết ta có: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$

Để ý $\begin{cases}(x^2+1)(9+1)\geq (3x+1)^2\\ \frac{1}{3x+1}\leq \frac{1}{100}(\frac{27}{x}+1)\end{cases}$,do đó:

$$p\leq \sqrt{10}(\frac{1}{3a+1}+\frac{1}{3b+1}+\frac{1}{3c+1})\leq \frac{\sqrt{10}}{100}(27(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})+3)=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Vậy max p = $\frac{3}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow a=b=c=3$

Bài 170:Cho a,b,c>0,abc = 1.Chứng minh:

$$\sqrt{9a^2+4}+\sqrt{9b^2+4}+\sqrt{9c^2+4}\leq \sqrt{13}(a+b+c)$$

Lời giải:Dặt $f(x)=\sqrt{9x^2+4}$, ta có $f'(x)<0$

Suy ra: $f(a)+f(b)+f(c)\leq 3f(\frac{a+b+c}{3})=3\sqrt{(a+b+c)^2+4}$

Ta cần chứng minh:

$3\sqrt{(a+b+c)^2+4} \le \sqrt{13}(a+b+c) \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \ge 9$,hiển nhiên

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 171:Cho a,b,c>0, $a+b+c=1$.Chứng minh:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+7(ab+bc+ca) \ge 9abc+11$$

Lời giải 1:Ta dễ có $VT \le 9.\frac{1}{27}+11=\frac{34}{3}$

Để ý $\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+27ab) \ge \frac{9}{2}$,suy ra:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{27}{2}(ab+bc+ca) \ge \frac{27}{2} \Leftrightarrow VT \ge \frac{27}{2}-\frac{13}{2}(ab+bc+ca) \ge \frac{27}{2}-\frac{13}{2}.\frac{1}{3}=\frac{34}{3}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 172:Cho a,b,c>0, $a+b+c+abc=4$ .Chứng minh:

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \ge 3abc(2abc-1)$$

Từ giả thiết ta dễ có:

$$\sqrt[3]{abc} \le 1 \Rightarrow (\sqrt[3]{abc}-1)(2\sqrt[3]{(abc)^2}+2\sqrt[3]{abc}+1) \le 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{abc} \ge 2abc-1$$

Mà $(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2 \ge 3abc\sqrt[3]{abc} \ge 3abc(2abc-1)$

Điều phải chứng minh.

Bài 173:Cho x,y,z>0, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.Chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{y+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{z+1}+1} \le 1$

Lời giải :Đặt $\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=a, \frac{1}{\sqrt{y+1}+1}=b, \frac{1}{\sqrt{z+1}+1}=c$,thì từ giả thiết ta có :

$$1=\frac{a^2}{1-2a}+\frac{b^2}{1-2b}+\frac{c^2}{1-2c} \ge \frac{(a+b+c)^2}{3-2(a+b+c)} \Leftrightarrow (a+b+c-1)(a+b+c+3) \le 0 \Rightarrow a+b+c \le 1$$

Điều phải chứng minh.

Bài 174:Cho a,b,c > 0,chứng minh:

$$(\frac{a}{b+c})^{\frac{2}{3}}+(\frac{b}{c+a})^{\frac{2}{3}}+(\frac{c}{a+b})^{\frac{2}{3}} \ge \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

Lời giải:Theo Cauchy ta có:

$$VT=\sum_{cyc}\frac{\sqrt[3]{2}a}{\sqrt[3]{2a(b+c)^2}} \ge \sum_{cyc}\frac{3\sqrt[3]{2}a}{2(a+b+c)}=\frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$.ĐPCM.

Bài 175:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn ab+bc+ca =1.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}-\frac{1}{a+b+c} \ge 2$$

Lời giải 1:Bất đẳng thức tương đương:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+2 \ge 2(a+b+c)$$

Mà $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+2 \ge \frac{(a+b+c)^2}{2}+2 \ge 2(a+b+c)$

Lời giải 2:Bất đẳng thức tương đương: $p^3+r+2pr-2p^2\ge 0$
Nếu $p\ge 2$,hiển nhiên
Nếu $p\le 2$,sử dụng $r\ge \frac{p(4-p^2)}{9}$
Ta cần chứng minh:
$$p^3+\frac{4p-p^3}{9}+2p.\frac{4p-p^3}{9}-2p^2\ge 0\Leftrightarrow (2-p)(p-1)^2\ge 0 \text{,hiển nhiên}$$
Bài 176:Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=9$,chứng minh rằng:
$$\frac{x^3+y^3}{xy+9}+\frac{y^3+z^3}{yz+9}+\frac{z^3+x^3}{zx+9}\ge 9$$
Lời giải:
Để ý: $a^3+b^3\ge \frac{(a+b)^3}{2^2}$ với a,b>0.Do đó ta có:
$$VT=\sum_{cyc}\frac{x^3+y^3}{xy+9}\ge \sum_{cyc}\frac{(x+y)^3}{4xy+36}\ge \sum_{cyc}\frac{(x+y)^3}{(x+y)^2+36}=2(x+y+z)-\sum_{cyc}\frac{36(x+y)}{(x+y)^2+36}$$
$$\ge 2(x+y+z)-\sum_{cyc}\frac{36(x+y)}{12(x+y)}=9$$
Điều phải chứng minh,dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = y = z = 3.
Bài177:Cho a,b,c là 3 số thực dương thỏa mãn $a+b+c=ab+bc+ca$,chứng minh;
$$\frac{a+b+1}{a^2+b^2+1}+\frac{b+c+1}{b^2+c^2+1}+\frac{c+a+1}{c^2+a^2+1}\le 3$$
Lời giải 1:
Sử dụng bunhiacop-xki ta có: $\begin{cases}3(a^2+b^2+1)\ge (a+b+1)^2\\(a+b+1)(a+b+c^2)\ge (a+b+c)^2\end{cases}$
Nhân cả hai vế của 2 bđt trên lại ta được:
$$3(a^2+b^2+1)(a+b+c^2)\ge (a+b+1)(a+b+c)^2\Leftrightarrow \frac{a+b+1}{a^2+b^2+1}\le \frac{3(a+b+c^2)}{(a+b+c)^2}$$
Làm 2 đánh giá tương tự và cuối cùng ta có:
$$VT\le \frac{3[2(\text{a+b+c})+(\text{a}^2+b^2+c^2)]}{(a+b+c)^2}=\frac{3[2(\text{ab+bc+ca})+(\text{a}^2+b^2+c^2)]}{(a+b+c)^2}=3$$
Đó chính là điều phải chứng minh.
Lời giải 2:Sử dụng $x^2+y^2+1\ge \frac{1}{3}(x+y+1)^2$,nên để chứng minh bất đẳng thức trên thì ta cần chứng minh: $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\le 1$,quy đồng,rút gọn và sử dụng giả thiết ta được bất đẳng thức tương đương là:
$$2(ab+bc+ca)+2\le (a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=(a+b+c)^2-abc$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2\ge abc+2$$
Lại từ giải thiết ta dễ có:

$$\begin{cases} a+b+c \ge 3abc \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) \ge \dfrac{1}{9}(a+b+c)^2 \ge \dfrac{1}{3}(a+b+c) \ge abc \\ a+b+c \ge 3 \Leftrightarrow \dfrac{2}{3}(a^2+b^2+c^2) \ge \dfrac{2}{9}(a+b+c)^2 \ge 2 \end{cases}$$

Từ đây ta suy ra điều phải chứng minh.

Lời giải 3:Tương tự như lời giải 2,ta sẽ đi chứng minh:

$$\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1} \le 1 \Leftrightarrow \frac{a+b}{a+b+1}+\frac{b+c}{b+c+1}+\frac{c+a}{c+a+1} \ge 2$$

Mà theo svac-xơ ta có:

$$\frac{a+b}{a+b+1}+\frac{b+c}{b+c+1}+\frac{c+a}{c+a+1} \ge \frac{4(a+b+c)^2}{\sum (a+b)(a+b+1)} = \frac{4(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca+a+b+c)}$$

$$= \frac{2(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = 2$$

Điều phải chứng minh.

Lời giải 4: $VP - VT = \dfrac{a(a-1)+b(b-1)}{a^2+b^2+1}+\dfrac{b(b-1)+c(c-1)}{b^2+c^2+1}+\dfrac{c(c-1)+a(a-1)}{c^2+a^2+1}$

$$= \sum a(a-1)\left(\frac{1}{a^2+b^2+1}+\frac{1}{c^2+a^2+1}\right) = \sum a\left(a-\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}\right)\left(\frac{1}{a^2+b^2+1}+\frac{1}{c^2+a^2+1}\right)$$

$$= \frac{1}{a+b+c}\sum (a^2-bc)\left(\frac{1}{a^2+b^2+1}+\frac{1}{c^2+a^2+1}\right)$$

Đặt $x = \dfrac{1}{b^2+c^2+1}, y = \dfrac{1}{c^2+a^2+1}, z = \dfrac{1}{a^2+b^2+1}$

Bất đẳng thức tương đương với:

$$2\sum (a^2-bc)(y+z) \ge 0 \Leftrightarrow \sum ((2a^2-b^2-c^2)+(b-c)^2)(y+z) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum (a^2-b^2)(y+z-z-x)+\sum (b-c)^2(y+z) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow -\sum (a-b)^2\left(\frac{a+b}{(c^2+a^2+1)(b^2+c^2+1)}\right)+\sum (b-c)^2(y+z) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum (a-b)^2\left(\frac{1}{b^2+c^2+1}+\frac{1}{c^2+a^2+1}-\frac{a+b}{(c^2+a^2+1)(b^2+c^2+1)}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum (a-b)^2\left(\frac{2c^2+a^2+b^2+2-(a+b)}{(c^2+a^2+1)(b^2+c^2+1)}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum (a-b)^2\left(\frac{4c^2+(a-1)^2+(b-1)^2+a^2+b^2+c^2}{(c^2+a^2+1)(b^2+c^2+1)}\right) \ge 0$$

Đúng ,ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 178:Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.Chứng minh:

$$\frac{a}{a^2+2b+3}+\frac{b}{b^2+2c+3}+\frac{c}{c^2+2a+3} \le \frac{1}{2}$$

Lời giải:Để ý $x^2+1 \ge 2x$,do đó ta có: $VT \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{a+b+1}+\dfrac{b}{b+c+1}+\dfrac{c}{c+a+1}\right)$

Ta cần chứng minh: $\frac{a}{a+b+1}+\frac{b}{b+c+1}+\frac{c}{c+a+1}\le 1$,điều này tương đương với:

$\frac{b+1}{a+b+1}+\frac{c+1}{b+c+1}+\frac{a+1}{c+a+1}\ge 2$

Mà $\frac{b+1}{a+b+1}+\frac{c+1}{b+c+1}+\frac{a+1}{c+a+1}\ge \frac{(a+b+c+3)^2}{\sum (b+1)(a+b+1)}=\frac{(a+b+c+3)^2}{\frac{1}{2}(a+b+c+3)^2}=2$

Điều phải chứng minh.

Bài 179:Cho x,y,z>0, $x+y+z=3$,chứng minh:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2(x+y)+1}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2(y+z)+1}}+\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{2(z+x)+1}}\le 1$$

Lời giải :Sử dụng $\sqrt{m}+\sqrt{n}\le\sqrt{2(m+n)}$,đặt $a=\sqrt{x},b=\sqrt{y},c=\sqrt{z}\Rightarrow a^2+b^2+c^2=3$

Bài toán được chuyển về việc chứng minh :

$\frac{a}{a+b+1}+\frac{b}{b+c+1}+\frac{c}{c+a+1}\le 1$,hiển nhiên,theo bài toán trên.

Bài 180:Cho a, b, c là các số không âm phân biệt. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right]\ge\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$$

Lời giải:

Không giảm tính tổng quát ta giả sử a<b<c. Đặt x = b – a , y = c – b. Khi đó

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right]=\left[a^2+(a+x)^2+(a+x+y)^2\right]\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right]$$

$$\ge\left[x^2+(x+y)^2\right]\left[\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{(x+y)^2}\right]=\left(2x^2+2xy+y^2\right)\frac{\left(x^2+xy+y^2\right)}{x^2y^2(x+y)^2}$$

Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi a = 0.

Xét biểu thức:

$$f(x,y)=\left(2x^2+2xy+y^2\right)\frac{\left(x^2+xy+y^2\right)}{x^2y^2(x+y)^2}=\frac{\left[2\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\frac{x}{y}+1\right]\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+1\right]^2}{\left(\frac{x}{y}\right)^2\left(\frac{x}{y}+1\right)^2}$$

Đặt $t=\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}$,$t>0$ ta xét hàm số $g(t)=\frac{(2t+1)(t+1)^2}{t^2}$,$t\in(0;+\infty)$

Tính đạo hàm, lập BBT tìm ra $g(t)\ge\frac{11+5\sqrt{5}}{2}$ Dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

từ đó giải ra x/y và tính được tỉ lệ các bộ (a, b, c)

Bài 181:Cho a,b,c là các số thực dương sao cho $a+b+c=3$.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{a^2}{a+2b^3}+\frac{b^2}{b+2c^3}+\frac{c^2}{c+2a^3}$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{a^2}{a+2b^3}=\frac{a(a+2b^3)-2ab^3}{a+2b^3}=a-\frac{2ab^3}{a+2b^3}\ge a-\frac{2ab^3}{3b^2\sqrt[3]{a}}=a-\frac{2}{3}b\sqrt[3]{a^2}\ge a-\frac{2b}{3}(\frac{2a+1)}{3}=a-\frac{2b}{9}(2a+1)$$

Suy ra: $P\ge(a+b+c)-\frac{2}{9}(a+b+c)-\frac{4}{9}(ab+bc+ca)\ge\frac{7}{9}(a+b+c)-\frac{4}{9}\frac{(a+b+c)^2}{3}=1$

Ta có điều phải chứng minh,dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:a = b = c = 1.

Bài 182:Cho a,b,c,x,y,z là các số thực thay đổi thỏa mãn: $(x+y)c-(a+b)z=\sqrt{6}$

Tìm GTNN của: $F=a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2+$ ax+by+cz

Lời giải:Ta có:

$$2F=a^2+b^2+c^2+x^2+y^2+z^2+(x+a)^2+(b+y)^2+(c+z)^2$$
$$\ge\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{(x+y)^2}{2}+c^2+z^2+\frac{(x+y+a+b)^2+(c+z)^2}{2}$$

Đặt $a+b=d\sqrt{2},x+y=t\sqrt{2}$ khi đó từ $(x+y)c-(a+b)z=tc-dz=\sqrt{3}$

Lúc này $2F\ge d^2+t^2+c^2+z^2+(d+t)^2+(c+z)^2$

Suy ra $F\ge T=(t+\frac{d}{2})^2+(z+\frac{c}{2})^2+\frac{3(c^2+d^2)}{4}$

Xét hệ tọa độ ozt có điểm M(-c/2;-d/2) và đường thẳng $\Delta: dz-tc+\sqrt{3}=0$

Với mọi điểm :

$A(z;t)\in\Delta\Rightarrow MA\ge d(M/\Delta)$

$\Leftrightarrow(z+\frac{c}{2})^2+(t+\frac{d}{2})^2\ge\frac{3}{c^2+d^2}$

Suy ra $F\ge T\ge\frac{3}{c^2+d^2}+\frac{3(c^2+d^2)}{4}\ge 3$

Vậy MinF =3 khi và chỉ khi: $a=b=1,c=0,x=y=-\frac{1}{2},z=\frac{\sqrt{6}}{2}$

Bài 183:Cho a,b,c>0.Chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{(1+a+b^2)(1+a+c^2)}}+\frac{1}{\sqrt{(1+b+c^2)(1+b+a^2)}}+\frac{1}{\sqrt{(1+c+a^2)(1+c+b^2)}}\le\frac{3+ab+bc+ca}{2(ab+bc+ca)}$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Lời giải:Để ý:

$$(a+b+c)^2=(1.c+\sqrt{a}.\sqrt{a}+b.1)^2\le(1+a+b^2)(c^2+a+1)$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{(1+a+b^2)(c^2+a+1)}}\le\frac{1}{a+b+c}$$

Làm tương tự và cuối cùng ta có:$VT\le\frac{3}{a+b+c}$

Mà $\frac{3}{a+b+c}\le\frac{9+(a+b+c)^2}{2(a+b+c)^2}\Leftrightarrow 6(a+b+c)\le(a+b+c)^2+9$,hiển nhiên đúng theo Cauchy.

Mà ta lại có $\frac{9+(a+b+c)^2}{2(a+b+c)^2}=\frac{\frac{9}{(a+b+c)^2}+1}{2}\le\frac{\frac{9}{3(ab+bc+ca)}+1}{2}=\frac{3+ab+bc+ca}{2(ab+bc+ca)}$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 1.

Bài 184:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{a}}{b+c}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{b}}{c+a}+\frac{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{c}}{a+b}\ge\frac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{a+b+c}}$$

Lời giải:Ta có thể chuẩn hóa $a+b+c=1$,bất đẳng thức được viết lại dưới dạng:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{\sqrt{a}}{1-a}+\frac{\sqrt{b}}{1-b}+\frac{\sqrt{c}}{1-c}\ge\frac{9+3\sqrt{3}}{2}$$

Mà $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge\frac{9}{2(a+b+c)}=\frac{9}{2}$

$\frac{\sqrt{a}}{1-a}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}a\Leftrightarrow a(1-a)^2\le\frac{4}{27}$,hiể nhiên vì theo Cauchy thì:

$a(1-a)^2=\frac{1}{2}.2a.(1-a)(1-a)\le\frac{1}{2}(\frac{2a+1-a+1-a}{3})^3=\frac{4}{27}$

Do đó $\frac{\sqrt{a}}{1-a}+\frac{\sqrt{b}}{1-b}+\frac{\sqrt{c}}{1-c}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2}(a+b+c)=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

Từ các điều trên ta có điều phải chứng minh.

Bài 185:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác,chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{b+c-a}}+\frac{b}{\sqrt{c+a-b}}+\frac{c}{\sqrt{a+b-c}}\ge\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Lời giải 1:Sử dụng svac-xơ ta có:

$$VT\ge\frac{2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{\sum(\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a})}\ge\frac{2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Lời giải 2:Đặt $x=b+c-a, y=c+a-b, z=a+b-c$.

Bất đẳng thức tương đương với:

$\frac{1}{2}(\frac{y+z}{\sqrt{x}}+\frac{z+x}{\sqrt{y}}+\frac{x+y}{\sqrt{z}})\ge\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x})$

$\Leftrightarrow\sqrt{xy}(x+y)+\sqrt{yz}(y+z)+\sqrt{zx}(z+x)\ge\sqrt{2xyz}(\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x})$

Mà theo Cauchy và bunhiacop-xki ta có:

$$\begin{cases}\sqrt{xy}(x+y)+\sqrt{yz}(y+z)+\sqrt{zx}(z+x)\ge 2(xy+yz+zx)\\ \sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\le\sqrt{6(x+y+z)}\end{cases}$$

Vậy cuối cùng ta chỉ cần chứng minh:

$xy+yz+zx\ge\sqrt{3xyz(x+y+z)}\Leftrightarrow(xy+yz+zx)^2\ge 3xyz(x+y+z)$,hiển nhiên.

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 186:Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$,tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $p=xy+yz+nzx$, $n\in R^+$

Lời giải:Ta có:

$$p=xy+yz+nzx\le\sqrt{2y^2(x^2+z^2)}+\frac{n(x^2+z^2)}{2}$$

$$=\sqrt{2y^2(1-y^2)}+\frac{n}{2}(1-y^2)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4y^2-4y^4}+\frac{n}{4}(1-2y^2)+\frac{n}{4}$$

$$\le\sqrt{(\frac{1}{2}+(\frac{n}{4})^2)(4y^2-4y^4+(1-2y^2)^2)}+\frac{n}{4}=\frac{n+\sqrt{n^2+8}}{4}$$

Vậy Max $P=\frac{n+\sqrt{n^2+8}}{4}\Leftrightarrow x=z$ và y thỏa mãn phương trình:

$$(n^2+8)y^4-(n^2+8)y^2+2=0\text{ ,với } 0<y^2<1.$$

Bài 187:Cho 3 số thực không âm x,y,z và $xy+yz+zx=1$. Chúng minh:

$$\sqrt{x^3+x}+\sqrt{y^3+y}+\sqrt{z^3+z}\ge 2\sqrt{x+y+z}$$

Lời giải:Bình phương 2 vế ta được và rút gọn ta được:

$$(x^3+y^3+z^3)-3(x+y+z)+2\sum\sqrt{(x^3+x)(y^3+y)}\ge 0$$

Để ý là: $x^3+x=x(x^2+1)=x(x+y)(x+z)$,đo đó,bất đẵng thức trở thành:

$$(x^3+y^3+z^3)-3(x+y+z)(xy+yz+zx)+2\sum(x+y)\sqrt{xy(x+z)(y+z)}\ge 0 \text{ (i)}$$

Mà:

$$2\sum(x+y)\sqrt{xy(x+z)(y+z)}\ge 2\sum(x+y)\sqrt{xy}(z+\sqrt{xy})=2\sum xy(x+y)+2\sum(x+y)\sqrt{xy}z$$

$$\ge 2\sum xy(x+y)+12xyz$$

Do đó: $VT(i)\ge x^3+y^3+z^3+3xyz-\sum xy(x+y)\ge 0$ (đúng)

Bài 188:Cho 3 số dương x,y,z thỏa mãn $x+y+z=\frac{yz}{3x}$,chứng minh: $x\le\frac{2\sqrt{3}-3}{6}(y+z)$

Lời giải:Ta dễ có $3x^2+3(y+z)x=yz\le\frac{(y+z)^2}{4}\Leftrightarrow 12x^2+12(y+z)x-(y+z)^2\le 0$

Đến đây ta chỉ cần gpt bậc 2 thôi

Ta có $\Delta=48(y+z)^2\Leftrightarrow 0<x\le\frac{-6(y+z)+4\sqrt{3}(y+z)}{12}=\frac{2\sqrt{3}-3}{6}(y+z)$,ta suy ra đpcm.

Bài 189:Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau đây:

$$A=x+\frac{y^2}{9x}+\frac{3z^2}{32y}+\frac{2}{z}$$

Lời giải:Áp dụng bất đẳng thức cô si cho 8 số:

$$A=x+\frac{y^2}{9x}+\frac{3z^2}{64y}+\frac{3z^2}{64y}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{2z}+\frac{1}{2z}\ge 2$$

Vậy Min A = 2 khi và chỉ khi $x=\frac{y^2}{9x}=\frac{3z^2}{64y}=\frac{1}{2z}$

Bài 190:Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của tam giác,chứng minh:

$$\frac{a^2-bc}{4a^2+5bc}+\frac{b^2-ca}{4b^2+5ca}+\frac{c^2-ab}{4c^2+5ab}\ge 0$$

(Dương Đức Lâm)

Lời giải: (Dương Đức Lâm)Bất đẳng thức tương đương:

$$\Leftrightarrow \sum (a-b)(\frac{a+c}{4a^2+5bc}-\frac{b+c}{4b^2+5ca})=\sum (a-b)^2\frac{5c^2+c(a+b)-4ab}{(4a^2+5bc)(4b^2+5ca)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum S_c(a-b)^2\ge 0$$

Với $S_c=(4c^2+5ab)(5c^2+ca+cb-4ab)$,tương tự cho S_a,S_b

Kg mất tính tổng quát ta giả sử: $b+c\ge a\ge b\ge c\Rightarrow S_a\ge S_b\ge 0$ .Ta sẽ chứng minh:

$S_b+S_c\ge 0$ .Thật vậy:

$S_b+S_c=20(b^4+c^4)+4b^3(c+a)+4c^3(a+b)+14abc(b+c)+10a^2bc-20a^2(b^2+c^2)=f(a)$

hàm số f(a) là hàm bậc hai với biến a với hệ số a âm,nên ta suy ra: $f(a)\ge \min\{\text{f(b),f(b+c)}\}$

Trong đó: $f(b)=4b^4+20c^4+25b^3c+5bc^3+3bc(b-c)^2\ge 0$

Và $f(b+c)=4(b^2+c^2)(b-c)^2\ge 0$

Vậy $S_b+S_c\ge 0$,do đó:

$\sum S_a(b-c)^2=(S_a+S_b)(b-c)^2+(S_b+S_c)(a-b)^2+2S_b(a-b)(b-c)\ge 0$

Bđt đả được chứng minh.Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi a = b = c hoặc a =2b = 2c và các hoán vị.

Bài 191:Cho a,b,c là 3 số thực dương thỏa mãn abc=1,chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{b^3}{(1+c)(1+a)}+\frac{c^3}{(1+a)(1+b)}\ge\frac{3}{4}$$

Lời giải 1:

Áp dụng côsi ta có: $\frac{a^3}{(1+b)(1+c)}+\frac{1+b}{8}+\frac{1+c}{8}\ge\frac{3a}{4}$,tương tự được thêm 2bđt nửa,tư 3 bđt trên ta suy ra: $VT\ge\frac{1}{2}(a+b+c)-\frac{3}{4}\ge\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

Lời giải 2: $a\ge b\ge c\Rightarrow\begin{cases}a^3\ge b^3\ge c^3\\ \frac{1}{(1+b)(1+c)}\ge\frac{1}{(1+c)(1+a)}\ge\frac{1}{(1+a)(1+b)}\end{cases}$

Nên theo chebyshev ta có:

$$VT\ge\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\sum_{cyc}\frac{1}{(1+b)(1`+c)}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}.\frac{3+a+b+c}{(1+a)(1+b)(1+c)}\ge\frac{x^2(3+3x)}{(1+x)^3}$$

Với $x=\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}=1$ .Ta cần chứng minh: $\frac{x^2(3+3x)}{(1+x)^3}\ge\frac{3}{4}\Leftrightarrow (x-1)(3x+1)\ge 0$

Đúng ,điều phải chứng minh.

Lời giải 3:Bất đẳng thức tương đương với:

$$4(a^4+b^4+c^4+a^3+b^3+c^3)\ge 3(2+a+b+c+ab+bc+ca)$$

Ta có: $\begin{cases} a^3+2\ge 3a, b^3+2\ge 3b, c^3+2\ge 3c \\ 4(a^4+b^4+c^4)\ge 12\sqrt[3]{a^4b^4c^4}=12 \\ a^3+b^3+c^3\ge \dfrac{(a+b+c)^3}{9}\ge \dfrac{3\sqrt[3]{abc}(a+b+c)^2}{9}\ge \dfrac{3(ab+bc+ca)}{3}=ab+bc+ca \end{cases}$

Từ các bất đẳng thức trên ta suy ra điều phải chứng minh.

Lời giải 4:Ta có:

$$VT=\frac{a^4+b^4+c^4+a^3+b^3+c^3}{(1+a)(1+b)(1+c)}\ge \frac{3(a^4+b^4+c^4+a^3+b^3+c^3)}{(1+a)^3+(1+b)^3+(1+c)^3}$$

Với x>0,ta xét: $x^4+x^3-\dfrac{1}{4}(1+x)^3=\dfrac{1}{4}(x+1)(x-1)(4x^2+3x+1)=\dfrac{x-1}{4}f(x)$

Ta có: $f'(x)>0,\forall x>0$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $a\ge b\ge c\Rightarrow a\ge 1, c\le 1$

Khi đó ta dễ có:

$$\begin{cases} (a-1)f(a)\ge (a-1)f(b) \\ (c-1)f(c)\ge (c-1)f(b) \\ (b-1)f(b)=b-1)f(b) \end{cases}\Rightarrow (a-1)f(a)+(b-1)f(b)+(c-1)f(c)\ge (a+b+c-3)f(b)\ge 0$$

Hiển nhiên.Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 192:Cho a,b,c là độ dài ba cạch của một tam giác,chứng minh:

$$\frac{a^2b}{c}+\frac{b^2c}{a}+\frac{c^2a}{b}\ge a^2+b^2+c^2$$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương:

$$\frac{c^2(a-b)^2}{ab}+\frac{(c^2+ac-bc)(a-c)(b-c)}{ac}\ge 0$$

Từ đây ta giả sử c = min{a,b,c} thì ta có: $a^2+ac-bc=a(a+c)-bc\ge b(a-c)\ge 0$

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

Bài 193:Cho $a,b,c,d\in R^+, a+b+c+d=4$ .Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$P=a^2b^2cd+ab^2c^2d+abc^2d^2+a^2bcd^2+a^2bc^2d+ab^2cd^2$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Lời giải:

$$P=abcd(ab+cd+bc+ad+ac+bd)=\frac{abcd}{2}[(a+c)(b+d)+(a+b)(c+d)+(a+d)(b+c)]$$

$$\le \frac{(\frac{a+b+c+d}{4})^4}{2}.3.(\frac{a+b+c+d}{2})^2=\frac{3(a+b+c+d)^6}{2048}=\frac{3.4^6}{2048}=6$$

Vậy MaxP = 6 khi va chỉ khi a = b = c = d = 1.

Bài 194:Cho a,b,c ≥ 0 và không có hai số nào đồng thời bằng 0.Chứng minh:

$$a^2+b^2+c^2+\frac{8abc(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2(ab+bc+ca)$$

Lời giải:Chuẩn hóa $q=ab+bc+ca=1$,bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$p^2-2+\dfrac{8r}{p-r}-2\ge 0\Leftrightarrow (p^3-4p+9r)+(3-p^2)r\ge 0$,hiển nhiên đúng theo schur bậc 1 và $p\le\sqrt{3}$.

Bài 195:Cho các số thực x_i,($i=\overline{1,n}$) và thỏa mãn: $\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}x_ix_j+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=C_2^n+n$

Chứng minh: $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\ge n$

(Nguyễn Xuân Huy)

Lời giải:Ta dễ có:

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ge\frac{(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)^2}{n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum\limits_{\substack{i=1\\ i\ne j}}^{n}x_ix_j}{n}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+2(C_2^n+n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i)}{n}=\frac{2C_2^n+n+\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-1)^2}{n}$$

$$\ge\frac{2C_2^n+n}{n}=\frac{2.\dfrac{n!}{2!(n-2)!}+n}{n}=\frac{2.\dfrac{(n-1)n}{2}+n}{n}=n$$

Ta có điều phải chứng minh.dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_i=x_j=1$.

Bài 196:Cho a,b,c là các số thực không âm,chứng minh:

$$(a^2+b^2+c^2)^2\ge 4(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

Lời giải:Ta đặt $f(a,b,c)=(a^2+b^2+c^2)^2-4(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

Không mất tính tổng quát ta giả sử c = min{a,b,c}

Nếu $a\ge b\ge c\Rightarrow$ hiển nhiên

Nếu $b\ge a\ge c$,ta có:

$f(a,b,c)-f(a,b,0)=c[c(2a^2+2b^2+c^2)+4(b-a)(a^2+ab+b^2-c^2)]\ge 0$

$\Rightarrow f(a,b,c)\ge f(a,b,0)$

Mà $f(a,b,0)=(a^2+b^2)^2+4(a-b)(a+b)ab=(a^2+2ab-b^2)^2\ge 0$,hiển nhiên.

Dấu bằng xảy ra khi $(a,b,c)=((\sqrt{2}-1)t,t,0)$ và các hoán vị.

Bài 197:cho a,b,c>0,a+b+c=1,chứng minh: $\sqrt[3]{(\frac{1}{ab}-1)(\frac{1}{bc}-1)(\frac{1}{ca}-1)}\ge 8$

Lời giải: $VT=\dfrac{(1-ab)(1-bc)(1-ca)}{(abc)^2}$

Ta có:

$$1-ab\ge 1-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{(2+a+b)(2-a-b)}{4}=\frac{[(1+a)+(1+b)](1+c)}{4}\ge\frac{(1+c)\sqrt{(1+a)(1+b)}}{2}$$

Bài 198:cho x,y,z,t là các số thực không âm thỏa mãn $x+z=y+t=1$, a,b là các hằng số dương,chứng minh $1\le \frac{ax^2+by^2}{\text{ax+by}}+\frac{az^2+bt^2}{az+bt}\le 2$

Lời giải:Từ gt ta có $0\le x,y,z,t\le 1$ nên ta có:

$P=\frac{ax^2+by^2}{\text{ax+by}}+\frac{az^2+bt^2}{az+bt}\le \frac{\text{ax+by}}{\text{ax+by}}+\frac{az+bt}{az+bt}=2$,dấu '=' xảy ra khi và chỉ khi $x=t=1, z=y=0$ và các hoán vị của chúng.

Bây giờ ta đi chứng minh: $\frac{ax^2+by^2}{\text{ax+by}}+\frac{az^2+bt^2}{az+bt}\ge 1$ (i)

$(i)\Leftrightarrow a^2(x^2z+z^2x-zx)+b^2(y^2t+t^2y-yt)+ab[(x^2t+t^2x-xt)+(y^2z+z^2y-yz)]\ge 0$

$\Leftrightarrow a^2zx(z+x-1)+b^2yt(y+t-1)+ab[xt(x+t-1)+yz(y+z-1)]\ge 0$

$\Leftrightarrow x(1-y)(x-y)+y(1-x)(y-x)\ge 0 \Leftrightarrow (x-y)^2\ge 0 \Leftrightarrow$ đpcm.

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y, z=t \\ x+z=1 \\ y+t=1 \\ x,y,z,t\ge 0, x+y\ne 0, z+t\ne 0 \end{cases}$

Bài 199:Cho a,b,c là số đo độ dài các cạnh của tam giác mà $a\le b\le c$.

Chứng minh rằng: $\frac{a^4}{b+c}+\frac{b^4}{c+a}+\frac{c^4}{a+b}<2(a^2c+b^2a+c^2b)$.

Lời giải:

Dễ thấy $\frac{c^2}{a+b}$(a+b-c)>0; $\frac{b^2}{a+c}$(a+c-b)>0; $\frac{a^2}{b+c}$(b+c-a)>0.

Từ các bất đẳng thức trên suy ra:

$$a^2+b^2+c^2>\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)\,(a^2+b^2+c^2)>\frac{a^4}{b+c}+\frac{b^4}{c+a}+\frac{c^4}{a+b}+a^3+b^3+c^3$$

$$\Leftrightarrow a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)>\frac{a^4}{b+c}+\frac{b^4}{c+a}+\frac{c^4}{a+b} \quad (1)$$

Lài có $a^2+b^2>2ab$; $b^2+c^2>2bc$; $a^2+c^2>2ac$ và $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2$; $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge 2$; $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$.

Do đó từ (1) suy ra:

$$abc\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)>\frac{a^4}{b+c}+\frac{b^4}{c+a}+\frac{c^4}{a+b}$$

Nhưng $a\le b\le c$, nên $\frac{(b-a)(c-b)(c-a)}{abc}\ge 0$

Hay $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge \frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}$.

Suy ra $2abc\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)> \quad \frac{a^4}{b+c}+\frac{b^4}{c+a}+\frac{c^4}{a+b}$

$$\Leftrightarrow \frac{a^4}{b+c}+\frac{b^4}{c+a}+\frac{c^4}{a+b}<2(a^2c+b^2a+c^2b).$$

Bài 200:cho a,b,c>0,chứng ,minh: $\frac{a^4}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^4}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^4}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}$

Lời giải:Bất đẳng thức:

$$\Leftrightarrow \frac{a^4}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^4}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^4}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{3abc}{a+b+c}+a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$\Leftrightarrow \sum\left(\frac{a^4}{a^2+ab+b^2}-a^2+ab\right)\geq\frac{3abc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum\frac{ab^3}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{3abc}{a+b+c}$$

Mà $\sum\frac{ab^3}{a^2+ab+b^2}=\sum\frac{b^2}{1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}\geq\frac{abc(a+b+c)}{ab+bc+ca}$

cuối cùng ta cần chứng minh $\frac{abc(a+b+c)}{ab+bc+ca}\geq\frac{3abc}{a+b+c}\Leftrightarrow(a+b+c)^2\geq3(ab+bc+ca)$

Bài 201:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$,chứng minh:

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\leq\frac{1}{4}$$

Lời giải:Nếu $a<\frac{9}{5}$ thì $\frac{1}{5a^2-4a+11}\leq\frac{1}{24}(3-a)\Leftrightarrow(a-1)^2(5a-a)\leq0$,đúng.

Do đó nếu $a,b,c<\frac{9}{5}$ thì ta có:$VT\leq\frac{1}{24}(9-(a+b+c))=\frac{1}{4}$

Nếu trong ba số a,b,c có một số lớn hơn $\frac{9}{5}$,giả sử số đó là a thì

$$5a^2-4a+11=5a(a-\frac{4}{5})+11\geq5.\frac{9}{5}(\frac{9}{5}-\frac{4}{5})+11=20\Leftrightarrow\frac{1}{5a^2-4a+11}\leq\frac{1}{20}$$

$$5b^2-4b+11=5(b-\frac{2}{5})^2+11-\frac{4}{5}\geq11-\frac{4}{5}>10\Leftrightarrow\frac{1}{5b^2-4b+11}<\frac{1}{10}$$

Tương tự $\frac{1}{5c^2-4c+11}<\frac{1}{10}$

Do đó:$VT<\frac{1}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{4}$

Bài 202:Cho a,b,c >0,chứng minh:$16abc(a+b+c)\leq3\sqrt[3]{(a+b)^4(b+c)^4(c+a)^4}$

Lời giải1: Sd $(a+b)(b+c)(c+a)\geq\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Ta có:

$$\sqrt[3]{(a+b)^4(b+c)^4(c+a)^4} = (a+b)(b+c)(c+a)\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
$$\geq \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)\sqrt[3]{\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$
$$\geq \frac{8}{9}(a+b+c)(3\sqrt[3]{a^2b^2c^2})\sqrt[3]{8abc} = \frac{16}{3}abc(a+b+c)$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(a+b)^4(b+c)^4(c+a)^4} \geq 16abc(a+b+c)$$

(đpcm).

Lời giải 2: Ta có:

$(a+b)(b+c)(c+a) = ab(a+b+c) + bc(a+b+c) + ac^2 + a^2c$

Áp dụng cô sic ho 8 số dương gồm:

3 số $\frac{1}{3}ab(a+b+c)$,3 số $\frac{1}{3}bc(a+b+c)$,1 số a^2c và 1 số ac^2 ta được:

$$\text{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 8\sqrt[8]{\frac{(ab)^3(bc)^3(a+b+c)^6(ca)^3}{3^6}} = 8\sqrt[4]{(\frac{abc(a+b+c)}{3})^3}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\text{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq 2\sqrt[4]{\frac{abc(a+b+c)}{3}}$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(a+b)^4(b+c)^4(c+a)^4} \geq 16abc(a+b+c)$$

Bài 203:Cho a,b,c >0,chứng minh:

$$2(a^2+b^2+c^2) + 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq (a+b+c)^2$$

Lời giải:

Bất đẵng thức cần chứng minh tương đương với:

$$a^2+b^2+c^2+3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 2(ab+bc+ca)$$

Ta có:

$$3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \frac{3abc}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{9abc}{a+b+c} \geq 4(ab+bc+ca) - (a+b+c)^2$$
$$= 2(ab+bc+ca) - (a^2+b^2+c^2)$$

Từ đây suy ra đpcm.

Bài 204:Cho $a,b,c \in R^+$,chứng minh:

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương:

$$\frac{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geq \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{ab+bc+ca}$$
$$\Leftrightarrow S_c(a-b)^2 + S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 \geq 0$$

Với $S_c = \frac{(a+b)^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} - \frac{1}{ab+bc+ca}$

Bài 205:Cho a,b,c là 3 số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a^3+2}{3b+4c}+\frac{b^3+2}{3c+4a}+\frac{c^3+2}{3a+4b}\ge\frac{9}{7}$$

Lời giải:Ta có:

$$\frac{a^3+2}{3b+4c}+\frac{b^3+2}{3c+4a}+\frac{c^3+2}{3a+4b}\ge 3\left(\frac{a}{3b+4c}+\frac{b}{3c+4a}+\frac{c}{3a+4b}\right)\ge\frac{3(a+b+c)^2}{7(ab+bc+ca)}\ge\frac{3.3(ab+bc+ca)}{7(ab+bc+ca)}=\frac{9}{7}$$

Điều phải chứng minh.

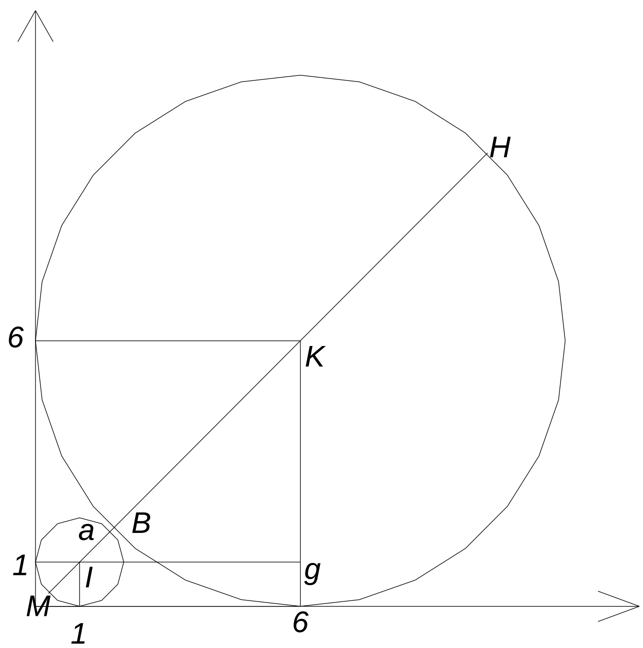
Bài 728:Cho a,b,c,d là các số thực thỏa mãn $a^2+b^2+1=2(a+b),c^2+d^2+36=12(c+d)$

Chứng minh: $5\sqrt{2}-7\le\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\le 5\sqrt{2}+7$

Lời giải :

Ta xét 2 pt đường tròn $\begin{cases}(x-1)^2+(y-1)^2=1,(1)\\(x-6)^2+(y-6)^2=36,(2)\end{cases}$

$a,b\in(1);c,d\in(2)$,Khi đó:



Ta dễ có $AB\le\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\le AH$

Mà $AB=IK-IA-IB=\sqrt{25+25}-(6+1)=5\sqrt{2}-7$

$AH=IK+IM+KH=5\sqrt{2}+1+6=5\sqrt{2}+7$

Ta suy ra đpcm.

Dấu bằng xảy ra các bạn tự tìm nhé,dựa vào tính chất hình học ở trên thôi.

Bài 206:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $c\le a$ và $3a^2+4b^2+5c^2\le 12$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$

Lời giải :

Áp dụng Cauchy ta có:

$$P=\frac{1}{2}(2.\frac{1}{a}+4.\frac{1}{b}+6.\frac{1}{c})\geq\frac{6}{\sqrt[12]{a^2.b^2.b^2.c^2.c^2.c^2}}\geq\frac{6}{\sqrt[12]{(\frac{a^2+2b^2+3c^2}{6})^2}}$$

$$=\frac{6}{\sqrt[12]{(\frac{2a^2+4b^2+6c^2}{12})^2}}\geq\frac{6}{\sqrt[12]{(\frac{3a^2+4b^2+5c^2}{12})^2}}\geq 6$$

Bài 207:Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=1$,tìm giá trị lớn nhát của:

$$P=(x+2y+3z)(6x+3y+2z)$$

Lời giải 1:

$$2P=(2x+4y+6z)(6x+3y+2z)\leq\frac{(8(x+y+z)-y)^2}{4}=\frac{(8-y)^2}{4}\leq\frac{8^2}{4}=16\Leftrightarrow P\leq 8$$

Vạy maxP = 8 khi vfà chỉ khi: $x=z=\frac{1}{2},y=0$

Lời giải 2:

$$P=6x^2+6y^2+6z^2+15xy+13yz+20zx=6(x+y+z)^2+3xy+yz+8zx$$

$$=6(x+y+z)^2+3x(y+z)+5y(y+z)-5yz$$

$$\leq 6(x+y+z)^2+\frac{3(x+y+z)^2}{4}+\frac{5(x+y+z)^2}{5}=8(x+y+z)^2=8$$

Bài 208:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác,chứng minh:

$$9(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)\geq(a+b+c)^4$$

Lời giải:

Bất đẳng thức $\Leftrightarrow 9(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)\geq(a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca))^4$

Ta đặt $x=a^2+b^2+c^2, y=ab+bc+ca$,ta có $x\geq y$

Bất đẳng thức trở thành: $9xy\geq(x+2y)^2\Leftrightarrow x^2+4y^2-5xy\leq 0\Leftrightarrow(x-y)(x-4y)\leq 0$

Ta cần chứng minh: $x-4y\leq 0\Leftrightarrow 4(ab+bc+ca)\geq a^2+b^2+c^2$

Thật vậy,do a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên ta có:

$$\begin{cases} b+c>a\Rightarrow a(b+c)>a^2 \\ c+a>b\Rightarrow b(c+a)>b^2 \\ a+b>c\Rightarrow c(a+b)>c^2 \end{cases}\Leftrightarrow 2(ab+bc+ca)>a^2+b^2+c^2$$

Suy ra đpcm.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

Bài 209:Cho a,b,c là các số thực không âm,chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a+b}}{c}+\frac{\sqrt{b+c}}{a}+\frac{\sqrt{c+a}}{b}\geq 3\sqrt{\frac{2(a+b+c)}{ab+bc+ca}}$$

Lời giải :Sử dụng $(a+b)(b+c)(c+a)\geq\frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Ta có: $VP\leq\frac{9}{2}\frac{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}{ab+bc+ca}$

Ta càn chứng minh: $2(ab+bc+ca)\sum \frac{1}{c\sqrt{(c+a)(c+b)}} \ge 9$

Mà theo bunhiacop-xki ta có:

$$VT=(\sum c(a+b))(\sum \frac{1}{c\sqrt{(c+a)(c+b)}}) \ge (\sum \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt[4]{(c+a)(c+b)}})^2 \ge 9$$

Đúng,theu Cauchy.

Bài 210:Cho a,b,c là các số thực không âm,chứng minh rằng:

$$\sqrt{\frac{ab(a+b)}{c}}+\sqrt{\frac{ca(c+a)}{b}}+\sqrt{\frac{bc(b+c)}{a}} \ge \sqrt{6(ab+bc+ca)}$$

Lời giải :Sử dụng holder ta có:

$$VT^2.(\sum \frac{a^2b^2c}{a+b}) \ge (ab+bc+ca)^3 \ge 3abc(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Ta cần chứng minh: $abc(a+b+c) \ge 2\sum \frac{a^2b^2c}{a+b}$,hiển nhiên đúng,vì:

$$2\sum \frac{a^2b^2c}{a+b} = abc\sum \frac{2ab}{a+b} \le abc\sum \frac{a+b}{2} = abc(a+b+c)$$

Bài 211:cho a,b, φ là số thực thỏa mãn bất phương trình
sau: $f(x)=a\cos 2x+b\cos(x-\varphi)+1 \ge 0$
Với $\forall x \in R$. Chứng minh $f(x) \le 3, \forall x \in R$.

Lời giải:Để ý rằng: $\cos\alpha+\cos(\alpha+\frac{2\pi}{3})+\cos(\alpha+\frac{4\pi}{3})=0 \forall \alpha \in R$

Do đó:

$$\cos 2x+\cos(2x+\frac{2\pi}{3})+\cos(2x+\frac{4\pi}{3})=0 \forall x \in R$$

Mà ta lai có:

$$f(x+\frac{2\pi}{3})=a\cos(2x+\frac{4\pi}{3})+b\cos(x+\frac{2\pi}{3}-\varphi)+1$$

$$f(x+\frac{4\pi}{3})=a\cos(2x+\frac{2\pi}{3})+b\cos(x+\frac{4\pi}{3}-\varphi)+1$$

Suy ra:

$$f(x)+f(x+\frac{2\pi}{3})+f(x+\frac{4\pi}{3})=3, \text{mà } f(x+\frac{2\pi}{3}) \ge 0; f(x+\frac{4\pi}{3}) \ge 0 \Rightarrow f(x) \le 3 \forall x \in R.$$

Bài 212:cho3 số thực x,y,z thỏa mãn: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ y^2+yz+z^2=16 \end{cases}$

Chứng minh rằng: $xy+yz+zx \le 8$

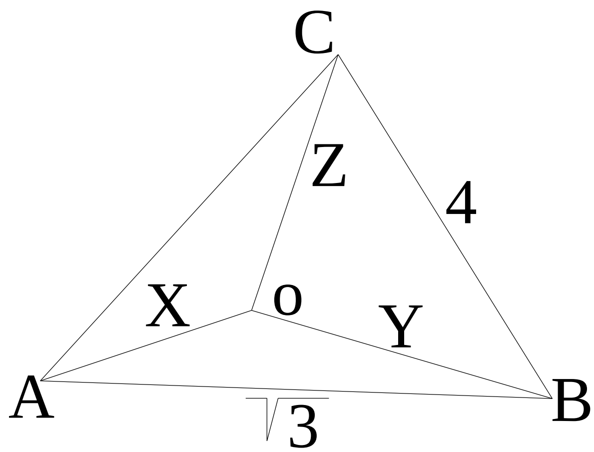
Lời giải 1:Từ gt ta có:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{3}(y+\dfrac{x}{2})^2+\dfrac{x^2}{4}=1\\ \dfrac{1}{16}(y+\dfrac{z}{2})^2+\dfrac{3z^2}{64}=1\end{cases}\Leftrightarrow(\frac{1}{3}(y+\frac{x}{2})^2+\frac{3z^2}{64})+(\frac{1}{16}(y+\frac{z}{2})^2+\frac{x^2}{4})=2$$

Áp dụng cô si ta được:

$2\ge\frac{1}{4}[(y+\frac{x}{2})z+(y+\frac{z}{2})x]\Leftrightarrow xy+yz+zx\le 8$ (đpcm).

Lời giải 2:



Trường hợp x,y,z >0 ta dựng $OA=x,OB=y,OC=z$ và $\widehat{AOB}=\widehat{BOC}=\widehat{COA}=120^0$

Ta có:

$AB^2=x^2+y^2-2xy\cos 120^0=3\Leftrightarrow AB=\sqrt{3}$,tương tự $BC=4$

Mặt khác ta có:

$$S_{\Delta OAB}+S_{\Delta OBC}+S_{\Delta OCA}=S_{\Delta ABC}\le\frac{1}{2}AB.BC=2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx)\le 2\sqrt{3}\Leftrightarrow xy+yz+zx\le 8$$

Trường hợp x,y,z có 2 số trái dấu thì:

$xy+yz+zx\le|x||y|+|y||z|+|z||x|\le 8$,đúng theo trường hợp trên.

Bài 213:Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: P = $\sum_{cyc}\frac{1}{xa+yb+zc}$,với a,b,c >0 và

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le k$ (k> 0).

Lời giải:

Áp dụng Svac-xo ta có: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{x^2}{xa}+\frac{y^2}{yb}+\frac{x^2}{zc}\ge\frac{(x+y+z)^2}{xa+yb+zc}=\frac{s^2}{xa+yb+zc}$

(Với s = x + y + z)

Suy ra : $\frac{1}{xa+yb+zc}\le\frac{1}{s^2}(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c})$ (1)

Tương tự ta cũng có : $\frac{1}{xb+yc+za} \le \frac{1}{s^2}(\frac{x}{b}+\frac{y}{c}+\frac{z}{a})$ (2); $\frac{1}{xc+ya+zb} \le \frac{1}{s^2}(\frac{x}{c}+\frac{y}{a}+\frac{z}{b})$ (3)

Cộng vế theo vế (1),(2) và (3) ta được: P $\le \frac{s}{s^2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = \frac{1}{s}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}) = \frac{k}{s} = \frac{k}{x+y+z}$

Vậy Max P = $\frac{k}{x+y+z} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{k}{3}$

Bài 214:Cho $a,b,c \in R^+$ thoả mãn: abc = a + b + c.Chứng minh:

$$P = \frac{1}{4a^2+3b^2+5c^2}+\frac{1}{4b^2+3c^2+5a^2}+\frac{1}{4c^2+3a^2+5b^2} \le \frac{1}{12}$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Lời giải:Ta có $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=1$

Để ý: $4a^2+3b^2+5c^2 = (a^2+b^2)+2(b^2+c^2)+3(c^2+a^2) \ge 2ab+4bc+6ca$

Do đó: $P \le \frac{1}{2}(\frac{1}{ab+2bc+3ca}+\frac{1}{bc+2ca+3ab}+\frac{1}{ca+2ab+3bc})$

Theo bài trên ta có: $P \le \frac{1}{2}.\frac{1}{1+2+3} = \frac{1}{12}$

Bài 215:Cho a,b,c >0,chứng minh:

$$(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c}}) \le 6+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$$

Lời giải: Đặt x= $\sqrt[3]{a}, y=\sqrt[3]{b}, z=\sqrt[3]{c}$ thì bđt tương đương với:

$$\frac{y+z}{x}+\frac{z+x}{y}+\frac{x+y}{z} \le \frac{x^3+y^3+z^3+3xyz}{xyz} \Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+3xyz \ge \sum_{cyc} xy(x+y) \text{ (đúng)}$$

Bài 216:Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2=1$,chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}})^2 \ge 2\sqrt{2}.$$

Lời giải 1:

Ta có $P = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}})^2 = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{a}{b}-\frac{b}{a}+2 = \frac{1-b}{a}+\frac{1}{b}-\frac{a}{b}+1$ (1)

Từ $a^2+b^2=1$ ta có thể đặt $a = S\text{in} A, b = \text{Cos A}$,Với $0 < A < \frac{\pi}{2}$

Khiđó P = $\frac{1-\text{CosA}}{SinA}+\frac{1}{\text{CosA}}-tgA+2 = tg\frac{A}{2}+\frac{1+tg^2\frac{A}{2}}{1-tg^2\frac{A}{2}}-2\frac{tg\frac{A}{2}}{1-tg^2\frac{A}{2}}+2$.đặt x = $tg\frac{A}{2}$

Ta xét hàm số:

$$f(x) = x+\frac{1+x^2}{1-x^2}-\frac{2x}{1-x^2} = \frac{-x^3+x^2-x+1}{1-x^2}(x>0),\ f'(x) = \frac{x^4-4x^2+4x-1}{(1-x^2)^2}$$

Với mọi x >0 và khác

1. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^4-4x^2+4x-1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x-\sqrt{2}+1)(x+\sqrt{2}+1)$.

Lập bảng biến thiên và dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số dạt cực tiểu tại x = $\sqrt{2}-1$

Và $f(\sqrt{2}-1)=2\sqrt{2}-2$.đến đây ta suy ra điều phải chứng minh.

Lời giải 2:

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{a}{b}-\frac{b}{a}+2=\frac{1-b}{a}+\frac{1-a}{b}+2$,vì x,,y dương và $a^2+b^2=1$,áp dụng Cauchy ta đươc:

$$\frac{1-b}{a}+\frac{1-a}{b}\ge 2\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{ab}}=2\sqrt{1+\frac{1-(a+b)}{ab}}\ge 2\sqrt{1+2(1-\sqrt{2})}=2\sqrt{2}-2$$

Suy ra:p $\ge 2\sqrt{2}$

Bài 217:Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác và c là cạnh lớn nhất.

Chứng minh: $(a+3b)(b+4c)(c+2a)\ge 60(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Lời giải:

Ta khải triển vế trái được:

VT $=2a^2b+4ac^2+8a^2c+3b^2c+6b^2a+12bc^2+25abc$

Ta áp dụng bđt cô sic ho 60 số gồm:2 số a^2b ,4 số ac^2 ,8 số a^2c ,3 số b^2c ,6 số b^2a ,12 số bc^2 ,25 số abc ta được VT $\ge 60\sqrt[60]{a^{55}b^{57}c^{68}}\ge 60\sqrt[60]{a^{60}b^{60}c^{60}}=60abc$ .Mà ta đả biết bất đẳng thức

$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\le abc$ .Suy ra điều phải chứng minh.

Bài 218:Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương và thoả mãn:a+x=b+y=c+z=1.

Hãy chứng minh: (abc+xyz)$(\frac{1}{ay}+\frac{1}{bz}+\frac{1}{cx})\ge 3$

Lời giải 1:

Từ điều kiện bài toán ta có:

$$\text{VT}=\frac{(abc+xyz)[\text{bc(1-a)(1-c)+ca(1-b)(1-a)+ab(1-b)(1-c)}]}{abc(1-a)(1-b)(1-c)}$$

$$=(\frac{bc}{1-b}+\frac{ca}{1-c}+\frac{ab}{1-a})+\sum\frac{\text{(1-a)(1-c)}}{a}=(\frac{bc}{1-b}+\frac{ca}{1-c}+\frac{ab}{1-a})$$

$$+\sum(\frac{1-c}{a}-1+c)=\sum\frac{1-c}{a}+\sum(\frac{ca}{1-c}+a)-3=\sum\frac{1-c}{a}+\sum\frac{a}{1-c}-3$$

$$=\sum(\frac{1-c}{a}+\frac{a}{1-c})-3\ge 6-3=3\Rightarrow (dpcm)$$

Lời giải 2:

$$\text{(abc+xyz)}(\frac{1}{ay}+\frac{1}{bz}+\frac{1}{cx})=\frac{bc}{y}+\frac{ca}{z}+\frac{ab}{x}+\frac{zx}{a}+\frac{xy}{b}+\frac{yz}{c}$$

$$=(\frac{bc}{y}+c)+(\frac{ca}{z}+a)+(\frac{ab}{x}+b)+(\frac{zx}{a}+z)+(\frac{xy}{b}+x)+(\frac{yz}{c}+y)-(a+b+c+x+y+z)$$

$=\frac{c}{y}+\frac{a}{z}+\frac{b}{x}+\frac{z}{a}+\frac{x}{b}+\frac{y}{c}-6\ge 0$,đúng-theo Cauchy .

Lời giải 3: (Nguyễn Đình Thi) Từ giả thiết ta có: $\frac{a}{x}+1=\frac{1}{x},\frac{b}{y}+1=\frac{1}{y},\frac{c}{z}+1=\frac{1}{z}$

Đặt $\frac{a}{x}=m,\frac{b}{y}=n,\frac{c}{z}=p$ thì $m+1=\frac{1}{x},n+1=\frac{1}{y},p+1=\frac{1}{z}$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại thành:

$$(\frac{abc}{xyz}+1)(\frac{zx}{a}+\frac{xy}{b}+\frac{yz}{c})\ge 3 \Leftrightarrow (mnp+1)(\frac{1}{m(p+1)}+\frac{1}{n(m+1)}+\frac{1}{p(n+1)})\ge 3$$

$$\Leftrightarrow (\frac{mnp+1}{m(p+1)}+1)+(\frac{mnp+1}{n(m+1)}+1)+(\frac{mnp+1}{p(n+1)}+1)\ge 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{p(n+1)}{p+1}+\frac{m(p+1)}{m+1}+\frac{n(m+1)}{n+1}+\frac{m+1}{m(p+1)}+\frac{n+1}{n(m+1)}+\frac{p+1}{p(n+1)}\ge 6$$

Điều này hiển nhiên đúng-theo Cauchy .

Bài 219:Cho a,b,c là các số thực thrn mãn: $a^2+b^2+c^2\le 8$

Chứng minh: $ab+bc+2ca\ge -8$

Lời giải 1:

Từ $(a+b+c)^2\ge 0 \Leftrightarrow ab+bc+ca\ge -\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)\ge -4$

lại có $ac\ge -\frac{a^2+c^2}{2}$,vậy S $\ge -4-\frac{a^2+c^2}{2}\ge -4-\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\ge -4-\frac{8}{2}=-8$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a=2,c=-2,b=0.

Lời giải 2:Bất đẳng thức tương đương:

$$ab+bc+2ca+8\ge a^2+b^2+c^2+ab+bc+2ca=(a+\frac{b}{2}+c)^2+\frac{b^2}{4}\ge 0 \Rightarrow ab+bc+2ca\ge -8$$

Bài 220:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

Lời giải 1:Đặt $x=\frac{b+c}{a},y=\frac{c+a}{b},z=\frac{a+b}{c}\Rightarrow xyz\ge 8$ .Chúng ta cần chứng minh rằng:

$\sum_{cyc}\frac{(x+2)^2}{x^2+2}\le 8 \Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{2x+1}{x^2+2}\le \frac{5}{2}\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(x-1)^2}{x^2+2}\ge \frac{1}{2}$,mà theo Svac-xơ ta có:

$\sum_{cyc}\frac{(x-1)^2}{x^2+2}\ge \frac{(x+y+z-3)^2}{x^2+y^2+z^2+6}$,do đó ta cần chứng minh:

$$2(x+y+z-3)^2\ge x^2+y^2+z^2+6 \Leftrightarrow (x+y+z)^2+2(xy+yz+zx)-12(x+y+z)+12\ge 0$$

Mà $xy+yz+zx\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\ge 12$,do đó bất đẳng thức trở thành:

$(x+y+z)^2-12(x+y+z)+36\ge 0 \Leftrightarrow (x+y+z-6)^2\ge 0$,hiển nhiên.

Ta hoàn tất việc chứng minh.

Lời giải 2:

Để ý $3-\frac{(2x+y+z)^2}{2x^2+(y+z)^2}=\frac{2(y+z-x)^2}{2x^2+(y+z)^2}\ge \frac{2(y+z-x)^2}{2x^2+2(y^2+z^2)}=\frac{(y+z-x)^2}{x^2+y^2+z^2}$

Áp dụng vào bài toán,ta cần chứng minh:

$$(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2 \ge a^2+b^2+c^2 \Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$$

Hiển nhiên.

Bài 221:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge \frac{a+2008}{b+2008}+\frac{b+2008}{c+2008}+\frac{c+2008}{a+2008}$$

Lời giải:Gỉa sử c = min{a,b,c},bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{a-b}{b(b+2008)}+\frac{b-c}{c(c+2008)}+\frac{c-a}{a(a+2008)} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)[\frac{1}{b(b+2008)}-\frac{1}{a(a+2008)}]+(b-c)[\frac{1}{c(c+2008)}-\frac{1}{a(a+2008)}] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+2008}{ab(a+2008)(b+2008)}.(a-b)^2+\frac{c+a+2008}{ca(c+2008)(a+2008)}.(a-c)(b-c) \ge 0$$

Bài 222:Cho a,b,c>0, $a+b+c \ge 3$.Chứng minh:

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b} \le 1$$

Lời giải:Theo bunhiacop-xki;

$$(a^2+b+c)(1+b+c) \ge (a+b+c)^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2+b+c} \le \frac{1+b+c}{(a+b+c)^2}$$

Suy ra:

$$VT \le \frac{3+2(a+b+c)}{(a+b+c)^2}=\frac{3}{(a+b+c)^2}+\frac{1}{a+b+c} \le \frac{3}{9}+\frac{1}{3}=1$$

Điều phải chứng minh.

Bài 223:Cho a,b,c >0, $a^2+b^2+c^2=3$,chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b+c}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+c+a}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+a+b}} \le \sqrt{3}$$

Lời giải:Ta có:

$$(a^2+b+c)(1+b+c) \ge (a+b+c)^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2+b+c} \le \frac{1+b+c}{(a+b+c)^2} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a^2+b+c} \le \frac{a^2(1+b+c)}{(a+b+c)^2}$$

Do đó ta cần chứng minh:

$$\frac{a}{a+b+c}.\sqrt{1+b+c}+\frac{b}{a+b+c}.\sqrt{1+c+a}+\frac{c}{a+b+c}.\sqrt{1+a+b} \le \sqrt{3},(*)$$

Giả sử $a \ge b \ge c$ thì ta có: $\begin{cases} \frac{a}{a+b+c} \ge \frac{b}{a+b+c} \ge \frac{c}{a+b+c} \\ \sqrt{1+b+c} \le \sqrt{1+c+a} \le \sqrt{1+a+b} \end{cases}$

Do đó theo chebyshev tacó:

$$VT(*) \le \frac{1}{3}\left(\frac{a}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}+\frac{a}{a+b+c}\right)\left(\sqrt{1+b+c}+\sqrt{1+c+a}+\sqrt{1+a+b}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{1+b+c}+\sqrt{1+c+a}+\sqrt{1+a+b}}{3} \le \frac{\sqrt{3(3+2(a+b+c)}}{3}$$
$$\le \frac{\sqrt{3(3+2\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}}{3} = \frac{\sqrt{3(3+2\sqrt{3.3})}}{3} = \sqrt{3}$$

Điều phải chứng minh.

Bài 224:Cho x,y,z >0,chứng minh: $\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 \ge z\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương:

$$\left(\frac{x+y+z}{3}.\frac{z}{x+y}\right)^2 \ge \frac{3z}{x+y+z} \Leftrightarrow \frac{4}{9}\left(1+\frac{z}{x+y}\right)^2 \ge \frac{3}{\frac{x+y}{z}+1}$$

đặt $a=\frac{z}{x+y}, a>0$. Bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{4}{9}(1+a)^2 \ge \frac{3a}{1+a} \Leftrightarrow 4(a+1)^3 \ge 27a \Leftrightarrow (2a-1)^2(2a+8) \ge 0$$

Ta suy ra đpcm.

Bài 225:Chứng minh với a,b,c là 3 số thực không âm thì ta có bđt sau:

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2} \ge \frac{10}{(a+b+c)^2}$$

Lời giải:Giả sử $a \ge b \ge c \ge 0$ thì ta dể có:

$$a^2+b^2 \le \left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a^2+b^2} \ge \frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2+\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}$$

$b^2+c^2 \le \left(b+\frac{c}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{b^2+c^2} \ge \frac{1}{\left(b+\frac{c}{2}\right)^2}$ và tương tự $\frac{1}{c^2+a^2} \ge \frac{1}{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}$,do đó

$$\text{VT} \ge \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2+y^2} \ge \frac{2}{xy}+\frac{1}{x^2+y^2} = 4.\frac{1}{2xy}+\frac{1}{x^2+y^2} \ge \frac{25}{8xy+x^2+y^2}$$

$=\frac{25}{(x+y)^2+6xy} \ge \frac{25}{(x+y)^2+\frac{6(x+y)^2}{4}} = \frac{10}{(x+y)^2} = \frac{10}{(a+b+c)^2}$,với

$x=a+\frac{c}{2}, y=b+\frac{c}{2}$.

Bài 226:Cho a,b,c,d không âm,chứng minh:

$$(a^3+b^3+c^3)(b^3+c^3+d^3)(c^3+d^3+a^3)(d^3+a^3+b^3)\le\frac{4}{3125}(a+b+c+d)^{12}$$

Lời giải:Giả sử $a\ge b\ge c\ge d$,thì:

$c^3+d^3+a^3\le(a+\frac{c}{2}+\frac{d}{2})^3, b^3+c^3+d^3\le(b+\frac{c}{2}+\frac{d}{2})^3$

$a^3+b^3+d^3\le a^3+b^3+c^3\le(a+\frac{c}{2}+\frac{d}{2})^3+(b+\frac{c}{2}+\frac{d}{2})^3$,đặt $x=a+\frac{c}{2}+\frac{d}{2}, y=b+\frac{c}{2}+\frac{d}{2}$

thì

$VT\le x^3y^3(x^3+y^3)^2=\frac{(x+y)^2}{8}.(2xy)^3[(x+y)^2-3xy]^2\le\frac{4(x+y)^{12}}{3125}=\frac{4(a+b+c+d)^{12}}{3125}$

$\to$(đpcm).

Bài 227:Cho a,b,c,d là các số không âm,chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{a^3+b^3}+\frac{1}{a^3+c^3}+\frac{1}{a^3+d^3}+\frac{1}{b^3+c^3}+\frac{1}{b^3+d^3}+\frac{1}{c^3+d^3}\ge\frac{243}{2(a+b+c+d)^3}$$

Lời giải:G/s $a\ge b\ge c\ge d$ khi đó:

$a^3+b^3\le(a+\frac{d}{3})^3+(b+\frac{d}{3})^3\Leftrightarrow\frac{1}{a^3+b^3}\ge\frac{1}{(a+\frac{d}{3})^3+(b+\frac{d}{3})^3}$,tương tự ta có:

$\frac{1}{a^3+c^3}\ge\frac{1}{(a+\frac{d}{3})^3+(c+\frac{d}{3})^3},\frac{1}{b^3+c^3}\ge\frac{1}{(b+\frac{d}{3})^3+(c+\frac{d}{3})^3}$,mặt khác ta dể thấy:

$a^3+d^3\le(a+\frac{d}{3})^3\Leftrightarrow\frac{1}{a^3+d^3}\ge\frac{1}{(a+\frac{d}{3})^3}$,tương

tự: $\frac{1}{b^3+d^3}\ge\frac{1}{(b+\frac{d}{3})^3},\frac{1}{c^3+d^3}\ge\frac{1}{(c+\frac{d}{3})^3}$.

Do đó VT $\ge\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{x^3+y^3}+\frac{1}{y^3+z^3}+\frac{1}{z^3+x^3}$

Với $x=a+\frac{d}{3}, y=b+\frac{d}{3}, z=c+\frac{d}{3}$.ta cần chứng minh:

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{x^3+y^3}+\frac{1}{y^3+z^3}+\frac{1}{z^3+x^3}\ge\frac{243}{2(x+y+z)^3}$$

$$\Leftrightarrow(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{2}{x^3+y^3})+(\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}+\frac{2}{y^3+z^3})+(\frac{1}{z^3}+\frac{1}{x^3}+\frac{2}{z^3+x^3})\ge\frac{243}{(x+y+z)^3}\text{ (i)}$$

Theo côsi ta có: $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{2}{x^3+y^3}\ge3\sqrt[3]{\frac{2}{x^3y^3(x^3+y^3)}}=3\sqrt[3]{\frac{2}{x^3y^3(x+y)(x^2-xy+y^2)}}$

$$\ge3\sqrt[3]{\frac{2}{(x+y)(\frac{3xy+(x^2-xy+y^2)}{4})^4}}=\frac{24}{(x+y)^3}\text{(1)}$$

Tương tự ta cũng có: $\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}+\frac{2}{y^3+z^3}\geq\frac{24}{(y+z)^3}$ (2), $\frac{1}{z^3}+\frac{1}{x^3}+\frac{2}{z^3+x^3}\geq\frac{24}{(z+x)^3}$ (3).

Từ (1),(2) và (3) suy ra vế trái của (i) $\geq 24(\frac{1}{(x+y)^3}+\frac{1}{(y+z)^3}+\frac{1}{(z+x)^3})$

$$\geq\frac{72}{(x+y)(y+z)(z+x)}\geq\frac{72}{(\frac{(x+y)+(y+z)+(z+x)}{3})^3}=\frac{243}{(x+y+x)^3}$$,suy ra đpcm.

Bài 228:Chứng minh rằng với mọi số không âm a,b,c,d ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{b^2+c^2+d^2}+\frac{1}{c^2+d^2+a^2}+\frac{1}{d^2+a^2+b^2}\geq\frac{12}{(a+b+c+d)^2}$$

Lời giải:Giả sử $a\geq b\geq c\geq d\geq 0$ thì ta dễ thấy:

$$a^2+b^2+c^2\leq(a+\frac{c+d}{2})^2+(b+\frac{c+d}{2})^2\Leftrightarrow\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{1}{(a+\frac{c+d}{2})^2+(b+\frac{c+d}{2})^2}$$

Tương tự: $\frac{1}{d^2+a^2+b^2}\geq\frac{1}{(a+\frac{c+d}{2})^2+(b+\frac{c+d}{2})^2}$

Mặt khác $b^2+c^2+d^2\leq(b+\frac{c+d}{2})^2\Leftrightarrow\frac{1}{b^2+c^2+d^2}\geq\frac{1}{(b+\frac{c+d}{2})^2}$,tương tự:

$$\frac{1}{c^2+d^2+a^2}\geq\frac{1}{(a+\frac{c+d}{2})^2}$$

Vậy VT $\geq\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{x^2+y^2}$,do đó ta cần chứng minh: $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{x^2+y^2}\geq\frac{12}{(x+y)^2}$ (i).

Trong đó $x=a+\frac{c+d}{2}, y=b+\frac{c+d}{2}$.

$$VT(i)\geq 3\sqrt[3]{\frac{2}{x^2y^2(x^2+y^2)}}=3\sqrt[3]{\frac{8}{(2xy)(2xy)(x^2+y^2)}}\geq\frac{6}{\sqrt[3]{(\frac{4xy+x^2+y^2}{3})^3}}$$

$$=\frac{18}{(x+y)^2+2xy}\geq\frac{18}{(x+y)^2+\frac{(x+y)^2}{2}}=\frac{12}{(x+y)^2}$$

Suy ra đpcm.

Bài 229:Cho a,b,c,d ≥ 0 ,chứng minh rằng:

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2)(c^2+d^2+a^2)(d^2+a^2+b^2)\leq\frac{1}{64}(a+b+c+d)^8$$

Lời giải:Giả sử $a\geq b\geq c\geq d\geq 0$ thì tương tự như bài trên ta được:

$$VT \le (x^2+y^2)^2x^2y^2 \le \frac{1}{4}(2xy)(2xy)(x^2+y^2)(x^2+y^2) \le \frac{1}{4}(\frac{2(x^2+y^2)+4xy}{4})^4 = \frac{1}{64}(x+y)^8$$

Với cách đặt x,y, như bài trên.

Bài 230:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác,chứng minh:

$$\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c} \ge \frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}+\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

Lời giải:Bất đẳng thức tương đương:

$$3(a^3+b^3+c^3) \ge (a+b+c)(\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b})+\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{2}$$

$$5(a^3+b^3+c^3) \ge 2(a+b+c)(\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b})+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

$$5(a^3+b^3+c^3) \ge 2(\frac{a^4}{b+c}+\frac{b^4}{c+a}+\frac{c^4}{a+b}+a^3+b^3+c^3)+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

$$\Leftrightarrow 3(a^3+b^3+c^3) \ge 2(\frac{a^4}{b+c}+\frac{b^4}{c+a}+\frac{c^4}{a+b})+ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

$$\Leftrightarrow \sum(a+b)(a-b)^2 \ge \sum\frac{a^3(2a-b-c)}{b+c} = \sum(a-b)(\frac{a^3}{b+c}-\frac{b^3}{c+a})$$

$$= \sum(a-b)^2\,\frac{(a+b)(a^2+b^2)+c(a^2+ab+b^2)}{(b+c)(c+a)}$$

Cuối cùng bất đẳng thức được chuyển về dạng: $S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge 0$

với: $\begin{cases} S_a = \dfrac{a(ab+bc+ca)-b^3-c^3}{(c+a)(c+b)} \\ S_b = \dfrac{b(ab+bc+ca)-c^3-a^3}{(a+b)(b+c)} \\ S_c = \dfrac{c(ab+bc+ca)-a^3-b^3}{(b+c)(c+a)} \end{cases}$

Ngồi giải bài này đến đây thì mờ hết cả mắt,ngồi tính 1 lúc vẩn chưa ra.Các bạn làm tiếp nhé.Nếu ai có lời giải thì post lên nhé(Nếu có lời giải thì bạn hãy post lời giải lên chỗ mà bạn download file toán này nha-Thanhks),lúc khác sẽ ngồi giải tiếp bài này.

Củng định tặng thêm mấy bài bất đẳng thức lượng giác cho thay đổi không khí nhưng mệt lắm rồi,còn 5h đồng hồ nửa là phải lên trường tập trung,phải ngủ thôi.Hẹn các bạn dịp khác sẽ gởi tặng tiếp.

Một số bài toán cùng một số lời giải của các bạn trên diễn đàn mình không nhớ được tên tác giả,mong các bạn thông cảm.Mình tạo ra cuốn tài liệu này củng chỉ vì mục đích giáo dục thôi.

Chúc tất cả các bạn học tốt!!!

CHƯƠNG II:CÁC BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1:Cho x,y,z>0, $x+y+z=3$,tìm min của:

$$p=\frac{x^4+5x^2y^2+6y^4}{xy+5y^2}+\frac{y^4+5y^2z^2+6z^4}{yz+5z^2}+\frac{z^4+5z^2x^2+x^4}{zx+5x^2}$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Bài 2:Cho x,y,z>0, $x^4+y^4+z^4=3$,tìm max của:

$$p=\frac{4x^4+5x^2y^2-y^4}{5y^2-xy}+\frac{4y^4+5y^2z^2-z^4}{5z^2-yz}+\frac{4z^4+5z^2x^2-x^4}{5x^2-zx}$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Bài 3:Cho $0<b\le a$,chứng minh rằng: $a+b-2\sqrt{ab}\ge\frac{1}{2}\frac{(a-b)^2}{a+b}$

Bài 4:Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $xyz\ge xy+yz+zx$.Chứng minh:

$$(xyz)^2\ge 81(x\sqrt[3]{\frac{y}{z}}+y\sqrt[3]{\frac{z}{x}}+z\sqrt[3]{\frac{x}{y}})$$

Bài 5:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a(3a-b)}{c(a+b)}+\frac{b(3b-c)}{a(b+c)}+\frac{c(3c-a)}{b(c+a)}\le\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

Bài 6:Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $(x+y+z)^4=32xyz$.Tìm min và max của biểu thức: $p=\frac{x^4+y^4+z^4}{(x+y+z)^4}$

Bài 7:Cho a,b,c,d là các số thực dương,chứng minh rằng: $\sum\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}}\ge 1$

Bài 8:Cho x,y,z là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$x^2+y^2+z^2\ge\frac{3}{2}(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})-6$$

Bài 9:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\ge\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}+2$$

Bài 10:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}+\frac{4(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}\ge 12$$

Bài 11:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge 2(\frac{a}{3a^2+bc}+\frac{b}{3b^2+ca}+\frac{c}{3c^2+ab})$$

Bài 12:Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1,chứng minh:

$$\frac{a^2+5b}{b+c}+\frac{b^2+5c}{c+a}+\frac{c^2+5a}{a+b}\geq 8$$

Bài 13:Cho a,b,c là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0,chứng minh: $\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geq a+b+c$

Bài 14:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}+\frac{81abc}{(a+b+c)^3}\geq\frac{9}{2}$$

Bài 15:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}$$

Bài 40:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a^2+bc}{a^2(b+c)}+\frac{b^2+ca}{b^2(c+a)}+\frac{c^2+ab}{c^2(a+b)}\geq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

Bài 16:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq(a+b+c)(\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab})$$

Bài 17:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})^2\geq 3(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a})$$

Bài 18:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$(\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}+\frac{a}{c^2})^2\geq 3(\frac{b}{a^3}+\frac{c}{b^3}+\frac{a}{c^3})$$

Bài 19:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$(a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2)^2\geq 3abc(a^4b^3+b^4c^3+c^4a^3)$$

Bài 20:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}}\geq\frac{4}{a+b+c}$$

Bài 21:Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3,chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a}{1+b+bc}}+\sqrt{\frac{b}{1+c+ca}}+\sqrt{\frac{c}{1+a+ab}}\geq\sqrt{3}$$

Bài 22:Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$,chứng minh:

$$3(a^2+b^2+c^2)+abc\geq 10$$

Bài 23:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn abc = 1,chứng minh:

$$2(a^2+b^2+c^2)+12\geq 3(a+b+c+ab+bc+ca)$$

Bài 24:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$(\frac{a}{2a+b})^3+(\frac{b}{2b+c})^3+(\frac{c}{2c+a})^3\geq\frac{1}{9}$$

Bài 25:Cho $x\geq y\geq z>0$,chứng minh:

$$\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\ge x^2+y^2+z^2+\frac{(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}{xyz(x+y+z)}$$

Bài 26:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\ge\frac{1}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}$$

Bài 27:Cho a,b,c là 3 số thực không âm và không có 2 số nào đồng thời bằng 0,chứng minh:

$$\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\ge\frac{3\sqrt{3abc(a+b+c)}(a+b+c)^2}{4(ab+bc+ca)^3}$$

Bài 28:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$\frac{1}{(1+a)^2(b+c)}+\frac{1}{(1+b)^2(c+a)}+\frac{1}{(1+c)^2(a+b)}\le\frac{3}{8}$$

Bài 29:Cho a,b,c là các số thực dương bất kì,chứng minh:

$$\frac{a}{b+\sqrt[4]{ab^3}}+\frac{b}{c+\sqrt[4]{bc^3}}+\frac{c}{a+\sqrt[4]{ca^3}}\ge\frac{3}{2}$$

Bài 30:Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca=3$,chứng minh rằng với $r\ge 1$ thì ta có: $\frac{1}{r+a^2+b^2}+\frac{1}{r+b^2+c^2}+\frac{1}{r+c^2+a^2}\le\frac{3}{r+2}$

Bài 31:Cho a,b,c,d là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$\frac{1}{1+ab+bc+ca}+\frac{1}{1+bc+cd+db}+\frac{1}{1+cd+da+ac}+\frac{1}{1+da+ab+bd}\le 1$$

Bài 32:Cho a,b,c,d là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$\frac{1}{1+a+a^2+a^3}+\frac{1}{1+b+b^2+b^3}+\frac{1}{1+c+c^2+c^3}+\frac{1}{1+d+d^2+d^3}\ge 1$$

Bài 33:Cho a,b,c,d là các số thực,chứng minh:

$$6(a^2+b^2+c^2+d^2)+(a+b+c+d)^2\ge 12(ab+bc+cd)$$

Bài 34:Cho a,b,c là các số thực không âm sao cho $ab+bc+ca=3$,chứng minh:

$$\frac{1}{a^2+2}+\frac{1}{b^2+2}+\frac{1}{c^2+2}\le 1$$

Bài 35:Cho a,b,c là các số thực không âm sao cho $ab+bc+ca=3$,chứng minh:

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}\ge\frac{3}{2}$$

Bài 36:Cho a,b,c là các số thực không âm sao cho $a^2+b^2+c^2=3$,chứng minh:

$$\frac{a}{b+2}+\frac{b}{c+2}+\frac{c}{a+2}\le 1$$

Bài 37:Cho a_i là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh: $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+(n-1)a_i}\ge 1$

Bài 38:Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương sao cho:

$$(a+b+c)(x+y+z)=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=4$$

Chứng minh: $abcxyz<\frac{1}{36}$

Bài 39:Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3,chứng minh:

$$abc+\frac{12}{ab+bc+ca}\ge 5$$

Bài 40:Cho a,b,c là các số thực không âm sao cho $a^2+b^2+c^2=3$.Chứng minh:

$$12+9abc\ge 7(ab+bc+ca)$$

Bài 41:Cho a,b,c là các số thực không âm sao cho $ab+bc+ca=3$.Chứng minh:

$$a^3+b^3+c^3+7abc\ge 10$$

Bài 42:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh rằng:

$$(a+b)(b+c)(c+a)+7\ge 5(a+b+c)$$

Bài 43:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+a)^3}+\frac{1}{(1+b)^3}+\frac{1}{(1+c)^3}+\frac{5}{(1+a)(1+b)(1+c)}\ge 1$$

Bài 44:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh rằng:

$$\frac{2}{a+b+c}+\frac{1}{3}\ge\frac{3}{ab+bc+ca}$$

Bài 45:Cho a,b,c là các số thực không âm sao cho $a+b+c=3$.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{6-ab}+\frac{1}{6-bc}+\frac{1}{6-ca}\le\frac{3}{5}$$

Bài 46:Gỉa sử $n\ge 1$ và a_i là các số thực bất kì thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n}a_i\ge n;\sum_{i=1}^{n}a_i^2\ge n^2$

Chứng minh: $max\{\mathrm{a_i}\}\ge 2$

Bài 47:Cho a,b,c là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng không.Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{13}{6}-\frac{2(ab+bc+ca)}{3(a^2+b^2+c^2)}$$

Bài 48:Cho $n\ge 2$ là một số nguyên và x_i là các số thực dương thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=1$

Tìm min: $P=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^5}{S-x_i},S=\sum_{i=1}^{n}x_i$

Bài 49:Cho a,b,c,d là các số thực dương,chứng minh:

$$a^4b+b^4c+c^4d+d^4a\ge abcd(a+b+c+d)$$

Bài 50:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{\sqrt{b+c}}{a}+\frac{\sqrt{c+a}}{b}+\frac{\sqrt{a+b}}{c}\ge\frac{4(a+b+c)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Bài 51:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác,chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+3bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+3ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+3ab}}\ge\frac{3}{2}$$

Bài 52:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

a) $\frac{a^2+b^2}{a+b}+\frac{b^2+c^2}{b+c}+\frac{c^2+a^2}{c+a}\le\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$

b) $$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\le\frac{3(a+b+c)}{a^2+b^2+c^2}$$

Bài 53:Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3,chứng minh:

$$a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a}\ge 4$$

Bài 54:Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3,chứng minh:

$$\frac{1}{9-ab}+\frac{1}{9-bc}+\frac{1}{9-ca}\le\frac{3}{8}$$

Bài 55:Cho a và b là các số thực dương,chứng minh:

$$(a+b)^2+(a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b})^2\ge 8(1+\sqrt{2})$$

Bài 56:Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1,chứng minh:

$$\sqrt{\frac{(1-a)(1-b)}{1-c}}+\sqrt{\frac{(1-b)(1-c)}{1-a}}+\sqrt{\frac{(1-c)(1-a)}{1-b}}\ge\sqrt{6}$$

Bài 57:Cho x,y,z là các số thực dương có $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$,chứng minh:

$$\frac{x^2+yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}}+\frac{y^2+zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}}+\frac{z^2+xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}}\ge 1$$

Bài 58:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{2c^2+(a+b)^2}\le\frac{1}{2}$$

Bài 59:Cho a,b,c là các số thực bất kì,chứng minh:

$$(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2\ge(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$$

Bài 60:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)}+\frac{1}{(1+b)(1+c)}+\frac{1}{(1+c)(1+a)}\le\frac{3}{2}$$

Bài 61:Cho các số thực không âm sao cho không có hai số nào đồng thời bằng 0,chứng minh:

$$\frac{1}{(a+2b)^2}+\frac{1}{(b+2c)^2}+\frac{1}{(c+2a)^2}\ge\frac{1}{ab+bc+ca}$$

Bài 62:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh: $xy+yz+zx\ge 2(x+y+z)$,với

$$x=a+\frac{1}{a},y=b+\frac{1}{b},z=c+\frac{1}{c}$$

Bài 63:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác,chứng minh:

$$(a+b-c)^a(b+c-a)^b(c+a-b)^c\le a^ab^bc^c$$

Bài 64:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$3^{a+b+c}\ge(1+\frac{a+b}{c})^c(1+\frac{b+c}{a})^a(1+\frac{c+a}{b})^b$$

Bài 65:Cho a,b,c,d,e là các số thực cùng dấu,chứng minh:

$$(a-b)(a-c)(a-d)(a-e)+(b-c)(b-d)(b-e)(b-a)+(c-d)(c-e)(c-a)(c-b)$$
$$+(d-e)(d-a)(d-b)(d-c)+(e-a)(e-b)(e-c)(e-d)\ge 0$$

Bài 66:Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a(y+z)}{b+c}+\frac{b(z+x)}{c+a}+\frac{c(x+y)}{a+b}\geq\sqrt{(x+y)(x+z)}+\sqrt{(y+z)(y+x)}+\sqrt{(z+x)(z+y)}-x-y-z$$

Bài 67:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+\sqrt{\frac{c+a}{b}}\geq 2(\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}})$$

Bài 68:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\geq\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2})$$

Bài 69:Cho $0\leq a,b,c\leq 1$,chứng minh:

$$\frac{1}{1+c+a}+\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}\leq\frac{3}{1+2\sqrt[3]{abc}}$$

Bài 70:Cho a,b,c,d,e là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\geq 1$,chứng minh:

$$\frac{a^2}{b+c+d}+\frac{b^2}{c+d+e}+\frac{c^2}{d+e+a}+\frac{d^2}{e+a+b}+\frac{e^2}{a+b+c}\geq\frac{\sqrt{5}}{3}$$

Bài 71:Cho r,s > 0, $r^2+s^2=5$,chứng minh: $r^3+s^6\geq 9$

Bài 72:Cho a,b,c là các số thực không âm,chứng minh:

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+ca}{(c+a)^2}+\frac{c^2+ab}{(a+b)^2}\geq\frac{3}{2}$$

Bài 73:Cho x,y,z là các số thực khong âm có tổng bằng 1,chứng minh:

$$\frac{x^2+1}{y^2+1}+\frac{y^2+1}{z^2+1}+\frac{z^2+1}{x^2+1}\leq\frac{7}{2}$$

Bài 74:Cho $a,b,c\in\left[\frac{1}{2};1\right]$,chứng minh: $2\leq\frac{a+b}{1+c}+\frac{b+c}{1+a}+\frac{c+a}{1+b}\leq 3$

Bài 75:Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 3,chứng minh:

$$\frac{a}{ab+3c}+\frac{b}{bc+3a}+\frac{c}{ca+3b}\geq\frac{3}{4}$$

Bài 76:Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 1,chứng minh:

$$\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}}+\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{4}}+\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{4}}<2$$

Bài 77:Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 1,chứng minh:

$$\sqrt{a+b^2}+\sqrt{b+c^2}+\sqrt{c+a^2}\geq 2$$

Bài 78:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$(a+b+c)^3\geq 6\sqrt{3}(a-b)(b-c)(c-a)$$

Bài 79:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{bc}{(b+c)^2}+\frac{ca}{(c+a)^2}\leq\frac{1}{4}+\frac{4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Bài 80:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}+\frac{(a-b)(a-c)}{b^2+c^2}+\frac{(b-c)(b-a)}{c^2+a^2}+\frac{(c-a)(c-b)}{a^2+b^2}\geq 1$$

Bài 81:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$1+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{16abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Bài 82:Cho a,b,c là các số thực dương và không có hai số nào bằng nhau,chứng minh:

$$(a^2+b^2+c^2-1)^2\ge 2(a^3b+b^3c+c^3a-1)$$

Bài 83:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a^2}{(a+b)^2}(2a-b-c)+\frac{b^2}{(b+c)^2}(2b-c-a)+\frac{c^2}{(c+a)^2}(2c-a-b)\ge 0$$

Bài 84:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác,chứng minh:

$$\sum_{cyc}\frac{(a+b-c)^3}{1+a+b-c}\ge\sum_{cyc}\frac{a^3}{1+a}$$

Bài 85:Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$,chứng minh:

$$(x-1)(y-1)(z-1)\ge 8$$

Bài 86:Cho $a_i,b_i,i=\overline{1,n}$ là các số thực dương,chứng minh:

$$(\sum_{i\ne j}a_ib_j)^2\ge(\sum_{i\ne j}a_ia_j)(\sum_{i\ne j}b_ib_j)$$

Bài 87:Cho $\begin{cases}\frac{6}{x}\le y\le\frac{2}{z}\\ xyz=6\\ x\ge y\ge z\end{cases}$,Chứng minh rằng: $\frac{9}{4x^2}+\frac{4}{3y^2}+\frac{5}{12z^2}\ge 1$

Bài 88:Cho a,b,c là các số thực và không có hai số nào bằng nhau,chứng minh:

$$\frac{(a+b)^2(a+c)^2}{(b^2-c^2)^2}+\frac{(b+c)^2(b+a)^2}{(c^2-a^2)^2}+\frac{(c+a)^2(c+b)^2}{(a^2-b^2)^2}\ge 2$$

Bài 89:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{16(ab+bc+ca)}{5(a^2+b^2+c^2)}\ge\frac{18}{5}$$

Bài 90:Cho a,b,c là 3 số thực dương,chứng minh:

$$\sqrt{(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)}\ge abc+\sqrt[3]{(a^3+abc)(b^3+abc)(c^3+abc)}$$

Bài 91:Cho các số dương a,b,c.Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^2+b^2+3c^2}+\frac{bc}{b^2+c^2+3a^2}+\frac{ca}{c^2+a^2+3b^2}\le\frac{3}{5}$$

Bài 92:Cho a,b,c là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng không.Chứng minh rằng:

$$\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\ge\frac{6}{a+b+c}$$

Bài 93:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=3$.Chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2+ab+bc}}+\frac{1}{\sqrt{2b^2+bc+ca}}+\frac{1}{\sqrt{2c^2+ca+ab}}\ge\frac{3}{2}$$

Bài 94:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca=9$

Chứng minh: $\frac{a^2}{2a+b}+\frac{b^2}{2b+c}+\frac{c^2}{2c+a}\ge 1$

Bài 95:Cho các số không âm a,b,c thỏa mãn $ab+bc+ca=1$.Chứng minh:

$$\frac{a+bc}{1+ab}+\frac{b+ca}{1+bc}+\frac{c+ab}{1+ca}\ge \frac{3(\sqrt{3}+1)}{4}$$

Bài 96:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=3$.Chứng minh;

$$\frac{1}{5a^2+ab+bc}+\frac{1}{5b^2+bc+ca}+\frac{1}{5c^2+ca+ab}\ge \frac{3}{7}$$

Bài 97:Cho a,b,c > 0,chứng minh: $\frac{3a^4+1}{b+c}+\frac{3b^4+1}{c+a}+\frac{3c^4+1}{a+b}\ge \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$

Bài 98:Cho a,b,c > 0,chứng minh: $\frac{1+a^3}{1+a^2c}+\frac{1+b^3}{1+c^2b}+\frac{1+c^3}{1+b^2a}\ge 3$

Bài 99:Cho x,y,z>0,chứng minh rằng: $\prod_{cyc}(x^8-x^2+3)\ge 9(xy+yz+zx)$

Bài 100:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a^3}{b^2+c^2}+\frac{b^3}{c^2+a^2}+\frac{c^3}{a^2+b^2}\ge \frac{a+b+c}{2}$$

Bài 101:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{a^2}{\sqrt{4(a^2+b^2)+ab}}+\frac{b^2}{\sqrt{4(b^2+c^2)+bc}}+\frac{c^2}{\sqrt{4(c^2+a^2)+ca}}\ge \frac{a+b+c}{3}$$

Bài 102:Cho x,y,z>0, $x^2+2y^2+3z^2=1$,tìm max của:

$$p=\frac{1}{1-\sqrt{6}yz}+\frac{1}{1-\sqrt{3}zx}+\frac{1}{1-\sqrt{2}xy}$$

Bài 103:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác,chứng minh :

$$ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ca(c+a-2b)\ge 0$$

Bài 104:Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca=1$,chứng minh :

$$\frac{1+a^2b^2}{(a+b)^2}+\frac{1+b^2c^2}{(b+c)^2}+\frac{1+c^2a^2}{(c+a)^2}\ge \frac{5}{2}$$

Bài 105:Cho a,b,c > 0, $a+b+c=1$,tìm min

$$p=\sqrt{2a^2+ab+2b^2}+\sqrt{2b^2+bc+2c^2}+\sqrt{2c^2+ca+2a^2}$$

Bài 106:Cho $0\le a,b,c\le 1$,chứng minh:

$$a^3(b-c)^2+b^3(c-a)^2+c^3(a-b)^2\ge (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2(ab+bc+ca)$$

Bài 107:Cho a,b,c > 0, $a^3+b^3+c^3=1$,chứng minh:

$$\frac{a^2}{\sqrt{1-a^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{1-b^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{1-c^2}}\ge 2$$

Bài 108:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác,chứng minh:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\ge \frac{(a+b+c)^3}{9abc}$$

Bài 109:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a+b+c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\ge 3+\sqrt{3}$$

Bài 110:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác,chứng minh:

$$\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}\ge\sqrt{\frac{b+c}{p-a}}+\sqrt{\frac{c+a}{p-b}}+\sqrt{\frac{a+b}{p-c}}$$

Bài 111:Cho a,b,c là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0 thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+abc=4$,chứng minh:

$$a^2+b^2+c^2\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

Bài 112:Cho a,b,c>0, $a+b+c=1$,chứng minh:

$$\frac{a^7+b^7}{a^5+b^5}+\frac{b^7+c^7}{b^5+c^5}+\frac{c^7+a^7}{c^5+a^5}\ge\frac{1}{3}$$

Bài 113:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$a^3+b^3+c^3+6abc\ge\sqrt[3]{abc}(a+b+c)^2$$

Bài 114:Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 1,chứng minh:

$$\frac{25}{27}\le(1-4ab)^2+(1-4bc)^2+(1-4ca)^2\le 3$$

Bài 115:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)^2\ge 4(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$$

Bài 116:Cho x,y,z là các số thực không phải tất cả đều dương,chứng minh:

$$\frac{16}{9}(x^2-x+1)(y^2-y+1)(z^2-z+1)\ge(xyz)^2-xyz+1$$

Bài 117:Cho a,b,c là các số thực không âm,chứng minh:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{2(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge 3$$

Bài 118:Cho a,b,c > 0,abc = 1,chứng minh:

$$\frac{a^2+b^2}{a^4+b^4}+\frac{b^2+c^2}{b^4+c^4}+\frac{c^2+a^2}{c^4+a^4}\le a+b+c$$

Bài 119:Cho a,b,c là các số thực không âm có $ab+bc+ca=1$,chứng minh:

$$a^2+b^2+c^2+1\ge abc+a+b+c$$

Bài 120:Cho a,b,c là các số thực dương ,chứng minh:

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^3+b^3+abc}\le\sum_{cyc}\frac{1}{a^3+2abc}\le\frac{1}{abc}\le\sum_{cyc}\frac{1}{2a^3+abc}$$

Bài 121:Cho a,b,c là các số thực dương,tìm min:

$$p=\frac{\sqrt{a^3c}}{\sqrt{b^3a}+bc}+\frac{\sqrt{b^3a}}{\sqrt{c^3b}+bc}+\frac{\sqrt{c^3b}}{\sqrt{a^3c}+ab}$$

Bài 122:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[10]{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}$$

Bài 123:Cho a,b,c là các số thực dương có $a+b+c=1$,chứng minh:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+2abc \ge \frac{247}{54}$$

Bài 124:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{b^2c}{a^3(b+c)}+\frac{c^2a}{b^3(c+a)}+\frac{a^2b}{c^3(a+b)} \ge \frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

Bài 125:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+2\sqrt{2}\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \ge (\sqrt{2}+1)^2$$

Bài 126:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}+(\sqrt{3}-1)\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \ge \sqrt{3}+2$$

Bài 127:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} \ge 4+\frac{a^2+b^2+c^2}{2(ab+bc+ca)}$$

Bài 128:Cho a,b,c>0, $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$,chứng minh:

a) $5(a+b+c) \ge 7+8abc$

b) $2(a+b+c) \ge \sqrt{a^2+3}+\sqrt{b^2+3}+\sqrt{c^2+3}$

c) $\frac{1}{2+a^2}+\frac{1}{2+b^2}+\frac{1}{2+c^2} \le 1$

d) $(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \le 1$

Bài 129:Cho a,b,c>0, $a\sqrt{bc}+2b\sqrt{ca}+2c\sqrt{ab}=24$,tìm min: $p=\frac{7}{a^2}+\frac{8}{b^2}+\frac{9}{c^2}$

Bài 130:Cho a,b,c > 0,chứng minh:

$$\frac{b+c}{2a^2+bc}+\frac{c+a}{2b^2+ca}+\frac{a+b}{2c^2+ab} \ge \frac{6}{a+b+c}$$

Bài 131:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác nhọn,chứng minh:

$$a^2+b^2+c^2 \ge 4S\sqrt{4-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

Bài 132:Cho a,b,c > 0, $a^4+b^4+c^4=3$,chứng minh:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b} \ge \frac{3}{2}$$

Bài 35:Cho a,b,c >0, $a^2+b^2+c^2=1$,chứng minh:

$$\frac{1}{(1-ab)^2}+\frac{1}{(1-bc)^2}+\frac{1}{(1-ca)^2} \le \frac{27}{4}$$

Bài 133:Chứng minh: $\sum_{i=-2007}^{2007}\frac{\sqrt{|i+1|}}{(\sqrt{2})^{|i|}} > \sum_{i=-2007}^{2007}\frac{\sqrt{|i|}}{(\sqrt{2})^{|i|}}$

Bài 134:Cho n là số nguyên dương lớn hơn 2 và x_i là các số thực dương thỏa mãn: $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}=n$,chứng minh:

$$\frac{x_2^2+...+x_n^2}{n-1}.\frac{x_1^2+x_3^2...+x_n^2}{n-1}...\frac{x_2^2+...+x_{n-1}^2}{n-1}\geq(\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n})^{n-1}$$

Bài 135:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$\frac{1}{a(b+1)}+\frac{1}{b(c+1)}+\frac{1}{c(d+1)}+\frac{1}{d(a+1)}\geq 2$$

Bài 136:Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1,chứng minh:

$$(ab)^{\frac{5}{4}}+(bc)^{\frac{5}{4}}+(ca)^{\frac{5}{4}}<\frac{1}{4}$$

Bài 137:Cho a_i là các số thực dương và x_i là các số thực thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i=0$,chứng minh: $\sum_{1\leq i<j\leq n}x_ix_j\left|a_i-a_j\right|\leq 0$

Bài 138:Cho x,y,z>0,chứng minh:

$$\sqrt{4x^2+4x(y+z)+(y-z)^2}<\sqrt{4y^2+4y(z+x)+(z-x)^2}+\sqrt{4z^2+4z(x+y)+(x-y)^2}$$

Bài 139:Cho $0\leq x,y,z\leq 1$,chứng minh : $x^2+y^2+z^2\leq x^2y+y^2z+z^2x+1$

Bài 140:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác có chu vi bằng 1,chứng minh :

$$\frac{23}{216}<a^2b+b^2c+c^2a<\frac{1}{8}$$

Bài 141:Cho p,q,r>o,chứng minh :

$$(p+q+r)(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r})\geq 9+3(1-\frac{p}{q})^{\frac{2}{3}}(1-\frac{q}{r})^{\frac{2}{3}}(1-\frac{r}{p})^{\frac{2}{3}}$$

Bài 142:Tìm giá trị lớn nhất của hàm số :

$$f(x)=|x||x-1||x-2||x-3||x-4||x-5||x-6||x-7|,\text{với } x\in[3,4]$$

Bài 143:Cho a,b,c là các số thực không âm và $k\geq 3$,chứng minh:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{k}{a+b+c}\geq\frac{2\sqrt{k+1}}{\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Bài 145:Cho a,b,c là các số thực không âm,chứng minh:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{3\sqrt[3]{abc}}{2(a+b+c)}\geq 2$$

Bài 146:Cho tam giác ABC không nhọn,chứng minh:

$$\cos^3A+\cos^3B+\cos^3C\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bài 147:Cho a,b,c>0, $a+b+c=2$,chứng minh:

$$\frac{bc}{a^2+1}+\frac{ca}{b^2+1}+\frac{ab}{c^2+1}\le 1$$

Bài 148:Cho a,b,c>0; $a^2+b^2+c^2=1$,chứng minh: $21+18abc\ge 13(ab+bc+ca)$

Bài 149:Cho $a,b,c>0$,chứng minh: $\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}+\frac{9(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\ge 33$

Bài 150:Cho $a,b,c\ge\frac{2}{3},a+b+c=3$,chứng minh: $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge ab+bc+ca$

Bài 151:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh :

$$\frac{[ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)]^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)$$

Bài 152:Cho $x,y,z\in R,x+y+z=3$,chứng minh :

$$\frac{x+1}{x^2-x+1}+\frac{y+1}{y^2-y+1}+\frac{z+1}{z^2-z+1}\le 6$$

Bài 153:Cho x,y,z là các số thực không âm,chứng minh :

$$(x^3+y^3+z^3-xyz)^3\ge(x^3+y^3)(y^3+z^3)(z^3+x^3)$$

Bài 154:Cho a,b,c là các số thực thỏa mãn $a+b+c=2,ab+bc+ca-abc\le 1$,chứng minh : $(1-a)yz+(1-b)zx+(1-c)xy\le\frac{1}{2}(xy+yz+zx)^2$

Bài 155:Cho a,b,c là các số thực bất kì,chứng minh :

$$26(a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}}+27abc\ge 18(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$$

Bài 156:Cho x,y,z là các số thực không âm,chứng minh :

$$(x+y+z)^5\ge\frac{9}{4\sqrt{6}-9}(x^3+y^3+z^3)(xy+yz+zx)$$

Bài 157:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác,chứng minh :

$$\frac{(a-b)^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{(b-c)^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{(c-a)^2}{c^2+ca+a^2}\le 2$$

Bài 158:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác,chứng minh :

$$\frac{a+b+c}{ab+bc+ca}\ge\frac{1}{3}(\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab})$$

Bài 159:Cho a,b,c là các số thực không âm,chứng minh :

$$(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\ge 4(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

Bài 160:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{a^2-ab+b^2}{a+b}+\frac{b^2-bc+c^2}{b+c}+\frac{c^2-ca+a^2}{c+a}\ge\frac{3}{2}(\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2})$$

Bài 161:Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 1,chứng minh:

$$a^3+b^3+c^3+abc\ge\frac{4}{27}+\frac{11}{54}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

Bài 162:Cho $a,b,c\ge 0$,chứng minh:

$$\frac{8}{27}(ab+bc+ca)^3\le(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)\le\frac{1}{64}(a+b+c)^6$$

Bài 163:Cho $a,b,c\geq 0,a+b+c=3$,chứng minh: $a^2b+b^2c+c^2a\leq 4$

Bài 164:Cho a,b,c,d>0, $a+b+c+d=4$,chứng minh:

$$abc+bcd+cda+dab+a^2b^2c^2+b^2c^2d^2+c^2d^2a^2+d^2a^2b^2\leq 8$$

Bài 165:Cho a,b,c là các số nguyên dương thay đổi thỏa mãn $\frac{ab+1}{a+b}<\frac{3}{2}$,tìm max của

$$p=\frac{a^3b^3+1}{a^3+b^3}$$

Bài 166:Cho $\left|x+y+z-t\right|\leq 1,\left|y+z+t-x\right|\leq 1,\left|z+t+x-y\right|\leq 1,\left|t+x+y-z\right|\leq 1$,chứng minh: $x^2+y^2+z^2+t^2\leq 1$

Bài 167:Cho $x\geq 1$,tìm min $p=\sqrt{x-1}+\sqrt{2x^2-5x+7}$

Bài 168:Cho a,b,c>0, $a^5+b^5+c^5=3$,chứng minh: $a^4+b^4+c^4\geq a^2+b^2+c^2$

Bài 169:Cho a,b,c>,chứng minh:

$$\frac{2b+c}{4b^2+3bc+c^2}+\frac{2c+a}{4c^2+3ca+a^2}+\frac{2a+b}{4a^2+3ab+b^2}\geq\frac{27}{8(a+b+c)}$$

Bài 170:Cho x,y,z không âm,chứng minh:

$$x\sqrt{y^2+4z^2}+y\sqrt{z^2+4x^2}+z\sqrt{x^2+4y^2}\leq\frac{3}{4}(x+y+z)^2$$

Bài 171:Cho a,b,c >0, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$,chứng minh: $a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}+c^{\frac{3}{4}}\geq a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}$

Bài 172:Cho x,y,z>0,chứng minh:

$$\frac{(x+y)^2(y+z)^2(z+x)^2}{x^2y^2z^2}\geq(\frac{x+y}{y+z}+\frac{y+z}{x+y})(\frac{y+z}{z+x}+\frac{z+x}{y+z})(\frac{z+x}{x+y}+\frac{x+y}{z+x})$$

Bài 173: $a,b,c\in\left[1,2\right]$,chứng minh : $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\leq 10$

Bài 174:Cho x,y,z>0, $x+y+z=1$,chứng minh :

$$\frac{z}{\sqrt{(\frac{1}{x}-1)(\frac{1}{y}-1)}}+\frac{x}{\sqrt{(\frac{1}{y}-1)(\frac{1}{z}-1)}}+\frac{y}{\sqrt{(\frac{1}{z}-1)(\frac{1}{x}-1)}}\leq 1$$

Bài 175: $a,b,c>0,a+b+c=3$,chứng minh :

$$\frac{\sqrt{a+b^2}}{b+c^2}+\frac{\sqrt{b+c^2}}{c+a^2}+\frac{\sqrt{c+a^2}}{a+b^2}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Bài 176: $a,b,c>0,a+b+c=3$,chứng minh :

$$\frac{a^2}{b+c^3}+\frac{b^2}{c+a^3}+\frac{c^2}{a+b^3}\geq\frac{3}{2}$$

Bài 177:a,b,c>0,chứng minh :

$$\frac{a}{b^3+c^3}+\frac{b}{c^3+a^3}+\frac{c}{a^3+b^3}\geq\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{a^4+b^4+c^4}}$$

Bài 178:Cho a,b,c>0, $a+b+c=1$,chứng minh:

$$(1+\frac{1}{a})^b(1+\frac{1}{b})^c(1+\frac{1}{c})^a \geq 1+\frac{1}{ab+bc+ca}$$

Bài 179: $a,b,c,d>0, a+b+c+d=2$,chứng minh:

$$\frac{a^2}{(a^2+1)^2}+\frac{b^2}{(b^2+1)^2}+\frac{c^2}{(c^2+1)^2}+\frac{d^2}{(d^2+1)^2} \leq \frac{16}{25}$$

Bài 180:Cho a,b,c,d>0,abcd=16,chứng minh:

$$\frac{ab+1}{a+1}+\frac{bc+1}{b+1}+\frac{cd+1}{c+1}+\frac{da+1}{d+1} \geq \frac{20}{3}$$

Bài 181:Cho x,y,z>0, $xy+yz+zx=3xyz$,tìm min

$$p=\frac{yz\sqrt{1+3x^2}}{y+3zx}+\frac{zx\sqrt{1+3y^2}}{z+3xy}+\frac{xy\sqrt{1+3z^2}}{x+3yz}$$

Bài 182:Cho là độ dài ba cạnh của 1 tam giác,chứng minh :

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}} \geq \frac{3(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{a+b+c}$$

Bài 183:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{(1-b)(1-bc)}{b(1+a)}+\frac{(1-c)(1-ca)}{c(1+b)}+\frac{(1-a)(1-ab)}{a(1+c)} \geq 0$$

Bài 184:Cho x,y,z>0, $2(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})=4+\frac{x}{yz}+\frac{y}{zx}+\frac{z}{xy}$,chứng minh:

$$(1-x)(1-y)(1-z) \leq \frac{1}{64}$$

Bài 185:Cho $x,y,z>0, x+y+z \leq \frac{3}{2}$,tìm min : $p=(x+y)\sqrt{1+\frac{1}{x^2y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}$

Bài 186 :Cho $x,y \geq 0, x+y=1$,tìm min,max $p=\sqrt{1+x^{2005}}+\sqrt{1+y^{2006}}$

Bài 187:Cho $x_i>0, \sum_{i=1}^{5} x_i=1$,chứng minh : $\frac{x_1}{1+x_2}+...+\frac{x_5}{1+x_1} \geq \frac{5}{6}$

Bài 188: $x,y,z>0, x+y+z=1$,chứng minh :

a) $xy^2+yz^2+zx^2 \geq \frac{1}{3}(xy+yz+zx)$

b) $xy^2+yz^2+zx^2 \geq xy+yz+zx-\frac{2}{9}$

Bài 189: $x,y,z>0, x+y+z=1$,chứng minh : $xyz(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}) \geq \frac{28}{27}$

Bài 190:Cho $x,y,z \in (0,1)$,chứng minh : $\frac{\sqrt{xyz}}{(1-x)(1-y)(1-z)} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$

Bài 191:Cho $a,b,c>0, a+b+c=1$,chứng minh : $\frac{(1-a)(1-b)(1-c)}{(1-a^2)^2+(1-b^2)^2+(1-c^2)^2} \leq \frac{1}{8}$

Bài 192:Cho $a,b,c>0,\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$,chứng minh : $\sum_{cyc}\frac{a}{a^2+1}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Bài 193Cho x,y thuộc R thỏa mãn $x+y-3(\sqrt{x-2}+\sqrt{y+1}-1)=0$

Tìm min,max của xy

Bài 194:Cho $x,y\in R,x^2+y^2=1$,tìm min,max của $p=\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}$

Bài 195:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{a}{b(b+c)^2}+\frac{b}{c(c+a)^2}+\frac{c}{a(a+b)^2}\ge\frac{9}{4(ab+bc+ca)}$$

Bài 196:Cho x,y,z>0, $x^4+y^4+z^4=1$,tìm min $p=\frac{x^3}{1-x^8}+\frac{y^3}{1-y^8}+\frac{z^3}{1-z^8}$

Bài 197:Cho a,b,c>0,chứng minh :

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}}\ge\frac{9\sqrt[3]{abc}}{a+b+c}$$

Bài 198:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{1}{a+b+c}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{1}{ab+bc+ca}+\frac{1}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Bài 199:Cho a,b,c>0,abc = 1,chứng minh:

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}+\frac{4(ab+bc+ca)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge ab+bc+ca$$

Bài 200:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$(a^3+b^3+c^3)^2\ge(a^4+b^4+c^4)(ab+bc+ca)$$

Bài 1201:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$9(a^4+b^4+c^4)^2\ge(a^5+b^5+c^5)(a+b+c)^3$$

Bài 202:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{4a^2+ab+4b^2}}+\frac{b}{\sqrt{4b^2+bc+4c^2}}+\frac{c}{\sqrt{4c^2+ca+4a^2}}\ge 1$$

Bài 203:Cho $|a|\ne|b|\ne|c|$,chứng minh: $\left|\frac{ab}{a^2-b^2}\right|+\left|\frac{bc}{b^2-c^2}\right|+\left|\frac{ca}{c^2-a^2}\right|\ge\sqrt{3}$

Bài 204:Cho a,b,c>0, $abc\ge 2^9$,chứng minh: $\frac{1}{\sqrt{1+a}}+\frac{1}{\sqrt{1+b}}+\frac{1}{\sqrt{1+c}}\ge\frac{3}{\sqrt{1+\sqrt[3]{abc}}}$

Bài 205:Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 1,chứng minh:

$$\frac{4+7a}{15a+8}+\frac{4+7a}{15b+8}+\frac{4+7c}{15c+8}\ge\frac{19}{13}$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Bài 206:Cho a,b,c không âm, $a^2+b^2+c^2=2$,tìm max của $p=(a^5+b^5)(b^5+c^5)(c^5+a^5)$

Bài 207:Cho a,b,c không âm và $a+b+c=3$ chứng minh:

$$a^3+b^3+c^3+9abc\le 2(a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+c^2a+a^2c)$$

Bài 208:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{a^2}{2a^2+(b+c-a)^2}+\frac{b^2}{2b^2+(c+a-b)^2}+\frac{c^2}{2c^2+(a+b-c)^2}\le 1$$

Bài 209:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$,chứng minh:

$$\frac{1}{(1-ab)^2}+\frac{1}{(1-bc)^2}+\frac{1}{(1-ca)^2}\le \frac{2}{abc[(a+b+c)-abc]}$$

Bài 210:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của tam giác,chứng minh:

$$\frac{a^3+b^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3+c^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3+a^3}{a^2-ab+b^2}\ge 2(a+b+c)$$

Bài 211:Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3.Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\ge \frac{3}{2}$$

Bài 212:Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 2 trong đó không có hai số nào đồng thời bằng 0.Chứng minh rằng: $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\le 1$

Bài 213:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\sqrt{ab(a+b)}+\sqrt{bc(b+c)}+\sqrt{ca(c+a)}\ge \sqrt{4abc+(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Bài 214 :Cho a,b,c>0,chứng minh :

$$\frac{(a+b+c)^3}{4(ab+bc+ca)^2}\ge \frac{a}{a^2+2bc}+\frac{b}{b^2+2ca}+\frac{c}{c^2+2ab}$$

Bài 215:Cho a,b,c>0, $a+b+c+2=abc$,chứng minh:

$$\frac{ab}{(a+c)(b+c)}+\frac{bc}{(b+a)(c+a)}+\frac{ca}{(c+b)(a+b)}\le \frac{3(abc-4)}{8+abc}$$

Bài 216:Cho a,b,c>0,chứng minh: $(\frac{a^3+b^3+c^3}{3abc})^2+1\ge 2(\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca})^3$

Bài 217:Cho a,b,c>0, $a^2+b^2+c^2+2abc=1$,chứng minh:

$$(a+b+c+2)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ge 5+\frac{2}{abc}$$

Bài 218:Cho x,y,z>0, $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$,chứng minh:

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\ge 2(xyz+2-x-y-z)$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Bài 219:Cho x,y,z>0,chứng minh: $\frac{x^2-yz}{x^2+(y+z)^2}+\frac{y^2-zx}{y^2+(z+x)^2}+\frac{z^2-xy}{z^2+(x+y)^2}\ge 0$

Bài 220:Cho x,y,>0,chứng minh: $\frac{2xy}{x+y}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\ge \sqrt{xy}+\frac{x+y}{2}$

Bài 221:Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1,chứng minh:

$$ab+bc+ca\ge 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+5abc$$

Bài 222:Cho a,b,c>0, $a^2+b^2+c^2=2$ .Chứng minh:

$$(\frac{a}{b+c})^2+(\frac{b}{c+a})^2+(\frac{c}{a+b})^2\ge \frac{3}{2(ab+bc+ca)}$$

Bài 223:Cho x,y,z>0, $xy+yz+zx=1$,tìm min:

$$p=\frac{z(x+y)}{z+xy}+\frac{y(z+x)}{y+zx}+\frac{x(y+z)}{x+yz}$$

Bài 224:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a}{b+\sqrt{ab}}}+\sqrt{\frac{b}{c+\sqrt{bc}}}+\sqrt{\frac{c}{a+\sqrt{ca}}}\geq\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Bài 225:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác nhọn,chứng minh:

$$(a+b+c)^2(\frac{1}{a^2+b^2-c^2}+\frac{1}{b^2+c^2-a^2}+\frac{1}{c^2+a^2-b^2})\geq 27$$

Bài 226:Cho $1\leq x\leq y\leq z$,chứng minh:

$$\frac{1}{8}(x+y)^{x+y-z}(y+z)^{y+z-x}(z+x)^{z+x-y}\geq(\frac{3}{2})^{x+y+z-3}x^xy^yz^z$$

Bài 227:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{3a^2+5ab}{(b+c)^2}+\frac{3b^2+5bc}{(c+a)^2}+\frac{3c^2+5ca}{(a+b)^2}\geq 6$$

Bài 228:Cho $a,b,c\in(0,1]$,chứng minh: $\frac{1}{1+a^3}+\frac{1}{1+b^3}+\frac{1}{1+c^3}\leq\frac{3}{2abc}$

Bài 229:Cho a,b,c>0,chứng minh: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\sum_{cyc}(\frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}})^2$

Bài 230:Cho a,b,c>0,chứng minh: $3\sqrt[9]{\frac{9a(a+b)}{2(a+b+c)^2}}+\sqrt[3]{\frac{6bc}{(a+b)(a+b+c)}}\leq 4$

Bài 231:Cho a,b,c>0,abc = 1,chứng minh :

$$a+b+c\geq(1+\sqrt{2})(\frac{1}{1+\sqrt{2}a}+\frac{1}{1+\sqrt{2}b}+\frac{1}{1+\sqrt{2}c})$$

Bài 232:Cho a,b,c,d>0,chứng minh:

$$(\frac{a+b}{a+b+c})^2+(\frac{b+c}{b+c+d})^2+(\frac{c+d}{c+d+a})^2+(\frac{d+a}{d+a+b})^2\geq\frac{16}{9}$$

Bài 233:Cho a,b,c>0, $a+b+c=3$,chứng minh:

$$\frac{a^2}{b+3c^3}+\frac{b^2}{c+3a^3}+\frac{c^2}{a+3b^3}\geq\frac{3}{4}$$

Bài 234:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\leq 3\sqrt{\frac{3(a+b)(b+c)(c+a)}{16(ab+bc+ca)}}$$

Bài 235:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{a^2}{2b^2+ca}+\frac{b^2}{2c^2+ab}+\frac{c^2}{2a^2+bc}\geq\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}$$

Bài 236:Cho a,b,c>0, $a^2+b^2+c^2=3$,chứng minh: $\frac{bc}{a^2+1}+\frac{ca}{b^2+1}+\frac{ab}{c^2+1}\geq\frac{3}{2}$

Bài 237:Cho $a,b,c\in\left[1,2\right]$,chứng minh: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\leq\frac{19}{12}$

Bài 238:Cho a,b,c>0,chứng minh: $\frac{\sqrt{a}}{b+c}+\frac{\sqrt{b}}{c+a}+\frac{\sqrt{c}}{a+b}\ge\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{a+b+c}}$

Bài 239:Cho a,b,c>0,abc = 1.Chứng minh:

$$ab+bc+ca-\frac{3}{a+b+c}\ge(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\frac{2}{a^2+b^2+c^2}$$

Bài 240:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\le\frac{a}{a^3+(b+c)^3}+\frac{b}{b^3+(c+a)^3}+\frac{c}{c^3+(a+b)^3}\le\frac{1}{ab+bc+ca}$$

Bài 241:Cho $a^5-a^3+a=2$ .Chứng minh: $3<a^6<4$

Bài 242:Cho a,b,c,d là các số thực thỏa mãn

$$(8a+4b+2c+d+16)(27a+9b+3c+d+81)<0$$

Chứng minh: $max\{|a|,|b|,|c|,|d|\}>1$

Bài 243:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a+b}{b+1}}+\sqrt{\frac{b+c}{c+1}}+\sqrt{\frac{c+a}{a+1}}\ge 3$$

Bài 244:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a}{b+3}}+\sqrt{\frac{b}{c+3}}+\sqrt{\frac{c}{a+3}}\ge\frac{3}{2}$$

Bài 245:Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 3 và không có hai số nào đồng thời bằng.Chứng minh:

$$\frac{5-3bc}{1+a}+\frac{5-3ca}{1+b}+\frac{5-3ab}{1+c}\ge a+b+c$$

Bài 246:Cho a,b,c,d là các số thực không âm có tổng các bình phương bằng 4 và không có hai số nào đồng thời bằng.Chứng minh:

$$(abc)^3+(bcd)^3+(cda)^3+(dab)^3\le 4$$

Bài 247:Cho a,b,c là các số thực dương và không có hai số nào đồng thời bằng 0,chứng minh: $\frac{1}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{b^2+bc+c^2}+\frac{1}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{9}{(a+b+c)^2}$

Bài 248:Cho a,b,c là các số thực dương,đặt; $x=a+\frac{1}{b}-1, y=b+\frac{1}{c}-1, z=c+\frac{1}{a}-1$

Chứng minh: $xy+yz+zx\ge 3$

Bài 249:Cho a,b,c,x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=x+y+z$.

Chứng minh: $ax^2+by^2+cz^2+xyz\ge 4abc$

Bài 250:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$,chứng minh:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{9}{a+b+c}$$

Bài 251: Cho a,b,c,d là các số thực không âmChứng minh:

$$4(a^3+b^3+c^3+d^4)+15(abc+bcd+cda+dab)\ge(a+b+c+d)^3$$

Bài 252:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ca}+\frac{1}{c^2+2ab}>\frac{2}{ab+bc+ca}$$

Bài 253:Cho a,b,c là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0.

Chứng minh: $\frac{a(b+c)}{a^2+2bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+2ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+2ab}\ge 1+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$

Bài 254:Cho a,b,c là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0.

Chứng minh: $\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ca}+\frac{(a+b)^2}{c^2+ab}\ge 6$

Bài 255:Cho a,b,c là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0.

Chứng minh: $\frac{a^2-bc}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{b^2-ca}{\sqrt{b^2+ca}}+\frac{c^2-ab}{\sqrt{c^2+ab}}\ge 0$

Bài 256:Cho a,b,c là các số thực không âm.Chứng minh:

$$(a^2-bc)\sqrt{a^2+4bc}+(b^2-ca)\sqrt{b^2+4ca}+(c^2-ab)\sqrt{c^2+4ab}\ge 0$$

Bài 257:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{a^2-bc}{\sqrt{8a^2+(b+c)^2}}+\frac{b^2-ca}{\sqrt{8b^2+(c+a)^2}}+\frac{c^2-ab}{\sqrt{8c^2+(a+b)^2}}\ge 0$$

Bài 258:Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.Chứng minh:

$$\frac{1}{5-2ab}+\frac{1}{5-2bc}+\frac{1}{5-2ca}\le 1$$

Bài 259:Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.Chứng minh:

$$(2-ab)(2-bc)(2-ca)\ge 1$$

Bài 260:Cho a,b,c là các số thực không âm và không có hai số nào đồng thời bằng 0.

Chứng minh: $\frac{a^3+3abc}{(b+c)^2}+\frac{b^3+3abc}{(c+a)^2}+\frac{c^3+3abc}{(a+b)^2}\ge a+b+c$

Bài 261:Cho $x,y,z\in(0,2)$ và thỏa mãn $xy+yz+zx+xyz=4$.Chứng minh:

$$x+y+z+3\le 2(xy+yz+zx)$$

Bài 262:Cho x,y,z>0,chứng minh :

$$(\sqrt{x(y+z)}+\sqrt{y(z+x)}+\sqrt{z(x+y)})\sqrt{x+y+z}\ge\sqrt{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Bài 263:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{2(a^3+b^3+c^3)^2}{(abc)^2}\ge\frac{a^2+b^2}{c^2}+\frac{b^2+c^2}{a^2}+\frac{c^2+a^2}{b^2}+8(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})$$

Bài 264:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{a^3b}{c^2\sqrt{a^4+b^4}}+\frac{b^3c}{a^2\sqrt{b^4+c^4}}+\frac{c^3a}{b^2\sqrt{c^4+a^4}}\ge\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Bài 265:Cho a,b,c >0,chứng minh:

$$a^4+b^4+c^4+\sqrt{2}(ab^3+bc^3+ca^3)\ge(\sqrt{2}+1)(a^3b+b^3c+c^3a)$$

Bài 266:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác,chứng minh:

$$ab(\frac{p-c}{c})^3+bc(\frac{p-a}{a})^3+ca(\frac{p-b}{b})^3\ge\frac{(a+b+c)^2}{24}$$

Bài 267 :Cho x,y,z>0,chứng minh: $(\frac{x+y\sqrt{x}+y}{3})^3\le\frac{1}{3}(2x+\frac{y^2}{x})(\frac{x+y}{2})^2$

Bài 268:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{a^3}{(b+c)^3}(a+b)(a+c)+\frac{b^3}{(c+a)^3}(b+c)(b+c)+\frac{c^3}{(a+b)^3}(c+a)(c+b)\geq\frac{(a+b+c)^2}{6}$$

Bài 269:Cho a,b,c,>0, $ab+bc+ca+abc=4$.Chứng minh: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+abc\geq a+b+c+1$

Bài 270:Cho a,b,c>0, $a+b+c=3$.Chứng minh:

$$\frac{(a-b)^2}{a+b}+\frac{(b-c)^2}{b+c}+\frac{(c-a)^2}{c+a}+6\leq 2(ab+bc+ca)\leq a^2+b^2+c^2+3abc$$

Bài 271:Cho $1=a_0\leq a_1\leq ...\leq a_n$.Chứng minh: $\frac{\sqrt{a_1-a_0}}{a_1}+\frac{\sqrt{a_2-a_1}}{a_2}+...+\frac{\sqrt{a_n-a_{n-1}}}{a_n}\leq\sqrt{n}$

Bài 272:Cho x,y,z>0, $x^2+4y^2+3z^2+2xyz=12$.Chứng minh: $x+y+z\leq 4$

Bài 273:Cho a,b,c>0,chứng minh : $\sqrt{\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}\geq\sqrt{6}+1$

Bài 274:Cho a,b,c>0,abc = 1.Chứng minh: $\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}+3\geq a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

Bài 275:Cho a,b,c>0, $a+b+c=1$,chứng minh:

$$\frac{ab}{3ab+2b+c}+\frac{bc}{3bc+2c+a}+\frac{ca}{3ca+2a+b}\leq\frac{1}{4}$$

Bài 276:Cho a,b,c là các số thực bất kỳ,chứng minh:

$$(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(\frac{1}{(a-b)^4}+\frac{1}{(b-c)^4}+\frac{1}{(c-a)^4})\geq\frac{33}{16}$$

Bài 277:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác,chứng minh:

$$\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{c^2+ab}\geq\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a^3b+b^3c+c^3a}+\frac{1}{ab^3+bc^3+ca^3})$$

Bài 278:Cho a,b,c>0, $a+b+c=3$,chứng minh:

$$\sqrt{a\sqrt{a}}+\sqrt{b\sqrt{b}}+\sqrt{c\sqrt{c}}\geq\sqrt{3(ab+bc+ca)}$$

Bài 279:Cho a,b,c>0, $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$.Chứng minh:

$$\frac{a^2+bc}{a\sqrt{b+c}}+\frac{b^2+ca}{b\sqrt{c+a}}+\frac{c^2+ab}{c\sqrt{a+b}}\geq\sqrt{2}$$

Bài 280:Cho x,y,z không âm,chứng minh:

$$\frac{x^2+2yz}{(y-z)^2}+\frac{y^2+2zx}{(z-x)^2}+\frac{z^2+2xy}{(x-y)^2}\geq\frac{5(1+\sqrt{5})}{2}$$

Bài 281:Cho a,b,c>0, $a+b+c\geq abc$,tìm min của:

$$p=(a+b+c)(\frac{1}{a^4(b+c)}+\frac{1}{b^4(c+a)}+\frac{1}{c^4(a+b)})$$

Bài 282:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{ab}{a+b+1}+\frac{bc}{b+c+1}+\frac{ca}{c+a+1}\leq\frac{\sqrt{3}}{8}\sqrt{(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3}$$

Bài 283:Cho a,b,c>0, $ab+bc+ca+abc=4$,tìm min của: $p=a+b+c+12abc$

Bài 284:Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn $\begin{cases} 0 \le x \le y \le z \le 1 \\ 2y + z \le 2 \\ x + 2y + z \le 3 \end{cases}$,chứng minh: $x^2 + y^2 + z^2 \le \frac{49}{16}$

Bài 285:Cho a,b,c>0, $a+b+c=1$.Chứng minh:
$$\sqrt{4a+(b-c)^2} + \sqrt{4b+(c-a)^2} + \sqrt{4c+(a-b)^2} \ge 3(\sqrt{a^2+abc} + \sqrt{b^2+abc} + \sqrt{c^2+abc})$$

Bài 286:Cho a,b,c>0, $a+b+c=1$.Chứng minh:
$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{b+1}} + \frac{1}{\sqrt{c+1}}) \le \frac{9}{2}$$

Bài 287:Cho $a,b,c \in [0,2004]$,chứng minh: $\sqrt{\frac{2a}{b+2004}} + \sqrt{\frac{2b}{c+2004}} + \sqrt{\frac{2c}{a+2004}} \le 3$

Bài 288:Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn $x+y+z=3\sqrt[3]{9}$ .Tìm min của:
$$p = \frac{(3-x)^3}{x} + \frac{(3-y)^3}{y} + \frac{(3-z)^3}{z}$$

Bài 289:Cho a,b,c>0, $(a+b+c)^2(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}) = 36$,chứng minh: $(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2 > 34$

Bài 300:Cho a,b,c,d là các số thực không âm và thỏa mãn $a+b+c+d = a^2+b^2+c^2+d^2$
Chứng minh: $a^3+b^3+c^3+d^3+a+b+c+d \le 8$

Bài 301:Cho $1 \le x^2 - xy + y^2 \le 2$,tìm max của $p = x^4 + y^4$

Bài 302:Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức
$$\frac{a+b}{a+7b+c} + \frac{b+c}{b+7c+a} + \frac{c+a}{c+7a+b} \ge \frac{2}{3}$$

Bài 303:Cho các số a,b,c thuộc (0,2) thỏa mãn $abc + 2(a+b+c) = ab+bc+ca+4$
Chứng minh: $a^3+b^3+c^3 \ge 3$

Bài 304:Cho x,y,z ≥ 0 thỏa mãn $x+y+z=1$,tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của:
$$P = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}} + \sqrt{\frac{1-z}{1+z}}$$

Bài 305:Cho ba số dương a,b,c và thỏa mãn $a+b+c=1$,chứng minh rằng:
$$5\sqrt{\frac{b^3c^3}{a^3}} + 32\sqrt{\frac{c^3a^3}{b^3}} + 81\sqrt{\frac{a^3b^3}{c^3}} \ge 12$$

Bài 306:Cho $(a_1,...,a_n)$ và $(x_1,...,x_n)$ là những số thực dương sao cho
$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

Chứng minh rằng:

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i x_j)\leqslant \frac{n-2}{n-1}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i x_i^2}{1-a_i}\right).$$

Bài 307:Cho x,y,z là các số thực không âm thỏa mãn $x+y+z=1$.Chứng minh:

$$\sqrt{x+\frac{(y-z)^2}{12}}+\sqrt{y+\frac{(z-x)^2}{12}}+\sqrt{z+\frac{(x-y)^2}{12}}\leq\sqrt{3}$$

Bài 308:Cho a,b,c là các số thực nằm trong đoạn [1,2].Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{10a}{bc}+\frac{11b}{ca}+\frac{12c}{ab}$

Bài 309:Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 2,chứng minh:

$$\sqrt{a+b-2ab}+\sqrt{b+c-2bc}+\sqrt{c+a-2ca}\geq 2$$

Bài 310:Cho $x\in[0,2]$,tìm max của $p=\sqrt{4x-x^3}+\sqrt{x+x^3}$

Bài 311:Cho x_i ($i=\overline{1\div n}$) là các số thực dương bất kì,chứng minh:

$$\frac{(x_1+x_2+...+x_n)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^{n}x_i^i}\geq\frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^{n}i^i}$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Bài 312:Cho x_i là các số thực dương có tổng bằng 1,chứng minh:

$$x_1^{x_1}+x_2^{x_2}+...+x_n^{x_n}\geq n\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Bài 313:Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3.Tìm max của:

$$p=\frac{2b^3-a^3}{2ab+(\sqrt{13}+1)b^2}+\frac{2c^3-b^3}{2cb+(\sqrt{13}+1)c^2}+\frac{2a^3-c^3}{2ac+(\sqrt{13}+1)a^2}$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Bài 314:Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $ab+bc+ca=1$.Chứng minh:

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\geq\frac{5}{2}$$

Bài 315:cho a,b,c là 3 số thực không âm,chứng minh rằng:

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geq\frac{9}{4}$$

Bài 316:Tìm max P =(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z) với x,y,z $\in$[0,1].

Bài 317:Cho các số thực dương x_i,($i=\overline{1,n}$),có $\sum_{i=1}^{n}x_i=k>0$.Chứng minh:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^a}{x_{i+1}^b}\geq n\left(\frac{k}{n}\right)^T,\text{với } a,b\in z^+, a-b=T>0, x_{n+1}=x_n$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Bài 318:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của 1 tam giác có chu vi bằng 1.Chứng minh:

$$\frac{4}{3}+5\sqrt[3]{abc}\leq(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2})(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c})\leq 2+3\sqrt[3]{abc}$$

Bài 319:Cho a,b,c,d > 0,chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a^3}{15bcd+a^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{15cda+b^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{15dab+c^3}}+\sqrt{\frac{d^3}{15abc+d^3}}\geq 1$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Bài 320:Chứng minh: $\frac{2x^2+6\sqrt{x^3-2x^2+x-2}}{x^2+3x-4}\leq 3$

Bài 321:Cho $a,b,c,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5$ là các số thực dương thỏa mãn

$a+b+c=1, x_1x_2x_3x_4x_5=1$

Chứng minh: $\prod_{i=1}^{5}(ax_1^2+bx_1+c)\geq 1$

Bài 322:Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$.Chứng minh:

$$(1+a^2b)(1+b^2c)(1+c^2a)\leq 5+3abc$$

Bài 323:Cho x,y,z là các số thực không âm,chứng minh:

$$x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx}\geq\sqrt{x^2-xy+y^2}+\sqrt{y^2-yz+z^2}+\sqrt{z^2-zx+x^2}$$

Bài 324:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{a^3-2a+2}{b+c}+\frac{b^3-2b+2}{c+a}+\frac{c^3-2c+2}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

Bài 325:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$2(a^2+b^2+c^2)+a+b+c\geq ab+bc+ca+6$$

Bài 326:Cho các số thực dương a_i,($i=\overline{1,n}$) và thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n}a_i=n$ .Chứng minh: $\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i^2+1}\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+1}$

Bài 327:Cho a,b,c>0,abc = 1.Chứng minh: $(a+b+c)^2\geq 6(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})$

Bài 328:Cho a,b,c>0, $a^2+b^2+c^2=3$.Chứng minh: $\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geq\frac{3}{4}$

Bài 329:Cho x,y,z>0, $x+y+z=xyz$ .Tìm min của :

$$p=x^7(yz-1)+y^7(zx-1)+z^7(xy-1)$$

Bài 330:Cho $a,b,c\geq 0,a^2+b^2+c^2=1$.Chứng minh:

Bài 331:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{3a^2-2ab-b^2}{3a^2+2ab+b^2}+\frac{3b^2-2bc+c^2}{3b^2+2bc+c^2}+\frac{3c^2-2ca+a^2}{3c^2+2ca+a^2}\geq 0$$

Bài 332:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{3a^2-2ab-b^2}{a^2+b^2}+\frac{3b^2-2bc+c^2}{b^2+c^2}+\frac{3c^2-2ca+a^2}{c^2+a^2}\geq 0$$

Bài 333:Cho a,b,c,d là các số thực dương,chứng minh:

$$\frac{1}{a^2+ab}+\frac{1}{b^2+bc}+\frac{1}{c^2+cd}+\frac{1}{d^2+da}\geq\frac{2}{\sqrt{abcd}}$$

Bài 334:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Bài 335:Cho a,b,c>0, $\frac{1}{a^2-1}+\frac{1}{b^2-1}+\frac{1}{c^2-1}=1$.Chứng minh: $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\leq 1$

Bài 336:Cho x,y,z,a,b,c là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}(a+b+c)(x+y+z)=3\\(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=4\end{cases}$

Chứng minh: ax+by+cz ≥ 0

Bài 337:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh:

$$\sqrt[3]{4a^3+4b^3}+\sqrt[3]{4b^3+4c^3}+\sqrt[3]{4c^3+4a^3}\leq 4\left(\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}\right)$$

Bài 338:Cho $a,b,c\in R, a+b+c=1, a,b,c\geq -\frac{3}{4}$.Chứng minh:

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\leq\frac{9}{10}$$

Bài 339:Cho a,b,c là các số thực dương có tích không nhỏ hơn 1,chứng minh:

$$\frac{1}{a+b^{2005}+c^{2005}}+\frac{1}{b+c^{2005}+a^{2005}}+\frac{1}{c+a^{2005}+b^{2005}}\leq 1$$

Bài 340:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}+\frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)}+\frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)}\leq\frac{1}{3}$$

Bài 341:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)}\geq\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}$$

Bài 342:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$5+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq(1+a)(1+b)(1+c)$$

Bài 343:Cho a_i là các số thực không âm có tổng bằng 1.Chứng minh:

$$a_1a_2+a_2a_3+...+a_{n-1}a_n\leq\frac{1}{4}$$

Bài 344:cho a,b,c >0, $ab+bc+ca=1$.Chứng minh: $3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}+6(a+b+c)}\leq\frac{\sqrt[3]{3}}{abc}$

Bài 345:Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3,chứng minh:

$$3(a^2+b^2+c^2)\geq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+3$$

Bài 346:Cho a,b,c là các số thực dương,có $a+b+c=3$,chứng minh rằng:

$$\frac{a(1+2ca)}{1+ca}+\frac{b(1+2ab)}{1+ab}+\frac{c(1+2bc)}{1+bc}\geq\frac{3}{2}$$

Bài 347:Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn điều kiện $xy+yz+zx+xyz=4$

Chứng minh rằng:

$$\frac{x+y+z}{xy+yz+zx}\le 1+\frac{5}{247}((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)$$

Bài 348:Cho x và y là hai số thực thỏa mãn: $x^{2009}+y^{2009}=2x^{2004}y^{2004}$,tìm giá trị nhỏ nhất của: $A=1-xy$.

Bài 349:Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của: $A=\frac{y^2}{25}+\frac{t^2}{144}$,với x,y,z,t thỏa mãn hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+y^2+2x+4y-20=0 \\ t^2+z^2-2t-143=0 \\ xt+yz-x+t+2z-61\ge 0 \end{cases}$

Bài 350:Cho x,y,z là các số thực thuộc (0;1).Chứng minh:

$$\frac{1}{x(1-y)}+\frac{1}{y(1-z)}+\frac{1}{z(1-x)}\ge\frac{3}{xyz+(1-x)(1-y)(1-z)}$$

Bài 351:Tìm giá trị lớn nhất của: $P=3\sqrt{x}+8\sqrt{y}$,với x và y là hai số thực thỏ mãn:

$$17x^2-72xy+90y^2-9=0$$

Bài 352:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{1}{a^4(b+1)(c+1)}+\frac{1}{b^4(c+1)(a+1)}+\frac{1}{c^4(a+1)(b+1)}$$

Bài 353:Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 3,chứng minh:

$$\sum_{cyc}\frac{a^2b}{(a+2b)^2}\le\frac{1}{3}$$

Bài 354:cho các số dương $a_i,\overline{i=1,n}$ và $a_i\in[0,k]$.Đặt $s=\sum_{i=1}^{n}a_i$,chứng minh rằng:

$$P=\frac{k^na_1}{s-a_1+k}+\frac{k^na_2}{s-a_2+k}+...+\frac{k^na_n}{s-a_n+k}+(k-a_1)(k-a_2)...(k-a_n)\le k^n$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Bài 355:Cho a,b,c>0 và $a^2+b^2+c^2=1$.Chứng minh :

$$\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{b^2+c^2}+\frac{1}{c^2+a^2}\le\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc}+3$$

Bài 356:Cho x,y,z>0,thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=\frac{3}{4}$

Chứng minh: $\frac{x}{4(x^2+y)+3}+\frac{y}{4(y^2+z)+3}+\frac{z}{4(z^2+x)+3}\le\frac{1}{4}$

Bài 357:Cho a,b,c là 3 số thực dương thỏa mãn: $a+b+c=3$.Chứng minh :

$$\frac{(3a^2+abc)^2}{3a+1}+\frac{(3b^2+abc)^2}{3b+1}+\frac{(3c^2+abc)^2}{3c+1}\ge 12$$

(Nguyễn Xuân Huy)

Bài 358:Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+4xyz=2(xy+yz+zx)$

Tìm giá trị lớn nhất của $p=xyz+x+y+z+xy+yz+zx$

Bài 359:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn

$$\frac{1}{\sqrt{4a+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{4b+1}+1}+\frac{1}{\sqrt{4c+1}+1}=\frac{1}{2}$$,chứng minh: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{1}{2}$

Bài 360:Cho x,y,z>0 và xyz = 1.Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\ge 3\sqrt{3}$$

Bài 361:Cho a,b là 2 số thực dương,chứng minh: $A=\sum_{n=1}^{1995}(-1)^{n+1}(\frac{a^n}{b^n}+\frac{b^n}{a^n})\ge 2$

Bài 362:Tìm Min$A=\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}$,với $x,y,z>0$ thỏa mãn:

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{y^2+z^2}+\sqrt{z^2+x^2}=2006$$

Bài 363:Tìm Max $P=xy+yz+zx$ với $x\ge y\ge z>0$ và thỏa mãn: $32-3x^2=z^2=16-4y^2$.

Bài 364:Cho a,b,c là các số thực dương, $ab+bc+ca=1$.Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{a}+6b}+\sqrt[3]{\frac{1}{b}+6c}+\sqrt[3]{\frac{1}{c}+6a}\le\frac{1}{abc}$$

Bài 365:Cho $a,b,c>0$,chứng minh;

$$\frac{a}{1+a(1+b)}+\frac{b}{1+b(1+c)}+\frac{c}{1+c(1+a)}\le 1$$

Bài 366:Cho a,b,c > 0, $a+b+c=abc$ .Chứng minh:

$$a\sqrt{1+\frac{7}{b^2}}+b\sqrt{1+\frac{7}{c^2}}+c\sqrt{1+\frac{7}{a^2}}\ge\frac{7\sqrt{3}}{6}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+\frac{3}{2}$$

Bài 367:Cho x,y,z là các số thực dương, $x+y+z=1$.Chứng minh:

$$\frac{x^2+3xy}{x+y}+\frac{y^2+3yz}{y+z}+\frac{z^2+3zx}{z+x}\le 2$$

Bài 368:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1,chứng minh:

$$\frac{a^2+b}{ab(a+b)}+\frac{b^2+c}{bc(b+c)}+\frac{c^2+a}{ca(c+a)}\ge 3$$

Bài 369:Cho a,b,c>0, $a^2+b^2+c^2=1$.Chứng minh rằng:

$$(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(\frac{1}{(1-ab)^2}+\frac{1}{(1-bc)^2}+\frac{1}{(1-ca)^2})\le\frac{9}{4}$$

Bài 370:Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn $x^2+y^2+z^2+9=4(x+y+z)$

Chứng minh: $x^4+y^4+z^4+16(x^2+y^2+z^2)\ge 8(x^3+y^3+z^3)+27$

Bài 371:Cho x,y,z là các số thực không âm,chứng minh:

$$\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{6}\le\frac{x+y+z}{3}\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}}$$

Bài 372:Cho x,y,z là các số thực không bé hơn 1.Chứng minh:

$$(x^2-2x+2)(y^2-2y+2)(z^2-2z+2)\le(xyz)^2-2xyz+2$$

Bài 373:Cho x,y$\in R$.Chứng minh: $3(x+y+1)^2+1\ge 3xy$

Bài 374:Cho a,b,c>0, $a^2+b^2+c^2=3$.Tìm min:

$$P=\frac{a^5}{b^3+c^2}+\frac{b^5}{c^3+a^2}+\frac{c^5}{a^3+b^2}+a^4+b^4+c^4$$

Bài 375:Cho a,b,c>0,chứng minh: $\sum\frac{a}{\sqrt{a^2+2bc}}\le\frac{a+b+c}{\sqrt{ab+bc+ca}}$

Bài 376:Cho a,b,c,d>0,a+b+c+d=1,tìm giá trị nhỏ nhất của:

$$P=\frac{1}{a^2+b^2+c^2+d^2}+\frac{1}{acd}+\frac{1}{abd}+\frac{1}{abc}+\frac{1}{bcd}$$

Bài 377:Cho a,b,c là 3 số thực không âm,chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2-bc}+\frac{1}{3}\sqrt{4(c^2+a^2)+ca}\ge a+b+c$$

Bài 378:Cho x,y,z là 3 số thực bất kì khác 0,giả sử x = max{x,y,z},tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=\frac{x}{y}+\sqrt{1+\frac{y}{z}}+\sqrt[3]{1+\frac{z}{x}}$

Bài 379:Cho a,b,c không âm,chứng minh: $\sum\sqrt{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}\ge\sqrt{\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}}+\frac{1}{\sqrt{2}}$

Bài 380:Cho a,b,c là các số thực dương thay đổi luôn thỏa mãn abc = 4.Tìm giá trị nhỏ nhất của: $S=\frac{a^3}{\sqrt{(1+a^4\sqrt{a})(1+b^4\sqrt{b})}}+\frac{b^3}{\sqrt{(1+b^4\sqrt{b})(1+c^4\sqrt{c})}}+\frac{c^3}{\sqrt{(1+c^4\sqrt{c})(1+a^4\sqrt{a})}}$

Bài 381:Cho các số thực dương x,y,z thỏa: $x^{2008}+y^{2009}+z^{2010}\le x^{2007}+y^{2008}+z^{2009}$

Chứng minh: $x+y+z\le 3$

Bài 382:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn:

$$\frac{1}{a^2+b^2+4}+\frac{1}{b^2+c^2+4}+\frac{1}{c^2+b^2+4}\ge\frac{2}{3}$$

Chứng minh: $ab+bc+ca\le\frac{3}{4}$

Bài 383:Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1.Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2+b^2c}{b+c}+\frac{b^2+c^2a}{c+a}+\frac{c^2+a^2b}{a+b}\ge\frac{2}{3}$$

Bài 384:Cho a,b,c là các số thực dương có $a+b+c=1$,chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a+2b}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b+2c}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c+2a}}\ge 1$$

Bài 385:Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác,chứng minh;

$$\frac{a}{3a-b+c}+\frac{b}{3b-c+a}+\frac{c}{3c-a+b}\ge 1$$

Bài 386:Cho a,b,c>0, $\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}=2$.Chứng minh:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2(a+b+c)$$

Bài 387:Cho a,b,c là các số thực dương,abc = 2.Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3 \geq a\sqrt{b+c}+b\sqrt{c+a}+c\sqrt{a+b}$$

Bài 388:Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=xyz$.Chứng minh:

$$P=(x-1)(y-1)(z-1)$$

Bài 389:Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh: $a+b+c \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

Bài 390:Chứng minh rằng với mọi số thực dương a,b,c ta luôn có:

$$\frac{a^2+bc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+ca}{(c+a)^2}+\frac{c^2+ab}{(a+b)^2} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 391:Cho 3 số thực a,b,c.Chứng minh rằng:

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \geq (ab+bc+ca-1)^2$$

Bài 392:Cho x,y là hai số thực dương,tìm giá trị nhỏ nhất của: $A=\frac{3x^2+4}{4x}+\frac{2+y^3}{y^2}$

Bài 393:Cho a,b,c là 3 số thực dương thỏa mãn a + b + c = 3,chứng minh rằng:

$$\frac{1}{2+a^2+b^2}+\frac{1}{2+b^2+c^2}+\frac{1}{2+c^2+a^2} \leq \frac{3}{4}$$

Bài 394:Cho a,b,c là 3 số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$,tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau: $A=\frac{a}{3(b^2+c^2)+2bc}+\frac{b}{3(c^2+a^2)+2ca}+\frac{c}{3(a^2+b^2)+2ab}$

Bài 395:Cho $0 \leq a \leq b \leq c \leq d \leq e$ thỏa mãn $a+b+c+d+e=1$,chứng minh:

$$a(bc+cd+de+ed)+cd(b+e-a) \leq \frac{1}{25}$$

Bài 396:Cho a,b,c là các số thực không âm trong đó không có hai số nào đồng thời bằng 0.Chứng minh: $\sum (a-b)(a-c)(a+2b)(a+2c) \geq \frac{9(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{ab+bc+ca}$

Bài 397:Cho các số thực x,y,z.Chứng minh bất đẳng thức:

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx \geq max\left\{\frac{3(x-y)^2}{4},\frac{3(y-z)^2}{4},\frac{4(z-x)^2}{4}\right\}$$

Bài 398:Cho x,y,z là 3 số thực dương thỏa mãn $x,y,z<2$ và $x^2+y^2+z^2=3$,chứng minh:

$$\frac{3}{2} < \frac{1+y^2}{x+2}+\frac{1+z^2}{y+2}+\frac{1+x^2}{z+2} < 3$$

Bài 399:Cho các số thực dương a,b,c.Chứng minh:

$$\left(\frac{a}{2a+b}\right)^3+\left(\frac{b}{2b+c}\right)^3+\left(\frac{c}{2c+a}\right)^3 \geq \frac{1}{9}$$

Bài 400:Cho a,b,c là các số thực không âm,không có hai số nào cùng bằng 0.Chứng minh rằng: $$\frac{a^2+bc}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^2+ca}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^2+ab}{a^2-ab+b^2} \geq 3$$

Bài 401:Cho các số không âm a,b,c,không có 2 số nào cùng bằng không,chứng minh:

$$\frac{a^2+bc}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^2+ca}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^2+ab}{a^2-ab+b^2} \geq 3+\frac{3a^2b^2c^2}{(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)}$$

Bài 402:Cho 3 số dương a,b,c thay đổi,tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{\sqrt{bc}}{a+3\sqrt{bc}}+\frac{\sqrt{ca}}{b+3\sqrt{ca}}+\frac{\sqrt{ab}}{c+3\sqrt{ab}}$$

Bài 403:Cho 3 số thực dương x,y,z thỏa mãn $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\le 1$,tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{\sqrt{x}}{x^3+y^2}+\frac{\sqrt{y}}{y^3+z^2}+\frac{\sqrt{z}}{z^3+x^2}$

Bài 404:Cho 4 số thực dương a,b,c,d,chứng minh:

$$((a+b)(b+c)(c+d)(d+a))^3\ge 16(abcd)^2(a+b+c+d)^4$$

Bài 405:Cho x,y,z >0,chứng minh:

$$\frac{x^2(y+z)}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2(z+x)}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2(x+y)}{(z+x)(z+y)}\le\frac{x+y+z}{2}$$

Bài 406:Cho 3 số thực dương a,b,c.Chứng minh:

$$2(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ge\frac{9}{4}+(4-\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2})^2$$

Bài 407:Cho các số thực dương a,b,c có tổng bằng 1.Cgứng minh bất đẳng thức sau:

$$ab+bc+ca\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+8abc$$

Bài 408:Với a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác,chứng minh rằng;

$$\frac{ab}{3c^2+(a-b)^2}+\frac{bc}{3a^2+(b-c)^2}+\frac{ca}{3b^2+(c-a)^2}\ge 1$$

Bài 409:Cho các số thực dương a,b,c.Chứng minh: $\frac{b(a+b)}{(c+a)^2}+\frac{c(b+c)}{(a+b)^2}+\frac{a(c+a)}{(b+c)^2}\ge\frac{3}{2}$

Bài 410:Cho 3 số thực dương a,b,c.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=(a^2+b^2+c^2)(\frac{1}{(a+2b+c)^2}+\frac{1}{(b+2c+a)^2}+\frac{1}{(c+2a+b)^2})$$

Bài 411:Cho x,y,z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x,y,z\in(0,1)$ .Chứng minh rằng: $(x^2-x+\frac{1}{2})(y^2-y+\frac{1}{2})(z^2-z+\frac{1}{2})\ge(x-yz)(y-zx)(z-xy)$

Bài 412:Chứng minh rằng nếu a,b,c là các số dương thì:

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}}\ge\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Bài 413:Cho 3 số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$,chứng minh:

$$\frac{48abc+1}{abc}\ge\frac{25}{a+b+c}$$

Bài 414:Cho a,b,c,d là các số thực dương,chứng minh:

$$\sqrt{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}\ge\sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}}$$

Bài 415:Cho a,b,c là 3 số thực dương,chứng minh:

$$(\frac{a}{b+c})^2+(\frac{b}{c+a})^2+(\frac{c}{a+b})^2+\frac{2(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 1$$

Bài 416:Cho a, b, c là các số thực không âm, chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a^2+2bc}{2a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b^2+2ca}{2b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c^2+2ab}{2c^2+ab}}\geq 2\sqrt{2}$$

Bài 417:Cho a,b,c là các số thực dương,chứng minh;

$$(\frac{a}{b+c})^2+(\frac{b}{c+a})^2+(\frac{c}{a+b})^2+\frac{3(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq\frac{9}{8}$$

Bài 418:Cho a,b,c là các số thực không âm,trong đó không có hai số nào đồng thời bằng 0.Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$9(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1)\geq 8(a^2b^2c^2+abc+1)^2$$

Bài 419:Cho a,b,c là các số thực không âm,chứng minh:

$$\frac{a^3}{\sqrt{b^2-bc+c^2}}+\frac{b^3}{\sqrt{c^2-ca+a^2}}+\frac{c^3}{\sqrt{a^2-ab+b^2}}\geq a^2+b^2+c^2$$

Bài 450:Cho a,b là các số thực dương,tìm giá trị nhỏ nhất:

$$P=\frac{a+b}{\sqrt{a(4a+5b)}+\sqrt{b(4b+5a)}}$$

Bài 451:Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn: $ab+bc+ca=1$.Chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+bc+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+ca+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+ab+b^2}}$$

Bài 452:Nếu $x\geq y\geq z\geq 0$,chứng minh:

a) $\frac{x+y+z}{3}-\sqrt[3]{xyz}\geq\frac{2(y-z)^2}{9(y+z)}$

b) $\frac{x+y+z}{3}-\sqrt[3]{xyz}\geq\frac{(x-y)^2}{5(x+y)}$

Bài 453:Cho a,b,c không âm,kg có 2 số nào đồng thời bằng 0.Chứng minh:

$$\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}+\frac{c^2+a^2}{b^2+ca}+\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}\geq 2(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b})$$

Bài 454:Cho a,b,c là các số thực dương có tổng bằng 1,tìm giá trị lớn nhất

của: $P=\frac{(a-bc)(b-ca)(c-ab)}{a^2b^2c^2}$

Bài 455:Cho x,y,z>0, $x^2+y^2+z^2=1$.Chứng minh: $\frac{x+y}{1+xy}+\frac{y+z}{1+yz}+\frac{z+x}{1+zx}\leq\frac{9}{2(x+y+z)}$

Bài 456:Cho các số dương a,b,c thỏa mãn a + b + c = abc.Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\leq\frac{9}{4}$$

Bài 457:Cho a,b,c>0,chứng minh:

$$\frac{a}{9ab+(a+b+c)^2}+\frac{b}{9bc+(a+b+c)^2}+\frac{c}{9ca+(a+b+c)^2}\geq\frac{1}{2(a+b+c)}$$

Bài 458:Cho x,y,z dương thỏa mãn $xy+yz+zx=7xyz$,tìm min của:

$$S=\frac{8x^4+1}{x^2}+\frac{108y^5+1}{y^2}+\frac{16z^6+1}{z^2}$$

Bài 459:Cho $x,y,z\in R^+$,chứng minh: $\sum_{cyc}\frac{x^2+1}{(x+y)(x+z)}\geq\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2}{2(x^2+y^2+z^2)}$

Bài 460:Cho x,y,z >0,chứng minh:

$$\frac{4x^2+41xy}{y(8x+y)}+\frac{4y^2+41yz}{z(8y+z)}+\frac{4z^2+41zx}{x(8z+x)}\geq 15$$

Bài 461:Cho a,b,c>0,a + b + c =1.Tìm giá trị lớn nhất của:

$$P=(a+b)\sqrt{ab}+(b+c)\sqrt{bc}+(c+a)\sqrt{ca}$$

Bài 462:Cho $1\geq x\geq y>0$,chứng minh: $\frac{x^3y^2+y^3+x^2}{x^2+y^2+1}\geq xy$

Bài 463:Cho a,b,c>0, $a+b+c=3$,chứng minh:

$$\frac{ab^2}{13a+3b^2}+\frac{bc^2}{13b+3c^2}+\frac{ca^2}{13c+3a^2}\leq\frac{3}{16}$$

Bài 464:Cho a,b,c là các số thực dương, $a+b+c=3$,chứng minh:

$$\sqrt{\frac{a}{b^2+3}}+\sqrt{\frac{b}{c^2+3}}+\sqrt{\frac{c}{a^2+3}}\leq\frac{3}{2}$$

Bài 465:cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+d)(d+a)=1$,chứng minh: $(2a+b+c)(2b+c+d)(2c+d+a)(2d+a+b)a^2b^2c^2d^2\leq\frac{1}{16}$

Bài 466:Với a,b,c là các số dương,chứng minh: $a^2b+b^2c+c^2a+abc\geq\sqrt{2abc(a+b)(b+c)(c+a)}$

Bài 312:Cho a,b,c và x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{m}$ và $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{n}$ .Chứng minh: $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\geq\frac{m}{n}$

Bài 467:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$,chứng minh:

$$8(a^2+b^2+c^2)\geq 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

Bài 468:Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}+\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2}$,chứng minh bất đẳng thức: $\frac{1}{x^3+2}+\frac{1}{y^3+2}+\frac{1}{z^3+2}\leq\frac{1}{3}$

Bài 469:Cho a,b,c>0, $abc\geq 1$ .Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a}\le 1$$

Bài 470:Cho x,y,z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z+2=xyz$

Chứng minh: $5(x+y+z)+18\ge 8(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx})$

Bài 471:Cho a,b,c là các số thực dương sao cho $a+b+c+1=4abc$ .Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ca}}\le 3$$

Bài 472:Cho các số thực dương $a_1,a_2,...,a_n$ thỏa mãn $a_1+a_2+...+a_n=1$.Chứng minh rằng: $(a_1a_2+a_2a_3+...+a_na_1)(\frac{a_1}{a_2^2+a_2}+\frac{a_2}{a_3^2+a_3}+...+\frac{a_n}{a_1^2+a_1})\ge\frac{n}{n+1}$

Bài 473:Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$.Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b}\ge\frac{1}{ab+bc+ca}$$

Bài 474:Cho a,b,c>0 thỏa mãn $a+b+c=\frac{9}{4}$,tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A=(a+\sqrt{a^2+1})^b(b+\sqrt{b^2+1})^c(c+\sqrt{c^2+1})^a$$

Bài 475:Cho các số thực x,y,z thỏa mãn $0<z\le y\le x\le 8$

và $3x+4y\ge max\left\{xy,\frac{1}{2}xyz-8z\right\}$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A=x^5+y^5+z^5$

Bài 476:Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}$,với x,y,z>0; $\frac{2}{5}\le z\le\min\left\{x,y\right\}$;

$xz\ge\frac{4}{15}, yz\ge\frac{1}{5}$

Bài 477:Cho $\begin{cases} x,y,z>0;\frac{1}{\sqrt{2}}\le z<\min\left\{\sqrt{2}x,\sqrt{3}y\right\} \\ x+\sqrt{3}z\ge\sqrt{6};\sqrt{3}y+\sqrt{10}z\ge 2\sqrt{5}\end{cases}$,tìm giá tri lớn nhất của biểu thức:

$$A=\frac{1}{x^2}+\frac{2}{y^2}+\frac{3}{z^2}$$

Bài 478:Cho a,b,c >0 và thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=2$,chứng minh:

$$\frac{(a+b)^3}{a^2+6ab+b^2}+\frac{(b+c)^3}{b^2+6bc+c^2}+\frac{(c+a)^3}{c^2+6ca+a^2}\le 3$$

Bài 479:Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$,chứng minh:

$$\frac{a^3}{2b^2+c^2}+\frac{b^3}{2c^2+a^2}+\frac{c^3}{2a^2+b^2}\ge 1$$

Bài 480:Cho a,b,c là các số thực không âm,chứng minh: $\sum\sqrt{\frac{a+b}{b^2+4bc+c^2}}\ge\frac{3}{\sqrt{a+b+c}}$

Bài 481:Cho x,y,z>0, $x+y+z=1$,Tìm giá trị bé nhất của:

$$P=\frac{x^3}{(1-x)^2}+\frac{y^3}{(1-y)^2}+\frac{z^3}{(1-z)^2}$$

Bài 482:Cho $0\le x,y,z\le 1$,chứng minh: $\frac{x}{7+z^3+y^3}+\frac{y}{7+x^3+z^3}+\frac{z}{7+y^3+x^3}\le\frac{1}{3}$

Bài 483:Cho x,y,z>0, $x+y+z=1$,chứng minh: $\frac{x^2-yz}{x^2+x}+\frac{y^2-zx}{y^2+y}+\frac{z^2-xy}{z^2+z}\le 0$

Bài 484:Cho a,b,c là các số thực không âm,không có hai số nào đồng thời bằng không.Chứng minh rằng:

$$\frac{2a^2+5bc}{(b+c)^2}+\frac{2b^2+5ca}{(c+a)^2}+\frac{2c^2+5ab}{(a+b)^2}\ge\frac{21}{4}$$

Bài 485:Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b}{4-bc}+\frac{b^2c}{4-ca}+\frac{c^2a}{4-ab}\le 1$$

Bài 486:Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$.Chứng minh rằng:

$$a\sqrt{a+b}+b\sqrt{b+c}+c\sqrt{c+a}\ge 3\sqrt{2}$$

Bài 487:Cho a,b,c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$.Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b}{9-4bc}+\frac{b^2c}{9-4ca}+\frac{c^2a}{9-4ab}\le\frac{3}{5}$$

Bài 488:Cho a,b,c là 3 số thực không âm có tích bằng 1,chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2+3}+\frac{b}{b^2+3}+\frac{c}{c^2+3}\le\frac{3}{4}$$

Bài 489:Cho a,b,c là 3 số thực dương có tích bằng 1,chứng minh rằng với mọi số dương k ta luôn có:

$$\frac{a}{b^3+k}+\frac{b}{c^3+k}+\frac{c}{a^3+k}\ge\frac{3}{1+k}$$

Bài 490:Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{ab+2c^2+2c}+\frac{1}{bc+2a^2+2a}+\frac{1}{ca+2b^2+2b}\ge\frac{1}{ab+bc+ca}$

với mọi số thực dương a, b, c thỏa mãn đẳng thức a + b + c = 1.

Bài 491:Cho a, b, c, x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}(y+z)+\frac{b}{c+a}(z+x)+\frac{c}{a+b}(x+y)\ge\sqrt{3(xy+yz+zx)}$$

Bài 492:Chứng minh rằng nếu x,y,z$\in[-1,1]$ thoả mãn điều kiện x+y+z+xyz=0, thì ta có:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}+\sqrt{z+1}\le 3.$$

Bài 493:Cho a,b,c là các số thực không âm có tổng bằng 3.Chứng minh rằng:

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)\le\frac{27}{4}$$

Bài 494:Cho a,b,c là các số thực dương có tích bằng 1.Chứng minh:

$$a^2+b^2+c^2+9(ab+bc+ca)\ge 10(a+b+c)$$

Bài 495 :Cho a,b,c là các số thực dương, $ab+bc+ca=3$.Chứng minh :

$$\frac{a(b^2+c^2)}{a^2+bc}+\frac{b(c^2+a^2)}{b^2+ca}+\frac{c(a^2+b^2)}{c^2+ab}\ge 3$$

Bài 496 :Cho x,y,z>0, $xy+yz+zx=1$.Chứng minh :

$$\frac{1}{1+xy+z^2}+\frac{1}{1+yz+x^2}+\frac{1}{1+zx+y^2}\le\frac{9}{5}$$

Bài 497 :Cho x,y,z>0, $x^2+y^2+z^2=1$.Chứng minh :

$$\frac{1}{x^2+y^2+2z^2}+\frac{1}{y^2+z^2+2x^2}+\frac{1}{z^2+x^2+2y^2}\ge\frac{2}{x^2y^2z^2}$$

Bài 498 :Cho $a,b,c\ge 0, a+b+c=1$.Chứng minh :

$$\sqrt{1-3ab}+\sqrt{1-3bc}+\sqrt{1-3ca}\ge\sqrt{6}$$

Bài 499 :Cho $x,y,z\in\left[0,2\right], x+y+z=3$.Chứng minh : $x^3+y^3+z^3\le 9$