TẬP SAN TOÁN HỌC 2009

HỆ THỐNG CÁC TRƯỜNG CHUYÊN ĐỒNG BẰNG DUYÊN HẢI SÔNG HỒNG

NAM ĐỊNH 2009

MỤC LỤC

MỘT SỐ BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC
TRONG CÁC KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI.

Trần Xuân Đáng

THPTChuyên Lê Hồng Phong - Nam Định

I- ĐIỀU KIỆN HOÀN CẢNH TẠO RA SÁNG KIẾN

Trong các kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia và trong các kì thi Olympic toán Quốc tế , chúng ta thường gặp các bài toán về bất đẳng thức. Trong kì thi chọn đội tuyển Việt Nam dự thi Olympic toán quốc tế năm 2009 có bài toán sau:

Bài toán 9: Tìm tất cả các số thực r sao cho bất đẳng thức

$$\left(r+\frac{a}{b+c}\right)\left(r+\frac{b}{c+a}\right)\left(r+\frac{c}{a+b}\right)\geq\left(r+\frac{1}{2}\right)^3$$

đúng với mọi bộ 3 số thực dương a, b, c

II. THỰC TRẠNG TRƯỚC KHI TẠO RA SÁNG KIẾN

Bài toán 9 là một bài toán khó. Chỉ có một vài thí sinh giải quyết được trọn vẹn bài toán này.

III. CÁC GIẢI PHÁP TRỌNG TÂM

Nội dung của bản báo cáo này là trình bày một cách suy nghĩ để đi đến lời giải của bài toán 9. Từ một bài toán thi Olympic toán Quốc tế năm 1984 (bài toán 6), tác giả đã tổng quát bài toán đó thành bài toán 7 và đã giải quyết được bài toán 7. Sau đó áp dụng kết quả của bài toán 7 để giải bài toán 9. Trong bản báo cáo sáng kiến này tác giả cũng trình bày một cách giải của bài toán thi Olympic toán Quốc tế năm 2001 (bài toán 1) và sau đó áp dụng cách giải đó vào việc tìm lời giải cho các bài toán tương tự; đồng thời tác giả cũng đưa ra một bài toán tổng quát (bài toán 5) của bài toán thi Olympic toán Quốc tế năm 1995 (bài toán 4) và lời giải của bài toán tổng quát đó.

Trong kì thi Olympic toán Quốc tế năm 2001 có bài toán sau:

<u>Bài toán 1:</u> Cho ba số thực dương a,b,c . Chứng minh răng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

Trước hết ta xét

<u>Bài toán 2:</u> Cho 3 số thực dương a,b,c . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Đây là bất đẳng thức Nesbitt . Bất đẳng thức này có nhiều chứng minh. Sau đây là một chứng minh của nó .

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có : $a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}} \geq 3a^{\frac{1}{2}}b$

$a^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}} \geq 3a^{\frac{1}{2}}c \Rightarrow 2(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}) \geq 3a^{\frac{1}{2}}(b+c)$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c} \geq \frac{3a^{\frac{3}{2}}}{2(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})}$$

Tương tự ta có $\dfrac{b}{c+a} \geq \dfrac{3b^{\frac{3}{2}}}{2(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})}$ và $\dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3c^{\frac{3}{2}}}{2(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}})}$

Từ đó suy ra : $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$

Chúng ta áp dụng phương pháp giải bài toán 2 để giải bài toán 1 . Ta chứng minh rằng tồn tại số thực α sao cho .

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^\alpha}{a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha} (1)$$

Thật vậy bất đẳng thức (1) $\Leftrightarrow$ a $(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha) \geq a^\alpha\sqrt{a^2+8bc}$

$\Leftrightarrow a^2(a^\alpha+b^\alpha+c^\alpha)^2 \geq a^{2\alpha}(a^2+8bc)$

$\Leftrightarrow a^2[a^{2\alpha}+2a^\alpha(b^\alpha+c^\alpha)+(b^\alpha+c^\alpha)^2] \geq a^{2\alpha+2}+8a^{2\alpha}bc$

$\Leftrightarrow 2a^{\alpha+2}(b^\alpha+c^\alpha)+a^2(b^\alpha+c^\alpha)^2 \geq 8a^{2\alpha}bc$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có : $b^\alpha+c^\alpha \geq 2\sqrt{b^\alpha c^\alpha}$

$$\Rightarrow 2a^{\alpha+2}(b^\alpha + c^\alpha) + a^2(b^\alpha + c^\alpha)^2 \geq 4a^{\alpha+2}b^{\frac{\alpha}{2}}c^{\frac{\alpha}{2}} + 4a^2b^\alpha c^\alpha$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $a^{\alpha+2}b^{\frac{\alpha}{2}}c^{\frac{\alpha}{2}} + a^2b^\alpha c^\alpha \geq 2a^{2+\frac{\alpha}{2}}b^{\frac{3\alpha}{4}}c^{\frac{3\alpha}{4}}$

Ta chọn α thoả mãn $\begin{cases} 2 + \dfrac{\alpha}{2} = 2\alpha \\ \dfrac{3\alpha}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{4}{3}$

Vậy $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}}$, $\dfrac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} \geq \dfrac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}}$, $\dfrac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \dfrac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}} + c^{\frac{4}{3}}}$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

Bài toán sau tương tự với bài toán 2

Bài toán 3: Cho 4 số thực dương a,b,c.d . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b^3+63acd}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c^3+63abd}} + \frac{d}{\sqrt[3]{d^3+63abc}} \geq 1$$

Bằng phương pháp đã được sử dụng trong lời giải của bài toán 2 ta chứng minh được. $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}} \geq \dfrac{a^{\frac{21}{16}}}{a^{\frac{21}{16}} + b^{\frac{21}{16}} + c^{\frac{21}{16}} + d^{\frac{21}{16}}}$

$$\frac{b}{\sqrt[3]{b^3+63acd}} \geq \frac{b^{\frac{21}{16}}}{a^{\frac{21}{16}} + b^{\frac{21}{16}} + c^{\frac{21}{16}} + d^{\frac{21}{16}}}$$

$$\frac{c}{\sqrt[3]{c^3+63abd}} \geq \frac{c^{\frac{21}{16}}}{a^{\frac{21}{16}} + b^{\frac{21}{16}} + c^{\frac{21}{16}} + d^{\frac{21}{16}}}$$

$$\frac{d}{\sqrt[3]{d^3+63abc}} \geq \frac{d^{\frac{21}{16}}}{a^{\frac{21}{16}} + b^{\frac{21}{16}} + c^{\frac{21}{16}} + d^{\frac{21}{16}}}$$

Suy ra $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}} + \dfrac{b}{\sqrt[3]{b^3+63acd}} + \dfrac{c}{\sqrt[3]{c^3+63abd}} + \dfrac{d}{\sqrt[3]{d^3+63abc}} \geq 1$

<u>Bài toán 4 :</u> Cho 3 số thực dương a,b,c thoả mãn abc = 1 . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2} \quad (2)$$

(Đề thi toán Quốc tế năm 1995)

Lời giải : Đặt x = $\frac{1}{a}$, y = $\frac{1}{b}$, z = $\frac{1}{c}$ (x,y,z > 0) . Khi đó xyz = 1

và bất đẳng thức (2) $\Leftrightarrow \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{3}{2}$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có :

$$\left(\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\right)\ (2x+2y+2z)\geq(x+y+z)^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{x+y+z}{2}\geq\frac{3}{2} \text{ (vì x+y+z } \geq 3\sqrt[3]{xyz}=3)$$

Bài toán sau là một bài toán tổng quát của bài toán 4

<u>Bài toán 5:</u> Tìm tất cả các số thực α sao cho bất đẳng thức

$\frac{1}{a^\alpha(b+c)}+\frac{1}{b^\alpha(c+a)}+\frac{1}{c^\alpha(a+b)}\geq\frac{3}{2}$ (3) đúng với mọi bộ 3 số thực dương a.b.c thoả mãn abc = 1

Lời giải: Xét $\alpha \geq 2$. Không mất tính tổng quát, giả sử a $\leq b\leq c$

Đặt x = $\frac{1}{a}$, y = $\frac{1}{b}$, z = $\frac{1}{c}$. Khi đó x,y,z > 0 và xyz = 1

Bất đẳng thức (3) $\Leftrightarrow \frac{x^{\alpha-1}}{y+z}+\frac{y^{\alpha-1}}{z+x}+\frac{z^{\alpha-1}}{x+y}\geq\frac{3}{2}$

Ta có $x\geq y\geq z \ \Rightarrow \ \frac{x}{y+z}\geq\frac{y}{z+x}\geq\frac{z}{x+y}$

Áp dụng bất đẳng thức Trêbưsep ta có

$$\frac{x^{\alpha-1}}{y+z}+\frac{y^{\alpha-1}}{z+x}+\frac{z^{\alpha-1}}{x+y}\geq(x^{\alpha-2}+y^{\alpha-2}+z^{\alpha-2})\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)$$

Ta có $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}$, $x^{\alpha-2}+y^{\alpha-2}+z^{\alpha-2}\geq 3\sqrt[3]{(xyz)^{\alpha-2}}=3$

$$\Rightarrow \frac{x^{\alpha-1}}{y+z}+\frac{y^{\alpha-1}}{z+x}+\frac{z^{\alpha-1}}{x+y}\geq 3$$

Vậy với $\alpha \geq 2$ thì bất đẳng thức (3) đúng với mọi bộ 3 số thực dương a,b,c thoả mãn abc = 1 . Ta chứng minh rằng với $\alpha \leq -1$ thì bất đẳng thức (3) đúng với bộ ba số thực dương a,b,c thoả mãn điều kiện abc = 1 . Thật vậy giả sử a,b,c là 3 số thực dương thoả mãn abc = 1 . Đặt $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ thì x,y,z > 0 và xyz = 1

Đặt $\beta = 1 - \alpha \geq 2$. Theo chứng minh trên ta có

$$\frac{1}{x^\beta(y+z)}+\frac{1}{y^\beta(z+x)}+\frac{1}{z^\beta(x+y)} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^\alpha(b+c)}+\frac{1}{b^\alpha(c+a)}+\frac{1}{c^\alpha(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Với $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$

Xét các dãy (a_n) , (b_n), (c_n): $a_n = n$, $b_n = n$, $c_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \in N^*)$

Đặt $S_n = \frac{1}{a_n^\alpha(b_n+c_n)}+\frac{1}{b_n^\alpha(c_n+a_n)}+\frac{1}{c_n^\alpha(a_n+b_n)} = \frac{2n^{2-\alpha}}{n^3+1}+\frac{n^{2\alpha-1}}{2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$

Xét $\alpha = \frac{1}{2}$. Xét các dãy (a_n) , (b_n), (c_n): $a_n = b_n = n$, $c_n = \frac{1}{n^2}$ $(n \in N^*)$

Đặt $S_n = \frac{1}{a_n^\alpha(b_n+c_n)}+\frac{1}{b_n^\alpha(c_n+a_n)}+\frac{1}{c_n^\alpha(a_n+b_n)} = \frac{2n^{2-\alpha}}{n^3+1}+\frac{n^{2\alpha-1}}{2}$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}$

Với $\frac{1}{2} < \alpha < 2$ .Xét các dãy (a_n) , (b_n), (c_n) sao cho $a_n = b_n = \frac{1}{n}$, $c_n = n^2 (n \in N^*)$

Đặt $S_n = \frac{1}{a_n^\alpha(b_n+c_n)}+\frac{1}{b_n^\alpha(c_n+a_n)}+\frac{1}{c_n^\alpha(a_n+b_n)} = \frac{2n^{\alpha+1}}{n^3+1}+n^{1-2\alpha}$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$

Vậy tập các giá trị α cần tìmlà $(-\infty,-1] \cup [2;+\infty)$

<u>Bài toán 6:</u> Cho 3 số thực không âm x,y,z thoả mãn điều kiện x+y+z = 1 . Chứng minh rằng $0 \leq xy+yz+zx-2xyz \leq \frac{7}{27}$

(Đề thi Olympic toán Quốc tế năm 1984)

Bài toán sau là bài toán tổng quát của bài toán 6

Bài toán 7: Cho số thực k . Xét các số thực không âm x,y,z thoả mãn điều kiện x+y+z = 1 . Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

E = xy + yz + xz - k xyz

Lời giải của bài toán 7 : Trước hết ta tìm giá trị lớn nhất của E . Theo bất đẳng thức Côsi ta có $\frac{x+y+z}{3} \ge \sqrt[3]{xyz} \Rightarrow xyz \le \frac{1}{27}$

Giả sử $x \ge y \ge z$

Trường hợp 1: y + z $\le x \Rightarrow (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \le 0 \le xyz$

Trường hợp 2: y + z $> x \Rightarrow y+z-x > 0,\ z+x-y > 0,\ x+y-z > 0$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$\sqrt{(y+z-x)(z+x-y)} \le z,\quad \sqrt{(z+x-y)(x+y-z)} \le x$

$\sqrt{(x+y-z)(y+z-x)} \le y,\ \Rightarrow\quad (y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \le xyz$

Trong mọi trường hợp ta đều có

$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z) \le xyz$

$\Rightarrow (1-2x)\ (1-2y)\ (1-2z) \le xyz \Rightarrow 4(xy+yz+zx) - 9xyz \le 1$

$\Rightarrow xy+yz+zx - \frac{9}{4}xyz \le \frac{1}{4}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x=y=z = $\frac{1}{3}$ hoặc trong số x,y,z có một số bằng 0 và hai số còn lại bằng $\frac{1}{2}$

Nếu k < $\frac{9}{4}$ thì E = xy +yz + zx - $\frac{9}{4}xyz + (\frac{9}{4}-k)xyz \le \frac{1}{4} + (\frac{9}{4}-k)\frac{1}{27}$

$\Rightarrow E \le \frac{1}{3} - \frac{k}{27}$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x=y=z = $\frac{1}{3} \Rightarrow$ giá trị lớn nhất của E là $\frac{9-k}{27}$

Nếu k> $\frac{9}{4}$ thì E = = xy +yz + zx - $\frac{9}{4}xyz + (\frac{9}{4}-k)xyz \le \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ E $\le \frac{1}{4}$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi trong 3 số x,y,z có một số bằng 0 và trong hai số còn lại bằng $\frac{1}{2}$. Suy ra giá trị lớn nhất của E là $\frac{1}{4}$.

Nếu k = $\frac{9}{4}$ thì giá trị lớn nhất của E là $\frac{1}{4}$

Tiếp theo chúng ta tìm giá trị nhỏ nhất của E . Giả sử $x \geq y \geq z \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}$

Nếu k$\leq$ 0 thì E $\geq$ 0 ; E = 0 khi và chỉ khi trong ba số x,y,z có hai số bằng 0 và một số bằng 1. Vậy giá trị nhỏ nhất của E là 0.

Nếu 0 <k < 9 thì E $\geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} - kxyz = \sqrt[3]{(xyz)^2}(3 - k\sqrt[3]{xyz}) \geq 0$

E$\geq$0 . Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi trong ba số x,y,z có hai số bằng 0 và một số bằng 1 . Vậy giá trị nhỏ nhất của E là 0

Nếu k = 9 thì E = xy + yz + zx -9xyz

$$= yz(1-9x) + x(1-x) \geq \frac{(1-x)^2}{4}(1-9x) + x(1-x)$$

Ta có $\frac{(1-x)^2}{4}(1-9x) + x(1-x) = \frac{1-x}{4}(3x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow E \geq 0$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x= y=z = $\frac{1}{3}$ hoặc trong ba số x,y,z có hai số bằng 0 và một số bằng 1 . Vậy giá trị nhỏ nhất của E là 0

Nếu k > 9 thì E = xy + yz + zx -9xyz +(9-k) xyz $\geq \frac{9-k}{27}$

$$\Rightarrow E \geq \frac{9-k}{27}$$ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi = y=z = $\frac{1}{3}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của E là $\frac{9-k}{27}$

Chú ý rằng với k = 2 ta nhận được lời giải của bài toán 6.

Bài toán 8: cho 3 số thực dương a,b,c . Chứng minh rằng

$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2$ (4) (Bất đẳng thức Schur)

Lời giải của bài toán 8

Đặt $x = \frac{a}{a+b+c}, y = \frac{b}{a+b+c}, z = \frac{c}{a+b+c}$ thì x,y,z >0 và x +y+z = 1

Bất đẳng thức (4) $\Leftrightarrow$ 4(xy+yz+zx) - 9xyz $\leq$ 1 (5)

Theo chứng minh trên thì bất đẳng thức (5) đúng.

Vậy bất đẳng thức (4) đúng

Bài toán 9: Tìm tất cả các số thực r sao cho bất đẳng thức

$(r+\frac{a}{b+c})(r+\frac{b}{c+a})(r+\frac{c}{a+b})\ge(r+\frac{1}{2})^3$ (6) đúng với mọi bộ 3 số thực dương a,b,c

(Đề thi chọn đội tuyển Việt Nam dự thi toán Quốc tế năm 2009)

Lời giải

Giả sử bất đẳng thức (6) đúng với mọi bộ 3 số thực dương (a,b,c)

Xét 3 dãy số (a_n), (b_n), (c_n): $a_n = 1$, $b_n = c_n = n$ ($\forall n \in N^*$)

$$\Rightarrow (r+\frac{1}{2n})(r+\frac{n}{n+1})(r+\frac{n}{n+1})\ge(r+\frac{1}{2})^3$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}[(r+\frac{1}{2n})(r+\frac{n}{n+1})(r+\frac{n}{n+1})]\ge(r+\frac{1}{2})^3$$

$$\Rightarrow r(r+1)^2 \ge (r+\frac{1}{2})^3$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} r\ge\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ r\le\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}\end{array}\right.$$

Giả sử a, b, c > 0 và a+b+c = 1

$$(6) \Leftrightarrow \frac{r(b+c)+a}{b+c}\ \frac{r(c+a)+b}{c+a}\ \frac{r(a+b)+c}{a+b}\ge(r+\frac{1}{2})^3$$

$$\Leftrightarrow [r+(1-r)a]\,[r+(1-r)b]\,[r+(1-r)c] \ge (r+\frac{1}{2})^3 (1-a)(1-b)(1-c)$$

$$\Leftrightarrow r^3 + r^2(1-r) + r(1-r)^2 (ab+bc+ca) + (1-r)^3 abc \ge (r+\frac{1}{2})^3 (ab+bc+ca-abc)$$

$$\Leftrightarrow [(r+\frac{1}{2})^3 - r(1-r)^2](ab+bc+ca) - [(r+\frac{1}{2})^3 + (1-r)^3]abc \le r^2$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca - \frac{9(4r^2-2r+1)}{28r^2-2r+1}abc \le \frac{8r^2}{28r^2-2r+1} \quad (7)$$

Đặt $k=\dfrac{9(4r^2-2r+1)}{28r^2-2r+1}$ và E = ab + bc + ca - kabc

Với $r \ge \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ hoặc $r \le \dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$ thì $4r^2+2r-1 \ge 0$

$$\Rightarrow k \le \frac{9}{4}$$

Theo bài toán 7 ta có E $\le \frac{9-k}{27} = \frac{8r^2}{28r^2-2r+1}$

Vậy (7) đúng với mọi a,b,c >0 (a+b+c =1) . Tập hợp các giá trị r cần tìm là

$(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty)$

Bài toán sau là một mở rộng của bài toán 7 .

<u>Bài toán 10 :</u> Cho số thực k. Xét các số thực không âm a,b,c,d thoả mãn điều kiện a+b+c+d = 1 . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

E = abc + abd +acd+ bcd - k abcd

Bản báo cáo sáng kiến kinh nghiệm này đã được chuẩn bị chu đáo, song không tránh khỏi những thiếu sót. Tác giả xin chân thành cảm ơn các ý kiến đóng góp của các thầy cô giáo để bản báo cáo sáng kiến kinh nghiệm được hoàn thiện hơn .

CÁC PHỤ LỤC

1. Danh mục các tài liệu tham khảo

- Tạp chí toán học và tuổi trẻ

- Trang website : www. mathlinks. ro

- Trang website : Imo . math .ca

ỨNG DỤNG ĐỊNH LÍ PHẦN DƯ TRUNG HOA GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN SỐ HỌC

Đặng Đình Sơn

THPT Chuyên Lương Văn Tụy – Ninh Bình

1. ĐỊNH LÍ PHẦN DƯ TRUNG HOA

Định lí: Cho n số nguyên dương $m_1, m_2, ..., m_n$ số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau. Khi đó hệ đồng dư tuyến tính

$$\begin{cases} x \equiv a_i (\bmod m_i) \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất mođun $M = m_1 m_2 ... m_n$.

Chứng minh:

Đặt $M_i = \dfrac{M}{m_i} \Rightarrow (M_i, m_i) = 1, i = \overline{1,n}$ và $M_i \vdots m_j, \forall i \neq j.$

Suy ra $\forall i = \overline{1,n}$, tồn tại số nguyên y_i thoả mãn $M_i y_i \equiv a_i (\bmod m_i)$.

Xét $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} M_i y_i$ ta có: $\begin{cases} \bar{x} \equiv a_i (\bmod m_i) \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$.

Do đó: $\begin{cases} x \equiv a_i (\bmod m_i) \\ i = \overline{1,n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv \bar{x} (\bmod m_i) \\ i = \overline{1,n} \end{cases} \Leftrightarrow x \equiv \bar{x} (\bmod M)$

Vậy định lí được chứng minh.

Nhận xét: *Định lí phần dư Trung Hoa khẳng định về sự tồn tại duy nhất của một lớp thặng dư các số nguyên thoả mãn đồng thời nhiều đồng dư tuyến tính. Do đó có thể sử dụng định lí để giải quyết những bài toán về sự tồn tại và đếm số các số nguyên thoả mãn một hệ các điều kiện quan hệ đồng dư, chia hết..., hay đếm số nghiệm của phương trình đồng dư. Việc sử dụng hợp lí các bộ* $m_1, m_2, ..., m_n$ *và bộ* $a_1, a_2, ..., a_n$ *(trong định lí) cho ta nhiều kết quả rất thú vị và từ đó có thể đưa ra nhiều bài tập hay và khó. Sau đây là một số ứng dụng của định lí phần dư Trung Hoa giải các bài toán số học.*

2. MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Bài toán 1. Cho hai số nguyên dương p, q nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k sao cho $(pq-1)^n k+1$ là hợp số với mọi số nguyên dương n.

Lời giải:

Vì (p,q)=1 nên theo định lí phần dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên k thoả mãn:

$$\begin{cases} k \equiv 1 \pmod p \\ k \equiv -1 \pmod q \end{cases}$$

Khi đó:

+ Nếu n chẵn thì $(pq-1)^n \equiv 1 \pmod q \Rightarrow (pq-1)^n k \equiv -1 \pmod q \Rightarrow (pq-1)^n k + 1 \vdots q$

+ Nếu n lẻ thì $(pq-1)^n \equiv -1 \pmod p \Rightarrow (pq-1)^n k \equiv -1 \pmod p \Rightarrow (pq-1)^n k + 1 \vdots p$

Vậy $(pq-1)^n k+1$ là hợp số với mọi số nguyên dương n.

Nhận xét: Chứng minh trên thật gọn gàng nhờ vào việc sử dụng định lí đồng dư Trung Hoa. Mấu chốt của vấn đề ở đây là chúng ta phải thấy rằng để $(pq-1)^n k+1$ là hợp số ta cần chỉ ra $(pq-1)^n k+1$ chia hết cho p hoặc q, khi phân tích tính chẵn lẻ của n ta dễ dàng thấy được sự xuất hiện của hệ $\begin{cases} k \equiv 1 \pmod p \\ k \equiv -1 \pmod q \end{cases}$.

Bài toán 2. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên k sao cho $2^n k+1$ là hợp số với mọi số nguyên dương n.

Lời giải:

Nhận xét: Bài tập này gần giống với bài tập số một nhưng nó phức tạp hơn bài toán 1 nhiều vì trong bài toán này ta không thể nhìn thấy ngay để $2^n k+1$ là hợp số ta cần chỉ ra nó chia hết cho số nào.

Để ý thấy trằng trong bài toán 1 ta xét hai trường hợp n chẵn và n lẻ hay tổng quát là xét n ở dạng sau $2^m l$ với m, *l* là các số tự nhiên, *l* lẻ.

Khi đó $2^n k+1 = 2^{2^m l} k+1$ và ta có $2^{2^m l} \equiv -1 \bmod (2^{2^m}+1)$, do đó để $2^n k+1$ là hợp số ta chỉ ra $2^n k+1$ chia hết cho $F_m = 2^{2^m}+1$ (Dãy Fermat).

Ta trình bày lời giải bài toán này như sau:

Trước hết ta có F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 là các số nguyên tố, $F_5 = 641.6700417$ và $(F_i, F_j) = 1, \forall i \neq j.$

Theo định lí phần dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên dương k thoả mãn:

$$\begin{cases} k \equiv 1 (\text{mod}\, F_m) \\ m = 0,1,2,3,4 \\ k \equiv 1 (\text{mod}\, p) \\ k \equiv -1 (\text{mod}\, q) \end{cases} \text{(p = 641, q = 6700417, (p,q)=1).}$$

Ta có $n = 2^m l$, với m, l là các số tự nhiên, l lẻ.

+ Nếu m < 5 thì $2^n = 2^{2^m l} \equiv -1 (\text{mod}\, F_m) \Rightarrow 2^n k \equiv -1 (\text{mod}\, F_m) \Rightarrow 2^n k + 1 \vdots F_m$

+ Nếu m = 5 thì $2^n = 2^{2^m l} \equiv -1 (\text{mod}\, F_5) \Rightarrow 2^n k \equiv -1 (\text{mod}\, p) \Rightarrow 2^n k + 1 \vdots p$

+ Nếu m > 5 thì $2^n = (2^{2^5})^{2^{m-5} l} \equiv 1 (\text{mod}\, F_5) \Rightarrow 2^n k \equiv -1 (\text{mod}\, q) \Rightarrow 2^n k + 1 \vdots q$

Do đó $2^n k + 1$ là hợp số với mọi số nguyên dương n.

Bài toán 3. Cho là tập $S = \{p_1, p_2, ... p_k\}$ gồm k số nguyên tố phân biệt, và $f(x)$ là đa thức với hệ số nguyên sao cho với mọi số nguyên dương n đều tồn tại p_i trong S sao cho $p_i \mid f(n)$. Chứng minh rằng tồn tại i sao cho $p_i \mid f(n), \forall n \in N^*$.

Lời giải:

Giả sử không tồn tại i sao cho $p_i \mid f(n), \forall n \in N^*$, suy ra với mọi $i = \overline{1;k}$ luôn tồn tại a_i sao cho $p_i \nmid f(a_i)$. Mặt khác theo định lí Phần dư Trung Hoa tồn tại số tự nhiên x thỏa mãn $\begin{cases} x \equiv a_i (\text{mod}\, p_i) \\ i = \overline{1,k} \end{cases}$, do đó $\begin{cases} f(x) \equiv f(a_i) (\text{mod}\, p_i) \\ i = \overline{1,k} \end{cases}$ hay $p_i \nmid f(x), \forall i = \overline{1;k}$ (Mâu thuẫn)

Bài toán 4. Cho $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ và $f(x)$ là một đa thức với hệ số nguyên. Khi đó phương trình đồng dư $f(x) \equiv 0 (\text{mod}\, n)$ có nghiệm khi và chỉ khi tất cả các phương trình đồng dư $f(x) \equiv 0 (\text{mod}\, p_i^{\alpha_i}),\ i = \overline{1;\, k}$ có nghiệm. Nếu gọi là số nghiệm của phương trình $f(x) \equiv 0 (\text{mod}\, p_i^{\alpha_i})$ là $n_i, i = \overline{1;k}$ thì phương trình $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ có đúng $n_1.n_2 \ldots n_k$ nghiệm (môđun n)

Lời giải:

- Giả sử $\overline{x}$ là một nghiệm của $f(x) \equiv 0 (\bmod n)$, hiển nhiên $\overline{x}$ là một nghiệm của hệ $\begin{cases} f(x) \equiv 0 (\bmod p_i^{\alpha_i}) \\ i = \overline{1;k} \end{cases}$.

- Giả sử $\overline{x_i}$ là một nghiệm của $f(x) \equiv 0 (\bmod p_i^{\alpha_i}), i = \overline{1;k}$. Theo định lí Phần dư Trung Hoa tồn tại duy nhất $\overline{x}$ là nghiệm của hệ $\begin{cases} x \equiv \overline{x_i} (\bmod p_i^{\alpha_i}) \\ i = \overline{1;k} \end{cases}$(mod n). Mà $\overline{x} \equiv \overline{x_i} (\bmod p_i^{\alpha_i}) \Rightarrow f(\overline{x}) \equiv f(\overline{x_i}) (\bmod p_i^{\alpha_i})$ (vì $(f(\overline{x}) - f(\overline{x_i})) \vdots (\overline{x} - \overline{x_i})$), suy ra $\overline{x}$ là một nghiệm của $f(x) \equiv 0 (\bmod n)$.

Mỗi bộ $(\overline{x_1}, \overline{x_2}, ..., \overline{x_k})$ với $\overline{x_i}$ là một nghiệm của $f(x) \equiv 0 (\bmod p_i^{\alpha_i}), i = \overline{1;k}$ cho ta một nghiệm của $f(x) \equiv 0 (\bmod n)$ và hiển nhiên các nghiệm này là phân biệt (vì trong hai bộ khác nhau phải tồn tại ít nhất một cặp $\overline{x_{i_1}}, \overline{x_{i_2}}$ là hai nghiệm khác nhau của $f(x) \equiv 0 (\bmod p_i^{\alpha_i})$, do đó hai nghiệm tương ứng với hai bộ đó không đồng dư theo $\bmod p_i^{\alpha_i}$). Do đó số nghiệm của $f(x) \equiv 0$ đúng bằng $n_1.n_2 \ldots n_k$.

Như vậy dựa vào định lí Phần dư Trung Hoa ta có thể đếm được số nghiệm của một phương trình đồng dư. Bài toán 5, bài toán 6 sau đây là các ví dụ cụ thể cho bài toán 4.

Bài toán 5. Cho số nguyên dương $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, trong đó $p_1, p_2, ..., p_k$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau. Tìm số nghiệm của phương trình đồng dư $x^2 + x \equiv 0 (\bmod n)$.

Lời giải:

$$x^2 + x \equiv 0 (\bmod n) \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) \equiv 0 (\bmod p_i^{\alpha_i}) \\ i = \overline{1,k} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \equiv 0 (\bmod p_i^{\alpha_i}) \\ x \equiv -1 (\bmod p_i^{\alpha_i}) \end{array} \right. \\ i = \overline{1,k} \end{cases}$$

Theo định lí phần dư Trung Hoa mỗi hệ phương trình $\begin{cases} x \equiv a_i (\bmod p_i^{\alpha_i}) \\ a_i \in \{-1; 0\} \\ i = \overline{1,k} \end{cases}$ có duy nhất một nghiệm (thặng dư modn) và ta có 2^k hệ (bằng số bộ $(a_1, a_2, ..., a_k)$),

$a_i \in \{-1;0\}$), nghiệm của các hệ khác nhau. Suy ra phương trình $x^2 + x \equiv 0 (\bmod n)$ có đúng 2^k nghiệm.

Bài toán 6. Cho số nguyên dương $a = p_1 p_1 ... p_k$, trong đó $p_1, p_2, ..., p_k$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau và số nguyên dương n thoả mãn k < n < $p_1, p_2, ..., p_k$. Chứng minh rằng trong dãy sau có n^k số chia hết cho a.

$$u_1 = 1.2...n, u_2 = 2.3...(n+1), u_3 = 3.4...(n+2), ..., u_a = a(a+1)...(a+n-1)$$

Lời giải:

Nhận xét: Bài tập này tư tưởng giống như bài 4.

$u_j \vdots a \Leftrightarrow \begin{cases} i \equiv a_i (\bmod p_i) \\ a_i \in \{0, -1, -2, ..., -(n-1)\}, \quad j = \overline{1, a}. \\ i = \overline{1, k} \end{cases}$ Do đó ta có n^k số chia hết cho a.

* ***Cùng với tư tưởng như bài 4, ta có thể chứng minh công thức của Phi hàm Ơl bằng cách đưa về đếm số nghiệm của một hệ đồng dư.***

Bài toán 7. Cho số nguyên dương n, $\varphi(n)$ là số các số nguyên dương không vượt quá n và nguyên tố cùng nhau với n. Chứng minh rằng với $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, trong đó $p_1, p_2, ..., p_k$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau, ta có :

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)...\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

(Phi hàm Ơle)

Lời giải

Nhận xét: Công thức trên đã được chứng minh bằng cách sử dụng tính chất $\varphi(n)$ là hàm nhân tính. Và để chứng minh tính chất trên ta phải sử dụng đến các tính chất của hệ thặng dư. Cách này khá phức tạp.

Bài toán này có thể giải đẹp hơn bằng định lí đồng dư Trung Hoa

$A_n = \{a \in N \mid 1 \le a \le n, (a, n) = 1\}$

Khi $n = p^\alpha \Rightarrow \varphi(n) = p^\alpha - p^{\alpha - 1}$

Khi $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, trong đó $p_1, p_2, ..., p_k$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau. Với số nguyên dương a thoả mãn $1 \le a \le n$ ta có:

$$a \in A_n \Leftrightarrow (a, p_i^{\alpha_i}) = 1, i = \overline{1,k} \Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv a_i (\bmod p_i^{\alpha_i}) \\ a_i \in A_{p^{\alpha_i}} \\ i = \overline{1,k} \end{cases}$$

Mà theo định lí phần dư Trung Hoa, tồn tại duy nhất số nguyên dương a, $1 \le a \le n$ thoả mãn $\Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv a_i (\bmod p_i^{\alpha_i}) \\ a_i \in A_{p^{\alpha_i}} \\ i = \overline{1,k} \end{cases}$ và ta có $\prod_{i=1}^{k} | A_{p_i^{\alpha_i}} | = \prod_{i=1}^{k} (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1})$ hệ dạng trên, nghiệm của các hệ khác nhau.

Do đó $| A_n | = \prod_{i=1}^{k} (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})...(1 - \frac{1}{p_k})$.

Bài toán 8. Cho $A_n = \{a \in N \mid 1 \le a \le n, (a,n) = (a+1,n) = 1\}$. Tìm $| A_n |$.

Lời giải:

Nhận xét: Bài toán này có thể giải tương tự như cách chứng minh công thức phi hàm Ơle $\varphi(n)$. Giả sử $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, trong đó $p_1, p_2, ..., p_k$ là các số nguyên tố đôi một khác nhau, ta có $| A_n | = n(1 - \frac{2}{p_1})(1 - \frac{2}{p_2})...(1 - \frac{2}{p_k})$.

**** Sử dụng định lí đồng dư Trung Hoa chứng minh công thức của Phi hàm Ơle, cho ta một lời giải đẹp, nhưng cũng với tư tưởng trên và tính chất của hệ thặng dư ta còn có thể giải bài toán mở rộng của định lí Wilson.***

Bài toán 9. Tìm số nguyên dương n lẻ sao cho với mọi hệ thặng dư thu gọn mođun n $\{a_1, a_2, ..., a_{\varphi(n)}\}$ ta có $a_1 a_2 ... a_{\varphi(n)} \equiv -1 (\bmod n)$.

Lời giải:

- Theo định lí Wilson ta suy ra n nguyên tố thoả mãn.
- Với $n = p^m$ với p là số nguyên tố lẻ.

Ta có $\{a_1, a_2, ..., a_{\varphi(n)}\}$ là một hệ thặng dư thu gọn mođun n, suy ra với mỗi $a \in \{a_1, a_2, ..., a_{\varphi(n)}\}$ đều tồn tại duy nhất $\overline{a} \in \{a_1, a_2, ..., a_{\varphi(n)}\}$ thoả mãn $a\overline{a} \equiv 1 (\bmod n)$ và $a \ne b \Rightarrow \overline{a} \ne \overline{b}$.

$$a=\overline{a}\Leftrightarrow a^2-1\,\vdots\,n\Leftrightarrow (a-1)(a+1)\,\vdots\,n\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a\equiv 1(\bmod n)\\ a\equiv -1(\bmod n)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=1\\ a=n-1\end{array}\right.\text{(vì (a-1,a+1)<3).}$$

Suy ra $\{a_1,a_2,...,a_{\varphi(n)}\}\backslash\{1,\text{ n-1}\}$ chia thành $\frac{\varphi(n)-1}{2}$ cặp nghịch đảo mođun n.

Do đó $a_1a_2...a_{\varphi(n)}\equiv -1(\bmod n)$.

- Với $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ trong đó $p_1,p_2,...,p_k$ là k (k>1) số nguyên tố lẻ, phân biệt.

Tương tự như trên: Với mỗi $a\in\{a_1,a_2,...,a_{\varphi(n)}\}$ đều tồn tại duy nhất $\overline{a}\in\{a_1,a_2,...,a_{\varphi(n)}\}$ thoả mãn $a\overline{a}\equiv 1(\bmod n)$ và $a\neq b\Rightarrow\overline{a}\neq\overline{b}$.

$$a=\overline{a}\Leftrightarrow a^2-1\,\vdots\,n\Leftrightarrow (a-1)(a+1)\,\vdots\,n\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a\equiv 1(\bmod p_i^{\alpha_i})\\ a\equiv -1(\bmod p_i^{\alpha_i})\end{array}\right.\text{(Vì (a-1,a+1)<3)}\\ i=\overline{1,k}\end{cases}$$

Theo định lí phần dư Trung Hoa mỗi hệ phương trình $\begin{cases}a\equiv a_i(\bmod p_i^{\alpha_i})\\ a_i\in\{-1;1\}\\ i=\overline{1,k}\end{cases}$ có duy nhất một nghiệm (thặng dư modn) và ta có 2^k hệ (bằng số bộ $(a_1,a_2,...,a_k)$, $a_i\in\{-1;0\}$), nghiệm của các hệ khác nhau.

Suy ra có đúng 2^k số $a\in\{a_1,a_2,...,a_{\varphi(n)}\}$ mà $a=\overline{a}$, Kí hiệu A_n là tập hợp $a\in\{a_1,a_2,...,a_{\varphi(n)}\}$ mà $a=\overline{a}$.

Dễ thấy $\prod_{a\in A_n}a\equiv(-1)^{2^{k-1}}\equiv 1(\bmod p_i^{\alpha_i}),i=\overline{1,k}\Rightarrow\prod_{a\in A_n}a\equiv 1(\bmod n)$

Mặt khác tập $\{a_1,a_2,...,a_{\varphi(n)}\}\backslash A_n$ chia thành $\frac{\varphi(n)-2^k}{2}$ cặp nghịch đảo mođun n

Suy ra: $a_1a_2...a_{\varphi(n)}\equiv 1(\bmod n)$.

Kết luận: $n=p^m$.

Sau đây là một số bài toán chứng minh sự tồn tại của một dãy số thỏa mãn một số tính chất cho trước bằng các kỹ thuật lựa chọn bộ $a_1,a_2,...,a_n$ (trong định lí phần dư Trung Hoa) .

Bài toán 10. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, luôn tồn tại n số tự nhiên liên tiếp sao cho bất kì số nào trong các số đó cũng đều là hợp số.

Lời giải:

Nhận xét: n số tự nhiên liên tiếp có dạng a+1, a+2,…,a+n. Các số này là hợp số nếu tồn tại các số nguyên dương $p_1, p_2, ..., p_n$ khác 1 sao cho $(a+i) \vdots p_i^2$. Suy ra a là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x \equiv -i (\bmod p_i^2) \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$.

Theo định lí đồng dư Trung Hoa hệ $\begin{cases} x \equiv -i (\bmod p_i^2) \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$ có nghiệm khi $p_1, p_2, ..., p_n$ đôi một nguyên tố cùng nhau.

Do đó ta chỉ cần chọn $p_1, p_2, ..., p_n$ là n số nguyên tố phân biệt.

Bài toán 11. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, luôn tồn tại n số tự nhiên liên tiếp sao cho bất kì số nào trong các số đó cũng đều không phải là luỹ thừa (với số mũ nguyên lớn hơn 1) của một số nguyên tố.

(Đề thi toán quốc tế 1989)

Lời giải:

Nhận xét: Khi giải bài toán này chúng ta đặt ra câu hỏi bài toán này có tư tưởng có giống bài 5 không?. Nếu để ý đến bổ đề sau đây chúng ta sẽ thấy bài toán này có liên quan đến bài toán trên.

Bổ đề: Nếu a chia hết cho p và không chia hết cho p^2 với p là một số nguyên tố thì a không là luỹ thừa (với số mũ nguyên lớn hơn 1) của một số nguyên tố.

Trở lại bài toán:

Gọi $p_1, p_2, ..., p_n$ là n số nguyên tố phân biệt, theo định lí phần dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên dương a sao cho $\begin{cases} a \equiv -i + p_i (\bmod p_i^2) \\ i = \overline{1,n} \end{cases}$.

Khi đó $a + i \vdots p_i$, và không chia hết cho $p_i^2, i = \overline{1,n}$. Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 12. Tồn tại hay không dãy vô hạn $\{x_n\}$ là một hoán vị của tập N sao cho với mọi số tự nhiên k luôn có $x_1 + x_2 + ... + x_k \vdots k$.

(Nordic 1998)

Lời giải:

Nhận xét: trong bài toán này ta cần chú ý đến giả thiết dãy $\{x_n\}$ là một hoán vị của tập N, nếu không có giả thiết này bài toán trở nên qua dễ, ta quy nạp như sau, mỗi bộ $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ ta luôn chọn được x_n sao cho $x_1 + x_2 + ... + x_n \vdots n$. Do vậy yêu cầu của bài toán là ta phải xây dựng dãy $\{x_n\}$ sao cho quét hết tập N, đây là câu hỏi chính cần trả lời.

Trở lại bài toán ta chứng minh sự tồn tại dãy số bằng quy nạp như sau:

Chọn $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1$.

Giả sử tồn tại $x_1, x_2, ..., x_n$ thoả mãn $x_1 + x_2 + ... + x_k \vdots k, \forall k = \overline{1,n}$.

Đặt $S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Chọn $x_{n+2} = \min(N \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\})$ và x_{n+1} là nghiệm nguyên dương lớn hơn $x_1, x_2, ..., x_n$ của hệ

$$\begin{cases} x \equiv -S_n (\bmod (n+1)) \\ x \equiv -S_n - x_{n+2} (\bmod (n+2)) \end{cases}.$$

Do (n+1,n+2)=1 nên hệ trên có nghiệm (Định lí đồng dư Trung Hoa).

Vì chọn $x_{n+2} = \min(N \setminus \{x_1, x_2, ..., x_n\})$ nên $\{x_n\}$ quét hết tập N.

Bài toán 13. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên n, tồn tại một cấp số cộng gồm n số hạng sao cho mọi số hạng của nó đều là luỹ thừa của một số tự nhiên với số mũ lớn hơn 1.

Lời giải:

Nhận xét: Trong các cấp số cộng thì cấp số cộng dạng a, 2a, 3a,…,na là thích hợp nhất trong bài toán này vì trong mỗi số hạng không có phép cộng dễ sử lí để phù hợp hơn yêu cầu mọi số hạng của nó đều là luỹ thừa của một số tự nhiên với số mũ lớn hơn 1. Do đó a có dạng $2^{m_2}3^{m_3}...n^{m_n}$ và $(m_2, m_3, ..., m_n)$, $(m_2+1, m_3, ..., m_n)$, $(m_2, m_3+1, ..., m_n)$, …, $(m_2, m_3, ..., m_n+1) > 1$.

Lời giải bài toán trình bày như sau:

Giả sử $p_1, p_2, ..., p_n$ là n số nguyên tố phân biệt.

Theo định lí phần dư Trung Hoa, với mọi $i=\overline{2,n}$ tồn tại số nguyên dương m_i thoả mãn

$$\begin{cases} m_i \equiv -1 (\bmod p_i) \\ m_i \equiv 0 (\bmod p_j) \\ j=\overline{1,n},\ j\neq i \end{cases}.$$

Khi đó $(m_2, m_3, ..., m_n) \vdots p_1$, $(m_2+1, m_3, ..., m_n) \vdots p_2, \ldots, (m_2, m_3, ..., m_n+1) \vdots p_n$.

$$\Rightarrow a = 2^{m_2}3^{m_3}...n^{m_n} = \left(2^{\frac{m_2}{p_1}}3^{\frac{m_3}{p_1}}...n^{\frac{m_n}{p_1}}\right)^{p_1},\ 2a = 2^{m_2+1}3^{m_3}...n^{m_n} = \left(2^{\frac{m_2+1}{p_2}}3^{\frac{m_3}{p_2}}...n^{\frac{m_n}{p_2}}\right)^{p_2}, \ldots,$$

$$na = 2^{m_2}3^{m_3}...n^{m_n+1} = \left(2^{\frac{m_2}{p_n}}3^{\frac{m_3}{p_n}}...n^{\frac{m_n+1}{p_n}}\right)^{p_n}$$. Điều phải chứng minh.

Bài toán 14. Cho A là tập con khác rỗng của N. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương n sao cho $nA=\{nx \mid x\in A\}$ là tập hợp là luỹ thừa của một số tự nhiên với số mũ lớn hơn 1.

(Balkan 2000)

Lời giải:

Nhận xét: Bài toán này tư tưởng giống bài toán trên.

Giả sử $A=\{a_1, a_2, ..., a_k\}$, $p_1, p_2, ..., p_k$ là k số nguyên tố phân biệt.

Theo định lí đồng dư Trung Hoa, với mọi $i=\overline{1,k}$ tồn tại số nguyên dương m_i thoả mãn

$$\begin{cases} m_i \equiv -1 (\bmod p_i) \\ m_i \equiv 0 (\bmod p_j) \\ j=\overline{1,k},\ j\neq i \end{cases}.$$

Khi đó $(m_1+1, m_2, ..., m_k) \vdots p_1$, $(m_1, m_2+1, m_3, ..., m_n) \vdots p_2, \ldots, (m_1, m_2, ..., m_n+1) \vdots p_n$.

Đặt $n = a_1^{m_1}a_2^{m_2}...a_k^{m_k}$, ta có:

$na_1 = a_1^{m_1+1}a_2^{m_2}...a_k^{m_k} = \left(a_1^{\frac{m_1+1}{p_1}}a_2^{\frac{m_2}{p_1}}...a_k^{\frac{m_k}{p_1}}\right)^{p_1}$, $na_2 = a_1^{m_1}a_2^{m_2+1}...a_k^{m_k} = \left(a_1^{\frac{m_1}{p_2}}a_2^{\frac{m_2+1}{p_2}}...a_k^{\frac{m_k}{p_2}}\right)^{p_2}$

$,\ldots,$ $na_k = a_1^{m_1}a_2^{m_2}...a_k^{m_k+1} = \left(a_1^{\frac{m_1}{p_k}}a_2^{\frac{m_2}{p_k}}...a_k^{\frac{m_k+1}{p_k}}\right)^{p_k}$. Điều phải chứng minh.

***

3. MỞ RỘNG ĐỊNH LÍ PHẦN DƯ TRUNG HOA

Trong định lí phần dư Trung Hoa, có điều kiện $m_1, m_2, ..., m_n$ là các số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau. Câu hỏi đặt ra là nếu $m_1, m_2, ..., m_n$ không thoả mãn điều kiện đôi một nguyên tố cùng nhau thì kết quả định lí này sẽ như thế nào?

Định lí (Phần dư Trung Hoa mở rộng)

Cho n số nguyên dương $m_1, m_2, ..., m_n$ và $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số nguyên dương bất kì. Khi đó hệ đồng dư tuyến tính

$$\begin{cases} x \equiv a_i (\bmod m_i) \\ i = \overline{1, n} \end{cases}$$

có nghiệm khi và chỉ khi $a_i \equiv a_j (\bmod (m_i, m_j))$ với mọi i, j thoả mãn $1 \le i < j \le n$.

Khi đó hệ có nghiệm duy nhất môđun $M = [m_1, m_2, ..., m_n]$.

Chứng minh:

- Giả sử hệ có nghiệm x_0, đặt $(m_i, m_j) = d_{ij}$ $\Rightarrow a_i \equiv x_0 \equiv a_j (\bmod d_{ij})$ với mọi i, j thoả mãn $1 \le i < j \le n$.

- Ngược lại nếu $a_i \equiv a_j (\bmod (m_i, m_j))$ với mọi i, j thoả mãn $1 \le i < j \le n$ thì ta chứng minh hệ trên có nghiệm duy nhất môđun $M = [m_1, m_2, ..., m_n]$ bằng quy nạp như sau:

Với n = 2, đặt $(m_1, m_2) = d, m_1 = dd_1, m_2 = dd_2, (d_1, d_2) = 1 \Rightarrow a_1 \equiv a_2 \equiv a (\bmod d)$

Đặt $a_1 = a + k_1 d, a_2 = a + k_2 d$, ta có:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 (\bmod m_1) \\ x \equiv a_2 (\bmod m_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-a}{d} \equiv k_1 (\bmod d_1) \\ \dfrac{x-a}{d} \equiv k_2 (\bmod d_2) \end{cases}$$

Vì $(d_1, d_2) = 1$ nên theo định lí phần dư Trung Hoa, tồn tại số nguyên dương $\overline{x}$ thoả mãn $\begin{cases} \overline{x} \equiv k_1 (\bmod d_1) \\ \overline{x} \equiv k_1 (\bmod d_1) \end{cases}$. Do đó $\begin{cases} x \equiv a_1 (\bmod m_1) \\ x \equiv a_2 (\bmod m_2) \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x-a}{d} \equiv \overline{x} (\bmod (d_1 d_2))$

$\Leftrightarrow x \equiv \overline{x}d + a (\bmod (dd_1 d_2))$ hay $x \equiv \overline{x}d + a (\bmod [m_1, m_2])$.

Suy ra hệ $\begin{cases} x \equiv a_1 (\bmod m_1) \\ x \equiv a_2 (\bmod m_2) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất mođun $[m_1, m_2]$.

Giả sử định lí đúng đến n – 1. Ta chứng minh định định lí đúng đến n.

Đặt $\overline{m_1} = [m_1, m_2, ..., m_{n-1}], \overline{m_2} = m_n$

Theo giả thiết quy nạp, hệ phương trình $\begin{cases} x \equiv a_i (\bmod m_i) \\ i = \overline{1, n-1} \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $x \equiv \overline{a_1} (\bmod \overline{m_1})$. Do đó ta có $\begin{cases} x \equiv a_i (\bmod m_i) \\ i = \overline{1, n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv \overline{a_1} (\bmod \overline{m_1}) \\ x \equiv \overline{a_2} (\bmod \overline{m_2}) \end{cases}$ (đặt $\overline{a_2} = a_n$).

Vì $a_i \equiv a_j (\bmod (m_i, m_j))$ với mọi i, j thoả mãn $1 \le i < j \le n$ nên $\overline{a_1} \equiv \overline{a_2} (\bmod (\overline{m_1}, \overline{m_2}))$.

Từ đó theo trường hợp n = 2, hệ phương trình $\begin{cases} x \equiv \overline{a_1} (\bmod \overline{m_1}) \\ x \equiv \overline{a_2} (\bmod \overline{m_2}) \end{cases}$ có nghiệm duy nhất mođun $[\overline{m_1}, \overline{m_2}] = [m_1, m_2, ..., m_n]$.

Theo nguyên lí quy nạp định lí được chứng minh.

***

Một số bài tập áp dụng:

Bài 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, luôn tồn tại n số tự nhiên liên tiếp sao cho bất kì số nào trong các số đó cũng có ước nguyên dương dạng $2^k - 1$.

Bài 2. Chứng minh rằng tồn tại vô số dãy vô hạn tăng $\{a_n\}$ các số tự nhiên sao cho với mọi số tự nhiên k, dãy $\{k+a_n\}$ chỉ chứa hữu hạn số nguyên tố.

Czech-Slovakia 1997

Bài 3. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $2^n - 1 \vdots 3$ và $\frac{2^n-1}{3}$ là ước của một số nguyên có dạng $4m^2+1$.

Korea 1999

Bài 4. Ta định nghĩa hình vuông tốt là một hình vuông có 4 đỉnh là các điểm nguyên , đồng thời đoạn thẳng nối tâm O với tất cả các điểm nguyên trên biên và trong hình vuông đó chứa ít nhất một điêm nguyên khác hai đầu mút . Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n đều tồn tại một hình vuông tốt dạng $n \times n$.

Bài 5. Tìm số nguyên dương n sao cho với mọi hệ thặng dư thu gọn mođun n $\left\{a_1, a_2, ..., a_{\varphi(n)}\right\}$ ta có $a_1a_2...a_{\varphi(n)} \equiv -1 (\bmod n)$.

Bài 6. Cho $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)$ là n đa thức với hệ số nguyên khác 0. Chứng minh rằng tồn tại đa thức P(x) hệ nguyên sao cho với mọi $\forall i = \overline{1;n}$ ta luôn có $P(x) + f_i(x)$ là đa thức bất khả quy trên Z.

Bài 7. Cho $m = 2007^{2008}$, hỏi có tất cả bao nhiêu số tự nhiên $n < m$ sao cho $m \mid n(2n+1)(5n+2)$.

Bài 8. Ta gọi một tập hợp các số nguyên dương C là tốt nếu với mọi số nguyên dương k thì tồn tại a,b khác nhau trong C sao cho $(a+k; b+k) > 1$. Giả sử ta có một tập tốt mà tổng các phần tử trong đó bằng 2003. Chứng minh rằng ta có thể loại đi một phần tử c trong C sao cho tập còn lại vẫn là tập tốt .

Bulgaria TST 2003

Bài 9. Chứng minh rằng tồn tại dãy (a_n) tăng thực sự sao cho với mọi n thì $a_1a_2...a_n - 1$ là tích của hai số nguyên liên tiếp.

USA -TST 2009

Bài 10. a) Chứng minh rằng tập các số nguyên có thể phân hoạch thành các cấp số cộng với công sai khác nhau.

b) Chứng minh rằng tập hợp các sô nguyên không thể viết dưới dạng hợp của các cấp số cộng với công sai đôi một nguyên tố cùng nhau.

(Moldova TST 2009)

Tài liệu tham khảo

- Đặng Hùng Thắng – Đồng dư và phương trình đồng dư
- Nguyễn Vũ Lương – Các bài giảng về số học
- Tuyển chọn các chuyên đề toán học tuổi trẻ – Tập 3
- Diễn đàn – http://mathvn.org

THẶNG DƯ BẬC HAI

Phạm Quang Thắng
THPT Chuyên Thái Bình

Chuyên đề này trình bày vấn đề về thặng dư bậc hai, nêu ra các khái niệm, ví dụ minh họa và các ứng dụng lý thuyết trong các bài thi học sinh giỏi quốc gia cũng như quốc tế. Qua theo dõi, trong một số năm gần đây, thặng dư bậc hai được khai thác khá nhiều trong đề thi học sinh giỏi của các quốc gia trên thế giới. Các kiến thức trong chuyên đề được nêu ra và chứng minh một cách cụ thể dựa trên các kiến thức về đồng dư mà học sinh chuyên toán đã được học.

Việc dạy cho học sinh chuyên đề về thặng dư bậc hai sau khi dạy lý thuyết đồng dư là rất cần thiết, nó thể hiện sự tiếp nối trong tư duy. Học sinh sẽ thấy được sự tương đồng với phương trình trong tập số nguyên.

Ví dụ : Trong tập số nguyên thì phương trình x + a = 0 luôn có nghiệm, trong thặng dư bậc nhất thì phương trình $x+a\equiv 0(\mathrm{mod}\, m)$ cũng luôn có nghiệm. Trong tập số nguyên thì phương trình ax + b = 0 không phải lúc nào cũng có nghiệm, trong thặng dư bậc nhất thì phương trình đồng dư $ax+b\equiv 0(\mathrm{mod}\, m)$ không phải lúc nào cũng có nghiệm.

Số n trong số nguyên gọi là số chính phương nếu phương trình $x^2=n$ có nghiệm nguyên, như vậy không phải số n nào cũng là số chính phương. Trong đồng dư thì không phải lúc nào phương trình đồng dư $x^2=n$(modm) cũng có nghiệm; khi có nghiệm thì số n gọi là thặng dư bậc hai mod m.

I ĐỊNH NGHĨA

Định nghĩa 1

Giả sử m, n, a là các số nguyên dương và (a, m) = 1, số a gọi là một thặng dư bậc n modm nếu phương trình đồng dư $x^n \equiv a(\bmod m)$ có nghiệm nguyên. Ngược lại ta nói a không là thặng dư cấp n.

Với n = 2,3,4 tương ứng gọi là thặng dư bậc 2, 3, 4. Trong chuyên đề này chỉ xét n =2 (thặng dư bậc hai).

Ví dụ

6 là thặng dư bậc 3 mod 7 (vì $3^3 \equiv 6(\bmod 7)$)

-1 là thặng dư bậc 2 mod 5 (vì $7^2 \equiv -1(\bmod 5)$)

Định nghĩa 2

Cho a $\in \mathbb{Z}$, p là số nguyên tố. Kí hiệu Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ xác định bởi:

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases} 1 \text{ nếu p không chia hết a và a là thặng dư bậc 2 mod p} \\ -1 \text{ nếu p không chia hết a và a không là thặng dư bậc 2 mod p} \\ 0 \text{ nếu p chia hết a} \end{cases}$$

Ví dụ :

$$\left(\frac{x^2}{p}\right)=1, \forall x : (x , a) = 1$$

$$\left(\frac{3}{13}\right)=1, \left(\frac{5}{13}\right)=-1$$

II. ĐỊNH LÝ VÀ ỨNG DỤNG

1. ***Định lý 1*** **(Định lý Fecmat)**

   Với mỗi số nguyên dương m đặt $A = \ k \in \mathbb{N} / 0<k<m,(k,m)=1$. Gọi $\varphi(m)$ là số phần tử của tập A, Quy ước $\varphi(1)=1$.

Với mọi a nguyên, (a, m) = 1 ta có $a^{\varphi(m)} \equiv 1(\bmod m)$

Đặc biệt khi m = p là số nguyên tố ta có: $a^p \equiv a(\bmod p)$

Chứng minh

Với mỗi $k \in A$ tồn tại duy nhất $r_k \in 0,1,2,\ldots,m-1$ sao cho $ka \equiv r_k(\bmod m)$, giả sử tồn tại k sao cho $(r_k, m) \vdots p$, p là số nguyên tố thì ta có p cũng là ước của ka nên p là ước của k hoặc là ước của a trái với giả thiết (a, m) = 1 và (k, m) = 1.

Vậy $r_k \in A, \forall k$ và $r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(m)}$ là một hoán vị của A.

Nhân các vế của phương trình đồng dư $ka \equiv r_k(\bmod m)$ với nhau ta thu được:

$$a^{\varphi(m)} \prod_{k\in A} k \equiv \prod_{k\in A} r_k(\bmod m) \equiv \prod_{k\in A} k(\bmod m)$$

Mặt khác do $\left(\prod_{k\in A} k, m\right) = 1$ do đó ta có : $a^{\varphi(m)} \equiv 1(\bmod m)$ (đpcm)

2. ***Định lý 2*** (**Định lý Wilson**)

$(p-1)! \equiv -1(\bmod p)$ với mọi số nguyên tố p

Chứng minh:

- $\mathbb{Z}_p$ là một trường số
- Phương trình $f(x) = x^{p-1} - \prod_{i=1}^{p-1}(x-i) - 1 \equiv 0(\bmod p)$ có p — 1 nghiệm phân biệt mod p là 1, 2, ..., p — 1. Deg f(x) = p — 2, do đó ta có $f(x) \equiv 0(\bmod p)$ với mọi x

Hệ số tự do của f(x) là - (p — 1)! — 1 do đó ta có

$$-(p-1)! - 1 = 0(\bmod p)$$
$$\Leftrightarrow \quad (p-1)! \equiv -1(\bmod p)$$

3. ***Định lý 3***

Phương trình $x^2 \equiv a(\bmod p)$ có nhiều nhất hai nghiệm mod p

Chứng minh:

Giả sử t là một nghiệm của phương trình, khi đó dễ thấy —t cũng là nghiệm của phương trình.

Gọi x là nghiệm bất kì của phương trình khi đó ta có

$$x^2 \equiv t^2 \mod p$$

$$\Leftrightarrow (x-t)(x+t) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \equiv t (\mathrm{mod}\, p) \\ x \equiv -t (\mathrm{mod}\, p) \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nhiều nhất là hai nghiệm.

4. ***Định lý 4***

Với mỗi số nguyên tố p lẻ, giữa các số 1, 2, 3, ..., p – 1 có đúng $\frac{p-1}{2}$ thặng dư bậc hai modp

5. ***Định lý 4 (Tiêu chuẩn Euler)***

$a^{p'} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) (\mathrm{mod}\, p)$ với $p' = \frac{p-1}{2}$

<u>Chứng minh</u>:

Gọi t là một căn nguyên thủy mod p (Nghĩa là $t^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$ và nếu có n sao cho $t^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$ thì p – 1|n).

Xét hệ $1, g, g^2, \dots, g^{p-2}$ dễ thấy hệ này lập thành hệ thặng dư thu gọn mod p

Ta chỉ cần chứng minh bài toán cho $a \in 1, g, g^2, \dots, g^{p-2}$

Thật vậy $(g^i)^{p'} \equiv 1 (mod p) \Leftrightarrow ip' \vdots (p - 1) \Leftrightarrow i \vdots 2 \Leftrightarrow g^i = g^{2j} \Leftrightarrow \left(\frac{g^i}{p}\right) = 1$

Ngược lại giả sử g^i là thặng dư bậc hai mod p

$$\Leftrightarrow \exists j : g^i \equiv (g^j)^2 (\mathrm{mod}\, p) \Leftrightarrow i \equiv 2j (\mathrm{mod}\, p) \Leftrightarrow i \vdots 2 \Leftrightarrow (g^i)^{p'} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$$

6. ***Định lý 6***

Ký hiệu Legendre là nhân tính nghĩa là $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$ với mọi a, b là các số nguyên và p > 2.

Chứng minh:

Theo tiêu chuẩn Euler ta có:

$$\left(\frac{ab}{p}\right) \equiv (ab)^{p'} = a^{p'}b^{p'} \equiv \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) \pmod p$$

$$\Rightarrow \left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$$

7. ***Định lý 7***

Với mỗi số nguyên p > 2 ta có: $\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$

Suy ra phương trình đồng dư $x^2 \equiv -1 \pmod p$ có nghiệm khi và chỉ khi p = 2 hoặc $p \equiv 1 \pmod 4$.

Ví dụ 1: Chứng minh rằng tồn tại một số tự nhiên $a < \sqrt{p} + 1$ mà a không là thặng dư bậc hai mod p

Chứng minh:

Gọi a là một số tự nhiên nhỏ nhất không phải là thặng dư bậc hai mod p.

Đặt $b = \left[\frac{p}{a}\right] + 1 \Rightarrow 0 < ab - p < a$ do đó hiệu ab – p là thặng dư bậc hai mod p.

Vậy $1 = \left(\frac{ab-p}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = -\left(\frac{b}{p}\right)$

Suy ra b không là thặng dư bậc hai mod p

$$\Rightarrow a \le b < \frac{p}{a} + 1$$
$$\Rightarrow a < \sqrt{p} + 1$$

Ví dụ 2: Giả sử p là số nguyên tố có dạng 4k +1. Chứng minh rằng $x = (p')!$ là nghiệm của phương trình đồng dư: $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$.

Chứng minh:

Với mỗi $i \in \{1, 2, ..., p'\}$ ta có: $i \equiv -(p-i) \pmod p$

Cho i chạy từ 1 đến p' và nhân lại với nhau ta được:

$$(p')! \equiv (-1)^{p'}(p-1)...(p-p') \pmod p$$
$$\Leftrightarrow (p')! \equiv (-1)^{p'}(p'+1)...(p-1) \pmod p$$
$$\Leftrightarrow \left[(p')!\right]^2 = (-1)^{p'}(p-1)! \pmod p$$

Vì p = 4k +1 do đó p' = 2k là số chẵn

$\Rightarrow\ (p')!^{\,2} \equiv (p-1)! \equiv -1 (\bmod p)$ (Theo định lý Wilson)

<u>Ví dụ 3</u>: Giả sử p là một ước nguyên tố của x^2+y^2 ở đó (x, y) = 1 thì hoặc p có dạng 4k + 1 hoặc p = 2.

Chứng minh:

Giả sử p là một ước nguyên tố của $x^2+y^2, p\neq 2$

Dễ thấy p không là ước của y, do đó tồn tai y' sao cho $yy' \equiv -1 (\bmod p)$

Vậy $(xy')^2 \equiv -(yy')^2 \equiv -1 (\bmod p)$

Do đó -1 là thặng dư bậc hai modp vậy p có dạng 4k + 1.

Chú ý: Ví dụ 3 có thể phát biểu dưới dạng sau:

Nếu p là một ước nguyên tố có dạng 4k + 3của x^2+y^2 thì p là ước của x và y.

Nhận xét này được sử dụng rất nhiều trong bài tập.

Tổng quát của định lý 3 ta có định lý sau:

8. ***Định lý 8:***

Giả sử (x, y) = 1, a, b, c là các số nguyên, p là một ước nguyên tố của $ax^2+bxy+cy^2$, p không là ước của abc thì $D=b^2-4ac$ là thặng dư bậc hai mod p.

Đặc biệt nếu p là ước của x^2-Dy^2 và (x, y) = 1 thì D là thặng dư bậc hai mod p.

Chứng minh:

Dễ biến đổi $p\,|\,(2ax+by)^2-Dy^2$

Giả sử p | y khi đó p | 2ax + by suy ra p | 2ax vì (a, p) = 1 nên p | x vậy (x, y) > 1 trái với giả thiết.

Vậy (y, p) = 1 nên tồn tại y' sao cho $yy' \equiv 1 (\bmod p)$

Suy ra $(2axy'+byy')^2 \equiv D(yy')^2 \equiv D (\bmod p)$

Vậy D là thặng dư bậc hai mod p.

Cho a là một số nguyên, p là số nguyên tố sao cho (a, p) = 1. Với mỗi $k \in 1,2,...,p'$ tồn tại $r_k \in \pm1,\pm2,...,\pm p'$ sao cho $ka \equiv r_k (\bmod p)$, dễ thấy không tồn tại hai r_k có cùng giá trị tuyệt đối, do đó $|r_1|,|r_2|,...,|r_{p'}|$ là một hoán vị của {1, 2, ..., p'}

Cho k chạy từ 1 đến p' rồi nhân các vế với nhau ta được:

$$a^{p'} \equiv \frac{r_1...r_{p'}}{1.2...p'} = \frac{r_1...r_{p'}}{|r_1|...|r_{p'}|} (\bmod p)$$

Đặt $\varepsilon_k = \frac{r_k}{|r_k|}; \varepsilon_k = \pm 1$ ta có $a^{p'} \equiv \varepsilon_1 ... \varepsilon_{p'} (\bmod p)$

$\varepsilon_k = -1$ khi và chỉ khi phần dư khi lấy ka chia cho p lớn hơn p' tức là ka = pq + r, r > p' khi và chỉ khi $\frac{2ka}{p} = 2p + \frac{2r}{p} \Leftrightarrow \left[\frac{2ka}{p}\right] = 2p + 1 = 2\left[\frac{ka}{p}\right] + 1 \Leftrightarrow \varepsilon_k = (-1)^{\left[\frac{2ka}{p}\right]}$

Vậy $a^{p'} \equiv (-1)^{\sum_{k=1}^{p'}\left[\frac{2ka}{p}\right]} (\bmod p)$

9. ***Định lý 9*** **(Bổ đề Gauss)**

$$\left(\frac{a}{p}\right) = (-1)^{\sum_{k=1}^{p'}\left[\frac{2ka}{p}\right]}$$

Ý nghĩa: *Sử dụng bổ đề Gaus ta có thể kiểm tra một số có phải là thặng dư bậc hai theo mod p hay không? Thay cho việc phải giải phương trình đồng dư ta chỉ việc tính giá trị các phần nguyên (chỉ việc thực hiện các phép tính đại số).*

10. ***Định lý 10***:

$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\left[\frac{p+1}{4}\right]}$ với p là số nguyên tố khác 2

Chứng minh:

Ta có: $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\sum_{k=1}^{p'}\left[\frac{4k}{p}\right]}$

- ✓ $\frac{4k}{p} < 1 \Leftrightarrow k < \frac{p}{4}$
- ✓ $1 \le \frac{4k}{p} < 2 \Leftrightarrow \frac{p}{4} \le k < \frac{p}{2}$

Vậy $\sum_{k=1}^{p'}\left[\frac{4k}{p}\right] = p' - \left[\frac{p}{4}\right] = \left[\frac{p+1}{4}\right]$ (đpcm).

11. *Định lý 11*:

a) -2 là thặng dư bậc hai modp khi và chỉ khi $p \equiv 1 \pmod 8$ hoặc $p \equiv 3 \pmod 8$

b) -3 là thặng dư bậc hai modp khi và chỉ khi $p \equiv 1 \pmod 6$

c) 3 là thặng dư bậc hai modp khi và chỉ khi $p \equiv \pm 1 \pmod{12}$

d) 5 là thặng dư bậc hai modp khi và chỉ khi $p \equiv \pm 1 \pmod{10}$

Ví dụ 4: Chứng minh rằng có vô số số nguyên tố dạng:

a. 4k + 1

b. 6k + 1

c. 10k + 9

Lời giải.

a. Giả sử có hữu hạn số nguyên tố dạng 4k + 1 ta gọi tất cả các số đó là $p_1, p_2, \dots, p_n$. Đặt $A = (2p_1 \dots p_n)^2 + 1$, A có dạng 4k + 1, $A > p_i, \forall i = 1 \dots n$.

- Nếu A là số nguyên tố ta suy ra điều mâu thuẫn
- Nếu A không là số nguyên tố thì A có ước nguyên tố p, ta có p là ước của $A = (2p_1 \dots p_n)^2 + 1$ do đó p có dạng 4k + 1 dễ thấy $p \neq p_i, \forall i = 1 \dots n$, trái với giả thiết.

b. Tương tự câu a chúng ta chỉ cần xét số $B = 3(2p_1 \dots p_n)^2 + 1$

c. Tương tự câu a chúng ta chỉ cần xét số $C = 5(2p_1 \dots p_n)^2 - 1$

Ví dụ 5: Chứng minh rằng mọi ước nguyên tố của $n^4 - n^2 + 1$ có dạng 12k + 1

***Chứng minh**:*

Giả sử p là một ước nguyên tố của $n^4 - n^2 + 1$.

Ta có $n^4 - n^2 + 1 = (n^2+1)^2 - 3n^2 = (n^2-1)^2 + n^2$ hơn nữa: $(n^2+1, n) = 1, (n^2-1, n) = 1$

Theo định lý 8 ta có:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{3}{p}\right)=1\\ \left(\dfrac{-1}{p}\right)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p\equiv\pm1(\operatorname{mod}12)\\ p\equiv1(\operatorname{mod}4)\end{cases}\Rightarrow p\equiv1(\operatorname{mod}12)$$

Ví dụ 6: Tính tổng :

$$A=\left[\frac{1}{2003}\right]+\left[\frac{2}{2003}\right]+\cdots+\left[\frac{2^{2001}}{2003}\right]$$

Lời giải:

Vì 2003 là số nguyên tố, do đó theo tiêu chuẩn Euler ta có:

$$2^{1001}\equiv-1(\operatorname{mod}2003)$$
$$\Rightarrow 2^{1001}+1\,\vdots\,2003$$
$$\Rightarrow 2^{1001+i}+2^{i}\,\vdots\,2003$$
$$\Rightarrow \frac{2^{1001+i}}{2003}+\frac{2^{i}}{2003}\in\mathbb{Z}$$

Dễ dàng chứng minh $a + b = a+b-1,\ \forall a,b\notin\mathbb{Z}, a \mid b\in\mathbb{Z}$

Áp dụng công thức này với i chạy từ 0 đến 1000 ta được kết quả sau:

$$A=\frac{1+2+2^{2}+\cdots+2^{2001}}{2003}-1001=\frac{2^{2002}-1}{2003}-1001$$

12. Luật tương hỗ Gaus

Nếu p, q là các số nguyên tố lẻ và p ≠ q thì $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{p'q'}$

Chứng minh:

Đặt $S(p;q)=\sum_{k=1}^{p'}\left[\frac{kp}{q}\right]$ ta chứng minh S(p,q) + S(q,p)= p’q’

Với mỗi số k : 0 < k < q’ thì $\left[\frac{kp}{q}\right]$ chính là số điểm nguyên (k ; l)trong mặt phẳng tọa độ Okl với k, l thỏa mãn $0<l<\frac{kp}{q}$, như vậy tổng S(p; q) chính là số điểm nguyên thuộc miền trong của hình chữ nhật OBCD và ở phía dưới đường thẳng OE với O(0,0), B(p’,0), C(0, q’); D(p’, q’), E(p, q).

Tương tự S(q, p) chính là số điểm nguyên thuộc miền trong của hình chữ nhật OBCD và ở phía trên đường thẳng OE.

Vậy S(p ; q) + S(q ; p)= p'q'

Trong cách lập luận trên chúng ta dễ dàng nhận được:

$$S(p+q,p)-S(p,q)=1+2+\cdots+p'=\frac{p^2-1}{8}$$

Ta có:

$$\left(\frac{2}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{2p}{q}\right)=\left(\frac{2(p+q)}{q}\right)=\left(\frac{\frac{p+q}{2}}{q}\right)=(-1)^{S(p+q,q)}=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}(-1)^{S(p,q)}=\left(\frac{2}{p}\right)(-1)^{S(p,q)}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{S(p,q)}$$

Tương tự chúng ta cũng có : $\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{S(q,p)}$

Nhân hai vế của hai hệ thức trên ta có dpcm.

Ý nghĩa của luật tương hỗ Gaus

Luật tương hỗ Gaus giúp ta tính toán kí hiêu Legendre một cách dễ dàng, từ các số lớn trong kí hiệu ta chuyển dần về các số nhỏ bằng cách sử dụng đồng nhất thức: $\left(b+\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)$

Ví dụ: Tính $\left(\frac{814}{2003}\right)$

Ta có: 814 = 2. 11. 37

Vậy $\left(\frac{814}{2003}\right)=\left(\frac{2}{2003}\right)\left(\frac{11}{2003}\right)\left(\frac{37}{2003}\right)$

$$\left(\frac{11}{2003}\right)=-\left(\frac{2003}{11}\right)=-\left(182+\frac{1}{11}\right)=-\left(\frac{1}{11}\right)=-1$$
$$\left(\frac{37}{2003}\right)=\left(\frac{2003}{37}\right)=\left(54+\frac{5}{37}\right)=\left(\frac{5}{37}\right)=\left(\frac{37}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{5}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)=1$$
$$\left(\frac{2}{2003}\right)=-1$$

Vậy $\left(\frac{814}{2003}\right)=1$ tức là 814 là thặng dư bậc hai mod 2003

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên không âm của phương trình:

$$12^x + y^4 = 2008^z \qquad \text{(Serbia – 2008)}$$

Lời giải:

Nếu z > 0 ta có y > 0.

Với x chẵn thì vế trái có dạng a^2+b^2, với x lẻ thì vế trái có dạng a^2+3b^2

Dễ thấy 2008 có ước nguyên tố là 251, a và b đều không chia hết cho 251, theo định lý 8 ta có -1 hoặc -3 sẽ là các số chính phương mod 251 tức là :hoặc $\left(\frac{-1}{251}\right)=1$ hoặc $\left(\frac{-3}{251}\right)=1$

Mặt khác ta có:

$$\left(\frac{-1}{251}\right)=(-1)^{\frac{251-1}{2}}=-1,\ \left(\frac{-3}{251}\right)=-\left(\frac{3}{251}\right)=-(-1)^{\frac{251-1}{2}}\left(\frac{251}{3}\right)=\left(83+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)=-1$$

Điều này là vô lý.

Vậy z = 0 từ đó ta suy ra y = 0 và x = 0.

Bài 2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, n) sao cho:

$$x^3+2x+1=2^n \qquad \text{(Serbia – 2007)}$$

Lời giải:

Phương trình đã cho tương đương với phương trình sau:

$$x(x^2+2)=2^n-1$$

Dễ thấy $x(x^2+2)\vdots 3$ do đó n chẵn

Từ phương trình ban đầu ta suy ra x lẻ.

Nếu n > 2 ta có: $x^3+2x+1 \equiv 0 \pmod 8 \Rightarrow x \equiv 5 \pmod 8$.

$x^3+2x+1=2^n \Leftrightarrow x^3+2x+3=2^n+2 \Leftrightarrow (x+1)(x^2-x+3)=2^n+2$

Gọi p là một ước nguyên tố của x^2-x+3 suy ra p lẻ và – 2 là thặng dư bậc hai modp. Theo định lý 11 số nguyên tố p có dạng 8m + 1 hoặc 8m + 3.

Vì $x \equiv 5 \pmod 8 \Rightarrow x^2-x+3 \equiv 7 \pmod 8$. Vì mọi ước nguyên tố của x^2-x+3 đều có dạng 8m+1 và 8m+3 nên $x^2-x+3 \equiv 3^n \pmod 8 \Rightarrow 3^n \equiv 7 \pmod 8$, kiểm tra với n từ 0 đến 7 ta thấy điều này không thể xảy ra. Vậy n > 2 loại

Nếu n = 2 ta có phương trình $x^3+2x+1=2^2 \Leftrightarrow x=1$

Nếu n = 1 ta có phương trình $x^3+2x+1=2 \Leftrightarrow x=0$ (loại)

Kết luận : Vậy phương trình có nghiệm (1, 2).

<u>Bài 3</u>: Chứng minh rằng phương trình $x^2+5=y^3$ không có nghiệm nguyên

(Ba Lan năm 2007)

Lời giải:

Giả sử phương trình đã cho có nghiệm là (x, y). Ta luôn có x^2 đồng dư với 0 hoặc 1 mod4 do đó y^3 đồng dư với 1 hoặc 2 mod4 vậy y có dạng y = 4k + 1.

Biến đổi phương trình đã cho về dạng: $x^2-3=(y-2)(y^2+2y+4)$. Vì y = 4k + 1 nên y^2+2y+4 có dạng 4k + 3 do đó y^2+2y+4 có ước nguyên tố dạng p = 4m +3. Từ phương trình trên ta thấy 3 và -3 là các thặng dư bậc hai mod p, theo định lý 11 ta có:

$$\begin{cases} p \equiv 1 \pmod 6 \\ p \equiv \pm 1 \pmod{12} \end{cases} \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{12} \Rightarrow p = 1+12n$$

Vì p = 4m + 3 nên ta có phương trình 4m + 3 = 12n + 1 hay 1 = 6n – 2m là vô lý.

Vậy phương trình dã cho vô nghiệm.

<u>Bài 4</u>: Cho số nguyên dương n. Chứng minh rằng số 2^n+1 không có ước nguyên tố dạng

8k - 1 với k là số nguyên dương.

Chứng minh:

Nếu n chẵn gọi p là một ước nguyên tố bất kỳ của $2^n + 1$, Ta có $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1 \Rightarrow p = 1 + 4k$

do đó không có dạng 8k -1.

Nếu n lẻ, gọi p là ước nguyên tố bất kì của $2^n + 1$thì p| $2^{n+1} + 2$ do đó -2 là thặng dư bậc hai modp theo định lý 11 p có dạng 8k + 1 hoặc 8k + 3 và do đó không có dạng 8k – 1.

<u>Bài 5</u>: Chứng minh rằng phương trình $x^2 + 1 = k(y^2 - 5)$ không có nghiệm nguyên dương

x, y >2.

Lời giải

Nếu y chẵn $y^2 - 5$ có dạng 4m +3, do đó có ước nguyên tố dạng p = 4n + 3, ta suy ra p phải là ước của x và 1 điều này là vô lý.

Nếu y lẻ $y^2 - 5$ chia hết cho 4, nhưng $x^2 + 1$ luôn đồng dư với 1 hoặc 2 mod4 ta gặp mâu thuẫn.

Vậy pt đã cho không có nghiệm nguyên.

<u>Bài 6</u>: Chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p thì tồn tại các số nguyên a, b sao cho $a^2 + b^2 + 1$ là bội của p.

Chứng minh:

Xét hai tập hợp:

$A = a^2 \mid a \in \mathbb{Z}$

$B = -1 - b^2 \mid b \in \mathbb{Z}$

Lấy theo modp thì mỗi tập có đúng $\frac{p+1}{2}$ phần tử, vậy tổng số phần tử của hai tập hợp sẽ là p + 1. Theo nguyên lý Dirichlet tồn tại phần tử chung của cả A và B theo modp . Do đó chúng ta có a^2+b^2+1 là bội của p.(số 1 trong đề bài là không có ý nghĩa có thể thay bằng số bất kỳ).

Bài 7: Cho số nguyên tố p. Chứng minh rằng số $3^p + 7p - 4$ không là bình phương của một số nguyên

Lời giải:

Giả sử tồn tại số x sao cho: $3^p + 7p – 4= x^2$

Theo định lý Fecmat, ta có: $3^p \equiv 3 (\bmod p)$ vậy $x^2 \equiv -1 (\bmod p)$ vậy p có dạng 4k + 1. 3^{4k+1} là số có dạng 4k + 3, do đó $3^p + 7p – 4$ có dạng 4k + 2 suy ra: $x^2 \equiv 2 (\bmod 4)$ điều này là mâu thuẫn vì x^2 luôn đồng dư với 1 hoặc 0 mod4

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 8: Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$1+ 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

(IMO 2006)

Lời giải:

Nếu x = 0 ta được $y = \pm 2$

Nếu x > 0, giả sử (x, y) là một nghiệm của phương trình thì (x, - y) cũng là một nghiệm của phương trình do đó ta có thể giả sử y > 0.

Biến đổi phương trình thành dạng:

$$2^x(2^{x+1}+1) = (y-1)(y+1)$$

Vì ước chung lớn nhất của y – 1 và y + 1 hoặc bằng 1 hoặc bằng 2.

Nếu ước chung lớn nhất bằng 1 thì ta có:

$$\begin{cases} y-1 = 2^x \\ y+1 = 2^{x+1}+1 \end{cases}$$

Hệ này vô nghiệm.

Nếu ước chung lớn nhất bằng 2 thì ta có:

$$\left[\begin{array}{l} y-1=2^{x-1}a \\ y+1=2^{x-1}a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=2^{x-1}a+1 \\ y=2^{x-1}a-1 \end{array}\right.$$

Nếu $y=2^{x-1}a+1$ thay vào phương trình ban đầu ta được:

$$2(2^{x+1}+1)=a(2^{x-1}a+2)$$
$$\Leftrightarrow 2^{x-2}(8-a^2)=a-1$$

Suy ra $1\neq a\leq 2$ vậy a = 2 thay vào phương trình ta thấy không thỏa mãn.

Nếu $y=2^{x-1}a-1$ thay vào phương trình đầu ta được:

$$2(2^x+1)=a(2^{x-1}a-2)$$
$$\Leftrightarrow 2^{x-1}(4-a^2)=-2(a+1)$$
$$\Leftrightarrow \qquad 2^{x-2}=\frac{a+1}{a^2-8}$$

Dễ thấy phương trình này chỉ có nghiệm a = 3, x = 4. Thay vào ta được y = 23

Kết luận: Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là (0, 2), (0, -2), (4, 23), (-4, 23).

IV. BÀI TẬP LÀM THÊM.

Bài 1: Giả sử p > 3 là một số nguyên tố và giả sử $a,b\in\mathbb{N}$ sao cho:

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}=\frac{a}{b}$$

Chứng minh rằng $p^2\mid a$

Bài 2: Xét $P(x)=x^3+14x^2-2x+1$. Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên n sao cho với mỗi $x\in\mathbb{Z}$ ta có:

$$101\mid \underbrace{P(P(\ldots P}_{n}(x)\ldots))-x$$

Bài 3: Tìm các giá trị của $n\in\mathbb{N}$ sao cho tập $A=\ n,n+1,\ldots,n+1997$ có thể phân hoạch thành ít nhất hai tập con mà tích các phần tử trong mỗi tập con đó là bằng nhau.

Bài 4: Giả sử m, n là các số nguyên dương sao cho $\varphi(5^m - 1) = 5^n - 1$. Chứng minh rằng ước chung lớn nhất của m và n lớn hơn 1.

Bài 5: Tìm các số nguyên dương a, b, c sao cho :

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3(ab+bc+ca)}$$

Là một số nguyên.

Bài 6: Với $n \in \mathbb{N}$ .Chứng minh rằng mọi ước nguyên tố của $n^8 - n^4 + 1$ đều có dạng $24k + 1,\ k \in \mathbb{N}$.

Bài 7: Cho hai số nguyên dương (a, b) sao cho $(4a^2 - 1)^2$ chia hết cho $(4ab - 1)$. Chứng minh rằng a = b.

(IMO 2007)

GIẢI TOÁN TỔ HỢP BẰNG CÁCH ĐẾM SỐ LẦN XUẤT HIỆN CỦA MỖI PHẦN TỬ TRONG MỘT TẬP HỢP CÓ LIÊN QUAN ĐẾN BÀI TOÁN TỔ HỢP

Đỗ Văn Đức
THPT Chuyên Lương Văn Tụy-Ninh Bình

Trong các kì thi tuyển sinh đại học, các cuộc thi học sinh giỏi cấp tỉnh, cấp quốc gia, cấp khu vực, quốc tế, ... thì hầu như lần nào cũng có bài toán tổ hợp. Đây là loại toán khó và cũng có nhiều phương pháp để giải quyết loại toán kiểu này như đưa ra công thức truy hồi, dùng số phức, đa thức, dùng công thức đếm dạng $\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i|...$

Sau đây tôi đưa ra một phương pháp giải nhờ đếm số lần xuất hiện của mỗi phần tử trong một tập hợp có liên quan đến bài toán tổ hợp thông qua các ví dụ sau đây.

Ví dụ 1. (Đề thi học sinh giỏi Ba Lan)

Cho tập hợp M có n phần tử, với hai tập con tuỳ ý A, B của M. tính số phần tử của $A \cap B$. Chứng minh rằng tổng tất cả các số phần tử của mọi giao có thể gồm hai tập con của M là $n.4^{n-1}$

Bài toán này các bạn có thể xem trong tập chuyên đề hè năm 2006 tại Đại học Quốc Gia Hà Nội. Sau đây tôi nêu lên một cách giải khác theo phương pháp đã nói ở trên (cách này đơn giản, gọn hơn và rất tự nhiên).

<u>Bài giải</u>:

Xét phần tử $a \in M \Rightarrow$ có $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ tập con của M có chứa phần tử a $\Rightarrow$ chia ra $\left(2^{n-1}\right)^2 = 4^{n-1}$ cặp hai tập con của M có chứa a thuộc giao của hai tập đó. Vậy mỗi phần tử $a \in M$ thì nó được đếm 4^{n-1} lần $\Rightarrow \sum_{\substack{A\subset M\\ B\subset M}} \left|A \cap B\right| = n.4^{n-1}$

Theo cách giải trên ta có thể giải bài toán tổng quát hơn sau đây:

Bài toán: Cho A là tập có n phần tử, E là tập tất cả các bộ (có thứ tự) $\left(A_1, A_2, ..., A_k\right)$ trong đó $A_i \subset A$; k là số tự nhiên đã cho. Chứng minh rằng

$$\sum_{(A_1, A_2, ..., A_k) \in E} \left|\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right| = n2^{(n-1)k}$$

Ví dụ 2. (Đề thi Tiệp Khắc)

Hãy tìm số các cặp khác nhau của các tập con không giao nhau thuộc tập hợp n phần tử.

Đây cũng là bài toán đã giải quyết trong trường hè 2006. Sau đây là cách giải theo phương pháp đã nêu trên.

<u>Bài giải</u>:

Với mỗi số tự nhiên t (t = 1, 2, 3, ... , n) ta tìm $\left(A_i, A_j\right)$ mà $A_i \cap A_j = \varnothing, \left|A_i\right| + \left|A_j\right| = t$. Gọi A là tập n phần tử của đề bài. Ta có C_n^t cách chọn ra t phần tử của A. Mỗi cách đã chọn ra t phần tử ta có C_t^k cách chọn ra từ đây k phần tử để làm thành tập A_i và $\left(t-k\right)$ phần tử còn lại là tập $A_j \Rightarrow$ số bộ $\left(A_i, A_j\right)$ là $\sum_{k=0}^{t} \frac{C_t^k}{2} = 2^{t-1}$. Do có một cặp $\left(\varnothing, \varnothing\right)$ nên số các cặp cần tìm là

$$\sum_{t=1}^{n} C_n^t 2^{t-1} + 1 = \frac{1}{2}\left[\sum_{t=0}^{n} C_n^t 2^t - 1\right] + 1 = \frac{3^n + 1}{2}$$

Ví dụ 3. (thi Olympic toán Châu Á Thái Bình Dương lần 10 - 1997)

Giả sử F là tập hợp tất cả các bộ $\left(A_1, A_2, ..., A_k\right)$ trong đó A_i là một tập con của $\left\{1, 2, ..., 1998\right\} (i = 1, 2, ..., k) (k \in N$,đã cho). Hãy tính

$$S = \sum_{(A_1, A_2, ..., A_k) \in F} \left|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k\right|$$

<u>Bài giải</u> :

Đặt n = 1998. Gọi $S_k(i)$ là số các bộ $\left(A_1, A_2 ..., A_k\right) \in F$ mà $i \in \bigcup_{j=1}^{k} A_j$.

Do có 2^n tập con của A và 2^{n-1} tập con của $A \setminus \left\{i\right\}$

$\Rightarrow S_k(i) = 2^{nk} - 2^{(n-1)k} = 2^{(n-1)k}\left(2^k - 1\right) \Rightarrow S = n\left(2^k - 1\right)2^{(n-1)k}$

Theo cách giải ví dụ 3 trên ta có thể đưa ra một số bài toán sau.

Ví dụ 4. Cho số tự nhiên n, k. Gọi A = {1, 2, 3,...,n} (tập hợp n số nguyên dương đầu tiên), $A_i \subset A$; i = 1, 2, ... ,k. F là tập các bộ $\left(A_1, A_2...., A_k\right)$ có thứ tự, E là tập các bộ $\left(A_1, A_2...., A_k\right)$ không có thứ tự. Hãy tính

1) $S_1 = \sum\limits_{(A_1,A_2,...,A_k)\in F} \left|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k\right|$

2) $S_2 = \sum\limits_{(A_1,A_2,...,A_k)\in F} \sum\limits_{a\in(A_1\cup A_2\cup ...\cup A_k)} a$

3) $S_3 = \sum\limits_{(A_1,A_2,...,A_k)\in F} \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{a\in A_i} a$

4) $S_4 = \sum\limits_{(A_1,A_2,...,A_k)\in E} \left|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k\right|$

5) $S_5 = \sum\limits_{(A_1,A_2,...,A_k)\in E} \sum\limits_{a\in A_1\cup A_2\cup ...\cup A_k} a$

6) $S_6 = \sum\limits_{(A_1,A_2,...,A_k)\in E} \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{a\in A_i} a$

<u>Bài giải</u>:

+) $S_1 = n(2^k - 1)2^{(n-1)k}$ (là ví dụ 3)

+) $S_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} iS_k(i) = \sum\limits_{i=1}^{n} i2^{(n-1)k}(2^k - 1) = \dfrac{n(n+1)}{2}(2^k - 1)2^{(n-1)k}$

+) Để tính S_3 thì với mỗi $j \in N\ (1 \le j \le k)$ ta tìm số bộ $(A_1, A_2, ..., A_k) \in F$ mà $a \in A$, a thuộc j tập con của bộ nên có $2^{(n-1)k}C_k^j$ bộ. Vậy

$$S_3 = \sum_{a=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} ja\left(2^{(n-1)k}C_k^j\right) = \sum_{a=1}^{n} a2^{(n-1)k}\sum_{j=1}^{k} jC_k^j$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}2^{(n-1)k}k2^{k-1} = n(n+1)k2^{nk-2}$$

+) Tương tự ta tìm được S_4, S_5, S_6.

Ví dụ 5. (Đề thi Olympic Tây Ban Nha)

Xét các tập A thoả mãn: A gồm 100 số tự nhiên phân biệt sao cho a, b, c là các phần tử của A (có thể phân biệt hoặc không) thì tồn tại tam giác cạnh a, b, c mà không có góc tù. Gọi S(A) là tổng các chu vi của các tam giác được xét khi xác định tập A. Tìm giá trị nhỏ nhất của S(A).

Bài giải: $a_1 < a_2 < ... < a_{100}; a_i \in A (i = 1, 2, ..., n)$. Xét tam giác 3 cạnh là

$$a_1, a_1, a_{100} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 \geq a_{100} \\ a_1^2 + a_1^2 \geq a_{100}^2 \end{cases} \Rightarrow 2a_1^2 \geq a_{100}^2 \geq \left(a_1 + 99\right)^2$$

$\Rightarrow a_1 \geq \left(1 + \sqrt{2}\right) 99 \Rightarrow a_1 \geq 240$. Mỗi số a_i là cạnh của: một tam giác đều ; 99 tam giác cân mà hai cạnh bên là a_i; 99 tam giác cân mà a_i là cạnh đáy và C_{99}^2 tam giác thường. Vậy $S(A) = \left(3 + 3.99 + C_{99}^2\right) \sum_{i=1}^{100} a_i \geq \left(3 + 297 + C_{99}^2\right) \sum_{i=1}^{100} \left(a_1 + i - 1\right)$

$$\geq \left(300 + C_{99}^2\right) \sum_{i=1}^{100} \left(240 + i - 1\right) = 149121450$$

Ví dụ 6. Tìm tổng tất cả các số viết dưới dạng thập phân có các chữ số tạo thành dãy tăng hoặc giảm.

Bài toán trên theo cách giải đã có trong một số sách thì dài và phải dựa vào cả hai dãy tăng và giảm. Theo tôi nên tách bài này làm hai như sau.

1) Ta định nghĩa :

a) Số tự nhiên a có các chữ số tạo thành dãy tăng nếu a có một chữ số hoặc $a = \overline{a_p a_{p-1} ... a_1} \Rightarrow a_p < a_{p-1} < ... < a_1$

b) Số tự nhiên a có các chữ số tạo thành dãy giảm nếu a có một chữ số hoặc $a = \overline{a_p a_{p-1} ... a_1} \Rightarrow a_p > a_{p-1} > ... > a_1$

2) Bài toán 1. Tìm tổng tất cả các số tự nhiên có các chữ số tạo thành dãy tăng.

Giải: Gọi A là tập tất cả các số tự nhiên có các chữ số tạo thành dãy tăng. Với mỗi số k, j đã định $k, j \in \{1, 2, ..., 9\}$ ta tìm số các số $a \in A$ mà hàng j là số k. Do sau k có $9 - k$ số lớn hơn k và trước k có $k - 1$ số khác 0 bé hơn k nên số các số a là $S(k,j)=\sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{i} C_{9-k}^{j-1}=2^{k-1} C_{9-k}^{j-1}$. Vậy S là tổng tất cả các số tạo thành dãy tăng thì

$$S=\sum_{k=1}^{9}\sum_{j=1}^{10-k} S(k,j).k.10^{j-1}=\sum_{k=1}^{9}\sum_{j=1}^{10-k} 2^{k-1} C_{9-k}^{j-1}.k.10^{j-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{9} k2^{k-1}\sum_{j=1}^{10-k} C_{9-k}^{j-1}.10^{j-1}=\sum_{k=1}^{9} k2^{k-1}11^{9-k}$$

$$=\frac{11^9}{2}\sum_{k=1}^{9} k\left(\frac{2}{11}\right)^k=\frac{1}{81}\left(11^{10}-46.2^{10}\right)$$

3) Bài toán 2. Tìm tổng tất cả các số tự nhiên có các chữ số tạo thành dãy giảm.

<u>Giải</u>: Gọi B là tập tất cả các số tự nhiên tạo thành dãy giảm. Tương tự như trên với k,j đã định, $k,j\in\{1,2,...,9\}$ ta tìm tất cả các số $b\in B$ có chữ số k ở hàng j. Vậy số các số b là $\sum_{i=0}^{9-k} C_{9-k}^{i} C_{k}^{j-1}=2^{9-k} C_{k}^{j-1}$ nên tổng tất cả các số thuộc B là

$$S=\sum_{k=1}^{9}\sum_{j=1}^{k+1} 2^{9-k} C_{k}^{j-1}.k.10^{j-1}=\sum_{k=1}^{9} k2^{9-k}11^{k}$$

$$=2^9\sum_{k=1}^{9} k\left(\frac{11}{2}\right)^k=\frac{1}{81}\left(79.10^{10}+11.2^{10}\right)$$

Ví dụ 7. Cho số tự nhiên q,n,k. Xét bộ số nguyên $c=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k)$ sao cho $q+1\le\alpha_i\le q+n$. Gọi $m(c)=Min\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k\}$, $M(c)=Max\{\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k\}$, $T(c)=\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_k}{k}$. Tìm

a) S_1 bằng tổng tất cả các $m(c)$ lấy theo mọi bộ c

b) S_2 bằng tổng tất cả các $M(c)$ lấy theo mọi bộ c

c) S_3 bằng tổng tất cả các $T(c)$ lấy theo mọi bộ c

<u>Bài giải</u>:

a) Với mỗi số tự nhiên $j,(1\le j\le n)$. Số bộ c mà α_i nhận giá trị từ $q+j$ đến $q+n$ là $(n+1-j)^k$ trong đó số bộ c mà α_i nhận giá trị từ $q+j+1$ đến $q+n$ là $(n-j)^k$. Vậy số các bộ c có $m(c)=q+j$ là $(n+1-j)^k-(n-j)^k$ suy ra

$$S_1=\sum_{j=1}^{n}(q+j)\left[(n+1-j)^k-(n-j)^k\right]$$

$$=(q+1)n^k+(n-1)^k+(n-2)^k+...+1^k=qn^k+\sum_{i=1}^{n}i^k$$

b) Tương tự số bộ c mà có $M(c)=q+j$ là $j^k-(j-1)^k$ suy ra

$$S_2=\sum_{j=1}^{n}(q+j)\left[j^k-(j-1)^k\right]=(q+n)n^k-\sum_{k=1}^{n-1}i^k$$

c) Mỗi số $\alpha\in\{q+1,q+2,...,q+n\}$ và α có mặt đúng t lần trong bộ $c=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k),(1\le t\le k)$. Do có C_k^t cách đặt vào t vị trí trong k vị trí cùng một giá trị α và còn lại $(k-t)$ vị trí để đặt (n - 1) số còn lại khác α nên số lần α xuất hiện trong tổng S_3 là: $A=\sum_{t=1}^{k}C_k^t(n-1)^{k-t}t=(n-1)^k\sum_{t=1}^{k}t\left(\frac{1}{n-1}\right)^tC_k^t$

$$\Rightarrow S_3=A\sum_{\alpha=q+1}^{q+n}\left(\frac{\alpha}{k}\right)=\frac{n(2q+1+n)}{2k}A=\frac{n(n-1)^k}{2k}(2q+1+n)\sum_{t=0}^{k}t\left(\frac{1}{n-1}\right)^tC_k^t$$

$$=\frac{n(n-1)^k}{2k}(2q+1+n)\sum_{t=0}^{k}\left(\frac{1}{n-1}\right)^tkC_{k-1}^{t-1}$$

$$=\frac{n(n-1)^k}{2k}(2q+1+n)\left(\frac{k}{n-1}\right)\left(\frac{1}{n-1}+1\right)^{k-1}$$

$$=\frac{n^k}{2}(n+2q+1)$$

Ví dụ 8. Cho số tự nhiên n. Gọi

$$A=\left\{a=(a_1,a_2,a_3,a_4)\,|\,a_i\in\{0,1,...,n\},a_1+a_2=a_3+a_4\right\}$$

$$M(a)=Max\{a_1,a_2,a_3,a_4\},\ m(a)=Min\{a_1,a_2,a_3,a_4\},\ T(a)=\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}$$

Hãy tìm $S_1 = \sum_{a\in A} M(a),\ S_2 = \sum_{a\in A} m(a),\ S_3 = \sum_{a\in A} T(a),\ S_4 = |A|$

Bài giải:

+) Với mỗi số $i \in \{0,1,2,...,n\}$ ta tìm số các $a \in A$ có $M(a) = i$. Ta có các cặp có tổng bằng $i + j, (0 \le j \le i)$ là $(i, j),\ (i-1, j+1), ...,\ (j+1, i-1),\ (j, i)$.

$a = (i, j, i-k, j+k), (0 \le k \le i-j) \Rightarrow$ số các a có $M(a) = i$ là :

$$1 + 4i + \sum_{j=0}^{i-1} 4(i-j-1) = 2i^2 + 2i + 1$$

$$\Rightarrow S_1 = \sum_{i=0}^{n} (2i^2 + 2i + 1)i = \frac{n(n+1)}{6}(3n^2 + 7n + 5)$$

+) Tương tự số các $a \in A$ có $m(a) = i,\ (0 \le i \le n)$ là

$$1 + 4(n-i) + \sum_{j=i+2}^{n} 4(j-i-1) = 2n^2 + 2n + 1 - 2(2n+1)i + 2i^2$$

$$\Rightarrow S_2 = \sum_{i=0}^{n} \left[2n^2 + 2n + 1 - 2(2n+1)i + 2i^2\right] i = \frac{n(n+1)(n^2+n+1)}{6}$$

+) $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 \Rightarrow a_1 Max \Leftrightarrow a_2 Min \Rightarrow \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(M(a) + m(a)\right) = \frac{n(n+1)(2n^2 + 4n + 3)}{6}$$

+) Theo chứng minh tìm S_1 ở trên ta có

$$S_4 = \sum_{i=0}^{n} (2i^2 + 2i + 1) = \binom{n+1}{3}(2n^2 + 4n + 3)$$

Ví dụ 9. Cho n số tự nhiên đầu tiên : 1,2,...,n $(2 \le n \le 9)$. Tìm tổng tất cả các số tự nhiên có n chữ số phân biệt từ các chữ số 1,2,...,n sao cho chữ số 1, 2 theo thứ tự nào đó đứng cạnh nhau.

Bài giải :

Gọi A là tập tất cả các số thoả mãn đề bài $a = \overline{a_1 a_2 ... a_n},\ a_i \in \{1,2,...,n\}$ và $a_i \ne a_j$ với $\forall i \ne j,\ (i,j \in \{1,2,...,n\})$

+) a là số thoả mãn đề bài nên số các số a là $2(n-1)! = |A|$

+) Chữ số 1 hoặc 2 ở vị trí $a_j (2 \le j \le n-1)$ có trong $2(n-2)!$ số thuộc A

+) Chữ số 1 hoặc 2 ở vị trí a_1 cũng như vị trí a_n có trong $(n-2)!$ số thuộc A

+) Mỗi chữ số $k \in \{3,4,...,n\}$ ở hàng a_1 cũng như hàng a_n có trong $2(n-2)!$ số thuộc A

+) Mỗi chữ số $k \in \{3,4,...,n\}$ ở hàng a_2 cũng như hàng a_{n-1} có trong $2(n-3)(n-3)!$ số thuộc A

Vậy

$$\begin{aligned}S = \sum_{a\in A} a &= (3+4+...+n)2(n-3)(n-3)!\left(10^{n-1}+10^{n-2}+...+10+1\right)\\ &+ 2(n-3)!(3+4+...+n)\left(10^{n-1}+1\right)+(1+2)(n-2)!\left(10^{n-1}+10^{n-2}+...+10+1\right)\\ &+(1+2)(n-2)!\left(10^{n-2}+10^{n-3}+...+10\right)\\ &= \frac{(n-2)!}{9}\left[\left(10n^2+9n-30\right)10^{n-1}-n^2+9n+3\right]\end{aligned}$$

Ví dụ 10. Cho số tự nhiên n $(2 \le n \le 9)$. Gọi A là tập tất cả các số tự nhiên có n chữ số phân biệt khác 0 và chữ số 1, 2 theo thứ tự nào đó đứng cạnh nhau. Tìm $S = \sum_{a\in A} a$

<u>Bài giải</u> :

Với n chữ số phân biệt $1, 2, a_3, ...a_n$ theo bài trên tổng tất cả các số tự nhiên có n chữ số phân biệt là các chữ số này là

$$\begin{aligned}S_1 &= (a_3+a_4+...+a_n)2(n-3)(n-3)!\left(10^{n-1}+10^{n-2}+...+10+1\right)\\ &+ 2(n-3)!(a_3+a_4+...+a_n)\left(10^{n-1}+1\right)+(1+2)(n-2)!\left(10^{n-1}+10^{n-2}+...+10+1\right)\\ &+(1+2)(n-2)!\left(10^{n-2}+10^{n-3}+...+10\right)\end{aligned}$$

Do mỗi chữ số thuộc tập hợp {3, 4, ..., 9} thuộc C_6^{n-3} bộ (1, 2, a_3,...,a_n) nên

$$S = C_6^{n-3}(3+4+...+9)2(n-3)(n-3)!\left(10^{n-1}+10^{n-2}+...+10+1\right)$$
$$+C_6^{n-3}2(n-3)!(3+4+...+9)\left(10^{n-1}+1\right)+C_7^{n-2}(1+2)(n-2)!\left(10^{n-1}+10^{n-2}+...+10+1\right)$$
$$+C_7^{n-2}(1+2)(n-2)!\left(10^{n-2}+10^{n-3}+...+10\right)$$
$$=\frac{7!}{3(9-n)!}\left[\left(40n-73\right)10^{n-1}-4n+37\right]$$

Sau đây là một số bài tập có cách giải tương tự trên.

Bài 1. Cho n+1 chữ số 0, 1, 2,...,n $(2 \le n \le 9)$. Tìm tổng tất cả các số tự nhiên có n+1 chữ số phân biệt từ các chữ số trên sao cho 1, 2 theo thứ tự nào đó đứng cạnh nhau.

Bài 2. Cho số tự nhiên n $(2 \le n \le 9)$ Gọi A là tập tất cả các số tự nhiên có n chữ số phân biệt thuộc tập hợp {0, 1, 2,..., 9} sao cho 1, 2 theo thứ tự nào đó đứng cạnh nhau. Tìm $S = \sum_{a \in A} a$

Bài 3. Cho số tự nhiên n. Gọi X = {1, 2, ..., n}. $E = \left\{A_1 x A_2 x A_3; A_i \subset X, A_i \ne \varnothing\right\}$.

Tìm $S = \sum_{A_1 x A_2 x A_3 \in E} \sum_{(a_1, a_2, a_3) \in A_1 x A_2 x A_3} \left|A_1 \cup A_2 \cup A_3\right|$

Bài 4. Cho số tự nhiên n. Gọi X = {1, 2, ..., n}, $E = \left\{A_1 x A_2 x A_3; A_i \subset X, A_i \ne \varnothing\right\}$.

Tìm

a) $S_1 = \sum_{A_1 x A_2 x A_3 \in E} \sum_{(a_1, a_2, a_3) \in A_1 x A_2 x A_3} \sum_{i=1}^{3} \left|A_i\right|$

b) $S_2 = \sum_{A_1 x A_2 x A_3 \in E} \sum_{(a_1, a_2, a_3) \in A_1 x A_2 x A_3} \sum_{i=1}^{3} \sum_{a \in A_i} a$

Bài 5. Xét bất phương trình $a^3\left|x\right| \le \sqrt{3}(a^2 - y^2)$ (1). Ta xét các giá trị của a để (1) có hữu hạn cặp số (x, y) $x, y \in Z$ là nghiệm của (1). Với mỗi a như thế ta gọi N(a) là số các cặp khác nhau như vậy. Với mỗi số tự nhiên k hãy tìm $\forall a \in R$ để N(a) = k.

NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ RỜI RẠC

Mai Xuân Huy
Trường THPT chuyên Hạ Long - Quảng Ninh

Đặt vấn đề

Nguyên lý cực trị rời rạc có thể vận dụng cho nhiều bài toán khác nhau. Học sinh ngay từ lớp 10 có thể hiểu và nắm được vấn đề một cách đầy đủ. Trong bài viết này tôi xin trình bày lại một số kết quả tuy không mới nhưng mang tính hệ thống với hy vọng sẽ giúp học sinh nắm được vấn đề một cách hiệu quả, đặc biệt là tiếp cận với một số bài toán tổ hợp mà chúng có thể làm học sinh lúng túng khi tiếp cận. Trong khuông khổ khoảng 2 buổi học chúng tôi hy vọng học sinh có thể nắm bắt và có thêm một số sáng tạo cho những bài toán mới.

I/Cơ sở lý thuyết:

Nguyên lí cực trị rời rạc được phát biểu như sau: Trong một tập hữu hạn và khác rỗng các số thực luôn:

(a) tồn tại một số bé nhất và một số lớn nhất;

(b) luôn xếp chúng theo trật tự tăng hoặc giảm.

II/Ví dụ minh hoạ:

1.Chứng minh sự tồn tại của các cấu hình:

Trong thực tế muốn **tách cá thể ra khỏi đám đông**, người ta thường phải đưa ra một tiêu chí nào đó, làm cho đối tượng cần tách nổi trội nhất theo tiêu chí đó. Khi chứng minh các bài toán sự tồn tại của một cấu hình bằng nguyên lí cực trị, người ta cần đặt ra một quan hệ thứ tự nào đó, mà cấu hình nếu tồn tại là một đối tượng cực trị.

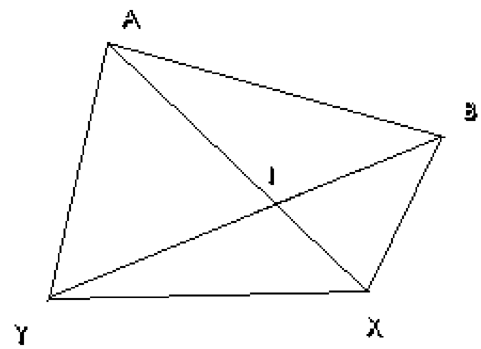
Ví dụ 1: Cho 2n điểm phân biệt trên một đường tròn, trong đó n điểm trắng và n điểm đen ($n \geq 2$). Chứng minh rằng luôn tồn tại:

Một cách nối tất cả các điểm trắng với các điểm đen bởi n đoạn thẳng sao cho các đoạn thẳng không có điểm chung.

Giải:

Gọi S là tập tất cả các cách nối tất cả các điểm trắng với các điểm đen bởi n đoạn thẳng. Đương nhiên S khác rỗng và S hữu hạn. Theo nguyên lí cực trị, thì sẽ tồn tại: một cách nối N có tổng độ dài các đoạn nối nhỏ nhất; một cách nối L có tổng độ dài các đoạn nối lớn nhất.

Ta sẽ chứng minh với cách nối N, thì các đoạn thẳng không có điểm chung. Thật vậy: giả sử trái lại nếu có hai điểm trắng A; B và 2 điểm đen X; Y được nối bởi 2 đoạn thẳng AX và BY cắt nhau tại I.



Khi đó nếu ta thay tương ứng hai đoạn AX và BY bởi AY và BX, còn các đoạn khác được giữ nguyên, thì do
$AY + BX < (AI + IY) + (BI + IX) = (AI + IX) + (BI + IY) = AX + BY.$

Nên ta được một cách nối khác có tổng các đoạn nối bé hơn tổng các đoạn nối của N (mâu thuẫn!). Do vậy N thoả mãn (i).

<u>Ví dụ 2:</u> Giả sử rằng trong một bữa tiệc, mỗi người đều quen một số người còn lại. Chứng minh rằng có thể chia tất cả những người trong bữa tiệc vào hai phòng sao cho với mỗi người ở trong phòng này có ít nhất một nửa số người mà anh ta quen ở phòng còn lại.

Nếu ta xét một cách xếp bất kì và gọi m là số cặp (P;Q) sao cho hai người P và Q là quen nhau và ở khác phòng nhau. Khi đó cách sắp xếp thỏa mãn bài toán là cách sắp xếp mà số m ở trên là lớn nhất.

<u>Ví dụ 3:</u> (APMO-91)

Có 997 điểm khác nhau trên mặt phẳng. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 1991 trung điểm khác nhau từ các cặp điểm này. Có thể có đúng 1991 trung điểm khác nhau không?

Giải: Gọi S là tập tất cả các đoạn thẳng được nối bởi 2 trong 997 điểm đã cho. Đương nhiên S khác rỗng và S hữu hạn ($|S|=C_{997}^2$).Theo nguyên lí cực trị, sẽ tồn tại đoạn thẳng AB có độ dài lớn nhất.

Xét các trung điểm sau: trung điểm M của đoạn thẳng AB, trung điểm của AX và BX với X bất kỳ trong 995 điểm còn lại (khác A, B). Khi đó ta được 1991 trung điểm từ các cặp điểm trong 997 điểm ban đầu.Ta chứng minh các trung điểm này là khác nhau.

Thật vậy! Với 2 điểm bất kỳ trong 997 điểm đã cho X, Y khác A, B. Ta có:

+Trung điểm của AX khác trung điểm của AY (nếu không $X\equiv Y$)

+Trung điểm của BX khác trung điểm của BY (nếu không $X\equiv Y$)

+Trung điểm của AX không thể là M (nếu không $X\equiv B$)

Tương tự trung điểm của AY, BX, BY không thể là M.

+Trung điểm của AX khác trung điểm của BY vì nếu ngược lại, gọi N là trung điểm chung của AX và BY khi đó AYXB là hình bình hành, suy ra hoặc AX>AB hoặc BY>AB, vô lý do AB là đoạn có độ dài lớn nhất.

Tương tự trung điểm của AY khác trung điểm của BX.

Vậy 1991 trung điểm này là khác nhau.

Hơn nữa, ta có thể sắp xếp 997 điểm này sao cho có đúng 1991 trung điểm. Ví dụ: trên trục số sắp 997 điểm này vào các toạ độ 1, 3, 5, 7,..., 1993. Khi đó điểm N là trung điểm của 2 trong số 997 điểm này khi và chỉ khi N có toạ độ là 2, 3, 4, ... , 1992. Có đúng 1991 điểm!

2.Tìm cực trị rời rạc

Ví dụ 4 (Thi Olympic Hùng Vương)

Cho các số dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 thoả mãn các điều kiện:

(i) $2a_i$ là số nguyên dương với i=1,2,3,4,5.

(ii) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 99$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = a_1a_2a_3a_4a_5$.

Giải: Gọi G là tập tất cả các giá trị của P. Dễ thấy G hữu hạn và khác rỗng. Do đó theo nguyên lí cực trị rời rạc, thì luôn tồn tại N là số bé nhất của G. Giả sử $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ làm cho P nhận giá trị N. Ta sẽ chứng minh các số x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 hơn kém nhau tối đa là 0.5.

Thật vậy! Giả sử chẳng hạn $x_1 - x_2 = x > 0.5$. Khi đó lấy $b = x_1 - 0.5$ và $c = x_2 + 0.5$ thì $2b, 2c$ là các số nguyên và $x_1 + x_2 = b + c$ và $bc = (x_1 - 0.5)(x_2 + 0.5) = x_1x_2 + 0.5x - 0.25 > x_1x_2$ (do $x_1 - x_2 = x > 0.5$) .Vậy ta tìm được bộ số (b, c, x_3, x_4, x_5) thoả mãn (i) và (ii) và làm cho giá trị của P bé hơn N (mâu thuẫn!).

Vậy các số x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 hơn kém nhau tối đa là 0.5.

Bây giờ giả sử $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$ mà do $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 99$ ta suy ra ngay $a_1 = a_2 = 19.5$ vµ $a_3 = a_4 = a_5 = 20$.

Vậy giá trị lớn nhất cần tìm là: $N = 19.5^2 20^3$.

Ví dụ 5: (Olympic Hùng Vương 2009)

Tổng của một số các số nguyên dương là 2009. Tìm giá trị lớn nhất của tích các số đó.

3. Thiết lập thứ tự trên các yếu tố bình đẳng.

Sử thiết lập thứ tự trên các yêu tố bình đẳng đã làm giảm đi rất nhiều trường hợp xét trong bài toán. Đó chính là tính ưu việt của phương pháp này.

Ví dụ 6: Chọn đội tuyển IMO Hong Kong,lần 1, năm 1999

a) Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$. CMR : $a_1^{a_1} a_2^{a_2} .... a_n^{a_n} \ge (a_1 a_2 .... a_n)^{\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}}$

b) Cho $x, y, z \ge 0$ và $x + y + z = 1$. CMR : $0 \le xy + yz + zx - 3xyz \le \frac{1}{4}$.

Giải:

a) Giả sử $a_1 \ge a_2 \ge .... \ge a_n$ .Ta có:

đpcm $\Leftrightarrow (a_1^{a_1 - \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}})(a_2^{a_2 - \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}}) .... (a_n^{a_n - \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}}) \ge 1$.

Có: $a_k - \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \sum_{x=k+1}^{n} (\frac{a_k - a_x}{n}) - \sum_{x=1}^{k-1} (\frac{a_x - a_k}{n})$

Do đó đpcm $\Leftrightarrow \prod_{1 \le i < j \le n} (\frac{a_i}{a_j})^{\frac{a_i - a_j}{n}} \ge 1$

BĐT trên đúng do $a_i \ge a_j \forall i < j$!

(Với $n = 3$ là đề thi toán Olympic của Mỹ năm 74).

b) Giả sử $x \ge y \ge z \ge 0 \Rightarrow z \le \frac{1}{3} \Rightarrow 3xyz \le xy$

$$\Rightarrow xy + yz + zx - 3xyz \ge yz + zx \ge 0.$$

Đặt $z = \frac{1}{3} - k, 0 \le k \le \frac{1}{3} \Rightarrow x + y = \frac{2}{3} + k$

$$\Rightarrow xy \le (\frac{x+y}{2})^2 = (\frac{1}{3} + \frac{k}{2})^2$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx - 3xyz \le \frac{2}{9} + \frac{3}{4}k^3 \le \frac{1}{4}$$

<u>Ví dụ 7:</u> VMO-1990

Cho 2n-1 số tự nhiên liên tiếp 1, 2, 3, ..., 2n-1. Hãy gạch đi ít nhất n-1 số theo quy tắc sau:

(i) Nếu gạch số a thì phải gạch số 2a

(ii) Nếu gạch số a,b thì phải gạch số a+b.

Hỏi phải gạch thế nào để tổng các số còn lại là lớn nhất? Tại sao?

<u>Giải:</u> Gọi các số bị gạch là $1 \le a_1 < a_2 < .... < a_p \le 2n-1$.Chú ý rằng $p \ge n-1$.

Ta nhận thấy:

(i) Nếu $a_1 = 1$ thì phải gạch số 1+1=2, do đó phải gạch 1+2=3,... như thế mọi số đều bị gạch, tổng còn lại bằng 0.

(ii) Xét $a_1 > 1$. Rõ ràng $a_1 + a_p \ge 2n$ (vì nếu không $a_1 + a_p \le 2n-1$ thì số $a_1 + a_p$ phải bị gạch, nhưng $a_1 + a_p > a_p$ trái với giả thiết a_p là số bị gạch lớn nhất).

Lại có $a_{p-1} + a_2 \ge n$. Thật vậy, ta có $a_{p-1} + a_1 \ge a_p$ (nếu không $a_{p-1} + a_1 < a_p$ thì $a_{p-1} + a_1$ là số bị gạch, nhưng số này nằm giữa 2 số bị gạch liên tiếp a_{p-1}, a_p,vô lý!).

Từ đó : $a_2 + a_{p-1} > a_1 + a_{p-1} \ge a_p$. Vì vậy ta có $a_2 + a_{p-1} \ge 2n$ (nếu không $a_2 + a_{p-1} \le 2n$ thì phải gạch số này $> a_p$ vô lý!).

Tương tự ta có: $\forall i \ge 1 : a_{p-i} + a_1 \ge a_{p-i+1}$, suy ra:

$$a_{p-i} + a_2 > a_{p-i} + a_1\text{, từ đó:}$$

$$a_{p-i} + a_2 \ge a_{p-i+2}, ..., a_{p-i} + a_{i+1} > a_{p-i} + a_i \ge a_{p-i+i} = a_p .$$

Từ đó: $\quad a_{p-i} + a_{i+1} \ge 2n.$

Vì vậy: $\quad \sum_{i=1}^{p} a_i \ge \frac{p}{2}.2n = pn \ge (n-1)n.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_{p-i} + a_i = 2n \forall i \ge 0$ tức là $a_{p-i} + a_j = a_{p-i+j}$

hay $a_j = ja_1$,

từ đó: $a_p = pa_1 < 2n-1$ (v× $a_1 > 1$).

Thế thì $\quad a_1 \le \frac{2n-2}{p} \le \frac{2n-2}{n-1} \le 2$. Vậy $a_1 = 2$ vµ $a_j = 2j$.

Tóm lại, các số phải gạch là mọi số chẵn trong dãy đã cho.

III/Một số bài toán:

Bài 1**:** Cho G là một đồ thị gồm một số điểm trắng và một số điểm đen. Một điểm được gọi là kì dị nếu quá nửa số đoạn thẳng nhận nó làm đầu mút có đầu mút còn lại là điểm khác màu. Luật chơi là như sau: với mỗi điểm kỳ dị, ta đổi màu của nó. CMR: Ta chỉ chơi được một số hữu hạn lần.

Giải:

Ta gọi một đoạn thẳng kỳ dị là một đoạn thẳng có hai đầu là 2 điểm khác màu.

Gọi H là số các đoạn thẳng kỳ dị mà đồ thị G có thể có sau các bước chơi!

Giả sử ta có các bước chơi như sau: $G = G_o \to G_1 \to G_2 \to ..... \to G_n \to ....$

Giả sử g_i tương ứng là số đoạn thẳng kỳ dị của cấu hình G_i.

Đặt $\Phi = \bigcup\limits_{i \ge 1} \{g_i\}$. $K = H \cap \Phi$

Rõ ràng nếu K là rỗng, ta không thể thực hiện được lượt chơi nào!

Nếu K khác rỗng, dễ thấy K hữu hạn (card K = min {số điểm trắng, số điểm đen}).

Do đó theo nguyên lí cực trị rời rạc sẽ tồn tại cấu hình G' có số đoạn thẳng kỳ dị g' = min K.

Nhận thấy mỗi rằng sau mỗi lượt chơi, số đoạn thẳng kỳ dị là giảm dần (do cách chơi). Do đã $\{g_i\}$ là dãy giảm thực sự suy ra $\exists$i (hữu hạn) sao cho g_i =g'. Khi đó ta không thể thực hiện tiếp lượt chơi nào nữa vì như đã nói ở trên, mỗi lượt chơi đòi hỏi phải giảm số đoạn thẳng kỳ dị!

Vậy ta chỉ có thể thực hiện được một số hữu hạn lượt chơi.

Bài 2: Có n người đứng ở n vị trí khác nhau và mỗi người cầm một khẩu súng. Giả sử khoảng cách giữa những người này là khác nhau và tại cùng một thời điểm mỗi người đều bắn vào một người ở gần mình nhất. Chứng minh rằng nếu n lẻ thì sẽ có ít nhất một người sống sót. Kết quả bài toán còn đúng không nếu n chẵn.

Dựa trên ý tưởng hai người có khoảng cách ngắn nhất sẽ bắn vào nhau nên ta có thể chứng minh bài toán bằng nguyên lý quy nạp toán học.

Bài 3: Cho hàm số $f:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn $2f(n) < f(n-1) + f(n+1)$ với mọi n thuộc $\mathbb{Z}$. Chứng minh rằng f có thể nhận giá trị lớn tùy ý.

Bài 4: Cho A là một tập hợp hữu hạn các số nguyên thoả mãn :

i) Số bé nhất trong A là 1, số lớn nhất là 100.

ii) Nếu $x \in A \setminus \{1\} \Rightarrow \exists a, b \in A : x = a + b$.

Trong tất cả các tập A như trên, hãy tìm tập có lực lượng nhỏ nhất.

Giải: Giả sử $A = \{k_i\}_{i=1}^{n}$, với: $1 = k_1 \le k_2 \le ..... \le k_n = 100$

Theo bài ra ta có: $\forall m > 1$: $k_m = k_i + k_j$ víi $1 \le i \le j < m \le n$.Ta có:

$2k_1 \ge k_2$
$2k_2 \ge k_3$
....
$2k_{n-1} \ge k_n$
$\Rightarrow 2^{n-1}k_1 \ge k_n = 100 \Rightarrow 2^{n-1} \ge 100 \Rightarrow n \ge 8$

Nếu n=8 ta có: $k_8 = 100 \Rightarrow k_7 \ge 50$

$k_7 > 50 \Rightarrow k_6 + k_7 \ge k_8 = 100$ vô lý do $k_6 + k_7 \le 2^5 + 2^6 = 96 < 100$

$k_7 = 50$ làm tương tự ta cũng có $k_6 = 25 \Rightarrow 2k_5 \ne k_6 \Rightarrow k_4 + k_5 \ge k_6 = 25$

mà $k_4 + k_5 \le 2^3 + 2^4 = 24$, vô lý!

Với n=9 ta có tập thoả mãn: 1,2,4,8,16,24,25,50,100.

Bài 5: Cho m và d là các số nguyên với m≥d≥2.Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n$ là các biến nguyên dương sao cho $x_1 + x_2 + ... + x_d = m.$ Tìm giá trị lớn nhất của $S = \sum_{k=1}^{d} x_k^k$.

Giải: Gọi A là tập tất cả các giá trị của S. Ta có A hữu hạn và khác rỗng. Theo nguyên lí cực trị rời rạc, tồn tại U là số lớn nhất của A. Bây giờ giả sử $(a_1, a_2, ..., a_d)$ làm cho S nhận giá trị U. Ta sẽ chứng minh rằng $(a_1, a_2, ..., a_d) = (1, 1, ..., 1, m - d + 1)$. Thật vậy, giả sử $a_j > 1$ thay bộ $a = (a_1, a_2, ..., a_d)$ bởi bộ $a* = (a_1, a_2, ..., a_j - 1, ..., a_{d-1}, a_d + 1)$ rõ ràng S(a^*)>S(a) (mâu thuẫn!).

Vậy giá trị lớn nhất của S là U=$(m - d + 1)^d$.

Bài 6: CMR có vô hạn số nguyên tố có dạng 4k+1.

Giải: Trước hết ta chứng minh kết quả sau: giả sử p là số nguyên tố và n là số nguyên sao cho $p | (4n^2 + 1)$, khi đó $p \equiv 1 (\bmod 4)$. Thật vậy: rõ ràng $p \equiv 2 (\bmod 4) \Rightarrow p \vdots 4$,loại.Nếu $p \equiv 3 (\bmod 4)$, tức là $p = 4k + 3$ với k nào đó. Đặt y=2n, theo định lý Fermat nhá, $y^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$, vì n không chia hết choĠ. Nhưng ta có $y^2 + 1 \equiv 0 (\bmod p)$ nên: $y^{p-1} = y^{4k+2} = (y^2)^{2k+1} \equiv (-1)^{2k+1} (\bmod p) \equiv (-1) (\bmod p)$, m©u thuÉn. VËy $p \equiv 1 (\bmod 4)$!

Trở lại bài toán, giả sử có hữu hạn số nguyên tố có dạng 4k+1. Theo nguyên lí cực trị rời rạc, tồn tại số lớn nhất, giả sử là p. Khi đó đặt $N = (p!)^2 + 1$. áp dụng kết quả vừa chứng minh ta được N phải chia hết cho số nguyên tố nào đó có dạng 4k+1, rõ ràng điều này là không thể do cách chọn N, Từ đó ta có điều phải chứng minh!

Bài 7: Giải phương trình nghiệm nguyên dương : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Giải: Giả sử $x \ge y \ge z$.

+) Nếu $x \ge 3 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \le 1$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 3$.

+)Nếu $x=2\Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$

*)Nếu $y=2\Rightarrow \frac{1}{z}=0$, loại.

*)Nếu $y=3\Rightarrow z=6$.

*)Nếu $y\ge 4\Rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}\le \frac{1}{2}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $y=z=4$.

+)Nếu $x=1\Rightarrow$ loại.

Kết luận: $(x,y,z)\in\{(3;3;3);(2;4;4);(2;3;6)\}$

IV/Mở rộng chuyên đề:

1/Bổ đề Zorn:

Tập các số tự nhiên sắp thứ tự tốt.

Nghĩa là một tập bất kì các số tự nhiên luôn tồn tại số bé nhất.

Ví dụ 8: (APMO 1989)

Chứng minh rằng phương trình $5n^2=36a^2+18b^2+6c^2$ không có nghiêm nguyên ngoại trừ nghiệm $a=b=c=n=0$.

Giải: Dễ thấy vế phải là bội của 3 nên n chia hết cho 3 suy ra c chia hết cho 3. Đặt $n=3m;c=3d$ ta được $5m^2=4a^2+2b^2+6d^2$.Bây giờ giả sử m,a,b,c là nghiệm với m bé nhất (luôn tồn tại), ta xét số dư (mod 16). Rõ ràng một số bình phương chia cho 10 dư là 0,1,4,9,16. Ta thấy m là số chẵn nên $5m^2\equiv 0,4\ \ hay\ \ 12 (\bmod 16)$. Tương tự $4a^2\equiv 0;4(\bmod 16)$ suy ra $2b^2+6d^2\equiv 0;4;12(\bmod 16)$ suy ra b,d đều là những số chẵn. Do vậy a không thể là số chẵn vì nếu không $(\frac{m}{2};\frac{a}{2};\frac{b}{2};\frac{d}{2})$ là nghiệm của bài toán, trái với giả thiết m là bé nhất. Chia 2 vế cho 4 ta được $5k^2=a^2+2e^2+6f^2$ với a là số lẻ, do đó k cũng là số lẻ. Suy ra $5k^2-a^2\equiv 4;12(\bmod 16)$.Nhưng theo trên $2e^2+6f^2\neq 4;12(\bmod 16)$. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên ngoại trừ $a=b=c=n=0$

2/Nguyên lí cực trị rời rạc và bất đẳng thức:

a/Bất đẳng thức hoán vị:

Nếu $a_1<a_2<....<a_n, b_1<b_2<....<b_n$ là các số thực dương và

$\alpha=\min\{\alpha_{i+1}-\alpha_i\},\beta=\min\{b_{i+1}-b_i\}$

thì với mọi hoán vị không đồng nhất π cũa {1,2,....,k}, ta có:

$\sum b_i a_{\pi(i)}\le \sum b_i a_i-\alpha\beta$.

Cách phát biểu khác: Giả sử: $a_1\le a_2\le ....\le a_n, b_1\le b_2\le ....\le b_n$. Đặt :

$$A=a_1b_1+a_2b_2+....+a_nb_n, B=a_1b_n+a_2b_{n-1}+....+a_nb_1, X=a_1x_1+a_2x_2+....+a_nx_n,$$

trong đó $(x_1,x_2,....,x_n)$ là một hoán vị bất kì của các số $(b_1,b_2,....,b_n)$.

Khi đó ta có $A\ge X\ge B$.

Hệ quả: (Bất đẳng thức Chebyshev)

Với các bất đẳng thức trên ta có:

$$A\ge \frac{(a_1+a_2+....+a_n)(b_1+b_2+....+b_n)}{n}\ge B.$$

Dựa vào bất đẳng thức hoán vị ta còn có thể chứng minh một số bất đẳng thức kinh điển như sau:
a.Bất đẳng thức nghịch đảo
Cho $a_1;a_2;\ldots;a_n$ là n số thực dương, khi đó ta có

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1}\geq n$$

b. Bất đẳng thức Cauchy
Cho $a_1;a_2;\ldots;a_n$ là n số thực không âm, khi đó ta có

$$a_1+a_2+\ldots+a_n\geq n\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

Bất đẳng thức này có thể chứng minh bằng cách áp dụng trực tiếp bất đẳng thức nghịch đảo nếu ta giả sử $a_1a_2\ldots a_n=1$.

<u>Ví dụ 9:</u> Trở lại ví dụ 6a với n=3 - Olympic Mĩ,1974.

Cho a,b,c >0. Chứng minh rằng : $a^ab^bc^c\geq(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

Giải: Ta giả sử $a\leq b\leq c$. Khi đó ta có $\ln a\leq\ln b\leq\ln c$. Theo định lý Chebyshev ta có: $a\ln a+b\ln b+c\ln c\geq\frac{1}{3}(a+b+c)(\ln a+\ln b+\ln c)\Leftrightarrow$ đpcm.

<u>Ví dụ 10:</u> (IMO 1978).

Cho dãy số nguyên dương phân biệt: $(a_1,a_2,\ldots.,a_n)$. Chứng minh rằng với mọi $n\geq1$ ta cã: $\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\ldots.+\frac{a_n}{n^2}\geq\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots.+\frac{1}{n}$.

Giải: Giả sử $(x_1,x_2,\ldots.,x_n)$ là một hoán vị của $(a_1,a_2,\ldots.,a_n)$ sao cho $x_1<x_2<\ldots.<x_n$
Do các số nguyên dương đã cho là phân biệt nên $x_i\geq i\forall i$.
Theo bất đẳng thức hoán vị ta có:

$$\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\ldots.+\frac{a_n}{n^2}\geq\frac{x_1}{1^2}+\frac{x_2}{2^2}+\ldots.+\frac{x_n}{n^2}\geq\frac{1}{1^2}+\frac{2}{2^2}+\ldots.+\frac{n}{n^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots.+\frac{1}{n}\qquad\text{(đpcm).}$$

<u>Ví dụ 11:</u> (IMO 1983)

Cho a,b,c là 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq3abc$.

<u>Giải:</u> Giả sử $a\geq b\geq c$ ta sẽ chứng minh : $a(b+c-a)\leq b(c+a-b)\leq c(a+b-c)$.
Thật vậy: $c(a+b-c)-b(c+a-b)=(b-c)(b+c-a)\geq0$. BÊt ®¼ng thøc cßn l¹i chứng minh tương tự.Từ đó:

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq ba(b+c-a)+cb(c+a-b)+ac(a+b-c)$$

$$a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)\leq ca(b+c-a)+ab(c+a-b)+bc(a+b-c)$$

Từ đó dễ suy ra đpcm.
Ví dụ 12: (IMO 1995)

Giả sö a,b,c là các số thực dương và thoả mãn điều kiện $abc=1$.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$.

<u>**Giải:**</u>

Đặt $x = bc = \frac{1}{a}; y = ca = \frac{1}{b}; z = ab = \frac{1}{c}$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\frac{x^2}{z+y} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{y+x} \geq \frac{3}{2}$.Gọi vế trái là A!

Giả sử $x \leq y \leq z$. Khi đó: $x^2 \leq y^2 \leq z^2$ vµ $\frac{1}{y+z} \leq \frac{1}{z+x} \leq \frac{1}{x+y}$.

Theo bất đẳng thức hoán vị:

$A \geq \frac{x^2}{y+x} + \frac{y^2}{z+y} + \frac{z^2}{x+z}$ và $A \geq \frac{x^2}{z+x} + \frac{y^2}{x+y} + \frac{z^2}{y+z}$,từ đó:

$A \geq \frac{1}{2}(\frac{y^2+x^2}{y+x} + \frac{z^2+y^2}{z+y} + \frac{x^2+z^2}{x+z}) \geq \frac{1}{2}(x+y+z) \geq \frac{1}{2}3\sqrt[3]{xyz} = \frac{3}{2}$.(đpcm)

(Ta cũng có thể sử dụng bất đẳng thức Chebyshev).

<u>Ví dụ 13</u>: (Iran-1997)

Giả sử $w_1, w_2, ..., w_k$ là các số thực khác nhau có tổng khác 0. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên $n_1, n_2, ..., n_k$ sao cho: $n_1 w_1 + ... + n_k w_k > 0$ và với mọi hoán vị không đồng nhất π của {1,2,....,k} ta có: $n_1 w_{\pi(1)} + ... + n_k w_{\pi(k)} < 0$.

<u>Giải:</u> Giả sử $w_1 < w_2 < .... < w_k$, đặt $s = \left|\sum w_i\right|$, $\alpha = \min\{w_{i+1} - w_i\}$ và chọn số tự nhiên $N > \frac{s}{\alpha}$. Cho $(n_1, n_2, ..., n_k) = (N, 2N, ..., kN) + p(1,1,....,1)$, ở đó p là số nguyên duy nhất sao cho $\sum n_i w_i \in (0; s]$. Khi đó ta có:

$\sum n_i w_{\pi(i)} \leq \sum n_i w_i - N\alpha \leq s - N\alpha < 0$!

<u>b/Một phương pháp chứng minh bất đẳng thức:</u>

Một phần không nhỏ các bất đẳng thức xảy ra dấu bằng khi các biến bằng nhau. Tuy nhiên khi giải các bài toán ấy trên tập rời rạc (ví dụ tập số nguyên) thì không tồn tại các biến nếu chúng bằng nhau ("lẻ") mà cực trị đạt được khi "biên độ" của các biến là bé nhất.(ta tạm gọi " biên độ" của dãy $A = (a_k)_{k=1}^{n}$ là $\beta_A = \max\left|a_i - a_j\right|, 1 \leq i < j \leq n$).

<u>Ví dụ 14:</u> Cho m và d là các số nguyên với $m \geq d \geq 2$. Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n$ là các biến nguyên dương sao cho $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2$.

Giải: Gọi G là tập các giá trị của S, khi đó G khác rỗng và hữu hạn nên tồn tại giá trị nhỏ nhất của S. Dễ thấy nếu $n|m$ hay giải bài toán trên bỏ điều kiện các x_i nguyên thì S đạt giá trị nhỏ nhất khi $x_1 = x_2 = ... = x_n$. Tuy nhiên khi n không chia hết m thì không tồn tại các số $x_1, x_2, ..., x_n$ nguyên như thế. Bây giờ ta chứng minh S đạt giá trị nhỏ nhất khi "biên độ" β_x của dãy $x_1, x_2, ..., x_n$ là bé nhất. Thật vậy,ta chỉ xét trường hợp n không là ước của m, ta luôn có $\beta_x \geq 1$. Giả sử $\beta_x > 1 \Rightarrow$ tồn tại 2 số, giả sử là x_1, x_2 có biên độ là β_x>1, $x_1 - x_2 > 1$. Khi đó ta thay $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ bởi $x' = (x_1 - 1, x_2 + 1, ..., x_n)$ ta cã $S(x) \leq S(x')$ vµ $\beta_x \geq \beta_{x'}$. Cứ làm như thế đến lúc nào đó ta nhận được x" có biên độ bằng 1 và không thể thực hiện tiếp được nữa!

Lời giải bài toán này đưa ta tiếp cận đến một phương pháp chứng minh bất đẳng thức trên tập các số thực dựa vào khái niệm "biên độ" như ở trên!

Với trường hợp 2 số: chứng minh $f(a,b) \geq 0$, ta giả sử $b = a + x$ với $x \geq 0$ .Ta chứng minh bước tiếp theo bằng nhiều cách, ví dụ: Xét hàm $g(x) = f(a, a+x)$, chứng minh $g'(x) \geq 0$ từ đó có $g(x) \geq 0$ dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi x=0 thay vào f,a,b ta có đpcm.

Với trường hợp 3 số ta có 2 hướng đi như sau: một là chứng minh bđt với dấu "=" xảy ra khi "biên độ" của 3 số=0; hai là chứng minh bđt với dấu "=" xảy ra khi "biên độ địa phương"=0 rồi đưa về trường hợp 2 biến.

Với trường hợp nhiều biến hơn ta làm tương tự.

<u>Ví dụ 12:</u> Với a,b,c là các số thực dương, tìm min $S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$.

Giải: Giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow \beta_{(a,b,c)} = \beta_{(a,c)} = a - c$. Đặt $x = a - c \geq b - c \geq 0$. Xét $f(x) = \frac{x+c}{b+c} + \frac{b}{2c+x} + \frac{c}{b+c+x}$. Có $f'(x) = \frac{1}{b+c} - \frac{b}{(2c+x)^2} - \frac{c}{(b+c+x)^2}$. Rõ ràng với $c + x \geq b \geq c > 0$ ta có $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ là hàm đồng biến$\Rightarrow f(x) \geq f(b-c) \forall x$.Khi đó a=b.Thay a=b vào S ta được $S = \frac{b}{b+c} + \frac{b}{c+b} + \frac{c}{2b} = \frac{2b}{b+c} + \frac{b+c}{2b} - \frac{1}{2} \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Vậy $\min S = \frac{3}{2}$ khi a=b=c!

<u>V/Bài tập đề nghị:</u>

Bài 8: (IMO 1997) Cho $x_1; x_2; \ldots; x_n$ là n số thực thỏa mãn điều kiện

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = 1$$

và $|x_i| \leq \frac{n+1}{2}$ với $i = 1; 2; \ldots; n$. Chứng minh rằng nếu $y_1; y_2; \ldots; y_n$. là một hoán vị của $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = 1$ thì:

$$|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}$$

Bài 9: (Putnam 1996) Cho $\{x_1; x_2; ...; x_n\}$ là một hoán vị của tập $\{1; 2; ...; n\}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$x_1x_2 + x_1x_2 + ... + x_{n-1}x_n + x_nx_1$$

Bài 10: Cho n (n>2) đường thẳng trong mặt phẳng, cứ 3 đường thẳng bất kỳ thì đồng quy. Chứng minh rằng n đường thẳng đồng quy.

Bài 11: Cho tập n (n>2) điểm trong mặt phẳng, cứ 3 điểm bất kỳ thì thẳng hàng. Chứng minh rằng n điểm cùng thuộc một đường thẳng.

Bài 12: Cho n(>2)hình lồi bất kỳ trong mặt phẳng sao cho 3 hình bất kỳ có giao khác rỗng. Chứng minh rằng giao của n hình đó khác rỗng.

Bài 13: Cho n(>1) điểm không cùng thuộc 1 đường thẳng trên mặt phẳng. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng đi qua đúng 2 điểm.

Bài 14: Tìm hàm f: N*→N* sao cho:

i) $f(n+f(n))=f(n)$,

ii) $\exists n_o : f\left(n_o\right)=1$.

Bài 15: Giải phương trình nghiệm nguyên dương sau: $x^3+3y^3+9z^3=27xyz$.

Bài 16: Chứng minh rằng không tồn tại ngũ giác đều có các đỉnh có toạ độ nguyên.

VI. Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Văn Mậu (Chủ biên): Chuyên đề chọn lọc tổ hợp và toán rời rạc
2. Nhà xuất bản Giáo dục: Các bài thi Olympic Toán Trung học phổ thông 1990-2006.
3. Springer: IMO Compedium 1959-2004.
4. Các tài liệu sư tầm trên mạng.

ỨNG DỤNG ĐỊNH LÍ HELLY
GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC TỔ HỢP

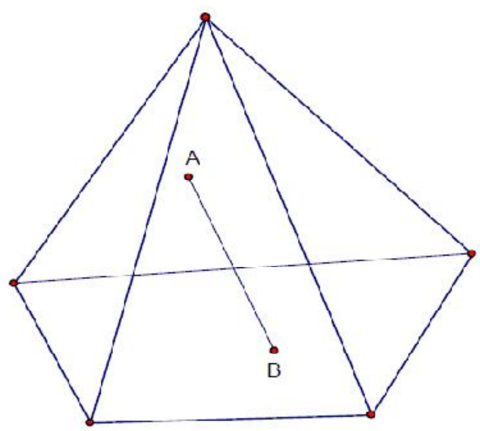
Nguyễn Văn Dũng
THPT Chuyên Thái Bình

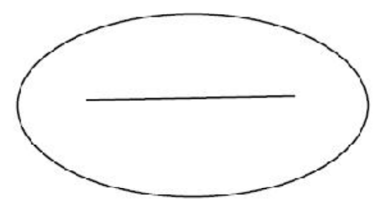
I. TẬP LỒI, BAO LỒI CỦA MỘT TẬP HỢP ĐIỂM

1. Tập lồi

a. *Khái niệm*

Cho tập hợp Ω (trên đường thẳng, mặt phẳng hoặc trong không gian). Tập hợp Ω được gọi là tập lồi nếu $\forall A, B \in \Omega$ thì cả đoạn AB cũng nằm trọn trong Ω.





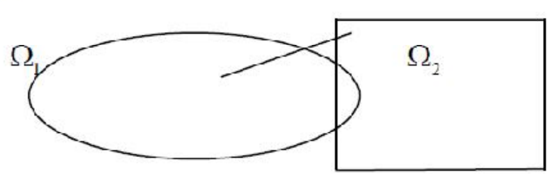
b. *Ví dụ:* Đa giác lồi, đa diện lồi, hình tròn, hình elip…là những ví dụ về hình lồi.

Chú ý: Một đa giác là lồi khi đa giác đó nằm trọn trong một nửa mặt phẳng có bờ xác định bởi cạnh bất kì của đa giác đó.

c. *Tính chất của tập hợp lồi*

i) Cho Ω_1, Ω_2 là các tứ giác lồi khi đó $\Omega_1 \cap \Omega_2$ là một tập lồi

Chú ý: $\Omega_1 \cup \Omega_2$ chưa chắc đã là lồi

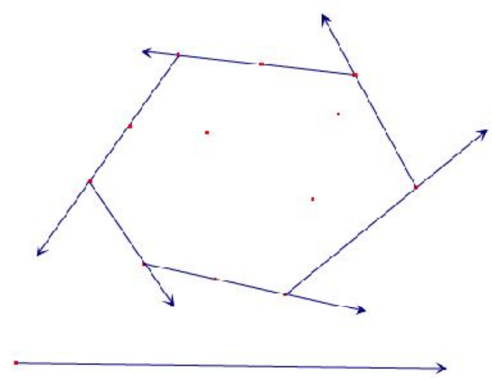


ii) $\Omega \setminus H$ lồi, với H là nửa mặt phẳng

2. Bao lồi của một tập hợp diểm

Định lý: Cho tập hợp M gồm n điểm trong mặt phẳng. Khi đó tồn tại một đa giác lồi chứa M mà các dỉnh của da giác dó là các dỉnh của M.

Chứng minh:



Vì M bị chặn, tồn tại đường thẳng l_0 sao cho M thuộc cùng một nửa mặt phẳng với bờ xác định bởi l_0. Chọn l_0 một hướng dương từ phải sang trái.

Chọn A_1 là điểm thuộc M có khoảng cách đến l_0 là gần nhất, nếu có nhiều điểm như vậy ta chọn diểm cuối cùng bên phải.

Xét các góc có dạng $AA_1l_0^+, \forall A \in M$, theo nguyên lý cực hạn, tồn tại góc nhỏ nhất ứng với điểm A_2 thuộc M, nếu có nhiều điểm A_2 chọn điểm xa A_1 nhất

Ta có:

- M nằm về một nửa mặt phẳng xác định bởi bờ là đường thẳng A_1A_2
- Chọn hướng dương trên A_1A_2 có hướng từ A_1 đến A_2.

Lặp lại quá trình như trên sau hữu hạn bước ta được da giác lồi $A_1A_2\ldots A_k$ mà nó chứa các diểm của M

II. ĐỊNH LÍ HELLY

1. Định lí Helly trong mặt phẳng

Trong mặt phẳng cho n hình lồi $(n \geq 4)$. Biết rằng giao của 3 hình lồi bất kì trong chúng là khác rỗng. Khi đó n hình lồi có giao khác rỗng.

Chứng minh:

Chứng minh bằng quy nạp theo n

Với $n = 4$

Gọi $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ là các hình lồi

$$\begin{cases} A_1 \in \Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_4 \\ A_2 \in \Omega_1 \cap \Omega_3 \cap \Omega_4 \\ A_3 \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_4 \\ A_4 \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 \end{cases}$$

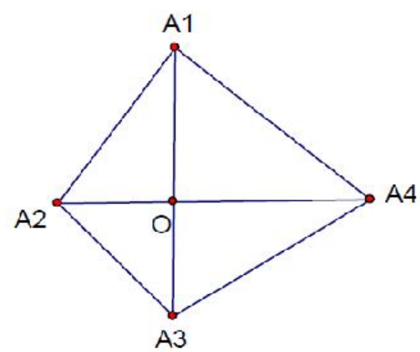
Nếu hai điểm trong số 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 trùng nhau

Giả sử $A_1 = A_2 \Rightarrow A_1 \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_4$ xong

Nếu 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 phân biệt

Xét bao lồi của tập 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4. Xét các trường hợp

TH1: Bao lồi là tứ giác lồi



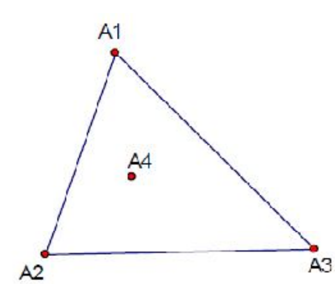
Gọi O là giao điểm của 2 đường chéo A_1A_3 và A_2A_4

$O \in A_1A_3$ tương tự $\Rightarrow O \in \Omega_2 \cap \Omega_4$

$O \in A_2A_4$ tương tự $\Rightarrow O \in \Omega_1 \cap \Omega_3$

$\Rightarrow O \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_4$

TH2: Bao lồi là một hình tam giác



Giả sử là $\Delta A_1A_2A_3$. Khi đó A_4 thuộc miền trong $\Delta A_1A_2A_3$

Mặt khác A_1, A_2, A_3 đều thuộc Ω_4

$\Rightarrow \Delta A_1A_2A_3 \in \Omega_4$
$\Rightarrow A_4 \in \Omega_4$
$\Rightarrow A_4 \in \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_4$

TH3: Bao lồi là đoạn thẳng.

Ta giả sử $A_2A_3 \subset A_1A_4$

$\Rightarrow A_2A_3 \subset \Omega_2 \cap \Omega_3$

Mặt khác $A_2A_3 \subset \Omega_1 \cap \Omega_4$

$\Rightarrow A_2A_3 \subset \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 \cap \Omega_4$

Vậy định lý được chứng minh cho trường hợp $n = 4$

Giả sử định lý được chứng minh cho trường hợp n >4, ta chứng minh nó đúng với n + 1

Thật vậy xét các hình lồi $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_n, \Omega_{n+1}$ thỏa mãn các điều kiện của định lý Helly.

Xét n hình lồi như sau: $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n, \Omega_n \cap \Omega_{n+1}$

Ta chứng minh các hình lồi này thỏa mãn các điều kiện của định lý Helly. Thật vậy nếu 3 hình lồi bất kì trong chúng không chứa $\Omega_n \cap \Omega_{n+1}$ thì chúng có giao khác rỗng, nếu có một trong ba hình là $\Omega_n \cap \Omega_{n+1}$ thì quy về 4 hình có giao khác rỗng như chứng minh ở trên. Vậy n hình lồi nói trên thỏa mãn điều kiện của định lý Helly. Theo giả thiết quy nạp ta có $\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \ldots \cap \Omega_n \cap (\Omega_n \cap \Omega_{n+1}) \neq \varnothing$ tức là n + 1 hình lồi đã cho có giao khác rỗng (đpcm).

2. Định lý Helly trên đường thẳng

Trên đường thẳng cho n hình lồi. Biết rằng giao của hai hình lồi bất kì trong chúng khác rỗng. Khi đó giao của n hình lồi cũng khác rỗng.

Chứng minh:

Hình lồi trên đoạn thẳng có dạng : Đoạn thẳng [a, b], khoảng (a, b), nửa khoảng [a, b), (a, b] (ở đó a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$). Ta chỉ xét các hình lồi có dạng đoạn thẳng, các dạng khác được xét tương tự.

Xét n đoạn thẳng $[a_i, b_i], i = 1, \ldots, n$, hai đoạn bất kì trong chúng có giao khác rỗng. Ta chứng minh n đoạn này có giao khác rỗng.

Đặt $a = \max\{a_i\}_{i=1}^n$, $b = \min\{b_i\}_{i=1}^n$, ta sẽ chứng minh $a \leq b$.

Thật vậy giả sử a > b, khi đó tồn tại các chỉ số i và j sao cho a = a_i, b = b_j, vì $a_i > b_j$ do đó các đoạn thẳng $[a_i, b_i]$ và $[a_j, b_j]$ sẽ rời nhau. Trái với giả thiết bài toán.

Vậy $a < b$ khi đó ta chỉ cần chọn c sao cho $a < c < b$ ta có $c \in \bigcap_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ (đpcm)

III. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÝ HELLY

Để áp dụng được định lý Helly, dữ kiện của bài toán thường cho một họ những hình thỏa mãn một số tính chất nào đó (thường là 3 hình bất kì có tính chất nào đó). Các hình đó có thể lồi, có thể không lồi. Trong một số trường hợp, các hình được cho là không lồi, ta phải biến đổi để nhận được họ các hình lồi phù hợp với các giả thiết trong định lý.

Sơ đồ để giải bài toán có áp dụng định lý Helly thường là:

- ✓ *Từ dữ kiện của bài toán xây dựng một họ các hình lồi có các tính chất thỏa mãn điều kiện của Helly.*
- ✓ *Áp dụng định lý Helly ta được giao của các hình lồi trên là khác rỗng.*
- ✓ *Từ bước hai ta dẫn đến kết luận của bài toán.*

Ví dụ 1: Trong mặt phẳng cho $n \geq 3$ điểm. Biết rằng mọi cặp 3 điểm trong chúng đều nằm trong đường tròn có bán kính bằng 1. Chứng minh rằng tất cả những điểm đã cho đều nằm trong đường tròn bán kính bằng 1.

Chứng minh:

Gọi các điểm đã cho là $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dựng các đường tròn $\varphi(x_i, 1)$ có tâm tại các điểm x_i với bán kính bằng 1.

Bộ ba đường tròn $\varphi(x_i,1), \varphi(x_j,1), \varphi(x_k,1)$ có điểm chung chính là tâm của đường tròn có bán kính 1 chứa các điểm x_i, x_j, x_k.

Vậy họ các đường tròn $\varphi(x_i,1)$ thỏa mãn các điều kiện của định lý Helly. Do đó tồn tại $x \in \bigcap_{i=1}^{n} \varphi(x_i,1)$ ta có $xx_i < 1, \forall i = 1, \ldots, n$ do đó các điểm $x_1, x_2, \ldots, x_n$ nằm trong đường tròn tâm x bán kính bằng 1.(đpcm)

Ví dụ 2: (*Định lý Yong*) Trong mặt phẳng cho một số hữu hạn điểm, khoảng cách giữa hai điểm bất kì trong chúng không vượt quá 1. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính bằng $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ chứa tất cả các điểm đã cho.

Chứng minh

Ta chứng minh rằng bộ 3 điểm bất kì trong chúng đều nằm trong hình tròn bán kính $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Sau đó áp dụng cách làm của VD1 ta nhận được mọi điểm đều nằm trong hình tròn có bán kính là $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Sau đó áp dụng cách làm của ví dụ 1 ta nhận được mọi điểm nằm trong hình tròn bán kính là $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Ta có bài toán

<u>Bài toán:</u> Cho tam giác ΔBC có 3 cạnh có độ dài bé hơn 1. Chứng minh rằng tồn tại hình tròn có bán kính $\frac{1}{\sqrt{3}}$ chứa tam giác ABC.

Chứng minh:

Xét các trường hợp

- Khi tam giác ABC có 1 góc lớn hơn hoặc bằng 90°, giả sử $A > 90°$. Khi đó đường tròn đường kính BC chứa tam giác ABC. Bán kính đường tròn này $< \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$
- Khi tam giác ABC có 3 góc nhọn

Suy ra có một góc lớn hơn hoặc bằng 60°. Giả sử $A \geq 60°$. Gọi (O,R) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Theo định lý hàm số sin ta có

$$R - \frac{BC}{2\sin A} \leq \frac{BC}{2\sin 60} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow \Delta ABC$ sẽ chứa trong hình tròn tâm $\left(O, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Bài toán được chứng minh.

<u>Ví dụ 3:</u> Trong nửa mặt phẳng cho k điểm $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Chứng minh rằng tồn tại điểm x_0 với tính chất sau: Từ mỗi bên của đường thẳng bất kì qua x_0 chứa ít nhất một phần ba số điểm đã cho (ở đây ta tính cả những điểm nằm trên đường thẳng).

Chứng minh

Gọi H là nửa mặt phẳng đóng (nửa mặt phẳng kể cả bờ) chứa ít nhất $\frac{2}{3}$ số điểm thuộc M, H tồn tại (vì M bị chặn nên tồn tại một nửa mặt phẳng đóng chứa toàn bộ M), dễ thấy H là lồi.

Gọi M là tập tất cả các nửa mặt phẳng H có tính chất như trên. Ta sẽ chứng minh rằng 3 phần tử bất kì của M đều có điểm chung

Giả sử H_1, H_2, H_3 là 3 phần tử bất kì của M

Mỗi mặt phẳng chứa $S_i > \frac{2}{3}k$ trong số k điểm đã cho

Gọi S là số điểm trong $H_1 \cap H_2 \Rightarrow$ số điểm trong $H_1 \cup H_2$ là $S_1 + S_2 - S$

Ta có $k \geq S_1 + S_2 - S > \frac{2}{3}k + \frac{2}{3}k - S \Rightarrow S > \frac{1}{3}k$

Suy ra trong H_3 tồn tại ít nhất 1 điểm của $H_1 \cap H_2$ nếu không thì số lượng điểm trong $\left(H_1 \cap H_2\right) \cup H_3$ sẽ lớn hơn k là vô lý.

Suy ra $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \neq \varnothing$

Áp dụng định lý Helly tồn tại x_0 nằm trên tất cả các nửa mặt phẳng mà nó chứa hơn $\frac{2}{3}$ số điểm của $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

Giả sử l_0 là đường thẳng qua x_0 mà 1 nửa mặt phẳng xác định bởi l_0 chứa ít hơn $\frac{1}{3}$ số điểm của X (tính cả những điểm trên l_0)

Gọi $x \in X$ là 1 điểm trong nửa mặt phẳng còn lại mà gần l_0 nhất. Tịnh tiến l_0 về gần x một khoảng nhỏ hơn khoảng cách từ x đến l_0 ta được 1 nửa mặt phẳng còn lại vẫn chứa nhiều hơn $\frac{2}{3}$ số điểm của X nhưng không chứa x_0 (mâu thuẫn với cách chọn)

Vậy bài toán được chứng minh.

Ví dụ 4: Cho tập lồi A trong mặt phẳng và họ gồm $k > 3$ những nửa mặt phẳng phủ A. Chứng minh rằng tồn tại một họ con gồm ba nửa mặt phẳng mà chúng cũng phủ A

Chứng minh

Gọi $H_1, H_2, \ldots, H_k$ là những nửa mặt phẳng phủ A

Đặt $A_i = A \setminus H_i \Rightarrow A_i$ là lồi $\forall i = 1, 2, \ldots, k$

Giả sử không tồn tại 3 nửa mặt phẳng trong số những nửa mặt phẳng trên mà chúng phủ A

$\Rightarrow \exists x_0 \subset A \setminus \left(H_i \cup H_j \cup H_l\right)$

Mặt khác $A \setminus \left(H_i \cup H_j \cup H_l\right) = \left(A \setminus H_i\right) \cap \left(A \setminus H_j\right) \cap \left(A \setminus H_l\right)$

$\rightarrow x_0 \in A_i \cap A_j \cap A_l$

$\rightarrow$Họ tập lồi A_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ thỏa mãn định lý Helly

$\rightarrow x \in \bigcap_{i=1}^{k} A_i$

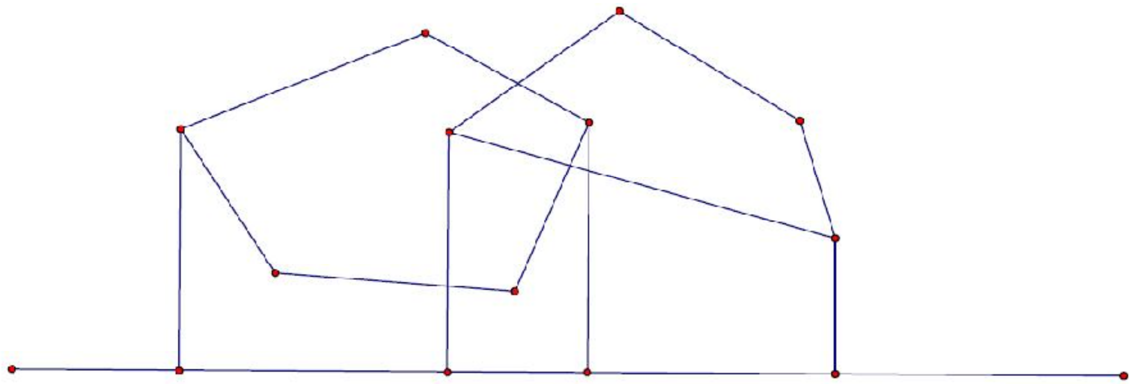
Mặt khác $\bigcap_{i=1}^{k} A_i = A \setminus \bigcup_{i=1}^{k} H_i = \varnothing$ do $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} H_i$

$\Rightarrow x \in \varnothing$ điều này là vô lý

Vậy giả thiết phản chứng là sai, ta có đpcm.

Ví dụ 5: Cho một họ đa giác lồi đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng tồn tại một đường thẳng cắt tất cả các đa giác này.

Chứng minh:



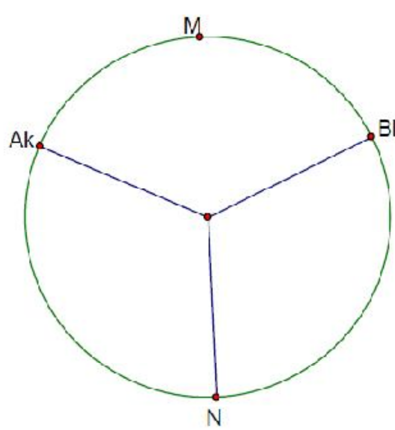
Xét tất cả các đa giác $F_i, i-1,...,n$, chon một đường thẳng d sao cho tất cả các đa giác này chứa trong một nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng d.

Chiếu các đa giác $F_i, i=1,...,n$ xuống đường thẳng d, mỗi đa giác ứng với một đoạn thẳng $\lfloor a_i, b_i \rfloor$, đường thẳng đi qua một điểm bất kì thuộc đoạn $\lfloor a_i, b_i \rfloor$ và vuông góc với d đều cắt F_i. Như vậy để chứng minh bài toán ta chỉ cần chứng minh các đoạn thẳng $\left[a_i, b_i\right]$, $i=1,...,n$ có điểm chung.

Vì hai đa giác bất kì đều có điểm chung nên hai đoạn thẳng bất kì ở trên đều có điểm chung. Áp dụng định lý Helly các đoạn thẳng $\left[a_i, b_i\right]$đều có điểm chung. Đpcm.

Ví dụ 6: Trên một dường tròn dơn vị có một hệ các cung có dộ dài bé hơn $\frac{2\pi}{3}$, có tính chất giao của hai cung bất kì trong chúng khác rỗng. Chứng minh rằng giao của hệ các cung khác rỗng.

Chứng minh



Giả sử có n cung $A_iB_i, i=1,2,...,n$ sao cho độ dài $A_iB_i < \frac{2\pi}{3}$, hai cung bất kì trong số các cung trên đều có giao khác rỗng.Xét một cung tùy ý A_kB_k. Gọi M là trung điểm của cung này, gọi N là điểm đối xứng của M qua tâm O, từ hình vẽ dễ thấy một cung bất kì có độ dài bé hơn $\frac{2\pi}{3}$ mà có giao với cung A_kB_k đều không chứa N.

Cắt hình tròn tại N và trải ra thành đường thẳng N_1N_2, các cung trở thành các đoạn thẳng nằm giữa đoạn thẳng N_1N_2, theo giả thiết hai cung bất kì đều có điểm chung nên hai đoạn thẳng bất kì cũng có điểm chung, theo định lý Helly các đoạn thẳng có điểm chung và do đó các cung cũng có điểm chung. Đpcm

MỘT SỐ BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1: Cho n hình tròn, n > 3 trên mặt phẳng. Biết rằng cứ ba hình tròn tùy ý luôn tồn tại một hình tròn bán kính R chứa cả ba hình tròn. Chứng minh rằng tồn tại một hình tròn bán kính R chứa cả n hình tròn đã cho.

Bài 2: Trong không gian cho n vật thể lồi, mọi bộ bốn vật thể đều có điểm chung. Chứng minh rằng cả n vật thể đó đều có điểm chung.

Bài 3: Trong không gian cho k > 3 điểm. Biết rằng mỗi bộ bốn điểm trong chúng chứa trong hình cầu có bán kính bằng 1. Chứng minh rằng tất cả các điểm nói trên nằm trong hình cầu có bán kính bằng 1.

Bài 4: Trong không gian cho n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$, khoảng cách giữa hai điểm không vượt quá 1. Chứng minh rằng tất cả những điểm này có thể phủ bởi hình cầu có bán kính bằng $\frac{\sqrt{6}}{4}$

.***Bài 5:*** Trong không gian cho tập hợp A và họ những nửa không gian k > 4 phủ tập hợp A. Chứng minh rằng tồn tại một họ con gồm 4 nửa không gian mà chúng vẫn phủ A.

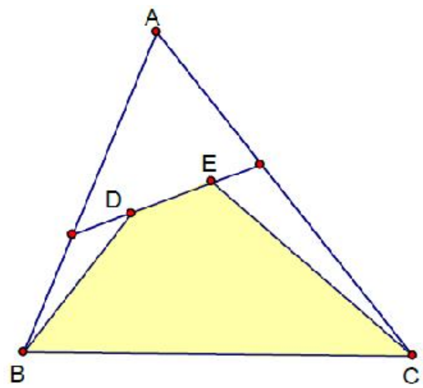
IV. MỘT SỐ BÀI TOÁN SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP LẤY BAO LỒI

Ví dụ 7: Trong mặt phẳng cho 5 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, chứng minh rằng luôn tồn tại một tứ giác lồi có đỉnh là 4 điểm trong số 5 điểm nói trên.

Chứng minh:

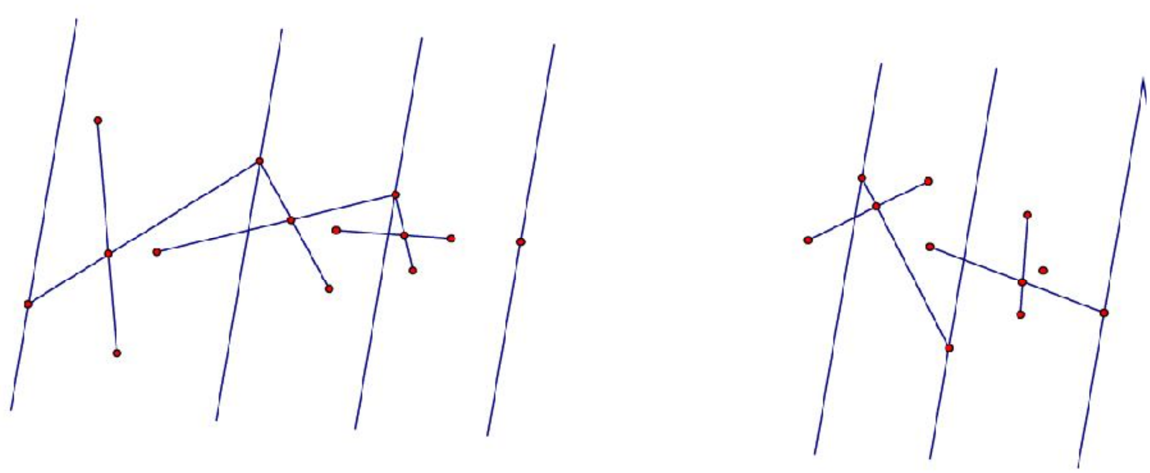
Lấy bao lồi của 5 điểm đã cho (gọi tên là A, B, C, D, E). Xét các khả năng sau:

- Bao lồi là một ngũ giác, hoặc một tứ giác thì bài toán được giải.
- Bao lồi là một tam giác, giả sử là tam giác ABC, khi đó 2 điểm D, E sẽ nằm trong tam giác này. Đường thẳng DE sẽ cắt hai cạnh của tam giác, giả sử nó cắt cạnh AB, AC, khi đó DEBC là tứ giác lồi cần tìm.



Ví dụ 8: Trên mặt phẳng cho 2009 cặp điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng thàng. Chứng minh rằng có thể chọn được trong số này 1004 cặp điểm $(A_i, B_i), i = 1, 2, ..., 1004$ sao cho 1004 đoạn thẳng $A_iB_i, i = 1, 2, ..., 1004$ cắt nhau tại 502 điểm phân biệt

Chứng minh:



Vì số phương của các đường thẳng tạo bởi 2009 điểm là hữu hạn, do đó tồn tại một đường thẳng d không song song với bất kì đường thẳng nào tạo bởi 2009 điểm nói trên, có thể giả sử các điểm nói trên nằm trên một nửa mặt phẳng có bờ là d.

Tịnh tiến d đến khi gặp điểm đầu tiên, ta gọi đó là d_1, tiếp tục tịnh tiến d gặp điểm liền sau ta được đường thẳng d_2, …, tiếp tục quá trình trên ta được 2009 đường thẳng, mỗi điểm của tập điểm đã cho sẽ nằm trên một đường thẳng, các đường thẳng này song song với nhau.

Xét các đường $d_1, d_5, ..., d_{2009}$, các đường này tạo thành 502 dải, trong dải 1 chứa 5 điểm (3 điểm nằm hoàn toàn bên trong, 2 điểm nằm trên biên). Các dải còn lại mỗi dải chứa 4 điểm.

Xét dải tạo bởi d_1, d_5, dải này có chứa 5 điểm, theo ví dụ 7, tồn tại một tứ giác lồi tạo bởi 4 điểm trong số 5 điểm đã cho, hiển nhiên hai đường chéo của tứ giác này cắt nhau tại một điểm nằm trong dải thứ nhất.

Xét dải thứ 2, trong dải này có 4 điểm, kết hợp với điểm còn lại của dải thứ nhất ta được tập gồm 5 điểm, ta lại tạo ra được tứ giác lồi có đỉnh là 4 trong 5 điểm này, hai đường chéo này cắt nhau tại 1 điểm nằm trong dải thứ 2 (vì giao điểm này nằm trên ít nhất một đoạn thẳng chứa hoàn toàn trong dải thứ 2).

Tiếp tục quá trình trên ta sẽ nhận được 1004 cặp điểm $(A_i, B_i), i = 1, 2, ..., 1004$ sao cho 1004 đoạn thẳng $A_iB_i, i = 1, 2, ..., 1004$ cắt nhau tại 502 điểm phân biệt. đpcm

Ví dụ 9: Trong mặt phẳng cho 6 điểm phân biệt. Hai điểm bất kì trong chúng nối thành một đoạn thẳng. Chứng minh rằng tỉ số giữa đoạn thẳng dài nhất và đoạn thẳng ngắn nhất lớn hơn hoặc bằng $\sqrt{3}$.

Chứng minh.

Đặt $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ là tập hợp 6 điểm đã cho.

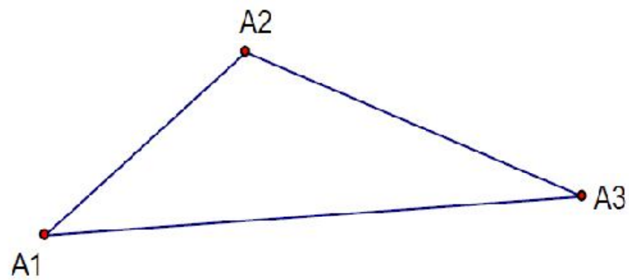
Đặt d' = maxA, d = minA ta sẽ chứng minh $d' \geq \sqrt{3}d$

Xét các trường hợp sau

- Trong A tồn tại ba điểm thẳng hàng, giả sử theo thứ tự là A_1, A_2, A_3, ta có thể giả sử là $A_1A_2 \leq A_2A_3$, khi đó $d' \geq A_1A_3 \geq 2A_1A_2 \geq 2d \geq \sqrt{3}d$.
- Trong A tồn tại 3 điểm tạo thành 1 tam giác có 1 góc lớn hơn hoặc bằng 120°, giả sử tam giác là $A_1A_2A_3$ với $A_2 \geq 120^\circ$

  Theo định lý hàm số cosin ta có:

$$d'^2 \ge A_1A_3^2 = A_1A_2^2 + A_2A_3^2 - 2A_1A_2.A_2A_3\cos A_1A_2A_3$$
$$> d'^2 \ge d^2 + d^2 - 2d.d.\cos 120^\circ = 3d^2$$
$$> d' \ge d\sqrt{3}$$



Xét trường hợp trong A không có 3 điểm nào thẳng hàng, xét bao lồi của A, có các khả năng sau:

- Bao lồi là tam giác, giả sử đó là tam giác $A_1A_2A_3$, khi đó 3 điểm còn lại sẽ chứa trong tam giác, ta xét điểm A_1. Điểm này chia tam giác $A_1A_2A_3$ thành 3 tam giác con trong đó có ít nhất một tam giác giả sử là $A_1A_2A_4$ có góc ở đỉnh A_1 lớn hơn hoặc bằng 120°. Áp dụng trường hợp trên cho tam giác $A_1A_2A_4$ ta được dpcm.
- Nếu bao lồi là tứ giác, gọi đó là tứ giác $A_1A_2A_3A_4$, chia đa giác thành hai tam giác bởi một đường chéo, một trong hai tam giác này phải chứa ít một điểm còn lại trong A và ta lại đưa về trường hợp trên.
- Bao lồi là ngũ giác, gọi ngũ giác đó là $A_1A_2A_3A_4A_5$, chia ngũ giác này thành 3 tam giác bởi các đường chéo, điểm còn lại A_6 phải nằm trong một trong 3 tam giác này và ta đưa bài toán về trường hợp đầu.
- Bao lồi là lục giác, vì lục giác có 6 đỉnh mà có tổng số góc ở các đỉnh là 720° nên sẽ tồn tại một đỉnh có góc ở đỉnh đó lớn hơn hoặc bằng 120°. Ta lại đưa bài toán về trường hợp đã xét.

MỘT SỐ BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

Bài 1: Chứng minh rằng một đa giác M là lồi khi và chỉ khi mọi tứ giác có các đỉnh là các đỉnh của M là lồi.

Bài 2: Tìm số nguyên n >3 sao cho tồn tại n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ trong mặt phẳng và n số thực $r_1, r_2, ..., r_n$ sao cho hai điều kiện sau đây được thỏa mãn:

- ✓ Không có 3 điểm nào thẳng hàng.
- ✓ Với mỗi bộ $(i; j; k), 1 < i < j < k < n$ các tam giác $A_iA_jA_k$ có diện tích bằng $r_i + r_j + r_k$

ĐỊNH HƯỚNG CƠ BẢN VỀ PHƯƠNG TRÌNH HÀM

THPT Chuyên Hà Nam

I/ CƠ SỞ ĐỊNH HƯỚNG CƠ BẢN

ĐỂ GIẢI MỘT PHƯƠNG TRÌNH HÀM

Tiếp cận phương trình hàm, mỗi người có những cơ sở và phương pháp khác nhau. Tuy nhiên dựa vào đặc trưng của các hàm ta có thể xây dựng được 1 số định hướng cơ bản như sau:

1. Thế các giá trị biến phù hợp: Hầu hết các giá trị ban đầu có thể thế vào là: x = 0; x = 1 …; từ đó tìm ra 1 tính chất quan trọng nào đó hoặc các giá trị đặc biệt của hàm hoặc tìm cách chứng minh hàm số hằng.

2. Quy nạp toán học: Đây là phương pháp sử dụng giá trị f(x) và bằng cách quy nạp với n $\in$ N để tìm f(n). Sau đó tìm $f(\frac{1}{n})$ và f(e) với r hữu tỷ. Phương pháp này thường áp dụng trong bài toán mà ở đó hàm f đã được xác định trên Q $\Rightarrow$ từ đó mở rộng trên các tập số rộng hơn.

3. Nghiên cứu tính đơn ánh và toàn ánh của các hàm luỹ thừa trong phương trình. Chứng minh tính chất này không phức tạp nhưng điều đó lại cho ta một kết quả quan trọng để tìm được đáp số bài toán.

4. Tìm điểm cố định hoặc giá trị 0 của các hàm: Số lượng bài toán có sử dụng phương pháp này thường ít hơn số lượng bài áp dụng ba phương pháp nói trên. Tuy nhiên trong 1 số bài toán khó, việc tìm điểm cố định và giá trị 0 lại là điểm chốt quan trọng cho lời giải hoàn hảo.

5. Sử dụng PT Cauchy và kiểu Cauchy.

6. Nghiên cứu tính đơn điệu và tính liên tục của các hàm. Các tính chất này áp dụng trong phương trình Cauchy hoặc kiểu Cauchy. Các phương trình đó nếu không có tính chất đơn điệu, liên tục thì bài toán trở lên phức tạp hơn nhiều.

7. Dự toán hàm và dùng phương pháp phản chứng để chứng minh điều dự đoán đúng.

8. Tạo nên các hệ thức truy hồi: Phương pháp này thường được sử dụng trong pt mà các hàm có tính chất bị chặn hoặc tìm được mối quan hệ giữa f(f(n)), f(n) và n … n $\in$N.

9. Miêu tả tính chất chẵn, lẻ của hàm số

10. Xét hàm trong hệ cơ số khác hệ cơ số 10 (hệ nhị phân, tam phân, …). Tất nhiên phương pháp này chỉ sử dụng khi miền xác định và miền giá trị của hàm là N (hay hàm xét trên tập số tự nhiên).

Trên đây là một vài định hướng cơ bản khi giải PT hàm. Tuy nhiên để có được lời giải tối ưu, hãy thử giải bài toán bằng tất cả các phương pháp có thể …

II/ PHƯƠNG TRÌNH CAUCHY VÀ KIỂU CAUCHY:

Phương trình có đặc trưng $f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in R$ gọi là phương trình Cauchy.

Đặc điểm của lớp phương trình này: Nếu hàm f xác định trên Q, bằng phương pháp quy nạp toán học cho ta kết quả $f(x) = xf(1), \forall x \in Q$. Bài toán được mở rộng trên R cộng thêm các tính chất cho trước của hàm ta sẽ xác định được hàm f. Tuy nhiên với mỗi tính chất khác nhau sẽ cho ta các hàm khác nhau và do vậy lời giải bài toán cũng sẽ khác nhau. Các tính chất thường được cho trong bài toán là:

+) Đơn điệu trên một khoảng (đóng; mở) thực nào đó

+) Hàm liên tục

+) Hàm bị chặn trên các khoảng (đoạn)

+) Dương với các giá trị $x \geq 0$

+) Đơn ánh, toàn ánh ….

Khi đó có thể giải được bài toán tổng quát: Tìm $f : R \to S$

Tìm $f(x+y) = f(x) + f(y)$

Tuy nhiên, trong thực tế ta thường hay gặp các phương trình mà sau khi biến đổi giả thiết sẽ được phương trình Cauchy. Lớp phương trình đó gọi là phương trình kiểu Cauchy và có thể nêu ra 1 số đặc trưng sau.

1. f liên tục thỏa mãn $f : R \to (0; +\infty)$ và $f(x+y) = f(x)\, f(y)$ là hàm có dạng $f(x) = a^x$. Khi đó $f(x) = \log f(x)$ liên tục và thỏa mãn phương trình Cauchy.

2. Mọi hàm liên tục $f: (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thoả mãn $f(xy) = f(x) + f(y)$ cho ta hàm $f(x) = \log_a x \Rightarrow g(x) = f(a^x)$ liên tục và thỏa mãn đặc trưng phương trình Cauchy.

3. Mọi hàm liên tục $f: (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thoả mãn $f(xy) = f(x).f(y)$

$\rightarrow f(x) = x^t$ với $t = \log\frac{a}{b}$ và $f(x) = b \Rightarrow g(x) = \log(f(a^x))$ là hàm liên tục và thỏa mãn phương trình Cauchy.

III/ BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI:

Dưới đây sẽ đề cập đến một số bài toán có lời giải được sử dụng những định hướng cơ bản đã nêu trên.

Bài toán 1:

Tìm tất cả các hàm f: Q → Q tìm $\begin{cases} f(x) = 2 \\ f(xy) = f(x)f(y) - f(x+y) + 1 \end{cases}$ (1)

Nhận xét: Đây là 1 lớp ví dụ sử dụng phương pháp quy nạp toán học

Lời giải:

Cho $x = 1$ và $y = n$ trong (1) ⇔ ta có:

$f(n) = 2f(n) - f(n+1) + 1 \Leftrightarrow f(n+1) = f(n) + 1 \ \forall n \in N$

$\Rightarrow \quad f(n) = n + 1 \ \forall n \in N$

+) Cho $x = 0$ và $y = n$ $\Rightarrow f(0) = f(0)(n+1) - f(n) + 1$

$\Rightarrow f(0) = f(0)(n+1) - n - 1 + 1$

$\Rightarrow nf(0) = n \qquad \forall n \in N$

$\Rightarrow f(0) = 1$

+) Với mỗi $z \in Z$, cho $x = -1$ và $y = 1$ trong (1) có $f(-1) = 0$

+) Cho $x = -1$ và $y = n$ $\Rightarrow f(-n) = -f(n-1) + 1 = -n + 1$

$\Rightarrow f(z) = z + 1$ với mỗi $z \in Z$

+) Cho $x = n$, $y = \frac{1}{n}$ ta có $f(1) = (n+1)f(\frac{1}{n}) - f(n+\frac{1}{n}) + 1$ (2)

Hơn nữa: Cho $x = 1$ và $y = m + \frac{1}{n} \Rightarrow f(m + 1 + \frac{1}{n}) = f(m + \frac{1}{n}) + 1$

Theo phương pháp quy nạp $\Rightarrow f(m + \frac{1}{n}) = m + f(\frac{1}{n})$. Từ (2) ta có

$f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + 1 \qquad \forall\ n \in N^*.$

Mặt khác: Cho x = m và y = $\frac{1}{n}$ ta có: $f(\frac{m}{n}) = \frac{m}{n} + 1$

$\Rightarrow f(r) = r + 1 \qquad \forall r \in Q^+$

+) Cho x = -1 và y = r ta có f(-r) = -f(r-1) = -f(r-1) + 1 = -r + 1

$\Rightarrow$ f(x) = x + 1 với mỗi x $\in$Q

<u>Thử lại:</u> Từ xy + 1 = (x + 1)(y + 1) – (x + y + 1) + 1

$\forall$x, y $\in$ Q $\Rightarrow$ f(x) = x + 1 là hàm số cần tìm

<u>Bài toán 2</u>: (Belarus 1997)

Tìm tất cả các hàm g: R $\rightarrow$ R sao cho với mỗi số thực x và y ta có:

g(x + y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y).

<u>Lời giải</u>:

+) g(x) ≡ 0 và g(x) ≡ 2 thỏa mãn bài ra.
+) Giả sử g(x) khác hằng số.

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được g(x) = x, $\forall$x $\in$Q.

Để chứng minh g(r + x) = r + g(x) và g(rx) = rg(x) với r $\in$Q và x $\in$R.

Từ (2) cho r = -1 $\Rightarrow$ g(-x) = -g(x) $\quad\forall$ x $\in$R $\Rightarrow$ g(x) là hàm số lẻ.

Cho y = -x vào giả thiết $\Rightarrow g^2(x) = g(x^2) \Rightarrow g(x) \geq 0\ \forall x>0$

+) Giả sử g(x) < x $\forall$ x$\in$R. Chọn r$\in$Q sao cho g(x) < r < x

$\Rightarrow$ r > g(x) = g(x - r) + r ≥ r $\qquad\Rightarrow$ Vô lý

Tương tự: Giả sử g(x > x $\forall$ $\in$R $\Rightarrow$ Vô lý.

$\Rightarrow$ g(x) = x $\forall$x$\in$R. Thử lại thỏa mãn

Vậy g(x) ≡ 0; g(x) ≡ 2 và g(x) = x thỏa mãn.

<u>Bài toán 3</u>: (BMO 1997-2000) Tìm tất cả các hàm f thỏa mãn.

$f(xf(x) + f(y)) = y + f^2(x) \quad \forall\ x, y \in R \qquad (1)$

<u>Nhận xét</u>: Đây là lớp bài chứng minh hàm số là hàm đơn ánh; toàn ánh -> sử dụng các tính chất của lớp hàm đó để khai thác bài toán.

<u>Giải</u>:

+ Cho x = 0 ; $y \in R$ => $f(f(y) = y + f^2(0)$ => dễ chứng minh được f là toàn ánh. Mặt khác f đơn ánh => $\exists$ t sao cho f(t) = 0 => cho x = 0 và y = t ta có $f(0) = t + f^2(0)$.

+ Cho x = t => f(f(y) = y với $\forall y \in R$

=> $t = f(f(t)) = f(0) = t + f^2(0)$ => f(0) = 0

Thay f(x) trong giả thiết (1) ta có $f(f(x)x + f(y) = y + x^2 \quad \forall x, y \in R$

=> $f^2(x) = x^2 \ \forall x \in R$ => $\left[\begin{array}{ll} f(x)=x & \forall x\in R \\ f(x)=-x & \forall x\in R \end{array}\right.$

Xét trường hợp 1: f(1) = -1 cho x = 1 trong (1) => f(1 + f(y)) = 1 + y

=> $(1 + y)^2 = f^2(1 + f(y)) = (1 + f(y))^2 = 1 + 2f(y) + y^2$

=> f(y) = y $\qquad \forall y \in R$

Xét trường hợp 2: f(1) = 1 cho x = -1 trong (1) => f(-1 + f(y)) = 1 + y

=> $(1 + y)^2 = f^2(-1 + f(y)) = (-1 + f(y))^2 = 1 - 2f(y) + y^2$

=> f(y) = - y $\qquad \forall y \in R$

Vậy f(x) = x và f(x) = -x, $\forall$ x; $y \in R$

<u>Bài toán 4:</u> (IMO 1979- Shortlist): Cho hàm f: $R \to R$, nếu hai số thực bất kỳ x, y thỏa mãn f (xy + x + y) = f(xy) + f(x) + f(y). CMR

f(x + y) = f(x) + f(y) $\quad \forall$ x; $y \in R$

<u>Nhận xét:</u> Sử dụng việc lựa chọn các giá trị biến phù hợp để thay vào đẳng thức hàm cần thỏa mãn.

<u>Giải</u>: Giả thiết f(xy + x + y) = f (xy) + f(x) + f(y) $\quad$ (1) $\qquad \forall (x,y) \in R$

+ Cho x = y = 0 $\quad$ (1) => f(0) = 0

+ Trong (1) cho y = -1 => f(x) = -f(-x); thay y = 1

=> f(2x + 1) = 2f(x) + f(1)

=> f (2(u + v + uv) + 1) = 2f (u + v + uv) + f(1) = 2f(uv) + 2f(u) + 2f(v) + f(1)

$\forall$ u, $v \in R$:

Mặt khác: Thay x = u và y = 2v + 1 trong (1) ta có:

$$f(2(u+ v + uv) + 1) = f(u + (2v + 1) + u(2v+1))$$
$$= f(u) + 2f(v) + f(1) + f(2uv + u)$$

Suy ra: 2f(uv) + 2f(u) + 2f(v) + f(1) = f(u) + 2f(v) + f(1) + f(2uv + u)

=> f(2uv + u) = 2f(uv) + f(u) $\qquad$ (2)

Trong (2) cho $v=-\frac{1}{2}$ => 0 = 2f$\left(-\frac{u}{2}\right)$ + f(u) = -2f $\left(\frac{u}{2}\right)$ + f(u)

Do đó f(u) = 2f $\left(\frac{u}{2}\right)$ -> f(2x) = 2f(x) $\forall$x $\in$R

Trong (2) suy ra f(2uv + u) = f(2uv) + f(u) $\forall$ u, v $\forall\in$R

Đặt u = y và x = 2uv => f(x+ y) = f(x) + f(y) $\forall$ x, y $\in$ R^*

Mặt khác: f(0) = 0 => f(x + y) = f(x) = f(x) + f(y) $\forall$ x, y $\in$ R (đpcm)

Bài toán 5: Tìm tất cả các hàm f: (0; + ∞) $\rightarrow$ (0; +∞) thoả mãn

f(f(x) + y) = xf(1 + xy) $\forall$ x, y $\in$ (0; +∞)

Giải: + Hiển nhiên f(x) = $\frac{1}{x}$ là hàm thỏa mãn bài ra, ta sẽ chứng minh hàm f thỏa mãn đk bài ra là hàm không tăng trên (0; +∞) bằng phương pháp phản chứng.

Thật vậy: giả sử với 0 < x < y ta có 0 < f(x) < f(y)

Giả sử: $z=\frac{yf(y)-xf(x)}{y-x}>f(y)$

Thay x = x và y bởi z – f(y) vào giả thiết và y bởi z – f(x)

=> x = y vô lý. Vậy f là hàm không tăng.

+ Ta chứng minh f(1) = 1. Thật vậy giả sử f(1) $\neq$ 1. Cho x = 1 vào giả thiết ta có f(f(1) + y) = f(1+y) -> f($u+|f(1)-1|$) = f(u) với u > 1

=> f(x) là hàm tuần hoàn trên (1; +∞). Do f đơn điệu tuần hoàn => f là hàm hằng. Hơn nữa theo giả thiết => Vế trái là hằng, vế phải không là hằng => vô lý. Vậy f(1) = 1.

+ Ta sẽ chứng minh f(x) = $\frac{1}{x}$ với x > 1

Cho y = $1-\frac{1}{x}$ => $f(f(x)-\frac{1}{x}+1)=x\,f(x)$

Giả sử f(x) > $\frac{1}{x}$

=> f(f(x) - $\frac{1}{x}$+1) $\leq$ f(1) và xf(x) > 1 -> vô lý

Nếu f(x) < $\frac{1}{x}$ -> f(f(x) - $\frac{1}{x}$+1) ≥ f(1) = 1 và xf(x) < 1

=> Vô lý => f(x) = $\frac{1}{x}$ với x > 1

+ Nếu x < 1, đặt y = $\frac{1}{x}$ => f(f(x) + $\frac{1}{x}$) = xf (2) = $\frac{x}{2}$

Do $\frac{1}{x}$ ≥ 1 => f(x) + $\frac{1}{x} = \frac{2}{x} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$ x < 1

Vậy f(x) = $\frac{1}{x}$ ∀ x ∈ (0; +∞)

<u>Bài toán 6:</u> (IMO 2004 - Shortlist) tìm tất cả các hàm f: R -> R

$f(x^2 + y^2 + 2f(xy)) = f^2 (x + y)$ (1)

<u>Nhận xét:</u> Lời giải bài toán dựa trên phương pháp lựa chọn biến thích hợp và đổi sang hàm mới để tìm được giá trị gốc tại O.

Giải: $\begin{cases} z = x + y \\ t = xy \end{cases}$ (Phép đặt ∃ ⇔ $4t \le z^2$)

Đặt g(x) = 2 (f(x) - x)

Từ (1) có: $f(z^2 + g(t)) = f^2(z)$ ∀ t, z, ∈ R và $4t = z^2$ (2)

Đặt c = g(0) = 2f(0) trong (2) cho t = 0 ta có:

$f(z^2 + c) = f^2 (z)$ ∀ z ∈ R (3)

+ Nếu c < 0, lấy z sao cho $z^2 + c = 0$, từ (3) có $f^2(z) = \frac{c}{2}$ vô lý => c ≥ 0

Giả sử x > c => f(x) ≥ 0 (4)

Nếu gọi là hằng số => C = 0 và f(x) = x

Giả sử g(x) không là hàm hằng, gọi a, b ∈R sao cho g(a) – g(b) = d > 0

Với K đủ lớn, với mỗi u, v ≥ K sao cho $v^2 - u^2 = d$, từ (2) (3)

=> $u^2 + g(a) = v^2 + g(b)$ => f(u) = f(v). Hơn nữa

$g(u) - g(v) = 2(v - u) = \frac{d}{u+\sqrt{u^2+d}}$

Với δ > 0, xét đoạn [δ, 2δ] sao cho g(u) – g(v) bị chặn trên bởi M > 0 với u, v ∈ [δ, 2δ]

Giả sử với x, y bất kỳ và $y > x \geq 2\sqrt{M}$; $\delta < y^2 - x^2 < 2\delta$

=> $\exists$ u, $v \leq M$ sao cho $g(u) - g(v) = y^2 - x^2$ => $x^2 + g(u) = y^2 + g(v)$

Do $x^2 \geq 4u$ và $y^2 \geq 4v$ từ (2) => $f^2(x) = f^2(y)$

Hơn nữa, không mất tính tổng quát ta giả sử $4M \geq c^2$. Từ (4) => f(x) = f(y)

Với x, $y \geq 2\sqrt{M}$, $y^2 - x^2 \in [\delta, 2\delta]$ => f(x) = k $\quad\forall x \geq N$ ($N = 2\sqrt{M}$).

Xét x > N trong (3) -> $k^2 = k$ => k = 0; 1

Theo (3) có: $f(-z) = \pm f(z)$ nên $|f(z)| \leq 1\ \forall z \leq -N$

Do đó $g(u) = 2f(u) - 2u \geq -2 - 2u\ \forall u \leq -N$

=> g là hàm không bị chặn. Do đó với mỗi $z \in Z$ sao cho $z^2 + g(t) > N$

và $f^2(z) = f(z^2 + g(t)) = k = k^2$

=> $f(z) = \pm k$ với mỗi z

+ Nếu k = 0 => f(x) = 0 (tm)

+ Nếu k = 1 -> c = 2f(0) = 2. Từ (4) => f(x) = 1 $\forall x \geq 2$

Giả sử f(t) = -1 với t < 2. Khi đó t – g(t) = 3t + 2 > 4t

Nếu $t - g(t) \geq 0$ => với $z \in R$ ta có $Z^2 = t - g(t) > 4t$

Từ (2) => $f^2(z) = f(z^2 + g(t) = f(t) = -1$ -> vô lý

=> $t - g(t) < 0$ => $t < -\frac{2}{3}$.

Mặt khác, nếu X là tập con bất kỳ của $(-\infty ; \frac{-2}{3})$

=> $\begin{cases} f(x) = -1 & x \in X \\ f(x) = 1 & x \notin X \end{cases}$

Vậy $f(x) = x\quad \forall x \in R$; $\qquad f(x) = 0 \quad \forall x \in R$

$f(x) = \begin{cases} -1, x \in X \\ 1, x \notin X \end{cases} \qquad X \subset (-\infty; \frac{-2}{3})$

<u>Bài toán 7:</u> Tìm tất cả các hàm f: $[1; +\infty) \to [1; +\infty)$ thỏa mãn

i) $f(x) \leq 2(1+x) \qquad \forall x \in [1; +\infty)$

u) $xf(x+1) = f^2(x) - 1 \quad \forall x \in [1; +\infty)$

Nhận xét: Dựa vào điều kiện hàm f cần tìm => dùng phương pháp dự đoán hàm và chứng minh bằng phương pháp sử dụng tính chất hàm bị chặn tính chất đối lập.

Giải: Dễ thấy f(x) = x + 1 thỏa mãn bài ra. Ta sẽ chứng minh f(x) = x + 1 là hàm duy nhất.

Thật vậy: Từ giả thiết -> $f^2(x) = xf(x+1) + 1 \le x\,(2(x+2) + 1 < 2\,(x+1)^2$

=> $f(x) < \sqrt{2}\,(x + 1)$ $\forall\, x \in [1; +\infty)$ => f(x) bị chặn trên. Tương tự như trên có $f^2(x) < 2^{1/4}(1 + x)^2$

Quy nạp => $f(x) < 2^{\frac{1}{2^k}}(1+x)$ $\forall\, k \in N$

Cho $2^{\frac{1}{2^k}} \to 1$ khi $k \to +\infty$. Cố định x => $f(x) \le x + 1$ $\forall\, x \ge 1$. Ta cần chứng minh $f(x) \ge x + 1$ $\forall x \ge 1$

Thật vậy: Xét $\frac{f^2(x)-1}{x} = f(x+1) \ge 1 \Rightarrow f(x) \ge \sqrt{x+1} > x^{1/2}$

Hơn nữa $f^2(x) = 1 + xf(x+1) > 1 + x\sqrt{x+2} > x^{3/2}$ và quy nạp

$f(x) > x^{1-\frac{1}{2^k}}$ => chuyển qua giới hạn -> $f(x) \ge x$

Sử dụng giả thiết => $f^2(x) = 1 + xf(x+1) \ge (x+\frac{1}{2})^2$ => $f(x) \ge x + \frac{1}{2}$

Quy nạp => $f(x) \ge x + 1 - \frac{1}{2^k}$ => $f(x) \ge x + 1$ $\forall\, x \ge 1$

Vậy f(x) = x + 1 (đpcm)

Bài toán 8: Tìm f: $N^* \to N^*$ thỏa mãn

$(f(n) + m) = n + f(m + 2007)$ $\forall\, m, n \in N^*$ (1)

Nhận xét: Bài toán này giải quyết bằng phương pháp sử dụng các tính chất của ánh xạ (đơn ánh).

Giải: Trước hết ta chứng minh f đơn ánh.

Thật vậy: Giá sử $f(n_1) = f(n_2) \Rightarrow f(f(n_1) + 1) = f(f(n_2) + 1)$

$\Rightarrow n_1 + f(1 + 2007) = n_2 + f(1 + 2007) \Rightarrow n_1 = n_2 \to$ f đơn ánh

Mặt ≠: Từ (1) ⇒ $\forall$ m, n $\in N^*$ ta có

$f(f(n)) + f(1) = n + f(f(1) + 2007)$

$\Rightarrow f(f(n) + f(1)) = n + 1 + f(2007 + 2007) = f(f(n + 1) + 2007)$

Do f đơn ánh nên ta có: $f(n) + f(1) = f(n+1) + 2007$

$\rightarrow f(n+1) - f(n) = f(1) - 2007$.

Đặt $f(1) - 2007 = a \in N^*$

Khi đó $f(n) = n.a + 2007 \Rightarrow a^2n = n \quad \forall n \in N^*$

$\Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$ (vì $a \in N^*$) $\Rightarrow f(n) = n + 2007$

Thử lại: $f(n) = n + 2007$ (thỏa mãn)

Bài toán 9: VMO-2009 (Bảng B)

Tìm $f: R \rightarrow R$ liên tục thỏa mãn $f(x-y)f(y-z)f(z-x) + 8 = 0 \ \forall x, y, z \in R$ (1)

Nhận xét: Dùng phương trình hàm Cauchy và khai thác tính chất liên tục của hàm.

Giải:

+) Cho x = t; z = -t và y = 6 ta có:

$f^2(t)f(-2t) = -8 \Rightarrow f(-2t) = \dfrac{-8}{f^2(t)} < 0 \Rightarrow f(t) < 0 \ \forall t \in R$

Đặt $g(x) = \ln\left(\dfrac{f(x)}{-2}\right) \Rightarrow f(x) = -2e^{g(x)}$. Thay vào (1) ta có

$-8e^{g(x-y) + g(y-z) + g(z-x)} = -8 \Rightarrow g(x-y) + g(y-z) + g(z-x) = 0$ (*)

+) Trong (*) cho $x = y = z = 0 \Rightarrow g(0) = 0$

Cho $y = z = 0, x \in R \Rightarrow g(x) = g(-x) \quad \forall x \in R$

Suy ra $g(x-y) + g(y-z) = -g(z-x) = g(x-y + y-z)$

$\Rightarrow g(t+t') = g(t) + g(t') \ \forall t, t' \in R$

Do f liên tục suy ra g liên tục và thỏa mãn đặc trưng hàm Cauchy.

$\Rightarrow g(x) = ax \Rightarrow g(x) = -2e^{ax} = -2b^x$ với $b = e^a > 0$

Thử lại: Thỏa mãn

Bài toán 10: (IMO 1988) Tìm $f: N^* \rightarrow N^*$ thỏa mãn

i) $f(1) = 1; f(3) = 3, f(2n) = 2n$

ii) $f(4n + 1) = 2f(2n + 1) - f(n)$

iii) $f(4n + 3) = 3f(2n + 1) - 2f(n) \quad \forall n \in N^*$

Nhận xét: Dùng phương pháp sử dụng hệ đếm. Trong bài toán này ta quy ước ghi $m = (b_i\, b_{i-1}...b_1)_k$ nghĩa là trong hệ cơ số k thì $m = b_i b_{i-1} \dots b_1$.

Giải:

+) Tính 1 số giá trị của hàm số và chuyển sang cơ số 2 ta có thể dự đoán được.

"$\forall n \in N^*$, $n = (b_i b_{i-1} \dots b_1)$ thì $f(n) = (b_i b_{i-1} \dots b_1)_2$" (*)

Ta sẽ chứng minh dự toán trên bằng phương pháp quy nạp.

+) Với n = 1, 2, 3, 4 dễ kiểm tra (*) đúng

+) Giả sử (*) đúng cho k < n, ta chứng minh (*) đúng cho n. ($n \geq 4$).

Thật vậy, xét các khả năng sau.

* Nếu n chẵn, n = 2m, giả sử $m = (b_i b_{i-1} \dots b_1)_2$ khi đó

$$n = 2m = (b_i b_{i-1} \dots b_1\, 0)_2 \Rightarrow f(n) = f((b_i b_{i-1} \dots b_1 0)_2)$$
$$= f(2m) = f((b_i b_{i-1} \dots b_1)_2) = (b_1 b_2 \dots b_i)_2$$
$$= (0 b_1 b_2 \dots b_i)_2 \Rightarrow (*) \text{ đúng}$$

* Nếu n lẻ, $n = 4m + 1$, $m = (b_i b_{i-1} \dots b_1)_2 \Rightarrow n = (b_i b_{i-1} \dots b_1 01)_2$

$$\Rightarrow f(n) = f((b_i b_{i-1} \dots b_1 01)_2) = f(4m + 1) = 2f(2m + 1) - f(m)$$
$$= 2f((b_i b_{i-1} \dots b_1 1)_2) - f((b_i b_{i-1} \dots b_1)_2)$$
$$= (10)_2 (1 b_1 b_2 \dots b_i)_2 - (b_1 b_2 \dots b_i)_2$$
$$= (10 b_1 b_2 \dots b_i)_2 \Rightarrow (*) \text{ đúng}$$

* Nếu n lẻ, n = 4m + 3, tương tự k/n 2 $\Rightarrow$ (*) đúng

Vậy (*) đúng và f là hàm thỏa mãn điều kiện (*).

BÀI TẬP THAM KHẢO

Bài 1: Tìm tất cả các hàm $f: Z^+ \to Z^+$

i) $f(0) = 1$

ii) $f(f(n)) = f(f(n + 2) + 2) = n \ \forall n \in Z^*$

Bài 2: Cho $n \in N$, tìm các hàm f đơn điệu, $f : R \to R$ thỏa mãn

$f(x + f(y)) = f(x) + y^n$

Bài 3: (BMO - 2003) Tìm $f : Q \to R$ tìm.

i) $f(x+y) - yf(x) - xf(y) = f(x)f(y) \quad -x - y + xy \quad \forall x, y \in Q$

ii) $f(x) = 2f(x+1) + 2 + x \ \forall x \in Q$

iii) $f(1) + 1 > 0$

Bài 4: IMO – Shortlist 1994. Tìm $f : R^+ \to R$ thỏa mãn

$$f(x)f(y) = y^{\alpha}f(\frac{x}{2}) + x^{\beta}f(\frac{y}{2}) \qquad x, y \in R^+$$

Bài 5: (VMO - 2005).

Tìm tất cả các giá trị α sao cho tồn tại duy nhất hàm $f : R \to R$ thỏa mãn.

$$f(x^2 + y + f(y)) = f^2(x) + \alpha y$$

Bài 6: Tìm $f : N^* \to N^*$ thỏa mãn.

i) $2f(m^2 + n^2) = f^2(m) + f^2(n)$

ii) Nếu $m \geq n$ thì $f(m^2) \geq f(n^2)$

Bài 7: Chứng minh rằng nếu hàm $f: R^+ \to R$ thỏa mãn.

$$f(\frac{x+y}{2}) + f(\frac{2xy}{x+y}) = f(x) + f(y)$$

Thì cũng thỏa mãn $2f(\sqrt{xy}) = f(x) + f(y)$

Bài 8: (IMC - 2001). Chứng minh rằng không tồn tại hàm $f : R \to R$ thỏa mãn

$f(0) > 0$ và $f(x+y) \geq f(x) + y\,f(f(x))$

Bài 9: (Trung Quốc). Tìm hàm $f : N^* \to N^*$ thỏa mãn

1) $f(1) = 1$

2) $f(2n) < 6f(n)$

3) $3f(n)\,f(2n + 1) = f(2n)(3f(n) + 1) \quad \forall n \in N^*$ (Dùng hệ đếm)

SỬ DỤNG VÉC TƠ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC

Nguyễn Thế Sinh
THPT Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương

Lời nói đầu

Trong chương trình toán ở bậc THPT, vectơ là một khái niệm quan trọng, nó có tính khái quát cao, có thể sử dụng cho cả hình phẳng lẫn hình không gian và thậm chí cả đại số. Nhờ vectơ, ta có thể đưa tọa độ vào bài toán hình học do đó tránh khỏi những sai lầm về mặt trực quan. Cũng nhờ vectơ, nhiều bài toán hình học phẳng, hình học không gian rất khó nếu chỉ giải quyết chúng bằng hình học thuần túy, nhưng lại trở nên đơn giản hơn khi ứng dụng vectơ. Chính vì vậy, nghiên cứu các ứng dụng của vectơ vào việc giải toán hình học, thậm chí cả đại số là một vấn đề khá thú vị và ý nghĩa.

Đối với vectơ, những khía cạnh đáng để quan tâm và có thể dùng để giải quyết các bài toán là khá nhiều, trong đó có việc chứng minh ba điểm thẳng hàng, ba đường thẳng đồng quy, hai đường thẳng vuông góc, hay chứng minh cũng như thiết lập các bất đẳng thức ... Nhưng trong khuôn khổ một chuyên đề nhỏ, tôi xin chỉ đề cập đến việc ứng dụng tích vô hướng của hai vectơ vào việc thiết lập và chứng minh bất dẳng thức. Đây là một vấn đề không còn mới về tổng quan và chủ yếu vẫn là khai thác các khía cạnh sau:

- Sử dụng tích vô hướng để tính khoảng cách giữa các điểm đặc biệt, cho các khoảng cách đó không âm hoặc so sánh chúng, ta được các bất đẳng thức.
- Sử dụng bình phương vô hướng của $\vec{u}$ là đại lượng không âm ($\vec{u}$ là một vectơ được chọn đặc biệt)
- Nếu $\vec{u}, \vec{v}$ là hai vectơ bất kỳ thì $\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|.\cos(\vec{u}, \vec{v})$
  Suy ra
  +) $\vec{u}.\vec{v} \leqslant |\vec{u}||\vec{v}|$
  +) $\vec{u}.\vec{v} \leqslant 0 \Leftrightarrow 90^o \leqslant (\vec{u}, \vec{v}) \leqslant 180^o$
  +) $\cos(\vec{u}, \vec{v} = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$
  từ đó thiết lập và chứng minh các bất đẳng thức

Tuy nhiên khi nhìn nó dưới những góc độ chi tiết hơn, ta vẫn có thể thu được nhiều bài toán thú vị.

1. Khai thác hệ thức Jacobi

0.0.1 Hệ thức Jacobi

Cho tam giác ABC, cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$, điểm M bên trong tam giác. Đặt:

$$x = \frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}, y = \frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta ABC}}, z = \frac{S_{\Delta MBA}}{S_{\Delta ABC}}$$

Ta có $x + y + z = 1$ và:

$$x\vec{MA} + y\vec{MB} + z\vec{MC} = \vec{0} \quad (1)$$

Đây là hệ thức quen thuộc và chứng minh nó không có gì khó khăn. Tuy nhiên từ đây ta có thể thu được rất nhiều bất đẳng thức trong tam giác khi cho M là những điểm đặc biệt cũng như khi xét mối quan hệ giữa điểm đặc biệt đó.
Trước hết, cho O là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng, ta có

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow x(\vec{MO} + \vec{OA}) + y(\vec{MO} + \vec{OB}) + z(\vec{MO} + \vec{OC}) = \vec{0}\\
&\Leftrightarrow (x + y + z)\vec{OM} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}\\
&\Longrightarrow (x + y + z)^2.OM^2 = x^2OA^2 + y^2OB^2 + z^2OC^2 +\\
&\qquad\qquad + 2xy\vec{OA}\vec{OB} + 2yz\vec{OB}\vec{OC} + 2zx\vec{OC}\vec{OA}\\
&\Leftrightarrow (x + y + z)^2.OM^2 = x^2OA^2 + y^2OB^2 + z^2OC^2 +\\
&\qquad\qquad + xy(OA^2 + OB^2 - c^2) + yz(OB^2 + OC^2 - a^2) + zx(OA^2 + OC^2 - b^2)\\
&\Leftrightarrow (x + y + z)^2.OM^2 = (x + y + z)(xOA^2 + yOB^2 + zOC^2) - (xyc^2 + yza^2 + xzb^2)\\
&\Leftrightarrow OM^2 = xOA^2 + yOB^2 + zOC^2 - (xyc^2 + yza^2 + xzb^2) \quad (2)
\end{aligned}$$

1) Chọn (O, R) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
Hệ thức (2) trở thành: $OM^2 = R^2 - (xyc^2 + yza^2 + xzb^2)$ (3).
Cho M lần lượt là các điểm đặc biệt trong tam giác, ta có các bài toán sau:

Bài toán 1 Cho tam giác ABC. Chứng minh: $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9R^2$

[Loi giai] Khi $M \equiv G$, ta có $x = y = z = \dfrac{1}{3}$ nên $OG^2 = R^2 - \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$.
Suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 2 Cho tam giác ABC. Chứng minh:

a) $R^2 \geqslant \dfrac{abc}{a+b+c}$

b) $R \geqslant 2r$

[Lời giải] Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

a) Khi $M \equiv I$, ta có :

$$x = \frac{a}{a+b+c}; y = \frac{b}{a+b+c}; z = \frac{c}{a+b+c}$$

Thay vào (3) ta có: $OI^2 = R^2 - \dfrac{abc}{a+b+c} \geqslant 0$

b) $OI^2 = R^2 - \dfrac{4RS}{2p} = R^2 - 2Rr$. Suy ra điều phải chứng minh. Ta có bài toán tương tự trong không gian:

Bài toán 2' Cho tứ diện $ABCD$ ngoại tiếp mặt cầu (I, r) và nội tiếp mặt cầu (O, R). Khi đó

$$R^2 \geqslant 9r^2 + OI^2$$

[Lời giải] Gọi S_A, S_B, S_C, S_D là diện tích các mặt BCD, ACD, ABD, ABC. Khi đó ta có

$$S_A.\vec{IA} + S_B.\vec{IB} + S_C.\vec{IC} + S_D.\vec{ID} = \vec{0}$$

Với mọi M, ta có

$$\begin{aligned} &S_A.MA^2 + S_B.MB^2 + S_C.MC^2 + S_D.MD^2 \\ &\qquad = S_A.IA^2 + S_B.IB^2 + S_C.IC^2 + S_D.ID^2 + (S_A + S_B + S_C + S_D)MI^2 \end{aligned}$$

Cho $M \equiv O$, ta có

$$(S_A + S_B + S_C + S_D)R^2 = S_A.IA^2 + S_B.IB^2 + S_C.IC^2 + S_D.ID^2 + (S_A + S_B + S_C + S_D)OI^2$$

$$\Leftrightarrow R^2 = \frac{S_A.IA^2 + S_B.IB^2 + S_C.IC^2 + S_D.ID^2}{(S_A + S_B + S_C + S_D)} + OI^2$$

Ta còn chứng minh:

$$T = \frac{S_A.IA^2 + S_B.IB^2 + S_C.IC^2 + S_D.ID^2}{(S_A + S_B + S_C + S_D)} \geqslant 9r^2$$

Thật vậy:

$$\begin{aligned} T &= \frac{(S_A.IA^2 + S_B.IB^2 + S_C.IC^2 + S_D.ID^2)(S_A + S_B + S_C + S_D)}{(S_A + S_B + S_C + S_D)^2} \\ &\geqslant \frac{(S_A.IA + S_B.IB + S_C.IC + S_D.ID)^2}{(S_A + S_B + S_C + S_D)^2} \end{aligned}$$

Nhưng $IA \geqslant h_a - r \Rightarrow S_A.IA \geqslant 3V - rS_A$
$\Rightarrow S_A.IA^2 + S_B.IB^2 + S_C.IC^2 + S_D.ID^2 \geqslant 9V = 3r(S_A + S_B + S_C + S_D)$.
Vậy $T \geqslant 9r^2$.

Ngoài ra, trong tam giác còn có một số điểm đặc biệt khác nữa (chủ yếu xét các điểm tạo ra các hệ thức dạng (1) trong đó x, y, z có quan hệ với các cạnh tam giác):

Điểm Giác-Gôn

Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Khi đó ba đường AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại một điểm J, gọi là điểm Giác-Gôn. Điểm J thỏa mãn hệ thức

$$(p-b)(p-c)\vec{JA} + (p-c)(p-a)\vec{JB} + (p-a)(p-b)\vec{JC} = \vec{0}$$

[Lời giải]

AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy là do

$$\frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}.\frac{\overline{B_1C}}{\overline{B_1A}}.\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = -\frac{p-b}{p-c}.\frac{p-c}{p-a}.\frac{p-a}{p-b} = -1$$

và định lý Cêva
Mặt khác:

$$\frac{S_{\Delta JAB}}{S_{\Delta JAC}} = \frac{p-b}{p-c}, \frac{S_{\Delta JAB}}{S_{\Delta JBC}} = \frac{p-a}{p-c}$$

nên

$$S_{\Delta JAB}(p-c) = S_{\Delta JAC}(p-b) = S_{\Delta JBC}(p-a) = T$$

Do đó

$$x = \frac{S_{\Delta JBC}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\dfrac{T}{p-a}}{\dfrac{T}{p-a} + \dfrac{T}{p-b} + \dfrac{T}{p-c}} = \frac{\dfrac{1}{p-a}}{\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c}}$$

Tương tự có

$$y = \frac{\dfrac{1}{p-b}}{\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c}}, z = \frac{\dfrac{1}{p-c}}{\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c}}$$

suy ra điều phải chứng minh.

Cho M trùng J, ta có bài toán sau:

Bài toán 3 Cho tam giác ABC. Chứng minh:
a) $R^2 \geqslant \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)}[(p-a)a^2+(p-b)b^2+(p-c)c^2]$

b)$4R^2 + Rr \geqslant \sqrt{a^2r_br_c + b^2r_ar_c + c^2r_ar_b}$

c) $\dfrac{1}{2p} \geqslant \dfrac{\sqrt{r^2+rR}}{R(r+4R)}$
trong đó r_a, r_b, r_c, r lần lượt là bán kính các đường tròn bàng tiếp và nội tiếp tam giác ABC

[Lời giải] a) Suy trực tiếp bằng cách thay x, y, z ở trên vào hệ thức

$$OM^2 = R^2 - (xyc^2 + yza^2 + xzb^2) \quad (3)$$

b) Để ý rằng nếu S là diện tích tam giác ABC thì $x = \dfrac{\dfrac{S}{p-a}}{\dfrac{S}{p-a}+\dfrac{S}{p-b}+\dfrac{S}{p-c}}$
Suy ra

$$x = \frac{r_a}{r_a+r_b+r_c}, y = \frac{r_b}{r_a+r_b+r_c}, z = \frac{r_c}{r_a+r_b+r_c}$$

Mà $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ nên

$$x = \frac{r_a}{4R+r}, y = \frac{r_b}{4R+r}, z = \frac{r_c}{4R+r}$$

Thay vào hệ thức (3) ta có:

$$R^2 \geqslant \frac{a^2r_br_c + b^2r_ar_c + c^2r_ar_b}{(4R+r)^2}$$

hay

$$4R^2 + Rr \geqslant \sqrt{a^2r_br_c + b^2r_ar_c + c^2r_ar_b}$$

c) Lại thay

$$x = \frac{\dfrac{1}{p-a}}{\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}}, y = \frac{\dfrac{1}{p-b}}{\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}}, z = \frac{\dfrac{1}{p-c}}{\dfrac{1}{p-a}+\dfrac{1}{p-b}+\dfrac{1}{p-c}}$$

vào (3) , để ý rằng $(p-a)(p-b)(p-c) = \dfrac{S^2}{p}$ và $(p-a)(p-b) + (p-b)(p-c) + (p-c)(p-a) = \dfrac{S^2}{p(p-a)} + \dfrac{S^2}{p(p-b)} + \dfrac{S^2}{p(p-c)} = r(r_a + r_b + r_c)$ $= r(4R + r)$ ta có

$$OJ^2 = R^2 - \frac{S^2}{p(r^2+4Rr)^2}[p(a^2+b^2+c^2) - (a^3+b^3+c^3)]$$

Mặt khác :
$a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)$,
mà $ab+bc+ca-p^2 = (p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a) = r(4R+r)$ nên

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr$$

Tiếp đó

$$a^3 + b^3 + c^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr)$$

Suy ra

$$\begin{aligned} OJ^2 =& R^2 - \frac{S^2}{p(r^2+4Rr)^2}(4pRr + 4pr^2) \\ =& R^2 - \frac{4p^2r}{(r+4R)^2}(R+r) \end{aligned}$$

Từ $OJ^2 \geqslant 0$ ta có

$$Rr + 4R^2 \geqslant \sqrt{4p^2r(R+r)}$$

hay

$$\frac{1}{2p} \geqslant \frac{\sqrt{r^2+rR}}{R(r+4R)}$$

Điểm Lơ-moan

Cho tam giác ABC, A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc BC, CA, AB sao cho

$$\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{c^2}{b^2}, \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{a^2}{c^2}, \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{b^2}{a^2}$$

Khi đó ba đường AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại một điểm L thỏa mãn

$$a^2\vec{LA} + b^2\vec{LB} + c^2\vec{LC} = \vec{0}$$

[Lời giải] Ba đường đồng quy do định lý Cêva.
Hệ thức cần chứng minh cũng suy ra ngay từ cách xác định các điểm A_1, B_1, C_1. Ta có:

$$x = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}, y = \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}, z = \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

và $x\vec{LA} + y\vec{LB} + z\vec{LC} = \vec{0}$

Cho M trùng L, ta được bài toán sau:

Bài toán 4 Cho tam giác ABC. Chứng minh: $R^2 \geqslant \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}$ [Lời giải] **Cách 1**
Theo bài toán 2, ta có

$$R^2 \geqslant \frac{abc}{a+b+c}$$

Mà $(a^2+b^2+c^2)^2 \geqslant 3abc(a+b+c)$ nên có điều phải chứng minh.
Cách 2
Ta có $OL^2 = R^2 \quad \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} \geqslant 0$ suy ra điều phải chứng minh. **2)** Cho $M \equiv I$-tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC
Khi đó $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$ hay

$$x = \frac{a}{a+b+c}, y = \frac{b}{a+b+c}, z = \frac{c}{a+b+c}$$

Cho O lần lượt là các điểm đặc biệt của tam giác ABC, ta có các bài toán sau::

Bài toán 5 a) $3(ab+bc+ca) \geqslant a^2+b^2+c^2+36Rr$

b) $\frac{a}{\sqrt{a^2+3bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+3ac}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+3ba}} \geqslant \frac{3}{2}$

[Lời giải] a) Cho $O \equiv G$-trọng tâm tam giác, ta có:

$$IG^2 = \frac{a}{a+b+c}GA^2 + \frac{b}{a+b+c}GB^2 + \frac{c}{a+b+c}GC^2 - \frac{abc^2+bca^2+acb^2}{(a+b+c)^2} \geqslant 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{a+b+c}\frac{4}{9}(am_a^2+bm_b^2+cm_c^2) \geqslant \frac{abc}{a+b+c}$$
$$\Leftrightarrow 4am_a^2+4bm_b^2+4cm_c^2 \geqslant 9abc$$
$$\Leftrightarrow a(2b^2+2c^2-a^2)+b(2a^2+2c^2-b^2)+c(2a^2+2b^2-c^2) \geqslant 9abc$$
$$\Leftrightarrow 2ab(a+b)+2bc(b+c)+2ca(c+a) \geqslant a^3+b^3+c^3+9abc$$
$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)(ab+bc+ca) \geqslant (a^3+b^3+c^3-3abc)+18abc$$
$$\Leftrightarrow 2(a+b+c)(ab+bc+ca) \geqslant (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+18.4RS$$
$$\Leftrightarrow 3(ab+bc+ca) \geqslant a^2+b^2+c^2+36Rr$$

b) Cũng từ

$$IG^2 = \frac{a}{a+b+c}GA^2 + \frac{b}{a+b+c}GB^2 + \frac{c}{a+b+c}GC^2 - \frac{abc^2+bca^2+acb^2}{(a+b+c)^2} \geqslant 0$$

ta có

$$2(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b) \geqslant a^3+b^3+c^3+9abc \quad (*)$$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta được

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+3bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+3ac}}+\frac{c}{\sqrt{^2+3ba}}$$
$$\geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2+3bc}+b\sqrt{b^2+3ac}+c\sqrt{c^2+3ab}}$$
$$\geqslant \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a+b+c}\sqrt{a^3+b^3+c^3+9abc}}$$

Vậy cần chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a+b+c}\sqrt{a^3+b^3+c^3+9abc}} \geqslant \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow 4(a+b+c)^3 \geqslant 9(a^3+b^3+c^3+9abc)$$
$$\Leftrightarrow 12(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b) \geqslant 5(a^3+b^3+c^3)+57abc$$

Nhưng do (*) thì

$$12(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b) \geqslant 6(a^3+b^3+c^3)+54abc \geqslant 5(a^3+b^3+c^3)+57abc$$

Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 6 Cho tam giác ABC. Chứng minh a) $4R^2 \geqslant \dfrac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}$
b) $4R^2 - 8Rr \geqslant a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$
[Lời giải] a) Cho $O \equiv H$, ta có

$$aHA^2 + bHB^2 + cHC^2 = (a+b+c)HI^2 + \frac{a^2bc+b^2ca+c^2ab}{a+b+c}$$

Chú ý rằng $HA^2 = 4R^2 - a^2, HB^2 = 4R^2 - b^2, hC^2 = 4R^2 - c^2$, ta có điều phải chứng minh. b) Vẫn cho $O \equiv H$, ta có

$$\vec{IH} = \frac{1}{a+b+c}[(b+c)\vec{OA} + (c+a)\vec{OB} + (a+b)\vec{OC}]$$

suy ra

$$\begin{aligned} IH^2 = [(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2]R^2 + (b+c)(c+a)(2R^2-c^2)+ \\ +(c+a)(a+b)(2R^2-a^2)+(b+c)(a+b)(2R^2-b^2) \geqslant 0 \end{aligned}$$
$$\Leftrightarrow 4R^2(a+b+c)^2 \geqslant (b+c)(c+a)c^2 + (c+a)(a+b)a^2 + (b+c)(a+b)b^2$$
$$\Leftrightarrow 4R^2(a+b+c) \geqslant a^3+b^3+c^3+abc$$
$$\Leftrightarrow 4R^2(a+b+c) \geqslant (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)+4abc$$
$$\Leftrightarrow 4R^2 - 8Rr \geqslant a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

*) Từ bất đẳng thức trên, thay $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca = p^2-3r^2-12Rr$, ta được:

$$4R^2 + 3r^2 + 8Rr \geqslant p^2$$

Ngoài ra, ta còn có thể chỉ ra mối quan hệ của các khoảng cách đặc biệt: OI, IG, OH, IH

Bài toán 7 Cho tam giác ABC có O, G, H, I lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp. Chứng minh
a) $OI \geqslant OG \geqslant \dfrac{IH}{2}$
b) $OI \geqslant \dfrac{IG}{\sqrt{2}}$
[Lời giải] Trước hết, ta có

$$OG^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$$

$$OI^2 = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}$$

$$IH^2 = 4R^2 - \frac{a^3+b^3+c^3+abc}{a+b+c}$$

$$IG^2 = \frac{1}{3}IH^2 + \frac{2}{3}OI^2 - 2OG^2 = \frac{2}{9}(a^2+b^2+c^2) - \frac{a^3+b^3+c^3+3abc}{3(a+b+c)}$$

a) Dễ dàng có được $(a^2+b^2+c^2)(a+b+c) \geqslant 9abc$ nên $OG \leqslant OI$.
Xét

$$4OG^2 - IH^2 = \frac{a^3+b^3+c^3+abc}{a+b+c} - \frac{4(a^2+b^2+c^2)}{9}$$

Ta cần chứng minh: $\dfrac{a^3+b^3+c^3+abc}{a+b+c} - \dfrac{4(a^2+b^2+c^2)}{9} \geqslant 0$
Thật vậy, bất đẳng thức trên tương đương với

$$5(a^3+b^3+c^3) + 9abc \geqslant 4ab(a+b) + 4bc(b+c) + 4ca(c+a)$$

Điều này suy ra từ

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geqslant ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

và

$$a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$$

Vậy ta có $OG \geqslant \dfrac{IH}{2}$
b) Dựa vào bất đẳng thức

$$a^2+b^2+c^2 \leqslant 9R^2 \text{ và } a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc$$

suy ra $IG^2 <= 2R^2 - \dfrac{2abc}{a+b+c} = 2OI^2$. Ta có điều phải chứng minh.

2. Khai thác bất đẳng thức $\vec{u}^2 \geqslant 0$

Xét vectơ $\vec{u} = x\vec{MA} + y\vec{MB} + z\vec{MC}$, ta luôn có $\vec{u}^2 \geqslant 0$. Từ đó suy ra

$$xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 \geqslant \frac{xyc^2 + yza^2 + zxb^2}{x+y+z} \quad (*)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi M là tâm tỉ cự theo bộ số x, y, z của ba điểm A, B, C.
Ta lại thu được các bài toán sau:

Bài toán 8 Cho tam giác ABC. Chứng minh:

$$aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 \geqslant abc$$

[Lời giải] Trong (*) cho $x = a, y = b, z = c$, ta có điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bài toán 8.1 Tìm điểm M trong tam giác ABC sao cho $T = MA.MB.AB + MB.MC.BC + MA.MC.AC$ nhỏ nhất. Tìm T khi đó

[Lời giải] Ta sẽ chứng minh $T \geqslant abc$. Thật vậy:
Xét $x = \dfrac{a}{MA}, y = \dfrac{b}{MB}, z = \dfrac{c}{MC}$, ta có

$$x + y + z = \frac{a}{MA} + \frac{b}{MB} + \frac{c}{MC} = \frac{a.MB.MC + b.MC.MA + c.MA.MB}{MA.MB.MC}$$

và

$$xyc^2 + yza^2 + zxb^2 = abc.\frac{c.MC + b.MB + a.MA}{MA.MB.MC}$$

Thay vào (*), ta có

$$c.MC + b.MB + a.MA \geqslant \frac{abc.(c.MC + b.MB + a.MA)}{a.MB.MC + b.MC.MA + c.MA.MB}$$

hay

$$a.MB.MC + b.MC.MA + c.MA.MB \geqslant abc$$

Tuy nhiên, nếu nhìn bài toán này theo phép nghịch đảo, ta thấy nó chỉ là hệ quả trực tiếp bài toán 8
Thật vậy:
Xét phép nghịch đảo N_M^1, giả sử phép nghịch đảo này biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$.
Ta có

$$MA' = \frac{1}{MA}, MB' = \frac{1}{MB}, MC' = \frac{1}{MC}$$

và

$$A'B' = \frac{AB}{MA.MB}, B'C' = \frac{BC}{MB.MC}, C'A' = \frac{CA}{MC.MA}$$

suy ra
$T \geqslant abc$
$\Leftrightarrow B'C'.MA'^2 + C'A'.MB'^2 + B'A'.MC'^2 \geqslant A'B'.B'C'.C'A'$
Bài toán quay trở về bài toán trên.

Bài toán 9 (Chọn đội tuyển Việt Nam đi thi quốc tế 2003)
Cho tam giác ABC. M là điểm trong tam giác. Chứng minh trong các tỉ số $\frac{MA}{a}; \frac{MB}{b}; \frac{MC}{c}$ có ít nhất một tỉ số không bé hơn $\frac{1}{\sqrt{3}}$

[Lời giải] Ta chứng minh:

$$\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c} \geqslant \sqrt{3}$$

Ta có

$$(\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c})^2 \geqslant 3(\frac{MA.MB}{ab} + \frac{MB.MC}{bc} + \frac{MC.MA}{ca})$$

Theo bài trên thì

$$(\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c})^2 \geqslant 3$$

và đây là điều phải chứng minh. Từ bài toán này, ta có một bài toán tương tự trong không gian sau:

Bài toán 9' Goi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ và S_i là diện tích các mặt đối diện các đỉnh A_i, $(i = \overline{1;4})$. M là điểm bất lỳ trong không gian. Chứng minh:

$$\frac{MA_1}{S_1} + \frac{MA_2}{S_2} + \frac{MA_3}{S_3} + \frac{MA_4}{S_4} \geqslant \frac{2\sqrt{3}}{2R}$$

[Lời giải] Đặt $A_2A_3 = a_1; A_1A_3 = a_2; A_2A_1 = a_3; A_1A_4 = b_1; A_2A_4 = b_2; A_3A_4 = b_3$.
và

$$T = \sum_{i=1}^{3}(a_i^2 + b_i^2)$$

Gọi G là trọng tâm tứ diện, m_i là độ dài các đường trọng tuyến tương ứng.
Ta có $GA_i = \frac{3}{4}m_i$.
Do đó

$$\sum_{i=1}^{4} GA_i^2 = \frac{9}{16}\sum_{i=1}^{4} m_i^2 = \frac{1}{4}T$$

(vì $9m_4^2 = 3(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(*)$ và tương tự cho m_i)
Ta chứng minh $T\sqrt{T} \geqslant 24\sqrt{3}S_im_i, i = \overline{1;4}$ (1).

Thật vậy:

$$(1) \Leftrightarrow T^3 \geqslant 24^2.3.S_i^2.m_i^2$$
$$\Leftrightarrow T \geqslant 12\sqrt[3]{S_i^2 m_i^2}$$

Mà trong tam giác 3 cạnh a, b, c diện tích S luôn có $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S$.
Ta được:

$$\begin{aligned} 3T = 9m_4^2 + 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) &\geqslant 9m_4^2 + 16\sqrt{3}S_4 \\ &= 9m_4^2 + 8\sqrt{3}S_4 + 8\sqrt{3}S_4 \\ &\geqslant 36\sqrt[3]{S_4^2.m_4^2} \end{aligned}$$

hay $T \geqslant 12\sqrt[3]{S_4^2.m_4^2}$.
Tương tự hoàn toàn, (1) được chứng minh.

Lại có:

$$\frac{MA_i}{S_i} = \frac{4MA_iGA_i}{3S_im_i} \geqslant \frac{32\sqrt{3}MA_i.GA_i}{T\sqrt{T}} \geqslant \frac{32\sqrt{3}}{T\sqrt{T}}(\vec{MG}.\vec{GA_i} + GA_i^2)$$

Cộng theo vế các bất đẳng thức thu được, ta có

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{MA_i}{S_i} \geqslant \frac{32\sqrt{3}}{T\sqrt{T}} \sum_{i=1}^{4} GA_i^2 = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{T}}$$

Nhận xét rằng $T \leqslant 16R^2$, ta có điều phải chứng minh. Từ hệ thức $(*)$ trong lời giải bài toán trên, ta có bài toán

Bài toán 10 Trong một tứ diện, đường trọng tuyến đối diện với mặt có tổng bình phương các cạnh lớn hơn thì lớn hơn [Lời giải] Kết quả này là hệ quả trực tiếp từ hệ thức $(*)$ bằng cách xét hiệu $m_i^2 - m_j^2$

Bài toán Cho tam giác ABC. M bên trong tam giác. R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh:

$$\frac{MA}{a^2} + \frac{MB}{b^2} + \frac{MC}{c^2} \geqslant \frac{1}{R}$$

[Lời giải] dd

Quay lại với bài toán , tách điểm M thành 2 điểm riêng biệt M, M' trong tam giác, ta có bài toán

Bài toán 11 Cho tam giác ABC, M, M' bên trong tam giác. Chứng minh:

$$a.MA.M'A + b.MB.M'B + c.MC.M'C \geqslant abc$$

Bài toán này không dễ giải quyết vì nó khá tổng quát , M, M' hầu như không có mối liên hệ nào. Tuy nhiên, ta có thể giải quyết một số bài toán trong các trường hợp riêng của nó

Bài toán 11.1 Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. M bên trong tam giác .Chứng minh

$$a.MA.IA + b.MB.IB + c.MC.IC \geqslant abc$$

[Lời giải] Ta có $a.MA.IA \geqslant a.\vec{MA}.\vec{IA} = a(\vec{MI}.\vec{IA} + IA^2)$
Suy ra

$$a.MA.IA+b.MB.IB+c.MC.IC \geqslant \vec{MI}(a\vec{IA}+b\vec{IB}+c\vec{IC})+aIA^2+bIB^2+cIC^2 = abc$$

Tiến gần tới bài toán tổng quát hơn một chút, ta có bài toán sau:

Bài toán 11.2 Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. M, M' bên trong tam giác sao cho $\angle MIM' \leqslant 90^o$. Chứng minh

$$a.MA.M'A + b.MB.M'B + c.MC.M'C \geqslant abc$$

[Lời giải] Ta có $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$
Suy ra

$$\vec{u} = a\vec{MA} + b\vec{MB} + c\vec{MC} = (a+b+c)\vec{MI}$$
$$\vec{v} = a\vec{M'A} + b\vec{M'B} + c\vec{M'C} = (a+b+c)\vec{M'I}$$

Mà

$$\vec{u}^2 = (aMA^2 + bMB^2 + cMC^2)(a+b+c) - abc(a+b+c)$$
$$\vec{v}^2 = (aM'A^2 + bM'B^2 + cM'C^2)(a+b+c) - abc(a+b+c)$$

nên

$$aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 = abc + \frac{1}{a+b+c}(a+b+c)^2\vec{MI}^2 = abc + (a+b+c)MI^2$$
$$aM'A^2 + bM'B^2 + cM'C^2 = abc + \frac{1}{a+b+c}(a+b+c)^2\vec{M'I}^2 = abc + (a+b+c)M'I^2$$

và

$$a.MA.M'A \geqslant a.\vec{MA}.\vec{M'A} = \frac{1}{2}(a.MA^2 + a.M'A^2 - a.M'M^2)$$
$$b.MB.M'B \geqslant a.\vec{MB}.\vec{M'B} = \frac{1}{2}(b.MB^2 + b.M'B^2 - b.M'M^2)$$
$$a.MC.M'C \geqslant a.\vec{MC}.\vec{M'C} = \frac{1}{2}(c.MC^2 + c.M'C^2 - c.M'M^2)$$

Vậy $a.MA.M'A + b.MB.M'B + a.MC.M'C$
$\geqslant \frac{1}{2}[aMA^2 + bMB^2 + cMC^2 + aM'A^2 + bM'B^2 + cM'C^2 - (a + b + c)M'M^2] \Leftrightarrow a.MA.M'A + b.MB.M'B + a.MC.M'C$
$\geqslant abc + \frac{1}{2}(a + b + c)(MI^2 + M'I^2 - M'M^2)$
Do $\angle MIM' \leqslant 90^o$ nên $MI^2 + M'I^2 - M'M^2 \geqslant 0$.
Điều này dẫn đến

$$a.MA.M'A + b.MB.M'B + c.MC.M'C \geqslant abc$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv M' \equiv I$ *) **Chú ý:**
1) Thực ra trong lời giải của hai bài toán 11.1 và 11.2 không cần đến giả thiết M, M' nằm trong tam giác ABC
2) Trong bài toán 11 trên, khi M' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có bài toán quen thuộc

$$a.MA + b.MB + c.MC \geqslant 4S$$

Điều này cho thấy có thể không cần đến giả thiết $\angle MIM' \leqslant 90^o$, có nghĩa là bài toán 11 có nhiều khả năng là một kết quả đúng.
3) Phương pháp chứng minh bài toán tổng quát hơi khác so với việc chứng minh các trường hợp đặc biệt và sẽ được đề cập ở phần sau.

3. Khai thác định nghĩa tích vô hướng

Tiếp theo ta khai thác định nghĩa tích vô hướng

$$\vec{u}.\vec{v} = |\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$$

Định nghĩa này dẫn tới một số tính chất
1) $\vec{u}.\vec{v} \leqslant |\vec{u}|.|\vec{v}|$
2) $\vec{u}.\vec{v} \geqslant 0 \Leftrightarrow \cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \geqslant 0 \Leftrightarrow (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) \leqslant 90^o$
Ta có một số bài toán sau:

Bài toán 12 Cho đường thẳng xx' và hai điểm A, B nằm về một phía của nó, $M \in xx'$. Biết rằng

$$\frac{\cos\angle AMx}{\cos\angle BMx} = \frac{b}{a}(a, b > 0)$$

Chứng minh với mọi N trên xx', ta có

$$aNA + bNB \geqslant aMA + bMB$$

[Lời giải]

Ta có

$$\begin{aligned} aNA + bNB &= \frac{a}{MA}.NA.MA + \frac{b}{MB}.NB.MB \\ &\geqslant \frac{a}{MA}.\vec{NA}.\vec{MA} + \frac{b}{MB}.\vec{NB}.\vec{MB} \\ &= aMA + bMB + \vec{NM}(a\frac{\vec{MA}}{MA} + b\frac{\vec{MB}}{MB}) \end{aligned}$$

Còn lại ta chứng minh:

$$a\frac{\vec{MA}}{MA} + b\frac{\vec{MB}}{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow a\cos(\vec{NM}, \vec{MA}) + b\cos(\vec{NM}, \vec{MB}) = 0$$

+) Nếu $N \in Mx$ thì $a\cos(\vec{NM}, \vec{MA}) + b\cos(\vec{NM}, \vec{MB}) = -a\cos\angle AMx + b\cos\angle BMx = 0$
+) Nếu $N \in Mx'$ hoàn toàn tương tự, ta cũng có $a\cos(\vec{NM}, \vec{MA}) + b\cos(\vec{NM}, \vec{MB}) = 0$.
Vậy

$$aNA + bNB \geqslant aMA + bMB$$

Bài toán 13 Cho tam giác ABC không có góc nào vượt quá 120^o. Tìm điểm M sao cho $MA + MB + MC$ nhỏ nhất. Tìm giá trị nhỏ nhất khi đó

[Lời giải]

Cho điểm X bất kỳ, ta có:

$$MA = \frac{MA.XA}{XA} \geqslant \frac{\vec{MA}.\vec{XA}}{XA} = \vec{MX}\frac{\vec{XA}}{XA} + XA$$

nên

$$MA + MB + MC \geqslant \vec{MX}\left(\frac{\vec{XA}}{XA} + \frac{\vec{XB}}{XB} + \frac{\vec{XC}}{XC}\right) + XA + XB + XC$$

Chọn X sao cho $\dfrac{\vec{XA}}{XA} + \dfrac{\vec{XB}}{XB} + \dfrac{\vec{XC}}{XC} = \vec{0}$ thì ta được

$$MA + MB + MC \geqslant XA + XB + XC$$

Còn lại là phải chỉ ra X cố định và tính $XA + XB + XC$. Đặt $\dfrac{\vec{XA}}{XA} = \vec{i}, \dfrac{\vec{XB}}{XB} = \vec{j}, \dfrac{\vec{XC}}{XC} = \vec{k}$, ta có

$$\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \vec{0}$$

suy ra $(\vec{i} + \vec{j})^2 = \vec{k}^2 \Rightarrow \cos\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} = -\dfrac{1}{2}$ hay $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} = 120^o$

Tương tự, $\widehat{(\vec{i}, \vec{k})} = 120^o$ và do đó X là điểm nhìn ba cạnh tam giác với góc 120^o (Điểm Toricelli). Rõ ràng nếu X là điểm Toricelli thì $\dfrac{\vec{XA}}{XA} + \dfrac{\vec{XB}}{XB} + \dfrac{\vec{XC}}{XC} = \vec{0}$ và X là điểm cố định.

$$(XA + XB + XC)^2 = XA^2 + XB^2 + XC^2 + 2(XA.XB + XB.XC + XC.XA)$$
$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2S\sqrt{3}$$

(vì định lý hàm số cosin và công thức tính diện tích: $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$)

Vậy $MA + MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2S\sqrt{3}}$ khi M là điểm Toricelli của tam giác. Các bài toán sau là hệ quả của bài toán về điểm Toricelli.

Bài toán 13.1 Cho tam giác ABC. M là điểm Toricelli của tam giác. Chứng minh

$$a^2.MA + b^2.MB + c^2.MC \leqslant \frac{1}{3}(MA + MB + MC)^3$$

[Lời giải] Đặt $MA = x, MB = y, MC = z$, ta có các hệ thức

$$a^2 = y^2 + yz + z^2; b^2 = z^2 + zx + x^2; c^2 = x^2 + xy + y^2$$

Khi đó ta chỉ cần chứng minh

$$(y^2+yz+z^2)x+(z^2+zx+x^2)y+(x^2+xy+y^2)z \leqslant \frac{1}{3}(x+y+z)^3$$

Điều này tương đương với

$$xy+yz+zx \leqslant x^2+y^2+z^2$$

Ta được điều phải chứng minh

Bài toán 13.2 Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=1$. Đặt

$$a=\sqrt{y^2+yz+z^2}; b=\sqrt{z^2+zx+x^2}; c=\sqrt{x^2+xy+y^2}$$

Chứng minh: $ab+bc+ca \geqslant 1$ [Lời giải] Giả sử cho điểm M bất kỳ trong mặt phẳng.
Dựng các điểm A, B, C sao cho $MA=x; MB=y; MC=z$ và $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^o$.
Khi đó MA là điểm Toricelli của tam giác ABC có ba cạnh $BC=a; CA=b; AB=c$.
Ta cần chứng minh

$$ab+bc+ca \geqslant 1 = MA+MB+MC = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2S\sqrt{3}}$$

hay

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 Œylmtbt\O ngthc\O ng$$

Bài toán 13.3 (Đề thi HSGQG Việt Nam 1998)
Tìm giá trị nhỏ nhất

$$P(x;y)=\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x+2)^2+(y+2)^2}$$

[Lời giải] Trong mặt phẳng tọa độ xOy xét điểm $M(x;y)$ và các điểm $A(-1;1); B(1;-1); C(-2;-2)$.
Ta có $\vec{AB}=(2;-2); \vec{BC}=(-3;-1); \vec{CA}=(1;3)$
Suy ra $c=AB=2\sqrt{2}; a=BC=\sqrt{10}=AC=b$ nên A, B, C là ba đỉnh một tam giác cân tại C, không có góc nào vượt quá 120^o
Bài toán trở thành: Tìm giá trị nhỏ nhất của $MA+MB+MC$.
Theo bài toán 13, ta có $MA+MB+MC \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2S\sqrt{3}}$ và dấu

bằng xảy ra khi M là điểm Toricelli của tam giác ABC nên việc còn lại là tính diện tích S của tam giác ABC.

Ta có $2S = bc.\sin A$ và $\cos A = \dfrac{\vec{AB}.\vec{AC}}{b.c} = \dfrac{4}{4\sqrt{5}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin A = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Vậy $2S = 8$ Cuối cùng, ta có $P(x;y)$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{14+8\sqrt{3}}$.

Tương tự, ta có một bài toán trong không gian sau:

Bài toán 14 Cho tứ diện $ABCD$. X là điểm trong không gian sao cho $XA+XB+XC+XD$ nhỏ nhất. Chứng minh: X nhìn các cạnh đối diện của tứ diện dưới các góc bằng nhau [Lời giải] Gọi X là điểm sao cho

$$\frac{\vec{XA}}{XA}+\frac{\vec{XB}}{XB}+\frac{\vec{XC}}{XC}+\frac{\vec{XD}}{XD}=\vec{0}$$

Khi đó $\forall M$, ta có

$$MA+MB+MC+MD \geqslant \vec{MX}\left(\frac{\vec{XA}}{XA}+\frac{\vec{XB}}{XB}+\frac{\vec{XC}}{XC}+\frac{\vec{XD}}{XD}\right)+XA+XB+XC+XD$$

suy ra

$$MA+MB+MC+MD \geqslant XA+XB+XB+XD$$

Đặt $\dfrac{\vec{XA}}{XA}=\vec{i}, \dfrac{\vec{XB}}{XB}=\vec{j}, \dfrac{\vec{XC}}{XC}=\vec{k}, \dfrac{\vec{XD}}{XD}=\vec{l}$ ta có

$$\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}+\vec{l}=\vec{0}$$

Suy ra $(\vec{i}+\vec{j})^2=(\vec{k}+\vec{l})^2 \Rightarrow \widehat{(\vec{i},\vec{j})}=\widehat{(\vec{k},\vec{l})}$ hay X nhìn AB và CD dưới những góc bằng nhau. Tương tự với các cặp cạnh đối diện còn lại. Tiếp đó là một bài toán tương tự trong phẳng

Bài toán 15 Cho tam giác ABC. Khi đó $\forall M$ ta có

$$aMB+bMC+cMA \geqslant \sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2c^2}$$

[Lời giải] Gọi X là điểm thỏa mãn

$$a\frac{\vec{XB}}{XB}+b\frac{\vec{XC}}{XC}+c\frac{\vec{XA}}{XA}=\vec{0}$$

Khi đó

$$aMB+bMC+cMA \geqslant \vec{MX}\left(a\frac{\vec{XB}}{XB}+b\frac{\vec{XC}}{XC}+c\frac{\vec{XA}}{XA}\right)+aXB+bXC+cXA$$

hay $aMA + bMB + cMC \geqslant aXB + bXC + cXA$.
Đặt $\dfrac{\vec{XB}}{XB} = \vec{i}, \dfrac{\vec{XC}}{XC} = \vec{j}, \dfrac{\vec{XA}}{XA} = \vec{k}$, ta có

$$a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} = \vec{0}$$

Mặt khác, đặt $\vec{i'} = \dfrac{\vec{BC}}{a}; \vec{j'} = \dfrac{\vec{CA}}{b}; \vec{k'} = \dfrac{\vec{AB}}{c}$, ta cũng có

$$a\vec{i'} + b\vec{j'} + c\vec{k'} = \vec{0}$$

Do đó

$$\begin{cases} (a\vec{i} + b\vec{j})^2 = c^2 \\ (a\vec{i'} + b\vec{j'})^2 = c^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + 2ab\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = c^2 \\ a^2 + b^2 + 2ab\cos(\widehat{\vec{i'}, \vec{j'}}) = c^2 \end{cases}$ Suy ra $\cos(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) = \cos(\widehat{\vec{i'}, \vec{j'}})$ hay $\angle BXC =$
$180^o - \angle BCA$
Từ đó : $\angle XBC + \angle XCB = \angle XCB + \angle XCA \Longrightarrow \angle XBC = \angle XCA$.
Hoàn toàn tương tự, ta có:

$$\angle XBC = \angle XCA = \angle XAB = \alpha$$

(X là một điểm Brôca của tam giác ABC)

Ta đi tính XA, XB, XC theo a, c, b.
Ta có

$$\begin{aligned} b^2 &= XA^2 + XC^2 - 2XA.XC.\cos\angle AMC \\ &= XA^2 + XC^2 - 2XA.XC.\cos A \end{aligned}$$

và

$$\frac{XA}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\angle AXC} = \frac{b}{\sin A}$$
$$\frac{XC}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin C} \Rightarrow \frac{XA}{XC} = \frac{bc}{a^2}$$

Suy ra:

$$b^2 = XC^2(1 + \frac{b^2c^2}{a^4} + 2\frac{bc}{a^2}\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc})$$

hay

$$XC^2 = \frac{b^2a^4}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \Rightarrow XC = \frac{a^2b}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

Tương tự

$$XA = \frac{b^2c}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}; XB = \frac{c^2a}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

Vậy $aXB + bXC + cXA = \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$
Ta có điều phải chứng minh. Từ bài toán trên, nhờ cách tính các khoảng cách từ điểm Brôca đến các đỉnh tam giác, ta có bài toán sau:

Bài toán 16 Cho tam giác ABC, $BC = a, CA = b, AB = c$. Chứng minh:

$$a^3b + b^3c + c^3a \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

[Lời giải] Trước hết, ta có nhận xét sau: Với mọi M, N trong tam giác ABC thì

$$\begin{aligned} &MA.\sin\angle BNC + MB.\sin\angle CNA + MC.\sin\angle ANB \\ &\quad \geqslant NA.\sin\angle BNC + NB.\sin\angle CNA + NC.\sin\angle ANB \end{aligned}$$

Tiếp đó cho M và N là hai điểm Brôca của tam giác, chú ý: $\angle BNC = 180^o - B; \angle CNA = 180^o - C; \angle ANB = 180^o - A$ và cách tính như bài trên, ta có điều phải chứng minh.

Từ bài toán 15 lại sinh ra một bài toán tương tự như bài toán 13.3

Bài toán 15.1 Tìm giá trị nhỏ nhất

$$P(x;y) = \sqrt{29[(x-1)^2 + (y+2)^2]} + \sqrt{29[(x-3)^2 + (y-3)^2]} + \sqrt{18[(x+2)^2 + (y-1)^2]}$$

[Lời giải] Xét trong hệ toạ độ xOy các điểm $M(x;y); A(-2;1); B(1;-2); C(3;3)$ thì bài toán trở thành: Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$a.MB + b.MC + c.MA$$

Theo bài 15 thì

$$a.MB + b.MC + c.MA \geqslant \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

và dấu bằng xảy ra khi M là điểm Brôca thỏa mãn $\angle MBC = \angle MCA = \angle MAB$ Bây giờ quay trở lại bài toán 11. Trước hết, ta có bài toán sau:

Bài toán 11.3 (Dự tuyển IMO 98)
Cho tam giác ABC. M, N là các điểm bên trong tam giác sao cho $\angle MAB = \angle NAC; \angle MBA = \angle NBC$.
Khi đó
$$\frac{MA.NA}{bc} + \frac{MB.NB}{ac} + \frac{MC.NC}{ab} = 1$$
Như vậy, bài toán trên chỉ ra điều kiện xảy ra dấu bằng trong bài toán 11 ta có lời giải bài toán 11 như sau:
[Lời giải bài toán 11] Gọi N là điểm thỏa mãn giả thiết trong bài toán trên

Đặt $\angle MAB = \angle NAC = \alpha; \angle MBA = \angle NBC = \beta$.
Theo định lý Ceva dạng sin thì $\angle MCB = \angle NCA = \gamma$.
Nhận xét rằng:
$$\frac{MA.\vec{NA}}{NA.bc} + \frac{MB.\vec{NB}}{NB.ac} + \frac{MC.\vec{NC}}{NC.ab} = \vec{0} \quad (1)$$
Thật vậy:
Ta có
$$S_{NBC}.\vec{NA} + S_{NAC}.\vec{NB} + S_{NAB}.\vec{NC} = \vec{0}$$
Ta sẽ chứng minh:
$$\frac{\frac{MA}{NA.bc}}{S_{NBC}} = \frac{\frac{MB}{NB.ac}}{S_{NAC}} = \frac{\frac{MC}{NC.ab}}{S_{NBA}}$$
Ta có:
$$\frac{MA}{NA.b.c.S_{NBC}} = \frac{MB}{NB.b.a.S_{NAC}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{MA}{MB.b.c.S_{NBC}} = \frac{NA}{NB.b.a.S_{NAC}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sin\beta}{\sin\alpha.b.c.NB.a.\sin\beta} = \frac{NA}{NB.c.a.NA.b.\sin\alpha}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}$$
Điều này luôn đúng. Vậy (1) được chứng minh.
Lại có
$$\frac{MA.M'A}{bc} = \frac{MA.M'A.NA}{NA.bc}$$
$$\geqslant \frac{MA.\vec{M'A}.\vec{NA}}{NA.bc} = \frac{MA.NA}{bc} + \vec{MM'}\frac{MA.\vec{NA}}{NA.bc}$$

Nên

$$\frac{MA.M'A}{bc}+\frac{MB.M'B}{ac}+\frac{MC.M'C}{ab}\geqslant\frac{MA.NA}{bc}+\frac{MB.NB}{ac}+\frac{MC.NC}{ab}=1$$

Bài toán được chứng minh.

Bài toán 17 Cho tam giác ABC không cân, gọi G,I,H lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh

$$\angle GIH > 90^o$$

[Lời giải] Ta đi chứng minh: $\vec{IH}.\vec{IG}=\dfrac{1}{3}(4r^2-R^2)\leqslant 0$.
Thật vậy, gọi N là trung điểm OH thì N là tâm đường tròn 9 điểm và $IN=\dfrac{R}{2}-r$.
Hơn nữa $IO^2=R^2-2Rr$ và $\vec{IH}=2\vec{IN}-\vec{IO};3\vec{IG}=2\vec{IN}+\vec{IO}$.
Vậy $3\vec{IH}\vec{IG}=(4IN^2-IO^2)$.
Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

4. Một vài bất đẳng thức đại số chứng minh bằng tích vô hướng

Bài toán 18 Cho $x_i;y_i(i:=\overline{1,n})$ thỏa mãn

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i=0$$

Chứng minh rằng

$$\sqrt{2\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+y_i^2)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i^2+y_i^2}$$

[Lời giải] Xét các điểm $A_i(x_i;y_i)$. Do

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i=0$$

nên

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{OA_i}=\vec{0}\ \ (1)$$

Hơn nữa $OA_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$.
Từ (1), ta có

$$\sum_{i=1}^{n} OA_i^2 = -2\sum_{i<j} \vec{OA_i}.\vec{OA_j} \leqslant 2\sum_{i<j} OA_i.OA_j$$

Suy ra

$$2\sum_{i=1}^{n} OA_i^2 \leqslant (\sum_{i=1}^{n} OA_i)^2$$

Đây là điều phải chứng minh.

*) Bài toán này có thể phát biểu theo cách khác như sau:
Cho đa giác trong mặt phẳng có n cạnh là $a_1; a_2; \ldots; a_n$. Chứng minh rằng

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 > 2(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)$$

Đây là bài toán tổng quát của bài toán: Trong tam giác ABC cạnh a, b, c thì $2(ab + bc + ca) > a^2 + b^2 + c^2$
*) Trong bài toán trên, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi với mọi i, j, góc giữa $\vec{OA_i}$ và $\vec{OA_j}$ là 180^o. Điều này không xảy ra nên ta có bất đẳng thức thực sự.

Bài toán 19 (Mathlink) Cho 6 số thực a, b, c, x, y, z thỏa mãn

$$(a + b + c)(x + y + z) = 3; (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 4$$

Chứng minh: $ax + by + cz \geqslant 0$ [Lời giải] Trong hệ tọa độ $Oxyz$ xét các vectơ

$$\vec{u} = (a, b, c); \vec{x_1} = \vec{OX_1} = (x, y, z); \vec{x_2} = \vec{OX_2} = (y, z, x); \vec{x_3} = \vec{OX_3} = (z, x, y)$$

và gọi α_i là góc giữa vectơ $\vec{x_i}$ và $\vec{u}$.
Ta có: $|\vec{x_i}|.|\vec{u}| = 2$ và

$$3 = (a = b + c)(x + y + z) = (\vec{x_1} + \vec{x_2} + \vec{x_3})\vec{u} = \vec{x_1}\vec{u} + \vec{x_2}\vec{u} + \vec{x_3}\vec{u}$$

hay

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 = \frac{3}{2}$$

Hơn nữa: $ax + by + cz = \vec{x_1}\vec{u}$. Vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\alpha_1 \leqslant 90^o$. Để chứng minh, ta xét bổ đề sau:

Bổ đề: Cho ba vectơ trong không gian có độ dài bằng nhau và các góc tạo bởi hai trong ba vectơ đó đều bằng nhau. Xét một vectơ $\vec{u}$ mà góc tạo bởi vectơ đó với ba vectơ đã cho là $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ thỏa mãn $\alpha_1 > 90^o$. Khi đó

$$\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 < \frac{3}{2}$$

[Chứng minh]

Gọi ϕ là góc giữa các vectơ $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}$ đã cho.
Giả sử

$$\vec{x_1} = (0;0;1); \vec{x_2} = (m, n, \cos\phi); \vec{x_3} = (m', n', \cos\phi)$$

với

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = \sin^2\phi \\ m'^2 + n'^2 = \sin^2\phi \\ mm' + nn' = \cos\phi - \cos^2\phi \end{cases}$$

Giả sử $\vec{u} = (p, q, r)$, $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = 1$. Ta có

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cos\alpha_3 &= r + pm + qn + r\cos\phi + pm' + qn' + r\cos\phi \\ &= r + p(m + m') + q(n + n') + r(2\cos\phi + 1) = A \end{aligned}$$

Do $\cos\alpha_1 = r < 0$ nên
+) Nếu $\phi \geqslant 90^o$ thì $\cos\phi < 0$. Khi đó

$$A^2 \leqslant (p^2 + q^2 + r^2)[(m + m')^2 + (n + n')^2 + 4\cos^2\phi] = 2 + 2\cos\phi \leqslant 2$$

+) Nếu $\phi < 90^o$ thì $\cos\phi > 0$. Khi đó $A < p(m + m') + q(n + n')$ nên

$$A^2 < (p^2 + q^2)[(m + m')^2 + (n + n')^2] \leqslant \sqrt{2(1 + \cos\phi - \cos^2\phi)} < \frac{3}{2}$$

Bổ đề chứng minh xong.
Bài toán trên là hệ quả trực tiếp của bổ đề này. *) Ngoài bất đẳng thức thu được, ta còn có một loạt các bất đẳng thức tương tự

$$ay + bx + cz \geqslant 0; ay + bz + cx \geqslant 0; ax + bz + cy \geqslant 0; az + bx + cy \geqslant 0; az + by + cx \geqslant 0$$

Phụ lục

0.0.2 P1. (Dự tuyển IMO 98)

Cho tam giác ABC. M, N là các điểm bên trong tam giác sao cho $\angle MAB = \angle NAC; \angle MBA = \angle NBC$.
Khi đó
$$\frac{MA.NA}{bc} + \frac{MB.NB}{ac} + \frac{MC.NC}{ab} = 1$$
[Lời giải] Trên tia đối của tia NB lấy K sao cho $\angle BCK = \angle BMA$. Khi đó do $\angle MBA = \angle KBC$, ta có hai tam giác BMA và BCK đồng dạng.
Suy ra
$$\frac{CK}{AM} = \frac{BC}{BM}$$
hay
$$CK = \frac{AM.BC}{BM} \quad (1)$$
.

Hơn nữa
$$\frac{BK}{BA} = \frac{BC}{BM}, \angle ABK = \angle MBC$$
nên
$$\Delta ABK \sim \Delta MBC$$
và do đó
$$\frac{AK}{AB} = \frac{CM}{BM}; \frac{BK}{AB} = \frac{BC}{BM}$$
hay $AK = \dfrac{AB.CM}{BM}; BK = \dfrac{AB.BC}{BM}$ (2) Mặt khác, $\angle CKB = \angle MAB = \angle NAC$ nên tứ giác $ANCK$ nội tiếp. Theo định lý Ptoleme, ta có
$$AC.NK = AN.CK + CN.AK \Leftrightarrow AC(BK - BN) = AN.CK + CN.AK \quad (3)$$
Thay (1), (2) vào (3) ta có
$$AC(\frac{AB.BC}{BM} - BN) = AN.\frac{AM.BC}{BM} + CN.\frac{AB.CM}{BM}$$
hay
$$\frac{MA.NA}{bc} + \frac{MB.NB}{ac} + \frac{MC.NC}{ab} = 1$$

0.0.3 P2

Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c và diện tích S. Chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 (1)$$

[Lời giải] Ta có

$$\begin{aligned}
&(1) \Leftrightarrow 2(ab+bc+ca) \geqslant 4\sqrt{3}S + a^2 + b^2 + c^2\\
&\quad \Leftrightarrow 4S(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}) \geqslant 4\sqrt{3}S + 4S(\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C)\\
&\quad \Leftrightarrow (\frac{1}{\sin A} - \text{cotg}A) + (\frac{1}{\sin B} - \text{cotg}B) + (\frac{1}{\sin C} - \text{cotg}C) \geqslant \sqrt{3}\\
&\quad \Leftrightarrow \frac{1-\cos A}{\sin A} + \frac{1-\cos B}{\sin B} + \frac{1-\cos C}{\sin C} \geqslant \sqrt{3}\\
&\quad \Leftrightarrow \text{tg}(\frac{A}{2}) + \text{tg}(\frac{B}{2}) + \text{tg}(\frac{C}{2}) \geqslant \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Đây là bài toán quen thuộc.

0.0.4 P3 (Định lý Ceva dạng sin)

Cho tam giác ABC. Điểm M, N, P thuộc các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh : AM, BN, CP đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{\sin MAB}{\sin MAC} . \frac{\sin NBC}{\sin NBA} . \frac{\sin PCA}{\sin PCB} = 1$$

[Lời giải] Trước hết ta chứng minh bổ đề: Cho 4 góc $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ thỏa mãn:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \alpha' + \beta' < 180^o \\ \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{\sin\alpha'}{\sin\beta'} \end{cases}.$$

Khi đó $\alpha = \alpha'; \beta = \beta'$.

[Chứng minh] Dựng tam giác ABC có $A = \alpha + \beta = \alpha' + \beta'$.
Lấy M, M' trên BC sao cho

$$\begin{cases} \angle BAM = \alpha; \angle CAM = \beta \\ \angle BAM' = \alpha'; \angle CAM' = \beta' \end{cases}.$$

Ta có

$$\frac{MB}{MC} = \frac{S_{AMB}}{S_{AMC}} = \frac{AM.AB.\sin\alpha}{AM.AC.\sin\beta} = \frac{AM'.AB.\sin\alpha'}{AM'.AC.\sin\beta'} = \frac{M'B}{M'C}$$

Suy ra $M \equiv M'$ hay $\alpha = \alpha'; \beta = \beta'$

Trở lại bài toán chính, nếu AM, BN, CP đồng quy tại O thì

$\frac{\sin MAB}{\sin MAC} . \frac{\sin NBC}{\sin NBA} . \frac{\sin PCA}{\sin PCB} = \frac{\sin OAB}{\sin OBA} . \frac{\sin OBC}{\sin OCB} . \frac{\sin OCA}{\sin OAC} = \frac{OB}{OA} . \frac{OC}{OB} . \frac{OA}{OC} = 1$

Ngược lại, giả sử có

$$\frac{\sin MAB}{\sin MAC} . \frac{\sin NBC}{\sin NBA} . \frac{\sin PCA}{\sin PCB} = 1$$

và AM cắt BN tại O, theo phần trước,

$$\frac{\sin OAB}{\sin OAC} . \frac{\sin NBC}{\sin NBA} . \frac{\sin PCA}{\sin PCB} = 1$$

Suy ra $\frac{\sin MAB}{\sin MAC} = \frac{\sin OAB}{\sin OAC}$. Theo bổ đề thì $O \in AM$.

MỘT SỐ ĐIỂM ĐỒNG QUY ĐẶC BIỆT CỦA TAM GIÁC

Lê Đức Thịnh
THPT Chuyên Trần Phú – Hải Phòng

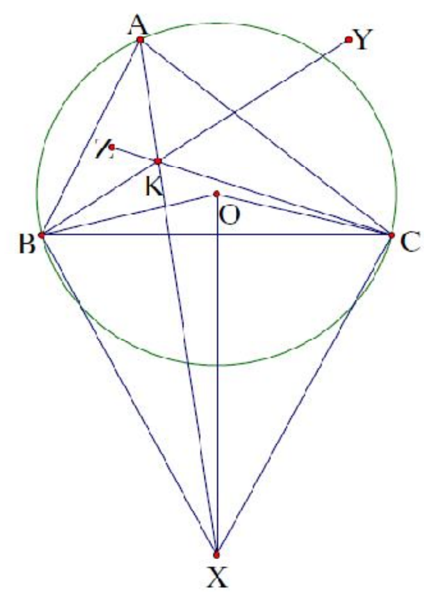
§1. ĐIỂM KOSNITA

Định lý 1:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi X, Y, Z lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BOC, COA, AOB. Khi đó các đường thẳng AX, BY, CZ đồng quy tại một điểm K gọi là điểm Kosnita của tam giác ABC.

Chứng minh:

Ta có:



$$(BO,BA)=\frac{\pi}{2}+\frac{(OB,OA)}{2}=\frac{\pi}{2}-C$$

$$(BX,BO)=(OB,OX)=\frac{(OB,OC)}{2}=A$$

$$>(BX,BA)=(BX,BO)+(BO,BA)=\frac{\pi}{2}-C+A$$

Tương tự:

$$(CA,CX)=\frac{\pi}{2}-B+A$$

$$\Rightarrow\frac{\sin(AB,AX)}{\sin(AX,AC)}=\frac{\frac{BX}{AX}\cdot\sin(BX,BA)}{\frac{XC}{AX}\cdot\sin(CA,CX)}$$

$$=\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}-C+A\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{2}-B+A\right]}=\frac{\cos(A-C)}{\cos(A-B)}$$

Tương tự:

$$\frac{\sin(BC,BY)}{\sin(BY,BA)}=\frac{\cos(B-A)}{\cos(B-C)},\frac{\sin(CA,CZ)}{\sin(CZ,CB)}=\frac{\cos(C-B)}{\cos(C-A)}$$

Nên:

$$\frac{\sin(AB,AX)}{\sin(AX,AC)}\cdot\frac{\sin(BC,BY)}{\sin(BY,BA)}\cdot\frac{\sin(CA,CZ)}{\sin(CZ,CB)}=\frac{\cos(A-C)}{\cos(A-B)}\cdot\frac{\cos(B-A)}{\cos(B-C)}\cdot\frac{\cos(C-B)}{\cos(C-A)}=1$$

Theo định lý Ceva sin ta có AX, BY, CZ đồng quy tại một điểm K.

<u>Định nghĩa:</u>

Cho tam giác ABC và một điểm M tùy ý. Gọi a, b, c lần lượt là đối xứng của các đường thẳng AM, BM, CM qua các đường phân giác trong của góc A, B, C. Khi đó a, b, c đồng quy tại một điểm M' gọi là liên hợp đẳng giác của M đối với tam giác ABC.

Việc chứng minh kết quả trên là hoàn toàn đơn giản. Ta chỉ cần áp dụng định lý Ceva sin là sẽ thu được khẳng định của bài toán.

Với định nghĩa như vậy thì ta sẽ có tính chất sau của điểm Kosnita:

<u>Định lý 2:</u>

Điểm Kosnita K của tam giác ABC là liên hợp đẳng giác với tâm I của đường tròn Euler của tam giác đó.

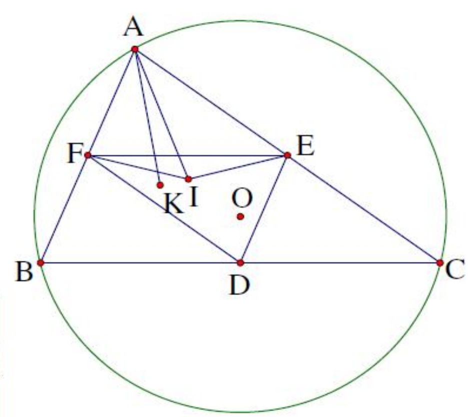
<u>Chứng minh:</u>

Ta có:

$$\frac{\sin(AB,AI)}{\sin(AI,AC)}=\frac{\sin(AF,AI)}{\sin(AI,AE)}=\frac{\frac{FI}{AI}\cdot\sin(FI,FA)}{\frac{EI}{AI}\cdot\sin(EA,EI)}$$

$$=\frac{\sin(FI,FA)}{\sin(EA,EI)}=\frac{\sin\left[(FI,FE)+(FE,FA)\right]}{\sin\left[(EA,EF)+(EF,EI)\right]}$$

$$=\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}+\frac{(IF,IE)}{2}+B\right]}{\sin\left[C+\frac{\pi}{2}+\frac{(IF,IE)}{2}\right]}=\frac{\sin\left[B+\frac{\pi}{2}+(DF,DE)\right]}{\sin\left[C+\frac{\pi}{2}+(DF,DE)\right]}$$



$$=\frac{\sin\left(B+\frac{\pi}{2}-A\right)}{\sin\left(C+\frac{\pi}{2}-A\right)}=\frac{\cos(A-B)}{\cos(A-C)}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin(AB,AI)}{\sin(AI,AC)}=\frac{\sin(AB,AK)}{\sin(AK,AC)}$$

Và:

$$(AB,AI)+(AI,AC)=A=(AB,AK)+(AK,AC)\Rightarrow\begin{cases}(AB,AI)=(AB,AK)\\(AI,AC)=(AK,AC)\end{cases}$$

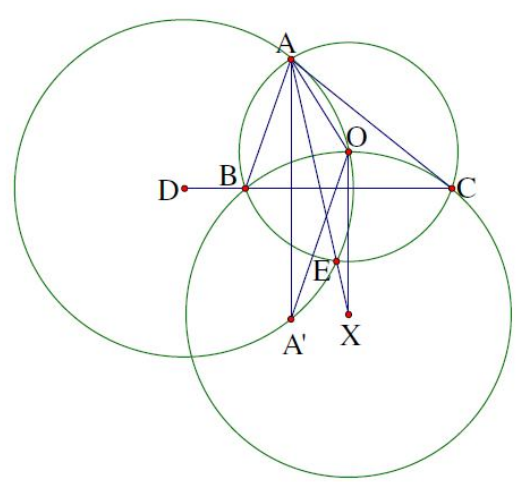
Vậy K là liên hợp đẳng giác của I đối với tam giác ABC.

Định lý sau mang tính chuẩn bị cho kết quả chính mà tôi sẽ trình bày ngay sau đây:

Định lý 3:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và X là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC. Gọi A' là điểm đối xứng của A qua BC. Gọi E là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AOA' và đường tròn (O). Khi đó A, E, X thẳng hàng.

Chứng minh:



Gọi D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AOA'.

Ta có:

$$X\in AE\Leftrightarrow \mathscr{P}_{X/(O)}=\mathscr{P}_{X/(D)}$$
$$\Leftrightarrow XO^2-R^2=XD^2-DO^2$$
$$\Leftrightarrow DO^2-R^2=XD^2-XO^2$$
$$\Leftrightarrow \mathscr{P}_{D/(O)}=\mathscr{P}_{D/(X)}\Leftrightarrow D\in BC$$

Điều kiện cuối hiển nhiên đúng.

Vậy A, E, X thẳng hàng.

Tương tự điểm A' ta cũng định nghĩa các điểm B' là đối xứng của B qua CA, C' là đối xứng của C qua AB. Kết hợp định lý 1 và định lý 3 ta có ngay kết quả sau:

Hệ quả:

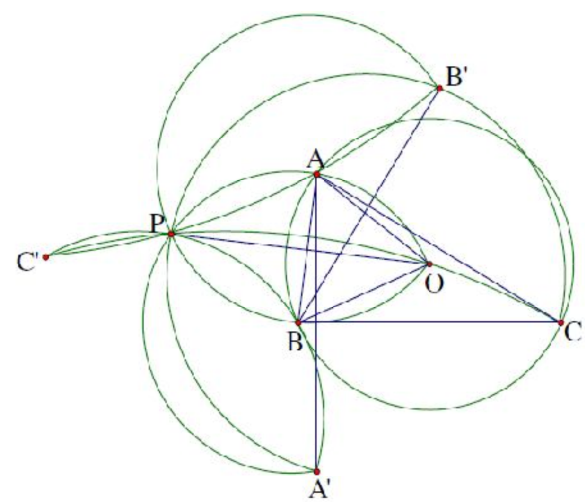
Điểm Kosnita K là tâm đẳng phương của 4 đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AOA', BOB' và COC'.

Hệ quả này là điều rõ ràng. Bên cạnh đó ta còn có một kết quả có thể coi là kinh điển như sau:

Định lý 4:

Sáu đường tròn ngoại tiếp các tam giác AOA', BOB', COC', AB'C', BC'A', CA'B' cùng đi qua một điểm P là ảnh của điểm Kosnita K qua phép nghịch đảo đường tròn (O).

Chứng minh:



Theo định lý 3 ta có ảnh của AX, BY, CZ qua phép nghịch đảo đường tròn (O) lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AOA', BOB', COC'.

Theo định lý 1 AX, BY, CZ đồng quy tại K, do đó các đường tròn (AOA'), (BOB'), (COC') đồng quy tại P là ảnh của K qua phép nghịch đảo đường tròn (O).

Ta chứng minh (AB'C'), (BC'A'), (CA'B') cũng đi qua P.

Thật vậy:

$$\begin{aligned}
&(A'P,B'P)=(A'P,OP)+(OP,B'P)\\
&=(A'A,OA)+(OB,B'B)\\
&=(A'A,AB)+(AB,OA)+(OB,AB)+(AB,B'B)\\
&=\frac{\pi}{2}+(BC,AB)+\frac{\pi}{2}+(BC,AC)+\frac{\pi}{2}+(BC,AC)+\frac{\pi}{2}+(AB,AC)\\
&=3(BC,AC)=(A'C,B'C)\ \ (\text{Do }\ (A'C,BC)=(BC,AC)=(AC,B'C))\\
&\Rightarrow (A'P,B'P)=(A'C,B'C)
\end{aligned}$$

Do đó (CA'B') đi qua P.

Tương tự suy ra sáu đường tròn (AOA'), (BOB'), (COC'), (AB'C'), (BC'A'), (CA'B') cùng đi qua P.

Định lý 4 ta vừa đưa ra nếu chỉ dừng lại ở dạng phát biểu là 3 đường tròn (AOA'), (BOB'), (COC') đồng quy và cũng không đưa ra tính chất của điểm đồng quy thì cũng có thể đưa ra một lời giải khác bằng cách chỉ ra 3 tâm của 3 đường tròn này thẳng hàng. Chi tiết của phép chứng minh này xin dành cho bạn đọc.

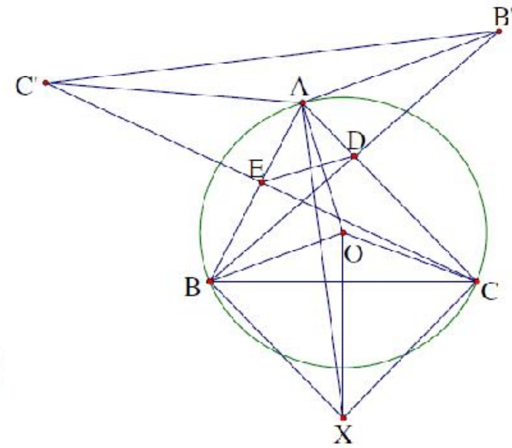
Ta còn có một số tính chất khác liên quan đến điểm Kosnita N như sau:

Định lý 5:

AK vuông góc với B'C', BK vuông góc với C'A', CK vuông góc với B'C'.

Chứng minh:

Do D, E lần lượt là trung điểm của BB' và CC' nên:



$\overrightarrow{B'C'} = 2\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OX}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AX}.\overrightarrow{B'C'} = \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OX}\right).\left(2\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{BC}\right)$

$= 2\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{OX}.\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{OX}.\overrightarrow{BC}$

Mà $OX \perp BC$ và $AO \perp DE$ (dễ dàng chứng minh được điều này)

$\Rightarrow \overrightarrow{AX}.\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{OX}.\overrightarrow{DE}$

$= AO.BC.\cos\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BC}\right) + 2OX.DE.\cos\left(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{DE}\right)$

$= \dfrac{BC}{2\sin A}.BC.\cos\left[\left(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{DE}\right) + \left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{BC}\right)\right]$

$+ \dfrac{BC}{\sin(OB, OC)} \cdot BC.\sin(CD, CE).\cos\left[\left(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DE}\right)\right]$

$= \dfrac{BC^2}{2\sin A} \cdot \left\{\cos\left[\dfrac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{BC}\right)\right] + \cos\left[\dfrac{\pi}{2} - \left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{BC}\right)\right]\right\} = 0$

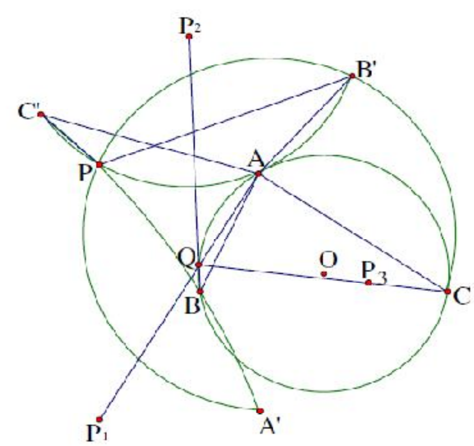
$\Rightarrow AX \perp B'C' \Rightarrow AK \perp B'C'$

Tương tự ta có điều phải chứng minh.

<u>Định lý 6:</u>

Gọi P_1, P_2, P_3 lần lượt là điểm đối xứng của P qua các cạnh BC, CA, AB. Khi đó AP_1, BP_2, CP_3 đồng quy tại một điểm Q nằm trên (O) gọi là điểm Gibert của tam giác ABC.

<u>Chứng minh:</u>



Ta có:

$(AB, BP_2) = (AB', B'P)$ (đối xứng qua AC)

$= (AC', C'P)$ (A, B', C', P đồng viên)

$= (AC, CP_3)$ (đối xứng qua AB)

$\Rightarrow (AB, BP_2) = (AC, CP_3)$

Do đó nếu $AP_1 \cap CP_3 = Q$ thì Q nằm trên (O).

Tương tự suy ra AP_1, BP_2, CP_3 đồng quy tại một điểm Q nằm trên (O).

Định lý trên đây nêu lên mối quan hệ giữa ảnh của điểm Kosnita K qua phép nghịch đảo đường tròn (O) với điểm Gibert Q của tam giác ABC. Thực ra giữa điểm Kosnita K và điểm Gibert Q còn có mối quan hệ gần gũi hơn nữa được thể hiện qua định lý sau:

<u>Định lý 7:</u>

Tâm đường tròn Euler I, điểm Kosnita K và điểm Gibert Q thẳng hàng.

Định lý 7 ở trên và các tính chất tôi đưa ra sau đây xin được coi như những bài tập để các bạn rèn luyện và tìm hiểu thêm:

<u>Bài 1:</u>

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Khi đó tam giác A'B'C' là ảnh của tam giác pedal của tâm đường tròn Euler I qua phép vị tự tâm G tỉ số 4.
(Tam giác pedal của điểm M bất kỳ là tam giác tạo bởi 3 chân đường vuông góc hạ từ điểm M xuống 3 cạnh tam giác)

<u>Bài 2:</u>

Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A'B'C' là đối xứng của tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC qua điểm Kosnita K của tam giác đó.

<u>Bài 3:</u>

Gọi $A_1 = OA' \cap B'C', B_1 = OB' \cap C'A', C_1 = OC' \cap A'B'$.

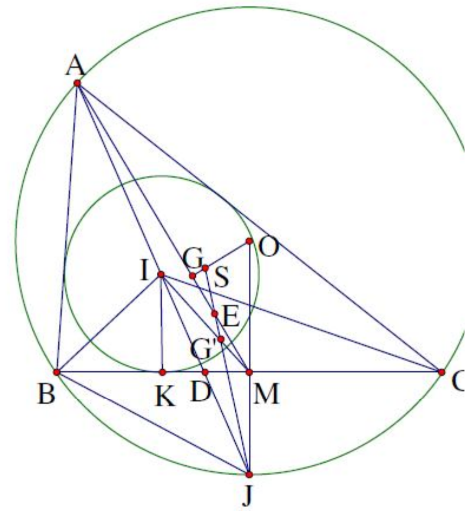
Khi đó AA_1, BB_1, CC_1 *đồng quy tại điểm liên hợp đẳng giác của P.*

§2. ĐIỂM SCHIFFLER

Bài toán 1:

Tam giác ABC với tâm đường tròn nội tiếp I. Khi đó 4 đường thẳng Euler của các tam giác BIC, CIA, AIB, ABC đồng quy tại một điểm S gọi là điểm Schiffler của tam giác.

Chứng minh:



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, G là trọng tâm tam giác, M là trung điểm BC, G' là trọng tâm tam giác BIC, AI cắt BC tại D, cắt (O) tại J, (I) tiếp xúc BC tại K, JG' cắt OG tại S, cắt AM tại E.

Rõ ràng J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Do đó JG' là đường thẳng Euler của tam giác BIC.

Theo Menelaus cho tam giác GOM với cát tuyến SJE ta có:

$$\frac{SG}{SO}\cdot\frac{JO}{JM}\cdot\frac{EM}{EG}=1\Rightarrow\frac{SG}{SO}=\frac{JM}{JO}\cdot\frac{EG}{EM}=\frac{JM}{R}\cdot\frac{EG}{EM}$$

Theo Menelaus cho tam giác IAM với cát tuyến JEG' ta có:

$$\frac{JI}{JA}\cdot\frac{EA}{EM}\cdot\frac{G'M}{G'I}=1\Rightarrow\frac{EA}{EM}=2\cdot\frac{JA}{JI}=2\cdot\frac{JA}{JB}=2\cdot\frac{JB}{JD}=2\cdot\frac{JI}{JD}(\text{do } JI^2=JB^2=JA.JD)$$

$$\Rightarrow\frac{EG}{EM}=\frac{GM}{EM}-1=\frac{1}{3}\cdot\frac{AM}{EM}-1=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{EA}{EM}+1\right)-1=\frac{1}{3}\cdot\frac{EA}{EM}-\frac{2}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{JI}{JD}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{ID}{JD}=\frac{2}{3}\cdot\frac{IK}{JM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{r}{JM}$$

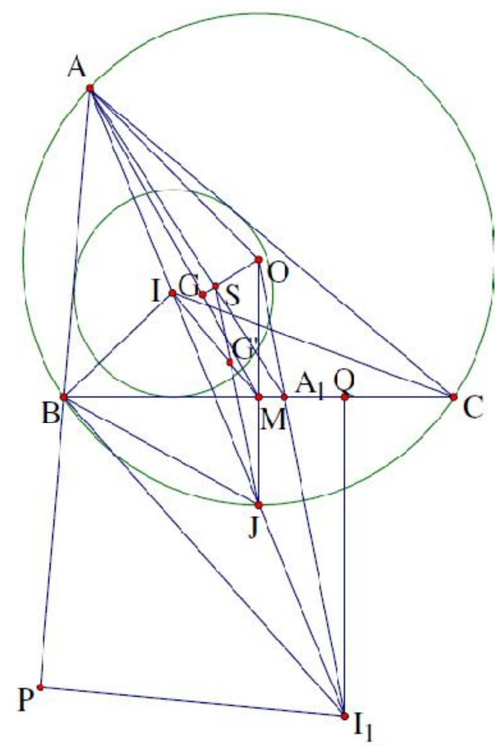
$$\Rightarrow\frac{SG}{SO}=\frac{JM}{R}\cdot\frac{EG}{EM}=\frac{JM}{R}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{r}{JM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{r}{R}$$

Tương tự các đường thẳng Euler của tam giác CIA, AIB cũng cắt OG tại S.

Một tính chất khác của điểm Schiffler được mô tả trong bài toán sau:

Bài toán 2:

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và I_1, I_2, I_3 lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp góc A, B, C của tam giác. Gọi $A_1 = OI_1 \cap BC, B_1 = OI_2 \cap CA$ và $C_1 = OI_3 \cap AB$. Khi đó AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm Schiffler S của tam giác ABC.



Chứng minh:

Ta chứng minh A, S, A_1 thẳng hàng. Thật vậy:

$$\frac{\sin(JA, JG')}{\sin(JG', JO)} \cdot \frac{\sin(OJ, OG)}{\sin(OG, OA)} \cdot \frac{\sin(AO, AA_1)}{\sin(AA_1, AJ)}$$

$$\frac{\sin(JI, JG')}{\sin(JG', JM)} \cdot \frac{\sin(OM, OG)}{\sin(OG, OA)} \cdot \frac{\sin(AO, AA_1)}{\sin(AA_1, AI_1)}$$

$$= \frac{\dfrac{2\overline{S_{JIG'}}}{IJ.JG'}}{\dfrac{2\overline{S_{JGM'}}}{MJ.JG'}} \cdot \frac{\dfrac{2\overline{S_{OMG}}}{MO.OG}}{\dfrac{2\overline{S_{OGA}}}{AO.OG}} \cdot \frac{\dfrac{2\overline{S_{AOA_1}}}{OA.AA_1}}{\dfrac{2\overline{S_{AA_1I_1}}}{I_1A.AA_1}}$$

$$= \frac{2MJ}{IJ} \cdot \frac{AO}{2MO} \cdot \frac{OA_1}{I_1A_1} \cdot \frac{I_1A}{OA}$$

$$= \frac{2MJ}{BJ} \cdot \frac{BO}{2MO} \cdot \frac{OM}{I_1P} \cdot \frac{I_1P}{OA\sin\frac{A}{2}} = 2\sin\frac{A}{2} \cdot \frac{1}{2\sin\frac{A}{2}} = 1$$

Do đó theo định lý Ceva sin trong tam giác AOJ ta suy ra AA_1, OG, JG' đồng quy.

Tức là AA_1 đi qua S.

Tương tự ta có AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại S.

Như vậy tổng hợp 2 bài toán trên ta thu được *điểm Schiffler S của tam giác là điểm đồng quy của 7 đường thẳng gồm có: 4 đường thẳng Euler của các tam giác BIC, CIA, AIB, ABC và 3 đường thẳng* AA_1, BB_1, CC_1.

Bây giờ ta hãy theo dõi một cách mô tả khác của điểm Schiffler được nêu trong bài toán thứ ba dưới đây:

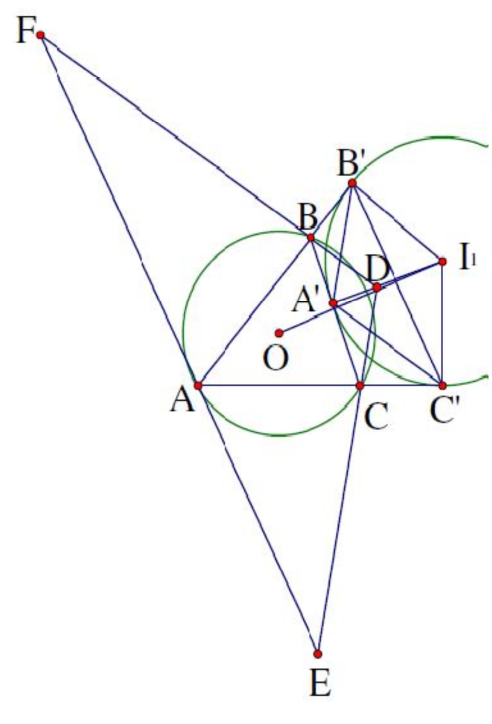
Bài toán 3:

Giả sử đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC tiếp xúc với các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C'. Gọi A" là đối xứng của A' qua B'C'. Tương tự ta định nghĩa điểm B", C". Khi đó AA", BB", CC" đồng quy tại điểm Schiffler S của tam giác ABC.

Chứng minh:

Bổ đề 1:

OI_1 là đường thẳng Euler của tam giác A'B'C'.



CM: Dựng các đường thẳng qua A và song song B'C', qua B và song song C'A', qua C và song song A' B'. Các đường này cắt nhau tạo ra tam giác DEF. Ta có:

$AI_1 \perp B'C' \Rightarrow AI_1 \perp EF$

$BI_1 \perp A'B' \Rightarrow BI_1 \perp DE$

Do đó I_1 là trực tâm tam giác DEF.

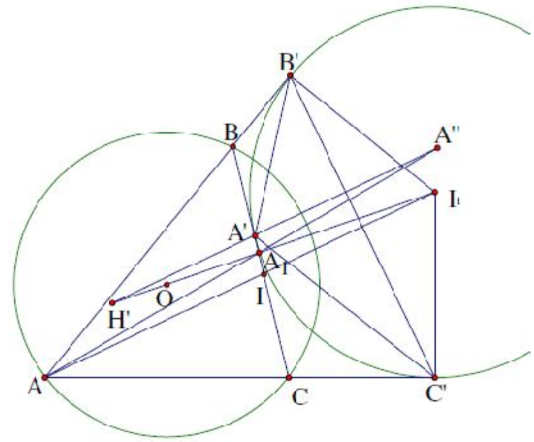
Suy ra O là tâm đường tròn Euler của tam giác DEF.

Nên OI_1 là đường thẳng Euler của tam giác DEF.

Mà đường thẳng Euler của hai tam giác A'B'C' và DEF cùng phương nên OI_1 cũng là đường thẳng Euler của tam giác A'B'C'.

<u>Bổ đề 2:</u>

A, A_1, A'' *thẳng hàng.*



<u>CM:</u> Theo bổ đề 1: gọi $H' = OI_1 \cap A'A''$ thì H' là trực tâm tam giác A'B'C'.

Gọi I là chân đường phân giác hạ từ A xuống BC. Ta có:

$$\frac{II_1}{IA} = \frac{r_a}{h_a} = \frac{a}{b+c-a} \quad (1)$$

Mặt khác:

$$\frac{A'H'}{A'A''} = \frac{A'H'.B'C'}{A'A''.B'C'} = \frac{-2r_a.\cos A'.2r_a.\sin A'}{4S_{A'B'C'}}$$

$$= \frac{-2r_a^2.\sin 2A'}{8r_a^2.\sin A'.\sin B'.\sin C'} = \frac{-\sin 2A'}{\sin 2A' + \sin 2B' + \sin 2C'}$$

Hơn nữa lại có:

$$B' = \widehat{A'C'A} = \frac{C}{2}, C' = \widehat{A'B'A} = \frac{B}{2}$$

$$\Rightarrow A' = 180^0 - B' - C' = 90^0 + \frac{A}{2}$$

Do đó:

$$\frac{A'H'}{A'A''} = \frac{\sin A}{-\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a}{b+c-a} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{II_1}{IA} = \frac{A'H'}{A'A''} \Rightarrow A, A_1, A''$ thẳng hàng.

<u>Áp dung:</u> Rõ ràng theo bổ đề 2 và bài toán 2 thì bài toán 3 được chứng minh.

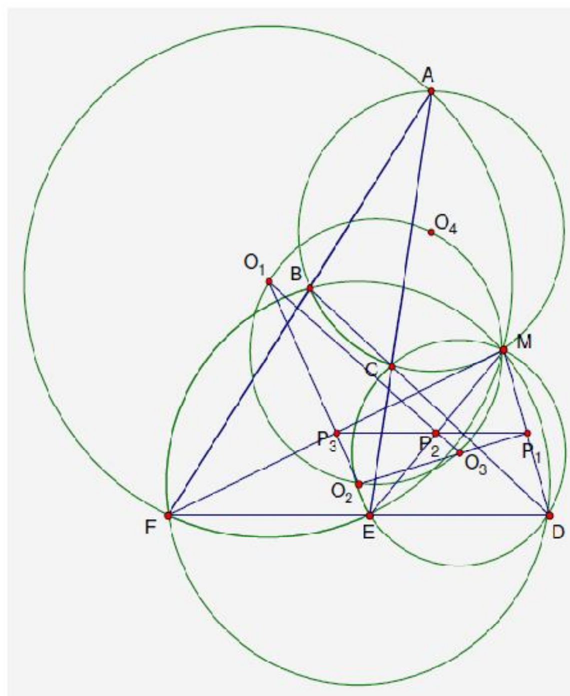
§3. ĐIỂM MIQUEL

Định lý 1:

Cho tam giác ABC với các điểm D, E, F lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB sao cho D, E, F thẳng hàng. Khi đó các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AEF, BFD, CDE đồng quy tại một điểm M gọi là điểm Miquel của tam giác.

Chứng minh:

Giả sử các các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, AEF cắt nhau tại M. Ta chứng minh các đường tròn còn lại cũng đi qua M.



Thật vậy:

$(MA, MC) = (BA, BC)$

$(ME, MA) = (FE, FA)$

$\Rightarrow (ME, MC) = (BA, BC) + (FE, FA)$

$\Rightarrow (ME, MC) = (FA, BD) + (FD, FA)$

$= (FD, BD) = (DE, DC)$

Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE cũng đi qua M.

Tương tự ta có điều cần chứng minh.

Định lý 2:

Các tâm của các đường tròn trên và điểm Miquel M cùng nằm trên một đường tròn.

Chứng minh:

Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEF, BFD, CDE, ABC. Ta chứng minh O_1, O_2, O_3, M cùng nằm trên một đường tròn.

Thật vậy:

Hạ P_1, P_2, P_3 lần lượt là chân đường vuông góc từ M xuống O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2.

Khi đó rõ ràng P_1, P_2, P_3 lần lượt là trung điểm MD, ME, MF.

Do đó P_1, P_2, P_3 thẳng hàng.

Theo định lý về đường thẳng Simson (đảo) ta có: O_1, O_2, O_3, M cùng nằm trên một đường tròn.

Tương tự suy ra O_1, O_2, O_3, O_4, M cùng nằm trên một đường tròn.

Định lý 3:

Các chân đường vuông góc hạ từ M xuống các đường thẳng ABF, ACE, BCD, DEF cùng nằm trên một đường thẳng d_1.

Kết quả này khá hiển nhiên khi ta sử dụng đường thẳng Simson cho điểm M với 2 trong 4 tam giác ABC, AEF, BFD, CDE.

Định lý 4:

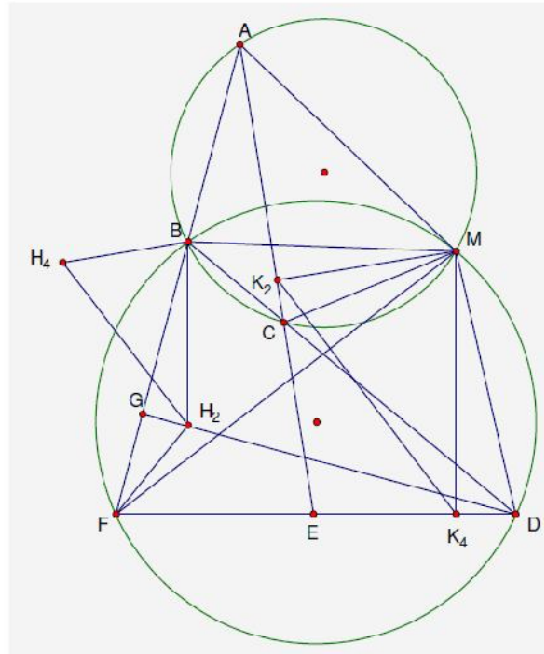
Các trực tâm của 4 tam giác trên cùng nằm trên một đường thẳng d_2 (đường thẳng Steiner).

Định lý 5:

Hai đường thẳng d_1, d_2 song song.

Chứng minh: (cả hai định lý 4, 5)

Gọi $H_1, H_2, H_3, H_4; K_1, K_2, K_3, K_4$ lần lượt là trực tâm của các tam giác nói trên và chân các đường vuông góc hạ từ M xuống các đường thẳng trong định lý 3.



Ta chứng minh: $H_2H_4 // K_2K_4$. Thật vậy:

Gọi $DH_2 \cap BF = G$, ta có:

$$BH_2 = \frac{BG}{\left|\cos\widehat{FBH_2}\right|} = \frac{BD\left|\cos\widehat{DBF}\right|}{\sin\widehat{BFD}}$$

$$= \frac{FD\left|\cos\widehat{DBF}\right|}{\sin\widehat{DBF}} = FD\left|\cot\widehat{DBF}\right|$$

Tương tự với tam giác ABC ta có:

$$BH_4 = AC\left|\cot\widehat{ABC}\right| = AC\left|\cot\widehat{DBF}\right|$$

Do đó: $\dfrac{BH_2}{BH_4} = \dfrac{FD}{AC}$

Mà xét hai tam giác MDF và MCA ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(MF, MD) = (BF, BD) = (BA, BC) = (MA, MC) \\ (DM, DF) = (BM, BF) = (BM, BA) = (CM, CA)\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MDF \sim \Delta MCA \Rightarrow \frac{FD}{AC} = \frac{MK_4}{MK_2}$$

Xét hai tam giác BH_2H_4, MK_4K_2 ta có:

$$\frac{BH_2}{BH_4} = \frac{MK_4}{MK_2}$$

$(BH_4, BH_2) = (MK_2, MK_4)$ (do $BH_4 // MK_2, BH_2 // MK_4$)

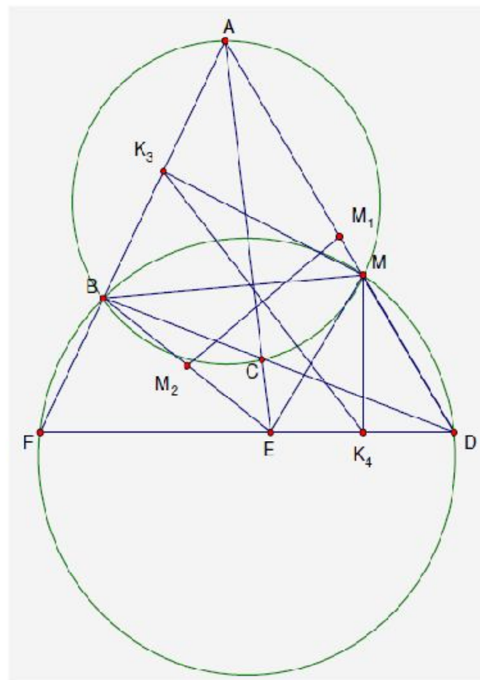
Do đó $\Delta BH_2H_4 \sim \Delta MK_4K_2 \Rightarrow H_2H_4 // K_4K_2$ (do $BH_4 // MK_2, BH_2 // MK_4$)

Tương tự suy ra H_1, H_2, H_3, H_4 thẳng hàng trên d_2 và $d_1 // d_2$.

<u>Định lý 6:</u>

Các trung điểm của các đoạn thẳng AD, BE, CF cùng nằm trên một đường thẳng d_3 (đường thẳng Newton - Gauss).

Định lý 6 là một kết quả rất nổi tiếng và có nhiều cách chứng minh khác nhau. Ở đây ta còn có một kết quả nữa xoay quanh đường thẳng này được trình bày trong định lý 7 dưới đây. Kết hợp các định lý này ta có một cách chứng minh khác khá thú vị cho cả hai.



<u>Định lý 7:</u>

Đường thẳng Newton - Gauss vuông góc với đường thẳng Steiner.

<u>Chứng minh:</u> (cả hai định lý 6, 7)

Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BE, CF . Ta có:

$$2\overrightarrow{M_1M_2}.\overrightarrow{K_3K_4} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE}\right)\left(\overrightarrow{MK_4} - \overrightarrow{MK_3}\right)$$

$$= AB.MK_4 + DE.MK_4 - AB.MK_3 - DE.MK_3$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MK_4} - \overrightarrow{DE}.\overrightarrow{MK_3}$$

$$= AB.MK_4.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MK_4}\right) - DE.MK_3.\cos\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{MK_3}\right)$$

$$= \left(AB.MK_4 - DE.MK_3\right).\cos\left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{MK_3}\right)$$

$$\left(\text{Do } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{MK_4}\right) = \left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{MK_3}\right) : AB \perp MK_3, DE \perp MK_4\right)$$

$$= 0$$

$$\left(\text{Do } \left.\begin{matrix} (DM, DE) = (BM, BA) \\ (ED, EM) = (AB, AM) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta MDE \sim \Delta MBA \Rightarrow \frac{MK_4}{DE} = \frac{MK_3}{AB}\right)$$

Do đó $M_1M_2 \perp K_3K_4$.

Tương tự ta có M_1, M_2, M_3 thẳng hàng trên $d_3 \perp d_1, d_2$.

Dưới đây là một số kết quả thú vị khác nữa mà bản thân tác giả bài viết này cũng chưa thực sự hoàn thiện được cách chứng minh tốt nhất cho chúng! Rất mong nhận được sự giúp sức của các bạn!

Định lý 8:

16 điểm gồm các tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp các tam giác ABC, AEF, BFD, CDE tạo thành 8 bộ 4 điểm trong đó mỗi bộ 4 điểm này nằm trên một đường tròn khác nhau (1 điểm có thể nằm trên nhiều đường tròn khác nhau).

Định lý 9:

8 đường tròn kể trên chia thành hai nhóm trong đó mỗi đường tròn thuộc nhóm này đều trực giao với tất cả đường tròn thuộc nhóm kia. Các tâm của các đường tròn thuộc cùng một nhóm nằm trên một đường thẳng khác nhau. Ngoài ra hai đường thẳng này vuông góc với nhau tại điểm Miquel M.

§4. VÀI PHÁT HIỆN NHỎ

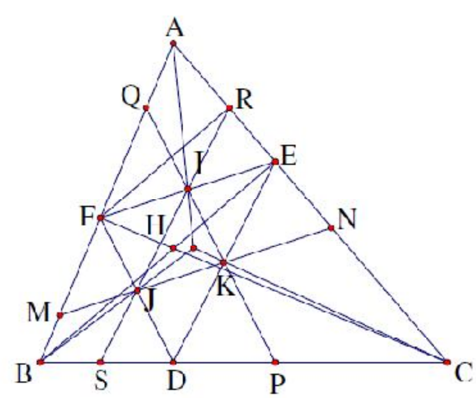
Phần cuối chuyên đề này tác giả xin gửi tới các bạn một vài mệnh đề khá thú vị về đồng quy mà tác giả đã vô tình phát hiện ra trong quá trình tìm tòi, sáng tạo toán học. Trong phạm vi hiểu biết của mình, tác giả cho rằng rất có thể đó không phải là các khẳng định mới (có lẽ sẽ thật là "ngây thơ" khi nghĩ rằng bản thân đã tìm ra những kết quả mới mẻ), mà chỉ là các kết quả đã được đề cập đến từ trước. Nếu độc giả nào có thêm thông tin xin vui lòng cung cấp cho tác giả. Tác giả xin chân thành cảm ơn!

Mệnh đề 1:

Cho tam giác ABC, các đường cao AD, BE, CF. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc hạ từ D xuống AB, AC; P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc hạ từ E xuống BC, BA; R, S lần lượt là hình chiếu vuông góc hạ từ F xuống CA, CB. Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của PQ và RS, RS và MN, MN và PQ.

Khi đó: AI, BJ, CK đồng quy.

Chứng minh:



Xét phép vị tự $V_O^{\frac{CF}{CH}}: E \mapsto R, D \mapsto S \Rightarrow DE//RS$

Giả sử $RS \cap EF = I'$ ta có:

$(I'E, I'R) = (ED, EC) = B = (ER, EI')$

(Do hai tứ giác ABDE, BCEF nội tiếp)

Xét ΔEFR vuông ở R có:

$(I'E, I'R) = (ER, EI') \Leftrightarrow I'R = I'E$

Suy ra I' là trung điểm EF.

Tương tự PQ cũng đi qua trung điểm EF.

Hay $I \equiv I'$ là trung điểm EF.

Tương tự J, K cũng là trung điểm FD, DE.

Ta có:

$$\frac{\sin(AB,AI)}{\sin(AI,AC)}\cdot\frac{\sin(BC,BJ)}{\sin(BJ,BA)}\cdot\frac{\sin(CA,CK)}{\sin(CK,CB)}=\frac{\sin(AF,AI)}{\sin(AI,AE)}\cdot\frac{\sin(BD,BJ)}{\sin(BJ,BF)}\cdot\frac{\sin(CE,CK)}{\sin(CK,CD)}$$

$$=\frac{\frac{2\overline{S_{AFI}}}{AI.AF}}{\frac{2\overline{S_{AIE}}}{AI.AE}}\cdot\frac{\frac{2\overline{S_{BDJ}}}{BJ.BD}}{\frac{2\overline{S_{BJF}}}{BJ.BF}}\cdot\frac{\frac{2\overline{S_{CEK}}}{CK.CE}}{\frac{2\overline{S_{CKD}}}{CK.CD}}=\frac{AE}{AF}\cdot\frac{BF}{BD}\cdot\frac{CD}{CE}$$

$$\left(\overline{S_{AFI}}=\overline{S_{AIE}},\overline{S_{BDJ}}=\overline{S_{BJF}},\overline{S_{CEK}}=\overline{S_{CKD}}\right)$$

$$=\frac{AE}{CE}\cdot\frac{BF}{AF}\cdot\frac{CD}{BD}=1$$ (Áp dụng định lý Ceva cho AD, BE, CF đồng quy)

Vậy theo định lý Ceva sin ta có AI, BJ, CK đồng quy.

Ghi chú: Ở trên sáu điểm M, N, P, Q, R, S cùng thuộc một đường tròn gọi là đường tròn Adam.

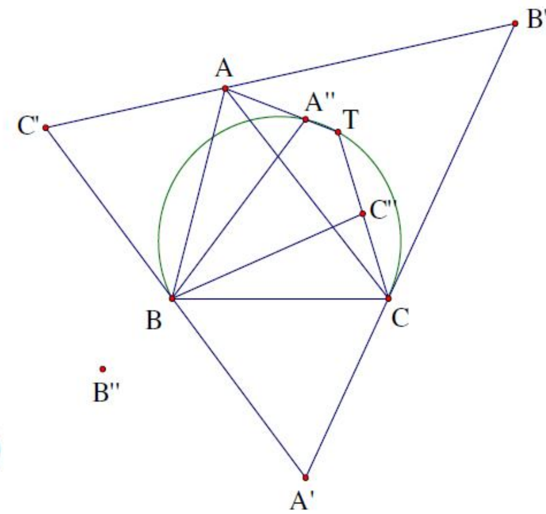
Mệnh đề 2:

Tam giác ABC với A', B', C' là tâm các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C tương ứng. Gọi A", B", C" lần lượt là điểm đối xứng của A', B', C' qua BC, CA, AB tương ứng. Khi đó ba đường thẳng AA", BB", CC" cùng với ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác BA"C, CB"A, AC"B cùng đi qua một điểm.

Chứng minh:

Gọi $AA"\cap(BA"C)=T$. Xét hai tam giác ABA", C"BC ta có:

$$(BC",BA)=(BA,BC')=(BA',BC)=(BC,BA")$$
$$\Rightarrow(BA",BA)=(BC,BC")$$



$$\frac{AB}{A"B} = \frac{AB}{A'B} = \frac{C'B}{CB} = \frac{C"B}{CB}$$

($\Delta ABC'$, $\Delta A'BC$ đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{AB}{A'B} = \dfrac{C'B}{CB}$)

Do đó $(A"A, A"B) = (CC", CB)$.

Mà :

$(A"A, A"B) = (CT, CB) \Leftrightarrow (CC", CB) = (CT, CB)$

Tức là CC" đi qua T.

Tương tự suy ra AA", BB", CC" đồng quy tại T.

Tương tự nếu $BB" \cap (CB"A) = T'$ thì AA", BB", CC" đồng quy tại T'.

Do đó $T \equiv T'$.

Hay ba đường thẳng AA", BB", CC" cùng với ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác BA"C, CB"A, AC"B cùng đi qua T.

<u>Mệnh đề 3:</u>

Tam giác ABC, các điểm D, E, F trên các cạnh BC, CA, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy, các điểm M, N, P trên các cạnh EF, FD, DE sao cho DM, EN, FP đồng quy. Khi đó AM, BN, CP cũng đồng quy.

<u>Chứng minh:</u>

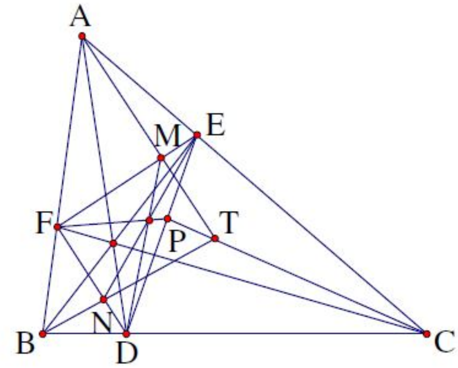
Ta có:

$$\frac{\sin(AB, AM)}{\sin(AM, AC)} = \frac{\sin(AF, AM)}{\sin(AE, AC)} = \frac{\dfrac{FM.\sin(MA, MF)}{FA}}{\dfrac{EM.\sin(ME, MA)}{EA}} = \frac{FM}{EM} \cdot \frac{EA}{FA}$$

Tương tự ta có:

$$\frac{\sin(BC, BN)}{\sin(BN, BA)} = \frac{DN}{FN} \cdot \frac{FB}{DB}, \frac{\sin(CA, CP)}{\sin(CP, CB)} = \frac{EP}{DP} \cdot \frac{DC}{EC}$$

Do đó:



$$\frac{\sin(AB,AM)}{\sin(AM,AC)}\cdot\frac{\sin(BC,BN)}{\sin(BN,BA)}\cdot\frac{\sin(CA,CP)}{\sin(CP,CB)}$$
$$=\frac{FM}{EM}\cdot\frac{EA}{FA}\cdot\frac{DN}{FN}\cdot\frac{FB}{DB}\cdot\frac{EP}{DP}\cdot\frac{DC}{EC}$$
$$=\left(\frac{CD}{BD}\cdot\frac{AE}{CE}\cdot\frac{BF}{AF}\right)\left(\frac{FM}{EM}\cdot\frac{DN}{FN}\cdot\frac{EP}{DP}\right)=1$$

(Theo Ceva cho tam giác ABC với AD, BE, CF đồng quy và tam giác DEF với DM, EN, FP đồng quy)

Vậy theo Ceva dạng lượng giác ta có AM, BN, CP đồng quy.

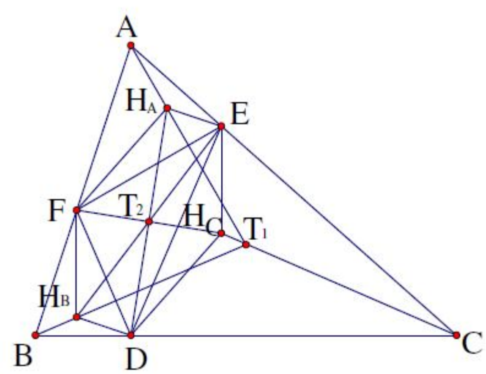
<u>Mệnh đề 4:</u>

Tam giác ABC với các đường cao AD, BE, CF. Gọi H_A, H_B, H_C là trực tâm các tam giác AEF, BFD, CDE. Khi đó:

a) AH_A, BH_B, CH_C đồng quy.

b) DH_A, EH_B, FH_C đồng quy.

<u>Chứng minh:</u>



a) Ta có:

$$\frac{\sin(AB,AH_A)}{\sin(AH_A,AC)}=\frac{\sin(AF,AH_A)}{\sin(AH_A,AE)}$$
$$=\frac{\sin\left[(FA,FE)+\frac{\pi}{2}\right]}{\sin\left[(EF,EA)+\frac{\pi}{2}\right]}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-C\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)}=\frac{\cos C}{\cos B}$$

Tương tự:

$$\frac{\sin(BC,BH_B)}{\sin(BH_B,BA)}=\frac{\cos A}{\cos C},\frac{\sin(CA,CH_C)}{\sin(CH_C,CB)}=\frac{\cos B}{\cos A}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin(AB,AH_A)}{\sin(AH_A,AC)}\cdot\frac{\sin(BC,BH_B)}{\sin(BH_B,BA)}\cdot\frac{\sin(CA,CH_C)}{\sin(CH_C,CB)}=\frac{\cos C}{\cos B}\cdot\frac{\cos A}{\cos C}\cdot\frac{\cos B}{\cos A}=1$$

Vậy theo Ceva sin ta có AH_A, BH_B, CH_C đồng quy.

b) Ta có:

$FH_B \perp BC, EH_C \perp BC \Rightarrow FH_B // EH_C$

Mà trong tam giác ABC trực tâm H ta có $HA = 2R\left|\cos A\right|$ nên:

$$\frac{FH_B}{EH_C} = \frac{2R_{\Delta BFD}\left|\cos\widehat{BFD}\right|}{2R_{\Delta CDE}\left|\cos\widehat{CED}\right|} = \frac{\dfrac{BD}{\sin\widehat{BFD}}\cdot\left|\cos\widehat{BFD}\right|}{\dfrac{CD}{\sin\widehat{CED}}\cdot\left|\cos\widehat{BED}\right|} = \frac{BD\left|\cot\widehat{BFD}\right|}{CD\left|\cot\widehat{BED}\right|} = \frac{AD\left|\cot B.\cot C\right|}{AD\left|\cot C.\cot B\right|} = 1$$

$\Rightarrow FH_B = EH_C$

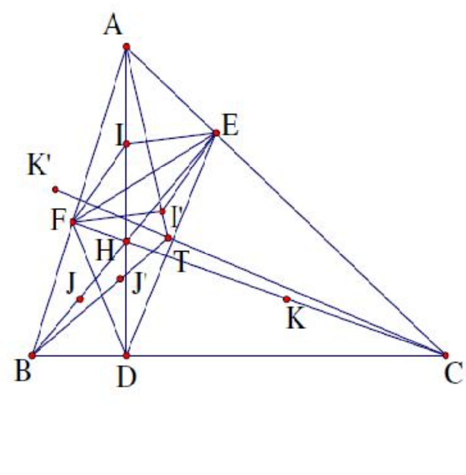
Do đó EFH_BH_C là hình bình hành, hay EH_B, FH_C cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Tương tự suy ra DH_A, EH_B, FH_C đồng quy tại trung điểm mỗi đường.

Mệnh đề 5:

Tam giác ABC với các đường cao AD, BE, CF và trực tâm H. I, J, K là trung điểm HA, HB, HC. I', J', K' là đối xứng của I, J, K qua EF, FD, DE. Khi đó AI', BJ', CK' đồng quy.

Chứng minh:



Ta có: $IE = IA = IH = IF \Rightarrow IEI'F$ là hình thoi.

$$(EI, EF) = (FE, FI) = (EF, EI') = (FI', FE)$$
$$= \frac{\pi}{2} + \frac{(IE, IF)}{2} = \frac{\pi}{2} - A$$
$$\Rightarrow \begin{cases} (FI', FA) = (FI', FE) + (FE, FA) = \dfrac{\pi}{2} - A + C \\ (EA, EI') = (EA, EF) + (EF, EI') = \dfrac{\pi}{2} - A + B \end{cases}$$

Do đó:

$$\frac{\sin(AB, AI')}{\sin(AI', AC)} = \frac{\sin(AF, AI')}{\sin(AI', AE)} = \frac{\dfrac{FI'.\sin(FI', FA)}{AI'}}{\dfrac{EI'.\sin(EA, EI')}{AI'}} = \frac{\sin(FI', FA)}{\sin(EA, EI')} = \frac{\cos(A-C)}{\cos(A-B)}$$

Tương tự:

$$\frac{\sin(BC, BJ')}{\sin(BJ', BA)} = \frac{\cos(B-A)}{\cos(B-C)}, \frac{\sin(CA, CK')}{\sin(CK', CB)} = \frac{\cos(C-B)}{\cos(C-A)}$$

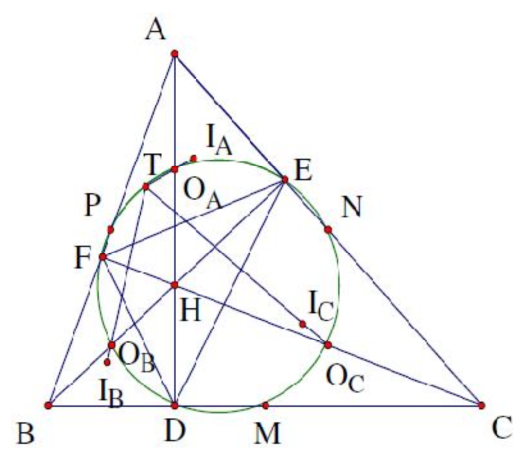
$$\Rightarrow \frac{\sin(AB, AI')}{\sin(AI', AC)} \cdot \frac{\sin(BC, BJ')}{\sin(BJ', BA)} \cdot \frac{\sin(CA, CK')}{\sin(CK', CB)} = \frac{\cos(A-C)}{\cos(A-B)} \cdot \frac{\cos(B-A)}{\cos(B-C)} \cdot \frac{\cos(C-B)}{\cos(C-A)} = 1$$

Do đó theo Ceva sin ta có AI’, BJ’, CK’ đồng quy.

Mệnh đề 6:

Tam giác ABC với các đường cao AD, BE, CF. Gọi O_A, I_A, O_B, I_B, O_C, I_C là tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp các tam giác AEF, BFD, CDE. Khi đó: O_AI_A, O_BI_B, O_CI_C đồng quy tại một điểm nằm trên đường tròn Euler của tam giác.

Chứng minh:



Gọi M, N, P là trung điểm các cạnh tam giác.

Khi đó O_A, O_B, O_C là trung điểm AH, BH, CH và nằm trên đường tròn Euler của tam giác.

Gọi $O_BI_B \cap O_CI_C = T$ thì do hai tam giác DBF, DEC đồng dạng nên:

$$(TO_B, TO_C) = (O_BI_B, O_CI_C) = (BF, EC)$$
$$= (CF, BE) = (MO_B, MO_C)$$

Do đó T nằm trên đường tròn Euler của tam giác.

Nên:

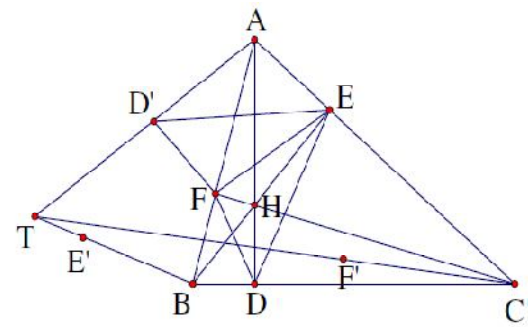
$$(TO_A, TO_B) = (PO_A, PO_B) = (BE, AD) = (AE, DB) = (O_AI_A, O_BI_B)$$

Tức là ba đường thẳng O_AI_A, O_BI_B, O_CI_C đồng quy tại T nằm trên đường tròn Euler của tam giác.

Mệnh đề 7:

Tam giác ABC với các đường cao AD, BE, CF. Gọi D', E', F' lần lượt là điểm đối xứng của D qua EF, E qua FD, F qua DE. Khi đó AD', BE', CF' đồng quy.

Chứng minh:



Ta có:

$$\frac{\sin(AB,AD')}{\sin(AD',AC)}=\frac{\sin(AF,AD')}{\sin(AD',AE)}=\frac{\dfrac{D'F.\sin(FD',FA)}{D'A}}{\dfrac{D'E.\sin(EA,ED')}{D'A}}$$

$$=\frac{DF.\sin(FD',FA)}{DE.\sin(EA,ED')}=\frac{DF.\sin\left[(FD',FE)+(FE,FA)\right]}{DE.\sin\left[(EA,EF)+(EF,ED')\right]}$$

$$\frac{DF.\sin\left[(FE,FD)+(FE,FA)\right]}{DE.\sin\left[(EA,EF)+(ED,EF)\right]}=\frac{DF.\sin(2C+C)}{DE.\sin(B+2B)}=\frac{DF.\sin 3C}{DE.\sin 3B}$$

Tương tự:

$$\frac{\sin(BC,BE')}{\sin(BE',BA)}=\frac{ED.\sin 3A}{EF.\sin 3B},\frac{\sin(CA,CF')}{\sin(CF',CB)}=\frac{FE.\sin 3B}{FD.\sin 3A}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin(AB,AD')}{\sin(AD',AC)}\cdot\frac{\sin(BC,BE')}{\sin(BE',BA)}\cdot\frac{\sin(CA,CF')}{\sin(CF',CB)}=\frac{DF.\sin 3C}{DE.\sin 3B}\cdot\frac{ED.\sin 3A}{EF.\sin 3B}\cdot\frac{FE.\sin 3B}{FD.\sin 3A}=1$$

Do đó theo Ceva sin ta có điều phải chứng minh.

Tác giả cũng đã phát hiện ra một số kết quả khác khi thay 3 đường cao thành 3 đường phân giác trong, cụ thể như sau:

Mệnh đề 8:

Tam giác ABC với các phân giác trong AD, BE, CF. Gọi D', E', F' lần lượt là điểm đối xứng của D qua EF, E qua FD, F qua DE. Khi đó AD', BE', CF' đồng quy.

Mệnh đề 9:

Tam giác ABC với các phân giác trong AD, BE, CF. Gọi D', E', F' lần lượt là điểm đối xứng của D qua trung điểm EF, E qua trung điểm FD, F qua trung điểm DE. Khi đó BE', CF', EF đồng quy tại T_1; CF', AD', FD đồng quy tại T_2; AD', BE', DE đồng quy tại T_3. Ngoài ra $D'T_1$, $E'T_2$, $F'T_3$ song song.

Việc chứng minh chi tiết các mệnh đề này xin dành cho bạn đọc!

Tài liệu tham khảo:

[0] Các tài liệu từ internet.

[1] Christopher J.Bradley, *Challenges in Geometry for Mathematical Olympians Past and Present*, Oxford University Press, 2005.

[2] Dusan Djukic – Vladimir Jankovic – Ivan Matic – Nikola Petrovic, *The IMO Compendium, A Collection of Problems Suggestted for The International Mathematical Olympiads: 1959 – 2004*, Springer, 2006.

[3] Kiran S. Kedlaya, *Geometry Unbound*, version of 17 Jan 2006.

[4] Kiran S. Kedlaya, *Notes on Euclidean Geometry*, Version 1.0, last revised August 3, 1999.

[5] Nathan Altshiller Courl, *College Geometry, An introduction to the modern geometry of the triangle and the circle*, Barnes & Noble Inc, New York, 1952.

[6] Paul Yiu, *A Tour of Triangle Geometry.*

[7] Paul Yiu, *Euclidean Geometry*, Preliminary Version, Department of Mathematics Florida Atlantic University, Fall 1998.

[8] Paul Yiu, *Introduction to the Geometry of the Triangle*, Florida Atlantic University lecture notes, 2001.

[9] R. Honsberger, *Episodes of 19th and 20th Century Euclidean Geometry*, Math. Assoc. America, 1995.

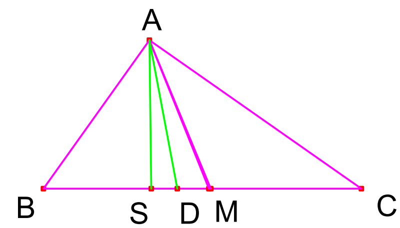
[10] Roger A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, 1960.

ĐƯỜNG ĐỐI TRUNG TRONG TAM GIÁC

Trần Duy Bình
THPT Chuyên Hà Nam

1.Định nghĩa:

Trong tam giác ABC, đường thẳng đối xứng với đường trung tuyến AM qua đường phân giác trong AD gọi là đường đối trung của tam giác ABC xuất phát từ đỉnh A.



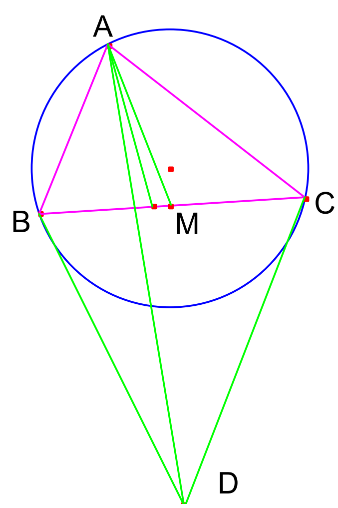
2.Một vài tính chất của đường đối trung

2.1.Đường đối trung chia trong cạnh đối diện thành những phần tỉ lệ với bình phương các cạnh kề.

$$\frac{SB}{SC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

2.2.Đường đối trung xuất phát từ một đỉnh của tam giác đi qua giao điểm của hai tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp của tam giác tại hai đỉnh kia.

Chứng minh:



Xét tam giác ABC với (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác. Giả sử tiếp tuyến tại B và C cắt nhau tại D. Ta cần chứng minh AD là đường đối trung của tam giác ABC.

Thật vậy: Gọi AM là đường thẳng đối xứng với AD qua đường phân giác trong góc A, M thuộc BC. Khi đó

$$\frac{BM}{MC}=\frac{AM\sin\widehat{BAM}}{AM\sin\widehat{CAM}}\frac{\sin\widehat{ACB}}{\sin\widehat{ABC}}=\frac{\sin\widehat{BAM}}{\sin\widehat{CAM}}\frac{\sin\widehat{ACB}}{\sin\widehat{ABC}}$$
$$=\frac{\sin\widehat{CAD}}{\sin\widehat{ACD}}\frac{\sin\widehat{ABD}}{\sin\widehat{BAD}}=\frac{CD.AD}{AD.BD}=1$$

Suy ra M là trung điểm BC, khi đó AM là đường trung tuyếncủa tam giác ABC. Vậy AD là đường đối trung của tam giác ABC.

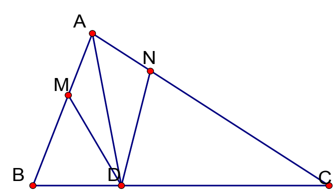
2.3.Ba đường đối trung của tam giác đồng quy tại một điểm.

2.4.Đường đối trung xuất phát từ một đỉnh của tam giác là quỹ tích của những điểm có tỉ số khoảng cách đến hai cạnh kề của tam giác tỉ lệ thuận với độ dài của các cạnh.

3. Ví dụ áp dụng

Bài toán 1:

Cho tam giác ABC, AD là đường đối trung (D thuộc cạnh BC). Điểm M, N lần lượt nằm trên cạnh AB, AC sao cho $\widehat{DMB}=\widehat{ACB},\widehat{DNC}=\widehat{ABC}$. Chứng minh rằng DM = DN.



Lời giải: Dễ thấy $\Delta DBM\sim\Delta ABC\ \Rightarrow DM=(DB.AC)/AB$

$\Delta DCN\sim\Delta ABC\Rightarrow DN=(CD.AB)/AC$

Suy ra

$$\frac{DM}{DN}=\frac{DB}{CD}.\frac{AC^2}{AB^2}\qquad(1)$$

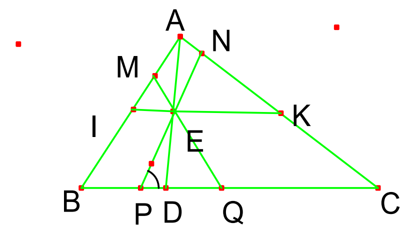
Theo tính chất 2.1 ta có

$$\frac{DC}{DB}=\frac{AC^2}{AB^2}\qquad(2)$$

Từ (1) và (20 suy ra $DM=DN$ (đpcm).

Bài toán 2:

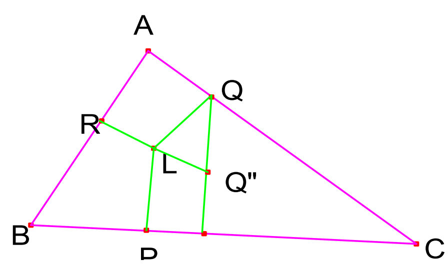
Cho tam giác ABC, AD là đường đối trung (D thuộc cạnh BC). E thuộc đoạn AD. Gọi d_1 là đường thẳng qua E cắt cạnh AC, BC lần lượt tại N,P sao cho $\widehat{NPC}=\widehat{BAC}$. Gọi d_2 là đương thẳng qua E cắt cạnh AB, BC lần lượt tại M,Q sao cho $\widehat{MQB}=\widehat{BAC}$. Chứng minh QM = PN.



Lời giải: Qua E kẻ IK// BC. Theo giả thiết có: $\widehat{NPC} = \widehat{BAC}$ và $\widehat{MQB} = \widehat{BAC}$. Suy ra tam giác PEQ cân tại E ⇒ QE = EP.
Mặt khác, theo tính chất của đường đối trung áp dụng trong bài toán 1ta chứng minh được EM = EN. Vậy MQ = PN (đpcm).

Bài toán 3: Gọi L là giao điểm ba đường đối trung của tam giác ABC. Từ L hạ ba đường vuông góc LP, LQ, LR xuống ba cạnh tam giác ABC. Chứng minh L là trọng tâm tam giác PQR.

Lời giải:



Kéo dài RL một đoạn sao cho LQ'' = RL
Theo tính chất 2.4 LR/AB = LQ/AC hay LQ''/AB = LQ/AC
hay $\widehat{QLQ''} = \widehat{BAC}$
Suy ra ΔLQ''Q ~ ΔABC
Khi đó LP // QQ'' , LP đi trung điểm RQ nên LP là trung tuyến xuất phát từ đỉnh P của tam giác PQR.Tương tự LQ cũng là trung tuyến của tam giác PQR. Vậy L là trọng tâm tam giác PQR.

Bài toán 4:
Cho tam giác ABC, M là điểm bất kỳ. Gọi H, I, K là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Tìm vị trí M sao cho $MH^2 + MI^2 + MK^2$ nhỏ nhất.

Lời giải:
Ta có $(a^2+ b^2+ c^2)(MH^2 + MI^2 + MK^2) \geq (aMH+ bMI + cMK)^2 \geq 4.S^2(ABC)$.
suy ra $MH^2 + MI^2 + MK^2 \geq 4.S^2(ABC)/ a^2+ b^2+ c^2$
Đẳng thức khi M nằm trong ABC và MH/a= MI/b =MK/c hay M là giao điểm của ba đường đối trung.

Bài toán 5:
Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O). Các tiếp tuyến với (O) tại A, C và BD đồng quy tại S. Chứng minh

$$\frac{\sin\widehat{ASB}}{\sin\widehat{CSB}} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{AD^2}{CD^2}$$

Lời giải:

Gọi I là giao điểm AC và BD.

$$\frac{\sin\widehat{ASB}}{\sin\widehat{CSB}}=\frac{dt(ASI)}{dt(CSI)}=\frac{AI}{CI}$$

Theo tính chất 2.1

$$\frac{AI}{CI}=\frac{AB^2}{AC^2};\frac{AI}{CI}=\frac{AD^2}{CD^2}$$

Suy ra đẳng thức cần chứng minh.

Bài toán 6: (shortlist 2003)

Cho ba điểm phân biệt A, B, C theo thứ tự nằm trên một đường thẳng. Gọi (C) là đường tròn luôn đi qua A, C (AC không là đường kính). P là giao điểm của tiếp tuyến của (C) tại A và C. Giả sử (C) cắt đoạn PQ tại Q. Chứng minh rằng giao điểm của đường phân giác góc AQC và đường thẳng AC cố định khi (C) thay đổi.

Lời giải:

Theo 2.1 và 2.2 ta có

$$\frac{BA}{BC}=\frac{AQ^2}{CQ^2};\frac{RA}{RC}=\frac{AQ}{QC}$$

Suy ra

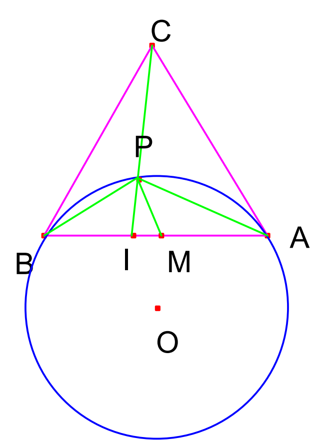
$$\frac{BA}{BC}=\frac{RA^2}{RC^2}$$

Do đó R cố định.(đpcm)

Bài toán7: (Polan2000)

Cho tam giác ABC cân tại C. P là điểm nằm trong tam giác sao cho $\widehat{APM}=\widehat{PBC}$. Gọi M trung điểm AB. Chứng minh $\widehat{CPB}+\widehat{APM}=180^0$.

Lời giải:



Vẽ đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC

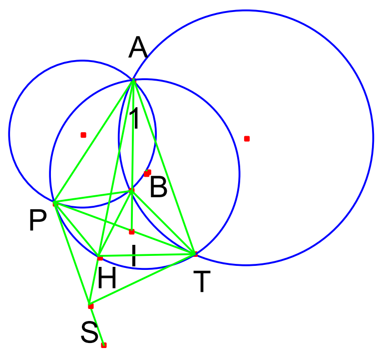
Từ giả thiết ta có CB và AC là các tiếp tuyến của đường tròn (O).

CP đối xứng PM qua phân giác góc APB.

Kéo dài CP cắt AB tại I, khi đó $\widehat{BPI} = \widehat{MPA}$
Mà $\widehat{PBM} + \widehat{APC} = \widehat{IPA} + \widehat{APC} = 180^0$.
Suy ra $\widehat{CPB} + \widehat{APM} = 360^0 - (\widehat{BPM} + \widehat{APC}) = 180^0$ (đpcm).

Bài toán 8:(VN-TST 2001)

Trong mặt phẳng cho hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm A, B. Gọi PT là một tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó(P, T là tiếp điểm). Các tiếp tuyến tại P, T của đường tròn ngoại tiếp tam giác APT cắt nhau tại S. Gọi H là điểm đối xứng của B qua PT. Chứng minh A, S, H thẳng hàng.



Lời giải: Ta có $\widehat{BPT} = \widehat{PAB}, \widehat{BTP} = \widehat{BAT} \Rightarrow \widehat{PBT} + \widehat{PAT} = 180^0$
Suy ra $\widehat{PHT} + \widehat{PAT} = 180^0 \Rightarrow$ Tứ giác APHT nội tiếp được.
Khi đó $\widehat{TAH} = \widehat{TPH} = \widehat{BPT} = \widehat{PAB}$, do đó PH đối xứng với AB qua phân giác của $\widehat{PAT}$. Giả sử AB cắt PT tại I, suy ra I là trung điểm PT. Suy ra AS đối xứng với AI qua đường phân giác góc $\widehat{PAT}$. Vậy A, H, S thẳng hàng.

4.Bài tập tương tự

Bài 1: (USA-TST-2007) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Tiếp tuyến của (O) tại B,C cắt nhau tại T. Gọi S là điểm thuộc đường thẳng BC sao cho AS vuông góc với AT. B_1, C_1 nằm trên ST (C_1 nằm giữa B_1 và S) sao cho $B_1T = BT = C_1T$. Chứng minh rằng tam giác ABC đồng dạng tam giác AB_1C_1.

Bài 2: (USA 2008) Cho tam giác ABC nhọn, không đều. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Đường trung trực của AB và AC cắt AM tại D và E. BD cắt CE tại F nằm trong tam giác ABC. Chứng minh A, N, F, P nằm trên một đường tròn.

Bài 3: Từ một điểm S ở ngoài đường tròn tâm O, bán kính R vẽ hai tiếp tuyến ST, ST' và cát tuyến SAB tới đường tròn. Đường thẳng kẻ từ A, vuông góc với OT cắt TT' và TB tại C và D. Chứng minh AC = CD.

5. Tài liệu tham khảo.

1. Yufei Zhao, Lemmas in Euclidean Geometry.
2.Andreescu, T. ; Feng, Z,. 103 Trigonomerty Problems from the Training of the USA IMO Tem, Birkhauser, 2004.
3.Nguyễn Văn Ban-Hoàng Chúng, Hình học của tam giác.
4.Nguyễn Tường, Chung quang đường trung tuyến.

ỨNG DỤNG CỦA PHÉP NGHỊCH ĐẢO TRÊN MẶT PHẲNG

Nghiêm Thị Phương Thảo
Trường THPT chuyên Nguyễn Trãi - Hải Dương

Trong bài viết này , tôi sẽ trình bày các kiến thức cơ bản về phép nghịch đảo và việc áp dụng phép nghịch đảo vào giải một số bài toán hình học phẳng.

A.NHẮC LẠI LÝ THUYẾT CƠ BẢN

I. Định nghĩa

- Cho trước một điểm O và số thực $k \neq 0$, với mỗi điểm M khác O ta dựng điểm M' trên đường thẳng OM sao cho $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$,, khi đó ta nói M' là ảnh của M trong phép nghịch đảo tâm O, phương tích k (hoặc hệ số k). Kí hiệu $I_{(O,k)} : M \to M'$.

- Cho một hình F. Tập hợp ảnh của mọi điểm thuộc F qua phép nghịch đảo tâm O, hệ số k lập thành một hình F' gọi là ảnh của hình F. Vậy $I_{(O,k)} : F \to F'$.

II. Tính chất

Cho phép nghịch đảo $I_{(O,k)}$, $k \neq 0$.

1. Phép $I_{(O,k)}$ là phép biến đổi 1- 1.

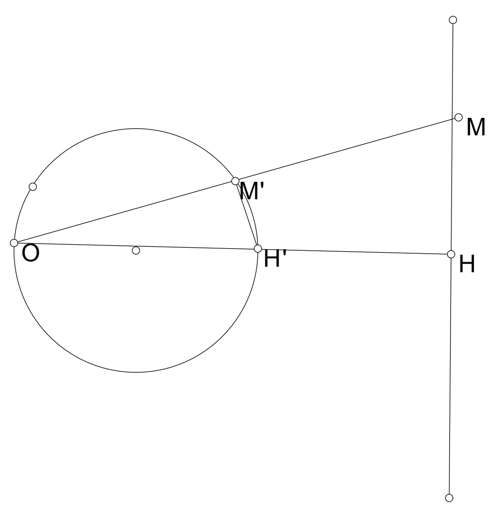
2. Phép $I_{(O,k)}.I_{(O,k)}$ là phép biến đổi đồng nhất.

3. Nếu $I_{(O,k)} : A \to A', B \to B'$ thì $A'B' = \lambda AB$ với $\lambda = \dfrac{|k|}{OA.OB}$

4. Ảnh của 1 đường thẳng d đi qua tâm nghịch đảo chính là d

5. Ảnh của 1 đường thẳng d không đi qua tâm nghịch đảo là 1 đường tròn đi qua tâm nghịch đảo.

CM:



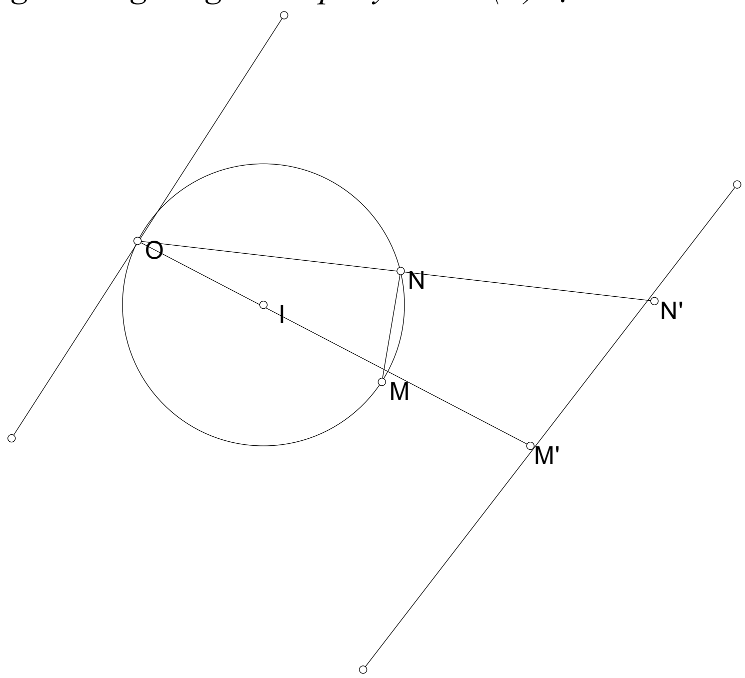
Từ O hạ OH $\perp$ d. Xét 1 phép nghịch đảo tâm O biến H thành H', và 1 điểm M bất kì trên d thành điểm M'.

Vì $\overline{OM}.\overline{OM'} = \overline{OH}.\overline{OH'} \Rightarrow \Delta OHM \sim \Delta OM'H' \Rightarrow H'M' \perp OM'$, suy ra M' nằm trên đường tròn đường kính OH'.

Ngược lại với M' bất kì trên đường tròn đường kính OH',đường thẳng OM' cắt d tại M thì dễ dàng suy ra M là ảnh của M' qua phép nghịch đảo tâm O nói trên.

Vậy phép nghịch đảo tâm O biến đường thẳng d thành đường tròn đường kính O H'.

6. Ảnh của 1 đường tròn (C) đi qua tâm nghịch đảo O là 1 đường thẳng d không đi qua O và đường thẳng đó song song với tiếp tuyến của (C) tại O.

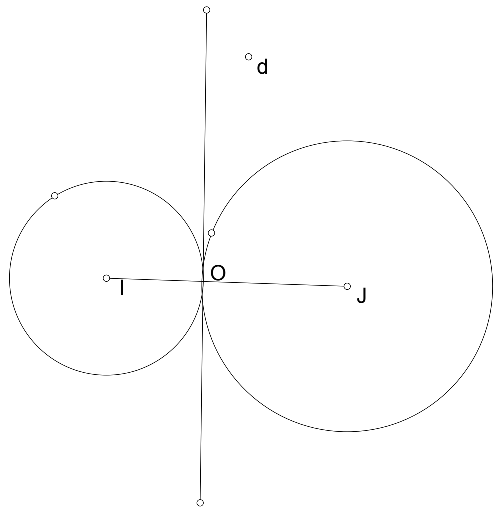


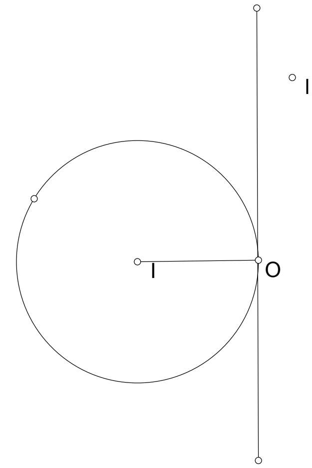
7. *Ảnh của 1 đường tròn (C) không đi qua tâm nghịch đảo O là 1 đường tròn $\left(C'\right)$ - là ảnh của (C) qua phép vị tự tâm O tỉ số $\lambda = \dfrac{k}{p} = \dfrac{k}{P_{O/(C)}}$.*

8.Phép nghịch đảo biến 2 đường tròn (hoặc đường tròn và đường thẳng) tiếp xúc với nhau thành 2 đường tròn tiếp xúc với nhau, hoặc thành 1 đường tròn và 1 đường thẳng tiếp xúc với nhau, hoặc thành 1 cặp đường thẳng song song.

Chứng minh TC8**:**

- Nếu tiếp điểm không trùng với tâm nghịch đảo thì qua phép nghịch đảo các đường tròn đó (hoặc đường tròn và đường thẳng đó) vẫn chỉ có 1 điểm chung , vậy chúng vẫn tiếp xúc với nhau.
- Nếu 2 đường tròn tâm I, J tiếp xúc với nhau tại điểm O thì qua phép nghịch đảo tâm O chúng biến thành cặp đường thẳng song song với nhau vì cùng song song với tiếp tuyến chung tại O của 2 đường tròn đã





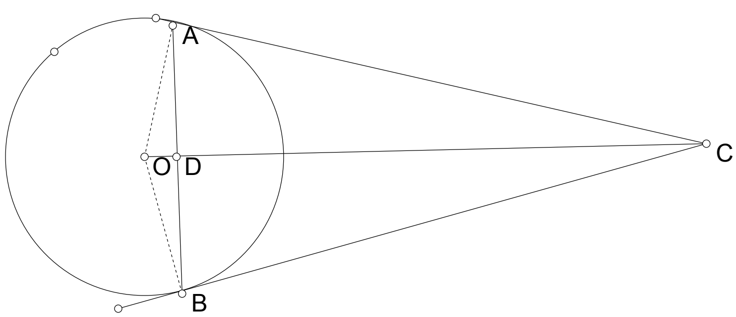
Cuối cùng nếu đường thẳng l tiếp xúc với đường tròn tâm I tại O thì qua phép nghịch đảo tâm O đường thẳng l biến thành chính nó còn đường tròn biến thành đường thẳng song song với tiếp tuyến tại O của nó tức song song với l.

B. ỨNG DỤNG CỦA PHÉP NGHỊCH ĐẢO

1. Xác định ảnh của 1 điểm, 1 hình qua phép nghịch đảo

BT1. *Qua các điểm A và B của đường tròn (O, R) kẻ các đường tiếp tuyến cắt nhau tại điểm C. Điểm D là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng minh rằng phép nghịch đảo tâm O, hệ số* R^2 *biến C thành* D.

LG:



Ta có OA = OB, CA = CB nên CO là trung trực của AB, suy ra CO đi qua trung điểm D của AB và $CO \perp AB = D$.

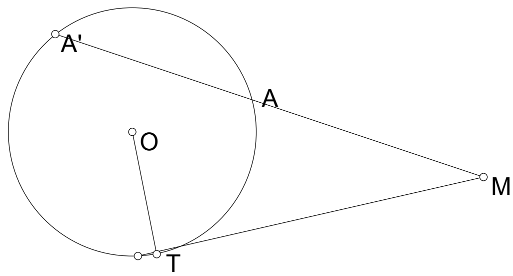
Trong tam giác vuông OAC ta có $R^2 = OA^2 = OD.OC$ suy ra đpcm.

BT2. *Cho đường tròn (O) và điểm M nằm ngoài (O). Từ M kẻ tiếp tuyến MT tới (O) với T là tiếp điểm. Chứng minh rằng phép nghịch đảo tâm M hệ số k =* MT^2 *biến (O) thành chính nó.*

LG:

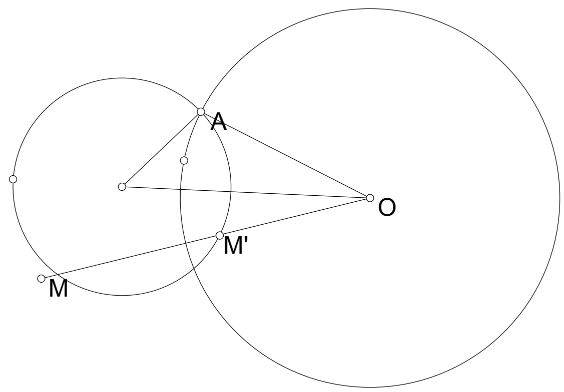
Trên đường tròn (O) lấy 1 điểm A bất kì khác T. Gọi A' là giao điểm thứ 2 của đường thẳng AM với (O).

Ta có $P_{M/(O)} = MT^2 = \overline{MA}.\overline{MA'} \Rightarrow I_{(O,k=MT^2)} : A \to A', T \to T \Rightarrow I_{(O,k=MT^2)} : (O) \to (O)$.



BT3. *Cho đường tròn (O, R) và đường tròn (C) trực giao với nó .Chứng minh rằng phép nghịch đảo* $I_{(O,R^2)}$ *biến (C) thành chính nó.*

LG:



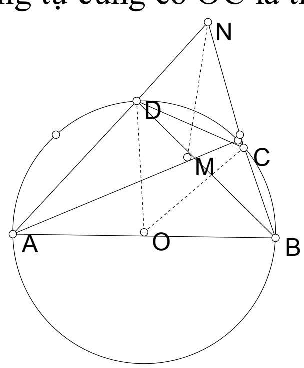
Vì (C) và (O, R) là 2 đường tròn trực giao nên OA là tiếp tuyến tại A của (C). Lấy M là 1 điểm bất kì trên (C) . Đường thẳng OM cắt (C) tại M’. Ta có $P_{O/(C)} = OA^2 = \overline{OM}.\overline{OM'}$ nên $\overline{OM}.\overline{OM'} = R^2$ suy ra M’ là ảnh của M qua phép nghịch đảo $I_{(O,R^2)}$. Vậy ảnh của (C) qua phép nghịch đảo này là chính nó.

BT4. *Cho nửa đường tròn đường kính AB, tâm O, bán kính R. Hai dây cung AC và BD của nửa đường tròn cắt nhau tại M. Chứng minh rằng phép nghịch đảo tâm I hệ số* R^2 *biến đường tròn đi qua 3 điểm M, C, D thành chính nó .*

LG:

Gọi giao điểm của AD và BC là N. Ta có $\angle ADB = \angle ACB = 90^0$ nên M, N, C, D nằm trên đường tròn đường kính MN hay N thuộc đường tròn đi qua 3 điểm M, C, D (kí hiệu (MCD)).

Mặt khác $\angle DNM = \angle DCM = \angle DCA = \angle DBO = \angle ODM \Rightarrow$ OD là tiếp tuyến của đường tròn (MCD). Tương tự cũng có OC là tiếp tuyến của (MCD).

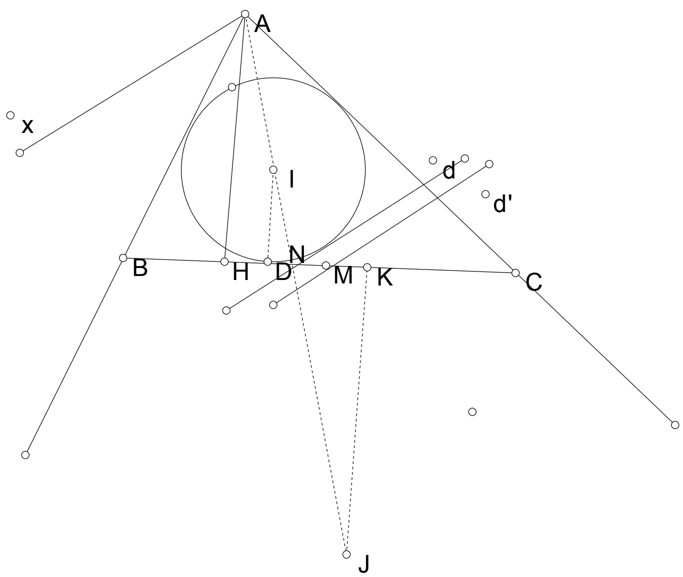


Giả sử phép nghịch đảo tâm O hệ số R^2 biến đường tròn (MCD) không đi qua tâm nghịch đảo thành đường tròn (C). Khi đó (C) là ảnh của đường tròn (MCD) qua phép vị tự tâm O, tỉ số $\lambda = \frac{k}{P_{O/(MCD)}} = \frac{R^2}{OD^2} = 1$,, suy ra (C) trùng với (MCD).

Vậy phép nghịch đảo nói trên biến đường tròn (MCD) thành chính nó.

BT5. *Cho tam giác ABC và một đường tròn (I) nội tiếp trong tam giác đó. Ta kí hiệu H là chân đường cao tam giác hạ từ A, D là tiếp điểm của BC và (I), K là tiếp điểm của BC với đường tròn bàng tiếp của tam giác thuộc góc BAC, M là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh rằng phép nghịch đảo tâm M hệ số* $k = MD^2$*, biến (I) thành chính nó, đường tròn Ơle của tam giác ABC thành 1 đường thẳng d tiếp xúc với (I).*

LG:



Gọi N là giao điểm của tia AI với cạnh BC, J là tâm đường tròn bàng tiếp tiếp xúc với BC tại K. Các điểm A và N chia điều hoà đoạn IJ, do đó các điểm H, N chia điều hoà đoạn DK. Vì M cũng là trung điểm của DK nên ta có hệ thức $MD^2 = MN.MH = k$ (1).

Phép nghịch đảo tâm M, hệ số k biến đường tròn (I) không đi qua tâm nghịch đảo thành 1 đường tròn (I') – là ảnh của (I) qua phép vị tự tâm M tỉ số $\lambda = -2$. Suy ra đường tròn (I') trùng (I) hay phép nghịch đảo trên biến đường tròn (I) thành chính nó.

Từ (1) ta suy ra phép nghịch đảo tâm M, hệ số k biến H thành N, do đó biến đường tròn Ơle đi qua H và M thành một đường thẳng d đi qua N.

Gọi d' là tiếp tuyến của đường tròn Ơle tại M, khi đó d' // d.

Ta còn phải chứng minh d tiếp xúc với (I). Phép vị tự với tâm là trọng tâm G của tam giác ABC, hệ số vị tự $\lambda = -2$ biến 3 trung điểm 3 cạnh BC, CA, AB thành 3 điểm A, B, C, do đó biến đường tròn Ơle thành đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC; biến d' đi qua M thành đường thẳng x đi qua A song song với d', do đó x // d . Cũng có x là tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Vậy $\angle xAB = \angle ACB, \angle ANd = \angle xAN = \angle xAB + \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow \angle ANd = \hat{C} + \frac{\hat{A}}{2} = \angle ANH$ suy ra khoảng cách từ I tới d bằng ID hay bằng bán kính đường tròn (I) và d tiếp xúc với đường tròn (I).

2. Tính các đại lượng hình học

BT6. *Cho 2 đường tròn (O, R) và (O',R') có OO'= a > 0. Gọi (O_1, R_1) là ảnh của (O, R) trong phép nghịch đảo $I_{(O',R'^2)}$; (O_2, R_2) là ảnh của (O', R') trong phép nghịch đảo $I_{(O,R^2)}$. Tính R_1, R_2 theo R, R', a.*

LG:

Theo tính chất 7 đường tròn (O_1, R_1) là ảnh của đường tròn (O, R) trong phép vị tự tâm O', tỉ số $\lambda = \frac{R'^2}{P_{O'/(O,R)}} = \frac{R'^2}{|O'O^2 - R^2|} = \frac{R'^2}{|a^2 - R^2|}$. Từ đó ta có

$$R_1 = |\lambda| R = \frac{R'^2}{|a^2 - R^2|}.R$$

Tương tự như vậy ta có $R_2 = \frac{R^2}{|a^2 - R'^2|}.R'$.

BT7. *Cho đường tròn (O, r) nội tiếp tứ giác ABCD tiếp xúc với AB, BC, CD, DA theo thứ tự tại các điểm M, N, P, Q . Biết rằng tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn bán kính R và khoảng cách giữa 2 tâm đường tròn bằng a. Tính tổng $MP^2 + NQ^2$ theo r, R.*

LG:

Gọi x là bán kính đường tròn ngoại tiếp $A_1B_1C_1D_1$, suy ra $MP^2 + NQ^2 = 4a^2 + 4b^2 = 16x^2$ (*).

Gọi đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ lần lượt là $(O_1, R), (O_1', x)$.Khi đó (O_1', x) là ảnh của (O_1, R) qua phép vị tự tâm O, tỉ số

$\lambda = \frac{r^2}{P_{O/(O_1,R)}} = \frac{r^2}{OO_1^2 - R^2} = \frac{r^2}{a^2 - R^2} \Rightarrow x = |\lambda| R = \frac{Rr^2}{a^2 - R^2}$. Thay vào (*) ta có

$$MP^2 + NQ^2 = 16\frac{R^2 r^4}{\left(a^2 - R^2\right)^2}.$$

Chú ý a có thể biểu thị qua R và r. Thật vậy , gọi A', B' là giao của OA, OC và đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. Ta có :

OA. OA'= OC. OC' $= R^2 - a^2$

$$OA = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}}; OC = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}; \sin^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{C}{2} = 1$$

mà $\hat{A}+\hat{C}=180^0$ nên $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{\sin^2\frac{A}{2}}{r^2}+\frac{\sin^2\frac{C}{2}}{r^2}=\frac{1}{r^2}$ (1).

Gọi I là trung điểm A'C', suy ra I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD. Xét tam giác OA'C' với trung tuyến OI ta có

$$OA'^2+OC'^2=2OI^2+\frac{A'C'^2}{2}=2OI^2+2R^2=2\left(a^2+R^2\right)\ (2)$$

Mặt khác $OA'=\frac{R^2-a^2}{OA}, OC'=\frac{R^2-a^2}{OC}$ (3).

Thay (3) vào (2) ta có $\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OC^2}=\frac{2\left(a^2+R^2\right)}{\left(R^2-a^2\right)^2}$ (4)

Từ (1) , (4) suy ra

$$\left(R^2-a^2\right)^2=2r^2\left(R^2+a^2\right)\Leftrightarrow a^4-2\left(R^2+r^2\right)a^2+R^4-2R^2r^2=0$$

Vậy có thể tính a theo R, r.

3. Chứng minh 3 điểm thẳng hàng ,4 điểm cùng nằm trên 1 đường tròn

BT8. *Cho tam giác ABC không cân . Đường tròn tâm(I, r) nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại A', B', C'. Chứng minh rằng tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AIA', BIB', CIC' thẳng hàng.*

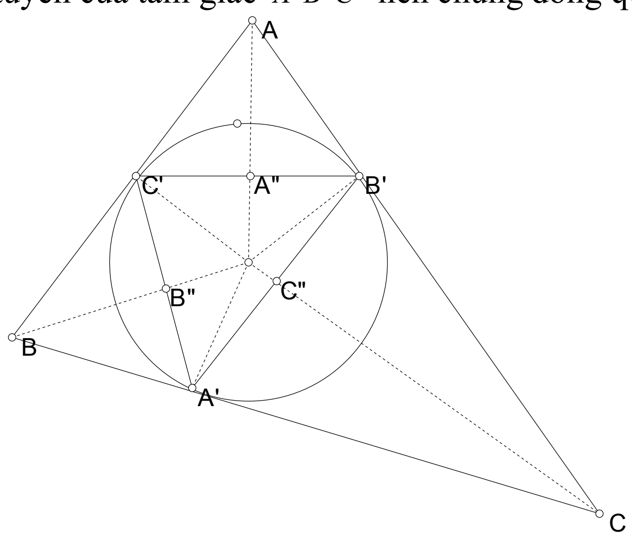
LG

Giả sử $IA\cap B'C'=A'', IB\cap A'C'=B'', IC\cap A'B'=C''$.

Trong tam giác vuông IAC' có $r^2=IC'^2=IA''.IA$ nên phép nghịch đảo tâm I, hệ số r^2 biến A thành A''. Tương tự có

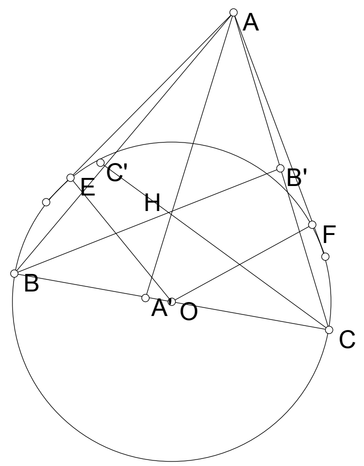
$$I_{\left(I,r^2\right)}: B\to B'', C\to C'', A'\to A', B'\to B', C'\to C$$

Suy ra phép nghịch đảo này biến đường tròn ngoại tiếp các tam giác AIA', BIB', CIC' thành các đường thẳng $A'A'', B'B'', C'C''$. Mà 3 đường thẳng này là các đường trung tuyến của tam giác $A'B'C'$ nên chúng đồng quy.



Từ đó suy ra 3 đường tròn ngoại tiếp các tam giác AIA', BIB', CIC' có 1 điểm chung thứ 2 là J. Vậy mỗi đường nối tâm của 2 trong 3 đường tròn trên đều vuông góc với IJ tức 3 tâm thẳng hàng .

BT9.Cho tam giác ABC trực tâm H. Từ A kẻ tới đường tròn đường kính BC 2 tiếp tuyến AE, AF với E, F là 2 tiếp điểm . Chứng minh rằng E, F, H thẳng hàng.
LG:



Vì $P_{A/(O)} = AE^2 = AB.AC' = AH.AA'$ nên phép nghịch đảo

$$I_{\left(A,AE^2\right)}: E \to E, F \to F, H \to A'$$

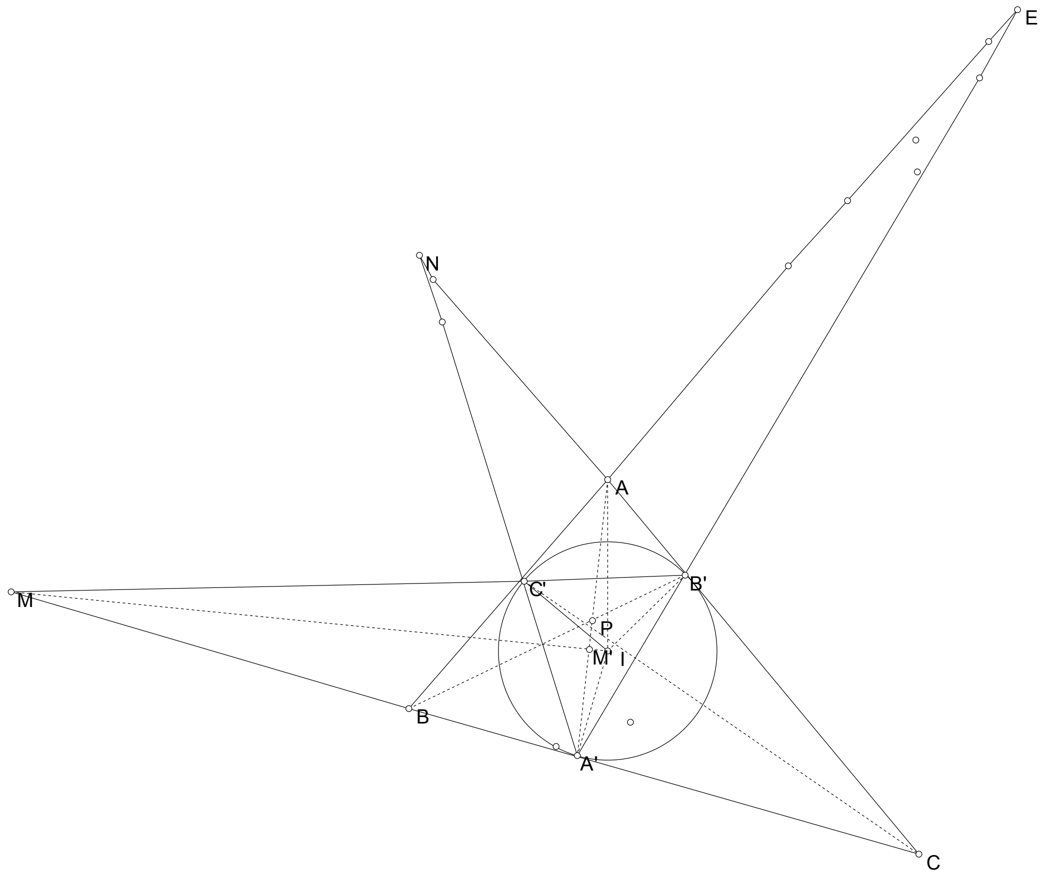
Mà E, F, A, A’ nằm trên đường tròn đường kính AO hay E, F, A’ thuộc 1 đường tròn đi qua tâm nghịch đảo nên ảnh của nó qua phép nghịch đảo trên là 1 đường thẳng. Từ đó suy ra E, F, H thẳng hàng.

BT10. *Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn (I, r) nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại A', B', C' . Gọi giao điểm của các cặp đường thẳng BC và $B'C'$; CA và $C'A'$; AB và $A'B'$ lần lượt là M, N, E. Chứng minh rằng M , N, E thẳng hàng.*
LG:

Ta có $C'A = B'A, C'B = A'B, A'C = B'C \Rightarrow \frac{C'A}{C'B}.\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A} = 1$ nên theo định lí Xêva có AA', BB', CC' đồng qui tại P.

Do $B'C'$ là trục đẳng phương của đường tròn đường kính IA và đường tròn (I); BC là trục đẳng phương của đường tròn đường kính IA' và đường tròn (I) nên M thuộc trục đẳng phương của 2 đường tròn đường kính IA, IA'. Gọi M' là giao điểm thứ 2 của 2 đường tròn này ta sẽ có M nằm trên đường thẳng IM'.

Lại có $IM' \perp IA, IM' \perp IA' \Rightarrow A, M', A'$ thẳng hàng và $IM' \perp AA'$. Vậy $IM' \perp M'P \Rightarrow M'$ thuộc đường tròn đường kính IP.



Trong tam giác vuông $IA'M$ ta có $r^2 = IA'^2 = IM.IM'$. Từ đó phép nghịch đảo tâm I, hệ số r^2 biến M' thành M.

Làm tương tự ta cũng có các điểm N', E' , chúng cùng thuộc đường tròn đường kính IP và phép nghịch đảo trên cũng biến N', E' tương ứng thành N, E.

Vì M', N', E' thuộc đường tròn đi qua tâm nghịch đảo nên ảnh của chúng M, N, E thuộc 1 đường thẳng.

Hai bài tập 9, 10 đều sử dụng 1 phương pháp để chứng minh 3 điểm thẳng hàng . Đó là chứng minh chúng là ảnh của 3 điểm cùng nằm trên 1 đường tròn (đi qua tâm nghịch đảo) qua 1 phép nghịch đảo nào đó. Còn để chứng minh 4 điểm cùng nằm trên 1 đường tròn ta chứng minh chúng là ảnh của 4 điểm nằm trên 1 đường tròn không đi qua tâm nghịch đảo hoặc 3 trong 4 điểm này là ảnh của 3 điểm thẳng hàng qua 1 phép nghịch đảo với tâm chính là điểm còn lại. Tóm lại phần này ta sử dụng các tính chất 4, 5, 6, 7 về ảnh của 1 đường thẳng, 1 đường tròn qua phép nghịch đảo.

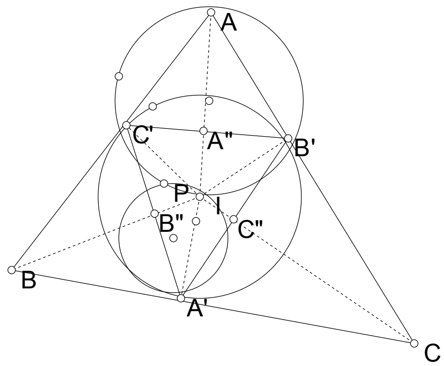
BT11. *Trên mặt phẳng cho 1 số hữu hạn điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Biết rằng mọi đường tròn đi qua 3 điểm đã cho bất kì chứa thêm 1 điểm đã cho nữa. Chứng minh rằng khi đó tất cả các điểm đã cho cùng nằm trên 1 đường tròn.*

LG:

Giả sử A là 1 điểm trong số các điểm đã cho. Qua phép nghịch đảo tâm A, các đường tròn đi qua A biến thành các đường thẳng. Do đó tập M bao gồm các ảnh qua phép nghịch đảo đó của tất cả các điểm đã cho trừ A có tính chất là 1 đường thẳng đã đi qua 2 điểm của tập M thì sẽ chứa thêm 1 điểm nữa của tập M. Từ đó suy ra tất cả các điểm của tập M nằm trên 1 đường thẳng. Qua phép nghịch đảo tâm A đường thẳng đó biến thành đường tròn chứa tất cả các điểm đã cho.

BT12. *Cho tam giác ABC không cân và đường tròn (I, r) nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại A',B',C'. Gọi P là giao điểm thứ 2 của 2 đường tròn đường kính IA, IA'. Q là giao điểm của 2 đường tròn đường kính IB, IB'. K là giao điểm của 2 đường tròn đường kính IC, IC'. Chứng minh rằng P, Q, K, I cùng nằm trên 1 đường tròn.*

LG:



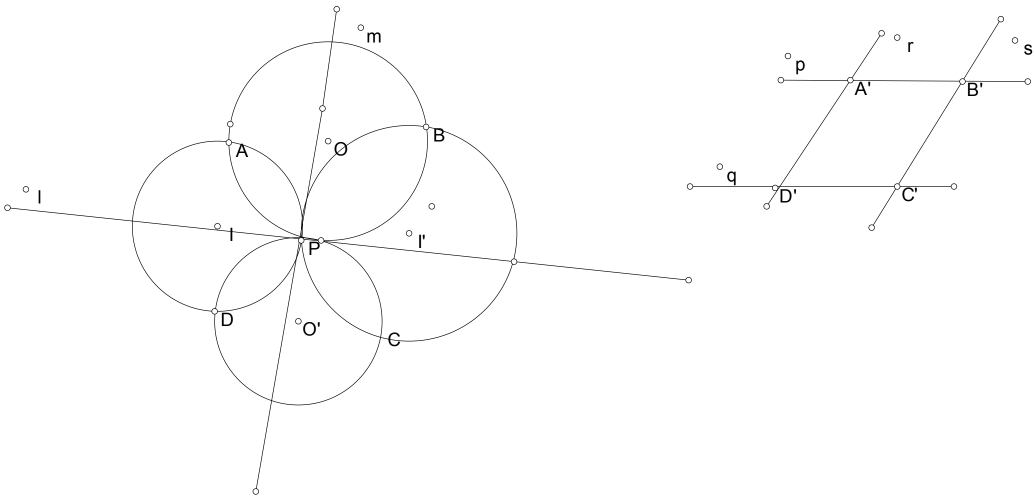
Ta có phép nghịch đảo tâm I, hệ số r^2 biến A' thành A' nên nó biến đường thẳng BC thành đường tròn đường kính OA'. Lại có phép nghịch đảo này biến A'' thành A nên biến đường thẳng $B'C'$ thành đường tròn đường kính OA. Vậy phép nghịch đảo $I_{(I,r^2)}$ biến $P'=BC\cap B'C'$ thành giao điểm thứ hai P của 2 đường tròn đường kính OA, OA'.

Tương tự gọi $Q'=AC\cap A'C', K'=AB\cap A'B'$ thì $I_{(I,r^2)}: Q'\to Q, K'\to K$.

Mà theo bài 6 ta có P',Q',K' thẳng hàng P,Q, K nằm trên 1 đường tròn đi qua tâm nghịch đảo .Vậy I, P, Q, K nằm trên 1 đường tròn.

BT13. *Cho 4 đường tròn cùng đi qua 1 điểm P nhưng không có đường tròn nào chứa trong đường tròn nào. Hai đường tròn cùng tiếp xúc với đường thẳng l tại P còn 2 đường tròn kia cùng tiếp xúc với đường thẳng m tại P. Các giao điểm khác của 4 đường tròn này là A, B, C, D. Chứng minh rằng A, B, C, D cùng nằm trên 1 đường tròn $\Leftrightarrow l\perp m$.*

LG:



Ta có phép nghịch đảo tâm P biến mỗi đường thẳng l, m thành chính nó; biến các đường tròn (O), $(O'),(I),(I')$ tương ứng thành các đường thẳng p, q, r, s. Khi đó $p \parallel q \parallel l, r \parallel s \parallel m$ và phép nghịch đảo này sẽ biến giao điểm thứ 2 là P của 2 đường tròn (O) , (I) thành giao điểm A' của 2 đường thẳng p, r. Tương tự phép nghịch đảo biến B, C, D tương ứng thành B', C', D'.

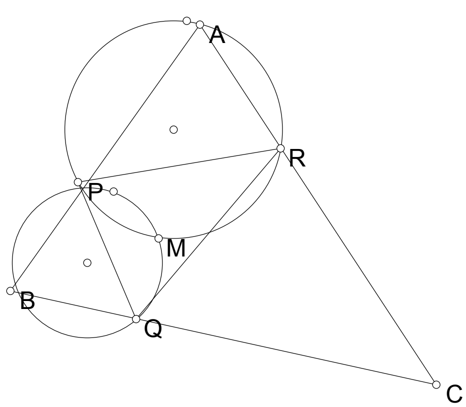
Dễ thấy tứ giác $A'B'C'D'$là hình bình hành. Từ đó tứ giác ABCD nội tiếp được khi và chỉ khi hình bình hành $A'B'C'D'$ nội tiếp được (vì phép nghịch đảo biến 1 đường tròn không đi qua tâm nghịch đảo thành 1 đường tròn) hay $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật tức $l \perp m$.

BT14.

a. *Cho tam giác ABC. Trên các đường thẳng AB, BC, CA lấy các điểm P, Q, R tương ứng. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp của tam giác APR, BPQ, CQR đồng quy tại một điểm.*

b. *Cho 4 đường tròn S_1, S_2, S_3, S_4. Giả sử S_1, S_2 cắt nhau tại A_1, A_2; S_2, S_3 cắt nhau tại B_1, B_2; S_3, S_4 cắt nhau tại C_1, C_2; S_4, S_1 cắt nhau D_1, D_2. Chứng minh rằng nếu các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 nằm trên 1 đường tròn S (hoặc đường thẳng) thì các điểm A_2, B_2, C_2, D_2 cũng nằm trên 1 đường tròn (hoặc đường thẳng.*

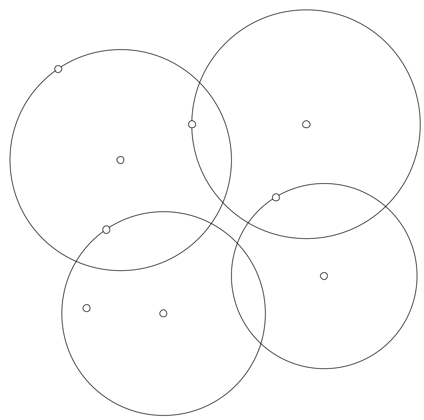
LG:

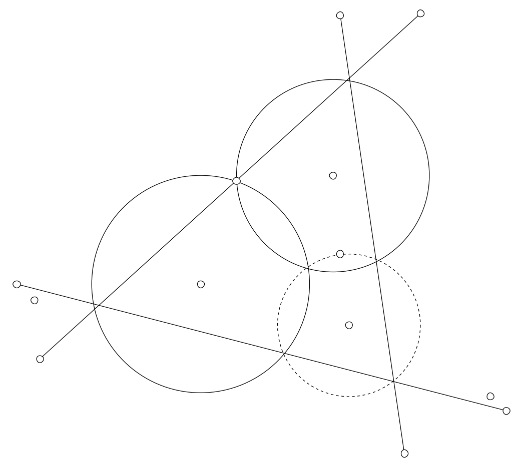


a. Giả sử M là giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp của các tam giác APR và BPQ, khác với điểm P. Khi đó

$\angle QMR = 360^0 - \angle QMP - \angle PMR = 180^0 - \angle QMP + 180^0 - \angle PMR = \angle BAC + \angle ABC = 180^0 - \angle ACB$
suy ra M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác CRQ.

b. Xét qua phép nghịch đảo với tâm A_1.Gọi ảnh của $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2$ tương ứng là $A_1^*, B_1^*, C_1^*, D_1^*, A_2^*, B_2^*, C_2^*, D_2^*$. Khi đó các đường tròn S_1, S_2, S biến thành các đường thẳng $A_2^*D_1^*, B_1^*A_2^*, D_1^*B_1^*$, các đường tròn S_3, S_4 biến thành các đường tròn $S^*{}_3, S^*{}_4$ ngoại tiếp quanh các tam giác $B_2^*C_1^*B_1^*, C_1^*D_1^*D_2^*$. Dựng đường tròn đi qua các giao điểm B_2^*, D_2^*, A_2^*. Như vậy các điểm $A_2^*, B_2^*, C_2^*, D_2^*$ cùng nằm trên 1 đường tròn. Suy ra các điểm A_2, B_2, C_2, D_2 cùng nằm trên 1 đường tròn hoặc 1 đường thẳng.





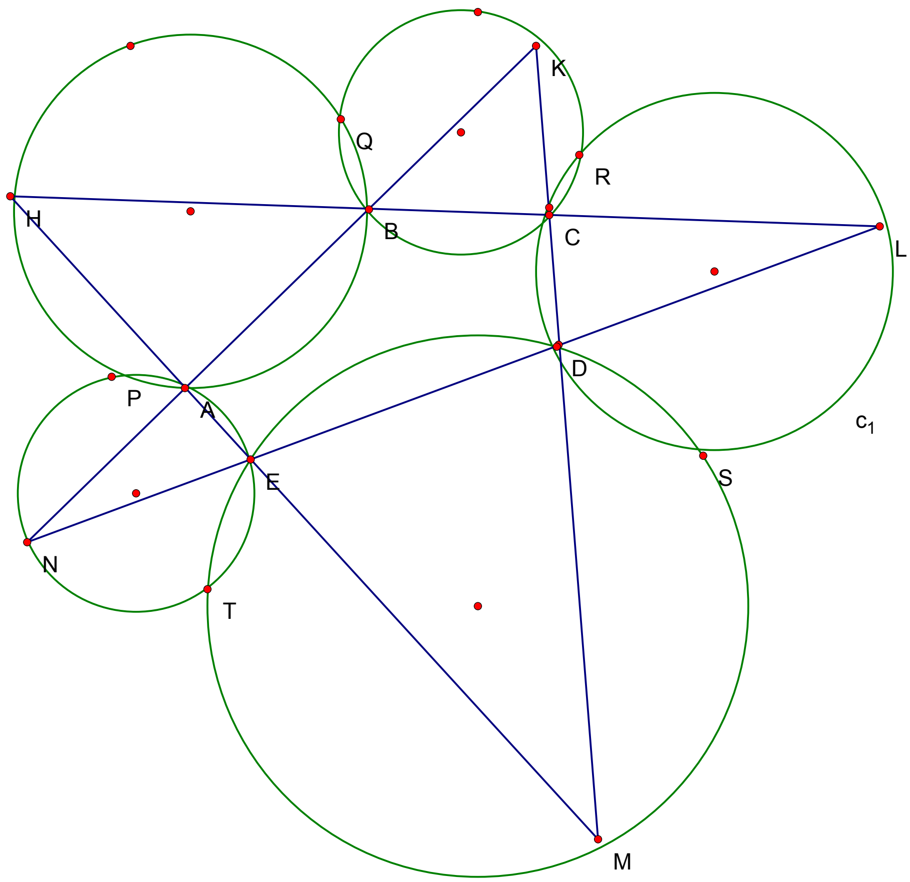
BT15. *Các cạnh của ngũ giác lồi ABCDE được kéo dài sao cho tạo thành hình sao 5 cánh AHBKCLDMEN. Quanh các tam giác cánh sao ngoại tiếp các đường tròn. Chứng minh rằng 5 giao điểm của các đường tròn đó khác A, B, C, D, E cùng nằm trên 1 đường tròn.*

LG:

Bổ đề 1: Cho tứ giác EFDC. A là giao điểm của DF và CE; B là giao điểm của EF và CD. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEF, BCE, BFD, ADC cùng đi qua 1 điểm.

Bổ đề 2: BT14b

Vào bài: Giả sử P, Q, R, S, T là các giao điểm của các đường tròn S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 nói ở đề bài. Ta chứng minh chẳng hạn P, Q, R, S cùng nằm trên 1 đường tròn. Dựng đường tròn Σ ngoại tiếp tam giác NKD



Áp dụng bổ đề 1 cho các tứ giác AKDE, BNDC ta được các đường tròn S_4, S_5, Σ cắt nhau tại 1 điểm P và các đường tròn S_2, S_3, Σ cắt nhau tại 1 điểm S, suy ra Σ đi qua P, S. Bây giờ lưu ý rằng trong số 8 giao điểm của các đường tròn S_1, S_2, S_5, Σ có 4 điểm N, A, B, K thẳng hang, suy ra theo bổ đề 2 thì 4 điểm còn lại P, Q, R, S cùng nằm trên 1 đường tròn.

BT16. *Cho tam giác ABC. Đường thẳng d cắt 3 cạnh BC, CA, AB tại A', B', C'. M là 1 điểm nằm trong tam giác ABC và không nằm trên đường thẳng d. Các đường thẳng MA, MB, MC cắt d tại M_a, M_b, M_c. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác MM_aA', MM_bB', MM_cC' đồng quy.*

LG:

Xét phép nghịch đảo $I_{(M,1)} : A' \to X$

$$B' \to Y$$
$$C' \to Z$$
$$M_a \to M_a^*$$
$$M_b \to M_b^*$$
$$M_c \to M_c^*$$

Vì $A', B', C', M_a, M_b, M_c$ thẳng hàng nên X, Y, Z, M_a^*, M_b^*, M_c^* nằm trên 1 đường tròn đi qua M.

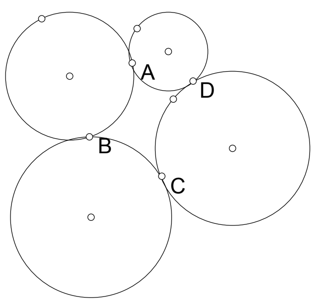
Lại có phép nghịch đảo nói trên biến các đường tròn ngoại tiếp tam giác MM_aA', MM_bB', MM_cC' tương ứng thành các đường thẳng XM_a^*, YM_b^*, ZM_c^*.
Vậy để có điều phải chứng minh ta cần chứng minh XM_a^*, YM_b^*, ZM_c^* đồng quy. Sử dụng định lí Mênênaúyt trong tam giác ABC, MAB, MAC ta có

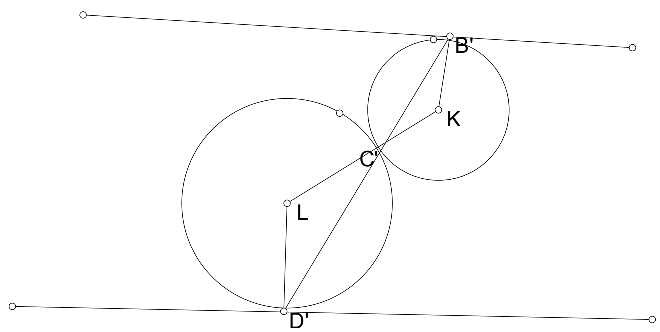
$$\frac{XZ}{XY}.\frac{YM_c^*}{M_a^*M_c^*}.\frac{M_a^*M_b^*}{M_b^*Z}=\frac{A'C'}{A'B'}.\frac{M_aM_c}{B'M_c}.\frac{M_bC'}{M_aM_b}=1$$

Vậy suy ra đpcm.

4. Sử dụng tính chất 8

BT17. *Cho 4 đường tròn mà mỗi đường tròn tiếp xúc ngoài với 2 đường tròn khác. Chứng minh rằng các tiếp điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.*
LG:
Xét qua phép nghịch đảo tâm A. Gọi ảnh của A, B, C, D tương ứng là A', B', C', D'.





Khi đó các đường tròn đã cho biến thành một cặp đường thẳng song song và 2 đường tròn tiếp xúc với nhau . Để chứng minh 4 điểm A, B, C, D nằm trên 1 đường tròn hay đường tròn qua 3 điểm B, C, D đi qua tâm nghịch đảo ta sẽ chứng minh 3 điểm B', C', D' thẳng hàng.
Thật vậy, giả sử K, L là các tâm của các đường tròn. Khi đó L, C', K thẳng hàng vì 2 đường tròn tâm K, L tiếp xúc với nhau; $LB' \parallel KD'$ vì chúng cùng vuông góc với các đường thẳng song song, do đó $\angle LB'C' = \angle KD'C'$. Từ đó $\angle LC'B' = \angle KC'D'$ suy ra B', C', D' thẳng hàng.

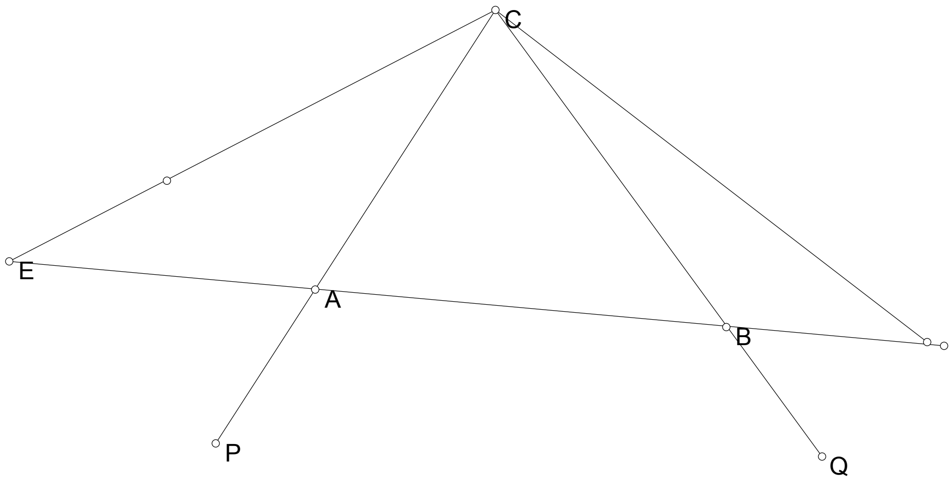
BT18. *Cho tam giác ABC có chu vi 2p cho trước. Các điểm E, F nằm trên đường thẳng AB sao cho CE = CF = p. Chứng minh rằng đường tròn* bàng tiếp (k_1) ứng với cạnh AB của tam giác ABC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp (k) của tam giác CEF.
LG:
Gọi P, Q là tiếp điểm của (k_1) với CA, CB . Khi đó ta có CP = CQ = p = CE = CF suy ra 4 điểm P, Q, E, F cùng nằm trên 1 đường tròn tâm C bán kính p.
Xét phép nghịch đảo $I_{(C,p^2)}: P \to P$

$$Q \to Q$$
$$E \to E$$
$$F \to F$$

nên $I_{(C,p^2)}:(k_1)\to(k_1)$

$(k)\to AB$

Mà AB tiếp xúc với đường tròn (k_1) nên (k) tiếp xúc với (k_1).

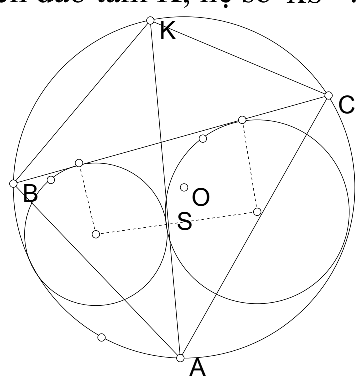


BT19. *Cho đường tròn tâm O. Dựng 2 đường tròn $(O_1),(O_2)$ tiếp xúc ngoài với nhau tại S và tiếp xúc trong với (O). Tiếp tuyến chung ngoài của $(O_1),(O_2)$ cắt (O) ở B, C. Tiếp tuyến chung trong của chúng cắt (O) ở A và A cùng phía S đối với BC. Chứng minh rằng S là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.*

LG:

\+ Gọi giao điểm thứ hai của đường thẳng AS với (O) là K.

\+ Xét phép nghịch đảo tâm K, hệ số KS^2 :



Vì đường tròn (O_1) không đi qua tâm nghịch đảo nên ảnh của nó là 1 đường tròn (O_1') và (O_1') cũng là ảnh của (O_1) qua phép vị tự tâm K tỉ số

$\lambda=\dfrac{KS^2}{P_{K/(O_1)}}=\dfrac{KS^2}{KS^2}=1$, suy ra $(O_1')\equiv(O_1)$.

Tương tự ta cũng có ảnh của đường tròn (O_2) qua phép nghịch đảo trên là chính nó.

Ta có $I_{(K,KS^2)}:(O_1)\to(O_1)$

$(O_2)\to(O_2)$

$BC \to (O')$

mà BC tiếp xúc với $(O_1),(O_2)$ nên (O') tiếp xúc với $(O_1),(O_2)$ lại có (O')đi qua tâm nghịch đảo K suy ra (O') trùng với (O).

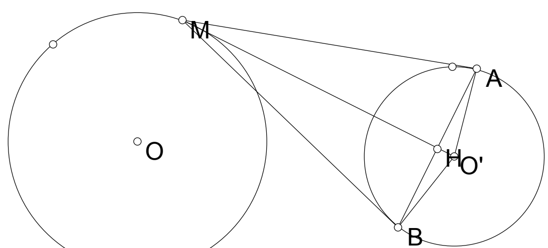
Vậy phép nghịch đảo trên biến đường thẳng BC thành đường tròn (O) mà K, B, C nằm trên (O) nên phép nghịch đảo biến mỗi điểm B, C thành chính nó. Từ đó có KB = KC = KS hay S là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

5. Tìm tập hợp điểm (hay giải bài toán quỹ tích)

Giả sử phải tìm quỹ tích các điểm M. Phương pháp trong phần này là ta chọn 1 phép nghịch đảo xác định để biến M thành M'. Sau đó tìm quỹ tích M' như 1 bài toán quĩ tích hoàn chỉnh. Giả sử quỹ tích M' là hình (H'). Sau đó qua phép nghịch đảo ngược của phép nghịch đảo trên (H') biến thành (H), chính là quỹ tích của M.

BT20. *Cho 2 đường tròn (O, R) và (O', R') nằm ngoài nhau. Trên đường tròn (O) lấy điểm M . Từ M kẻ tới đường tròn thứ hai hai tiếp tuyến MA, MB với A, B là tiếp điểm . Gọi H là giao điểm của AB và MO'. Tìm tập hợp điểm H khi M thay đổi trên (O).*

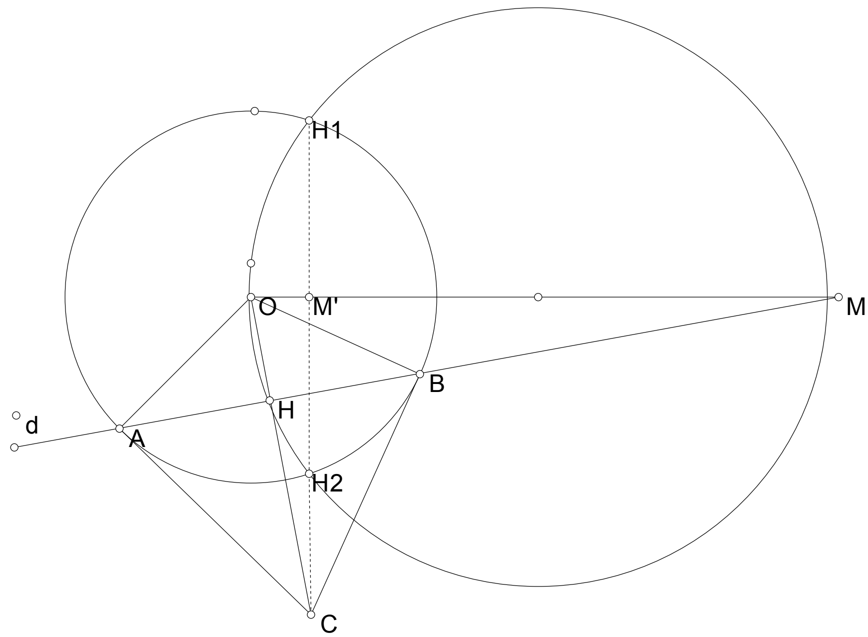
LG:



Chứng minh giống BT1 ta có phép nghịch đảo tâm O', hệ số R'^2 biến M thành H, mà M chạy trên đường tròn (O) nên tập hợp điểm H là ảnh của đường tròn (O) qua phép nghịch đảo trên, tức là 1 đường tròn (S) – là ảnh của (O) qua phép vị tự tâm O', tỉ số $\lambda = \dfrac{R'^2}{P_{O'/(O)}} = \dfrac{R'^2}{O'O^2 - R^2}$.

BT21. *Cho đường tròn (O, R) và điểm cố định M không trùng với tâm O và không nằm trên đường tròn (O, R). Một đường thẳng d đi qua M cắt đường tròn đã cho tại hai điểm A, B. Gọi C là giao điểm các tiếp tuyến của đường tròn đã cho tại A và B. Tìm tập hợp điểm C khi d biến thiên.*

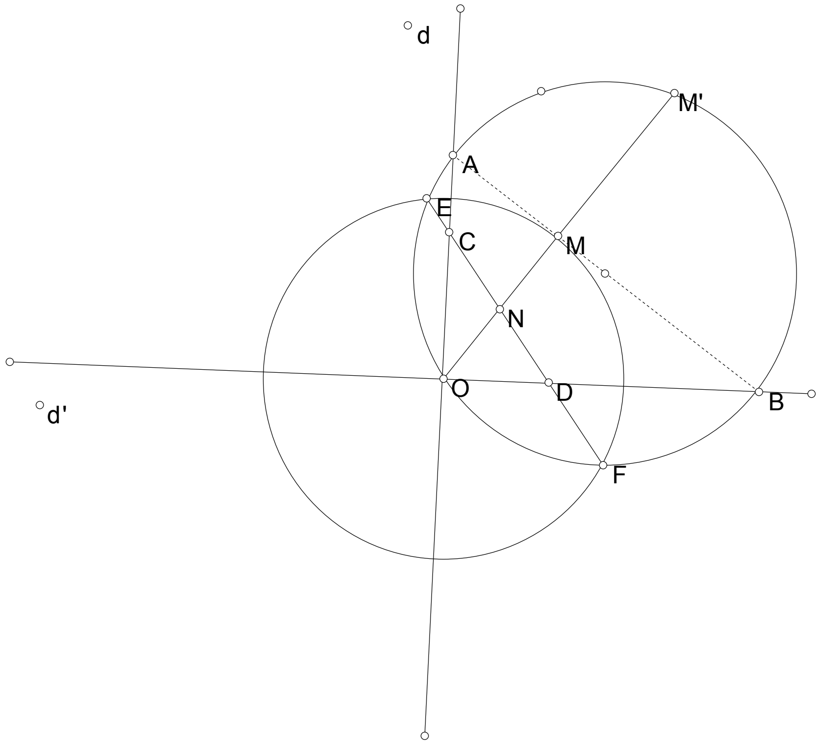
LG:



Gọi H là giao điểm của OC và AB, khi đó OH.OC = R^2. Phép nghịch đảo $I_{(O,R^2)}$ biến H thành C. Vì H nằm trên đường tròn đường kính MO nên ảnh của đường tròn đó trong phép nghịch đảo này là đường thẳng Δ đi qua C. Gọi H_1, H_2 là các giao điểm của 2 đường tròn (O) và đường tròn đường kính OM. Dễ thấy H_1, H_2 biến thành chính nó qua phép nghịch đảo trên, suy ra $H_1H_2 \equiv \Delta$.

BT22. *Cho (C) là đường tròn tâm O bán kính R. Hai đường thẳng cố định d, d' vuông góc với nhau tại O. Điểm M chạy trên (C). Tiếp tuyến của (C) tại M cắt d, d' tại A, B. Trục đẳng phương của (C) và (OAB) cắt d, d' tại C, D. Tìm quỹ tích trung điểm N của CD.*

LG:



Xét phép nghịch đảo $I_{\left(O,R^2\right)}$ biến mỗi điểm E, F thành chính nó nên biến đường tròn (OAB) thành đường thẳng CD

Do đó $I_{\left(O,R^2\right)}: A \to C, B \to D$, suy ra OM đi qua trung điểm N của CD.

Kéo dài OM cắt (OAB) tại M'. Vì AB là đường kính của đường tròn (OAB) nên OM = MM' và $I_{\left(O,R^2\right)}: M' \to N \Rightarrow ON.OM' = R^2 \Rightarrow ON,OM = \frac{R^2}{2}$.

Xét phép nghịch đảo $I_{\left(O,\frac{R^2}{2}\right)}: M \to N$ mà M chạy trên (C) nên quỹ tích N là đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép nghịch đảo này. Đó chính là đường tròn (O, $\frac{R}{2}$).

BT 23. *Trên mặt phẳng cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Giả sử M là một điểm không nằm trên (O), MA, MB, MC cắt (O) lần lượt tại A', B', C'.*

a) Chứng minh rằng : với M ở trong (O) ta có $\frac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{MA'.MB'.MC'}{MA.MB.MC}$

b) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\Delta A'B'C'$ *vuông.*

LG:

a) Ta có $P_{M/(O)} = \overline{MA}.\overline{MA'} = \overline{MB}.\overline{MB'} = \overline{MC}.\overline{MC'} = k$

Xét phép nghịch đảo $I_{(M;k)}: A \to A'$

$$B \to B'$$
$$C \to C'$$
$$(O) \to (O)$$

Theo tính chất của phép nghịch đảo ta có

$$A'B' = \frac{|k|.AB}{MA.MB}; B'C' = \frac{|k|.BC}{MB.MC}; C'A' = \frac{|k|.CA}{MA.MC} \quad (1)$$

Mặt khác lại có $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AB.BC.CA}{4R}; S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{A'B'.B'C'.C'A'}{4R}$

$\Rightarrow \dfrac{S_{\Delta A'B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \dfrac{A'B'.B'C'.C'A'}{AB.BC.CA}$ (2)

Thay (1) vào (2) ta có đpcm.

b) Giả sử $\Delta A'B'C'$ vuông tại A' thì ΔOPQ $A'B' \perp A'C'$ nên B'C' đi qua O suy ra B'C" trực giao với (O). Qua phép nghịch đảo như trên (O) biến than (O), đường thawnge B'C' biến thành đường tròn (MBC), Từ đó (MBC) trực giao với (O). Vậy quĩ tích của M là đường tròn trực giao với (O) và đi qua B, C.

Tương tự nếu $\Delta A'B'C'$ vuông tại B'

6. Một số bài toán khác

BT24. *Ta gọi tỉ số kép của các điểm A, B, C, D trên mặt phẳng là số* $\dfrac{AC}{BC} : \dfrac{AD}{BD}$. *Chứng minh tỉ số kép không đổi qua phép nghịch đảo.*

LG:

Giả sử O là tâm nghịch đảo. Xét phép nghịch đảo tâm O, hệ số 1, ta có ảnh của A, B, C, D tương ứng là A', B', C', D'. Từ đó có

$$A'C' = \frac{AC}{OA.OB}, B'C' = \frac{BC}{OB.OC}, A'D' = \frac{AD}{OA.OD}, B'D' = \frac{BD}{OB.OD}$$

$$\Rightarrow \frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

BT 25. *Giả sử* $A_1A_2...A_n$ *là n – giác đều. M là điểm bất kì trên cung* A_1A_n *của đường tròn ngoại tiếp đa giác,* $d_i = MA_i$. *Chứng minh rằng*

1) $\dfrac{1}{d_1d_2} + \dfrac{1}{d_2d_3} + ... + \dfrac{1}{d_{n-1}d_n} = \dfrac{1}{d_nd_1}$

2) *Nếu n lẻ thì* $d_1 + d_3 + ... + d_n = d_2 + d_4 + ... + d_{n-1}$.

LG:

1)Giả sử độ dài cạnh của n – giác đều bằng a. Qua phép nghịch đảo tâm M, hệ số 1, các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ tương ứng biến thành các điểm thẳng hàng $A'_1, A_2', ..., A_n'$; và đường tròn ngoại tiếp n – giác biến thành đường thẳng $A'_1 A_n'$.

Ta có $A'_1 A_n' = A_1'A_2' + A_2'A_3' + ... + A_{n-1}'A_n'$. Nhưng $A_k'A_{k+1}' = \dfrac{A_kA_{k+1}}{MA_k.MA_{k+1}} = \dfrac{a}{d_k.d_{k+1}}$, vậy suy ra đpcm.

2) Nếu n lẻ, đặt b = $A_1A_3 = A_2A_4 = ... = A_nA_2$. Khi đó sau khi biểu diễn độ dài của các đoạn thẳng trong các đẳng thức:

$$A_1'A_3' = A_1'A_2' + A_2'A_3'; ...; A_{n-2}'A_n' = A_{n-2}'A_{n-1}' + A_{n-1}'A_n'; A_{n-1}'A_1' = A_n'A_1' - A_n'A_{n-1}'; A_n'A_2' = A_n'A_1' - A_1'A_2'$$

qua a, b, d_i ta được

$$\frac{b}{d_k.d_{k+2}}=a\left(\frac{1}{d_k.d_{k+1}}-\frac{1}{d_{k+1}.d_{k+2}}\right),\forall k=\overline{1,n-2}$$

$$\frac{b}{d_2d_n}=a\left(\frac{1}{d_nd_1}-\frac{1}{d_1d_2}\right)$$

$$\frac{b}{d_{n-1}d_1}=a\left(\frac{1}{d_nd_1}-\frac{1}{d_nd_{n-1}}\right)$$

$$\Rightarrow bd_1=a(d_2-d_1);bd_2=a(d_3+d_1),...,bd_{n-1}=a(d_n+d_{n-2});bd_n=a(-d_1+d_{n-1})$$

Lấy tổng các đẳng thức lẻ trừ đi tổng các đẳng thức chẵn ta được

$$b(d_1+d_3+...+d_n)-b(d_2+d_4+...+d_{n-1})=2a(d_2+d_4+...+d_{n-1})-2a(d_2+d_4+...+d_{n-1})$$

$$\Leftrightarrow (b-2a)\left[(d_1+d_3+...+d_n)-(d_2+d_4+...+d_{n-1})\right]=0$$

$$\Leftrightarrow d_1+d_3+...+d_n=d_2+d_4+...+d_{n-1}$$

BT26. *Cho đường tròn ngoại tiếp đa giác 2n cạnh* $A_1A_2...A_{2n}$. *Giả sử* $p_1,p_2,...,p_{2n}$ *là khoảng cách từ 1 điểm M bất kì trên đường tròn đến các cạnh* $A_1A_2,A_2A_3,...,A_{2n}A_1$. *Chứng minh rằng* $p_1p_3...p_{2n-1}=p_2p_4...p_{2n}$.

LG:

Xét phép nghịch đảo tâm M. Khi đó đường tròn biến thành đường thẳng $A'_1A'_{2n}$ .Giả sử p là khoảng cách từ M đến đường thẳng $A'_1A'_{2n}$. Vì $\Delta MA_2A_1\sim\Delta MA'_2A'_1$ còn p_1, p là độ dài các đường cao hạ từ M nên suy ra

$$\frac{p_1}{p}=\frac{MA_1}{MA'_2}=\frac{MA_2}{MA'_1}\Rightarrow\left(\frac{p_1}{p}\right)^2=\frac{MA_1}{MA'_2}.\frac{MA_2}{MA'_1}$$

Tương tự $\left(\frac{p_i}{p}\right)^2=\frac{MA_i.MA_{i+1}}{MA'_i.MA'_{i+1}},\forall i=\overline{1,n}$.

Nhân theo vế ta được

$$\frac{(p_1p_2...p_{2n-1})^2}{p^{2n}}=\frac{MA_1.MA_2...MA_{2n}}{MA'_1.MA'_2...MA'_{2n}}=\frac{(p_2p_4...p_{2n})^2}{p^{2n}}\Rightarrow \text{đpcm.}$$

BT27. *Cho đường tròn (C) có tâm O, bán kính R. Điểm A ở trong hình tròn và khác O. Đặt OA = d. Hai đường tròn thay đổi (S) và (K) luôn tiếp xúc ngoài nhau tại A đồng thời (S) tiếp xúc với (C) tại M và (K) tiếp xúc với (C) tại N. Tìm giá trị ngắn nhất của MN.*

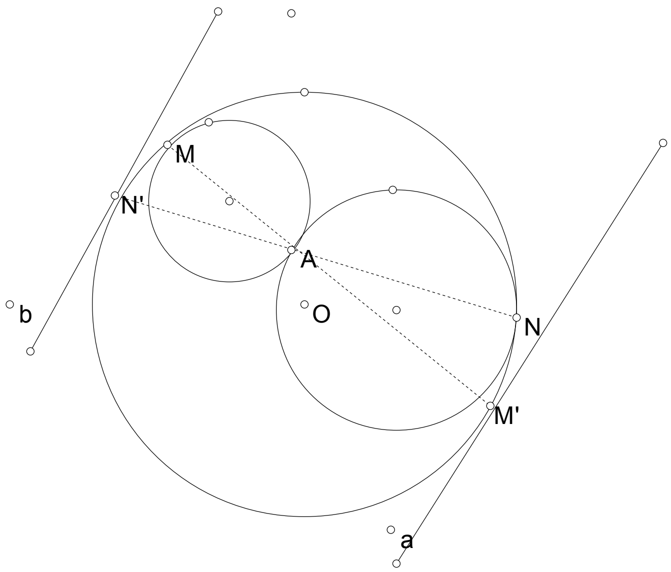
LG:

Xét phép nghịch đảo tâm A, hệ số k = $P_{A/(C)}=d^2-R^2$. Khi đó

$$I_{(A,k)}:(C)\to(C)$$
$$M\to M'$$
$$N\to N'$$

$(S)\to$ đường thẳng a tiếp xúc với (C) tại M'

$(K)\to$ đường thẳng b tiếp xúc với (C) tại N'



$$AM'.AN' \le \frac{1}{2}\left(AM'^2 + AN'^2\right) = \frac{1}{2}\left(d^2 + R^2\right)$$

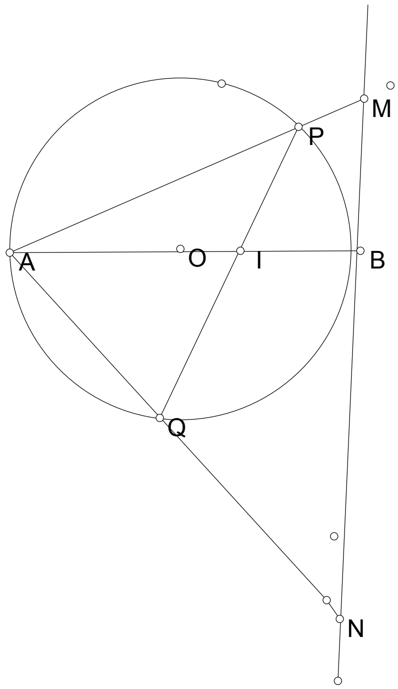
$$\Rightarrow MN \ge \frac{2R\left(R^2 - d^2\right)}{R^2 + d^2}$$

BT28. *Cho (C) là đường tròn tâm O, đường kính AB. Điểm I thuộc đoạn AB và khác A, B. Một dường thẳng d thay đổi qua I cắt (C) tại P, Q, d không trùng AB. AP, AQ cắt tiếp tuyến tại B của (C) tại M, N. Chứng minh rằng đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác AMN luôn đi qua 1 điểm cố định. Từ đó suy ra các tâm của (K) chạy trên 1 đường thẳng cố định.*

LG:

Xét phép nghịch đảo tâm A, hệ số k = AB^2. Khi đó

$$\begin{aligned} I_{(A,k)} : B &\to B \\ (C) &\to MN \\ P &\to M \\ Q &\to N \end{aligned}$$



đường thẳng d không qua A $\to$(K)

Lại có $I_{(A,k)}: I \to I'$ cố định, $I \in d \Rightarrow I' \in (K)$ nghĩa là (K) đi qua điểm cố định I'. Vì (K) đi qua 2 điểm cố định là A và I' nên tâm của (K) chạy trên đường trung trực của AI'.

BT29. *Cho BC là dây cung khác đường kính của (O). Điểm A thay đổi trên cung lớn BC. Đường tròn nội tiếp ΔABC tiếp xúc CA, AB tại N, M. Các đường thẳng OM, ON tương ứng cắt (OAB), (OAC) tại P, Q.*

a)Chứng minh rằng: đường tròn (OPQ) luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định.

b) Tìm vị trí cuả A để bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔOPQ lớn nhất

LG:

Ta có $\angle APO = \angle ABO = \angle BAO$ suy ra 2 tam giác OAP và OMA nên có $OA^2 = ON.OQ$.Tương tự có $R^2 = OA^2 = OP.OM$.

Xét phép nghịch đảo $I_{(O,R^2)}: P \to M, Q \to N \Rightarrow (OPQ) \to MN$.

Do đó để chứng minh (OPQ) luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định ta chứng minh MN luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định không đi qua O.

Gọi K là trung điểm BC, AT $\perp$ MN. Ta có

$$d_{K/MN} = \frac{1}{2}\left(d_{B/MN} + d_{C/MN}\right) = \frac{1}{2}\left(AT.\frac{BM}{AM} + AT.\frac{CN}{AN}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{AT\left(BM + CN\right)}{AM} = \frac{1}{2}\frac{AT}{AM}.BC = \frac{1}{2}BC.\cos\frac{A}{2}$$

Vậy MN luôn tiếp xúc với đường tròn cố định $\left(K;\frac{1}{2}BC\cos\frac{A}{2}\right)$.

MỘT VÀI BỔ ĐỀ TRONG HÌNH HỌC EUCLIDEAN

Phạm Văn Ninh
THPT Chuyên Hạ Long – Quảng Ninh

I. Xây dựng đường đối trung tuyến

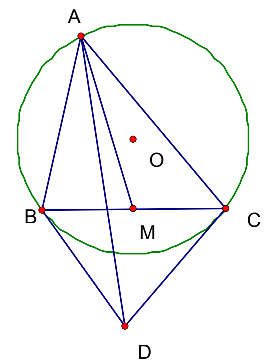
Cho ΔABC nội tiếp đường tròn T; 2 tiếp tuyến tại B và C gặp nhau tại D. CMR: AD là đường đối trung của ΔABC.

Nhận xét: Ta có thể đưa ra 2 lời giải cho bài toán trên.

C_1: Sử dụng thẳng (trực tiếp) ĐL Sin cho Δ (cách suỹ nghĩ hiển nhiên).

C_2: $\Delta\sim$ (cách suy nghĩ thông minh hơn 1 chút)

Bài làm



Cách 1 : Ta thấy đpcm $\Leftrightarrow \angle A_1 = \angle A_2$

Bởi vì cùng xét trong 1 góc A nên ta luôn phải nghĩ đến tính

$$\frac{\sin A_1}{\sin DAC} = \frac{\sin A_2}{\sin MAB} \ ? \qquad (1)$$

hoặc sin A_1 = sin A_2 (2)

Nhưng ta lại thấy có điều kiện cạnh bằng nhau như sau BD = DC, BM = MC nên rất thuận lợi khi c/m (1)

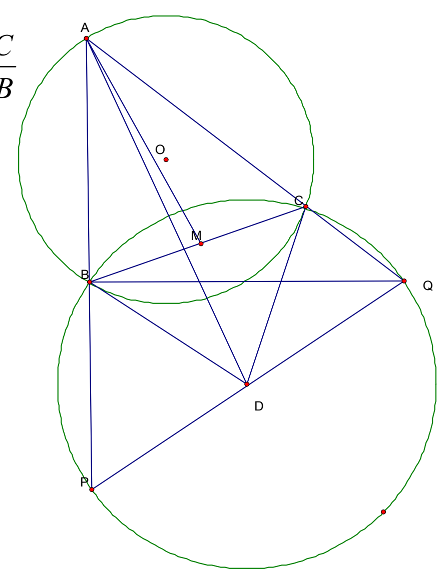
Ta có: $\dfrac{\sin A_1}{\sin DAC} = \dfrac{\sin ADB.BD.AD}{AD.\sin ACD.CD} = \dfrac{\sin ABD}{\sin ACD}$

để ý tinh một chút

ta thấy $\angle ABD = \angle B + \angle A$, $\angle ACD = \angle C + \angle A$,

$$\Rightarrow \frac{\sin A_1}{\sin DAC} = \frac{\sin(B+A)}{\sin(C+A)} = \frac{\sin C}{\sin B} = const \qquad (\text{ đẹp phải không ? })$$

Vậy điều cần phải chứng minh là: $\dfrac{\sin A_2}{\sin MAB} = \dfrac{\sin C}{\sin B}$



Giờ thì lại rất đơn giản vì ta đã xác định được hướng đúng nên cách chứng minh rõ ràng hơn.

Có $\dfrac{\sin A_2}{\sin MAB} = \dfrac{MC.\sin AMC.AB}{AC.\sin AMB.MB} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{\sin C}{\sin B}$

$\Rightarrow$đpcm !!!

Cách 2: Ta thấy liệu có cách nào mà biến AD thành 1 trung tuyến của 1Δ nào đó mà có t/c tương tự như M trong Δ ABC không?

Câu trả lời là sao lại không nghĩ đến phép đồng dạng nhỉ ? Vì ta đã biết $\angle A_1 = \angle A_2$ ta hoàn toàn có căn cứ để xây dựng 1 $\Delta \sim \Delta$ ABC tức là ΔAQP mà nhận AD là trung tuyến

$\Rightarrow \angle ACB = \angle APQ$, $\angle AQP = \angle ABC$

$\Rightarrow$ gợi cho ta nghĩ đến BCQP là tứ giác nội tiếp phải không ?

mà D là trung điểm của PQ nên BCQP là tứ giá nội tiếp với tâm là D; bán kín DB.

$\rightarrow$ Từ nhận xét trên ta làm xuôi lại bài toán như sau

Vẽ đường tròn (D, BD); AB, AC lần lượt cắt (D, BD) tại P, Q

Bây giờ ta phải đi chứng minh P, D, Q thẳng hàng.

hay cần CM: $\angle PBQ = 90^o$.

ta có $\angle PBQ = \angle BAQ + \angle BQA = \frac{1}{2}\angle BOC + \angle BDC = 90^0$

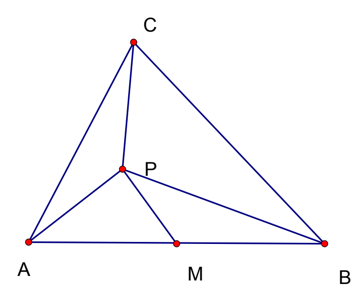
$\Rightarrow$ P, D, Q thẳng hàng

Mà ta dễ có: ΔABC $\sim$ ΔAQP; AM, AD lần lượt là trung tuyến của Δ ABC, ΔAQP nên $\angle A_2 = \angle A_1$

$\Rightarrow$ đpcm (thú vị phải không).

<u>Ví dụ 1</u>: ΔABC có AC = BC và P nằm trong Δ thoả mãn $\angle PAB = \angle PBC$, M là trung điểm của BA. CMR: $\angle APM + \angle BPC = 180^o$.

Gợi ý:



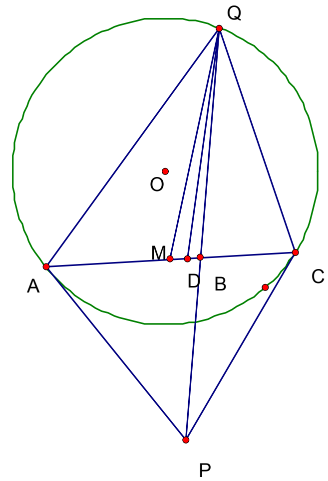
Nếu ta vẽ đường tròn (PAB) thì tiếp tuyến tại A, B cắt tại C với điều kiện (nằm cùng phía với P đối với AB (tức ΔPABC tù)

(vì $\angle PAB + \angle PBA = \angle CAB < 90^o \Rightarrow \angle APB > 90^o$) thì ta được bài toán tương đương với đề bài và tương đương với đề bài và tương đương với bộ đề trên.

$\rightarrow$ có thể giải như chính những bổ đề trên một cách hoàn toàn tương tự

$\rightarrow$ NX: Đây là bài toán để có thể giúp bạn nắm chắc bổ đề 1 hơn dù hình vẽ có xoay thế nào đi chăng nữa.

<u>Ví dụ 2</u>: 3 điểm phân biệt A, B, C cố định theo thứ tự nằm trên 1 đường thẳng (T) là đường tròn qua A, C với tâm đường tròn không thuộc AC. P là giao điểm của 2 tiếp tuyến tại A, C. Giả sử PB cắt (T) tại Q. CMR giao điểm của phân giác $\langle AQC$ và AC không phụ thuộc vào (T).



<u>Gợi ý</u>:

Gọi QD là phân giác của ΔAQC (D $\in$ AC)

Lấy M là trung điểm của AC

Dễ CM $\frac{AB}{BC} = (\frac{AQ}{QC})^2$ bằng Định lý sin trực tiếp mà QD là phân giác của ΔAQC.

$\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{QA}{QC}$ nên $\frac{AB}{BC} = (\frac{AD}{DC})^2$

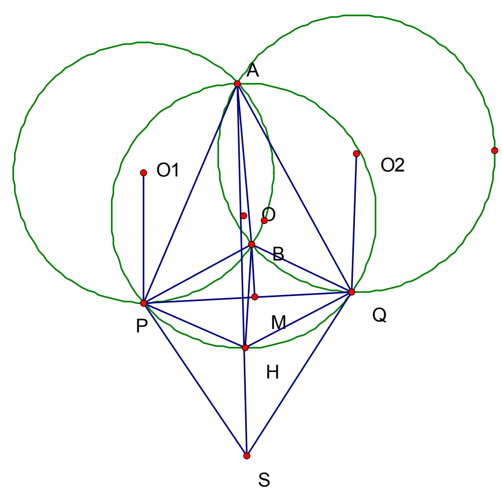
Do A, B, C cố định nên D cố định

$\Rightarrow$ đpcm.

$\rightarrow$ 1 Công thức dành cho đường đối trung: $\frac{AB}{BC} = (\frac{AQ}{QC})^2$

<u>Ví dụ 3</u>: 2 đường tròn (O_1) (O_2) cắt nhau tại A, B . 1 đường tiếp tuyến chung của (O_1) tại P, (O_2) tại Q. Tiếp tuyến tại P, Q của (APQ) cắt nhau tại S. H là điểm đối xứng của B qua PQ. CMR: A, S, H thẳng hàng.

<u>Bài giải</u>



Gọi: AB $\cap$ PQ = <M>

$\Rightarrow PM^2 = MB.MA = MQ^2$.

$\Rightarrow$ M là trung điểm của PQ.

Áp dụng bộ đề (1) $\Rightarrow \langle SAQ = \langle PAM$

Vậy để chứng minh A, H, S thẳng hàng thì cần chứng minh:

$\langle HAQ = \langle SAQ$

ta lại có: $\langle SAQ = \langle PAM$

$\Rightarrow$ cần chứng minh: $\langle HAQ = \langle MAP$

mà $\langle MAP = \langle BPQ = \langle QPH$

$\Rightarrow$ cần chứng minh APHQ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow$ cần chứng minh $\langle PAQ + \langle PHQ = 180^o$ hay $\langle PAQ + \langle PBQ = 180^0$

mà: $\langle PBQ + \langle BPQ + \langle PQP = 180^o$

$\Rightarrow \langle PBQ + \langle PAB + \langle BAQ = 180^o \Rightarrow \langle PBQ + \langle PAQ = 180^o \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 4: ΔABC nội tiếp (20). Tiếp tuyến của (w) tại B, C cắt nhau tạiT. S nằm trên tia BC thoả mãn $AS \perp AT$. B_1, C_1 nằm trên tia ST sao cho $C_1 \in [ST]$.

$B_1 \in [ST]$ sao cho $C_1T = B_1T = BT = TC$. CMR. $\Delta ABC \sim \Delta AC_1B_1$

Gợi ý.

Ta cần CM $\Delta ABC \sim \Delta AC_1B_1$

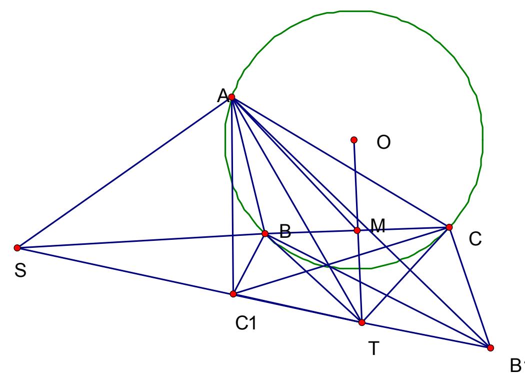
$\Rightarrow \Delta AMC \sim \Delta ATB_1$ (1)

Dễ có: SAMT là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle SMA = \angle STA$ hay $\Rightarrow$

$\angle AMC = \angle ATB_1$

$\Rightarrow$ để CM (1) cần CM : $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AT}{TB_1}$



Hay $\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{AT}{TB} \Leftrightarrow \dfrac{\sin ABT}{\sin BAT} = \dfrac{\sin ACM}{\sin MAC}$

(2)

mà $\angle BAT = \angle MAC$ (bộ đề 1)

và $\angle ABT = \angle ABC + \angle TBC = 180^0 - \angle MCA$

$\Rightarrow$ (2) được CM $\Rightarrow$ đpcm

Chế bài toán: (O) ngoại tiếp ΔABC, T là giao điểm của 2 tiếp tuyến tại B, C. Kẻ $AS \perp AT$, lấy B_1 đến [ST] sao cho $SABB_1$ là tứ giác nội tiếp

CMR: $TB_1 = TB$

Ví dụ 5

Cho ΔABC nhọn và không cân. M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB

Trung trực của AB và AC cắt tia AM tại D, E lần lượt và BD, CE cắt nhau tại F nằm trong ΔABC. CMR: A, N, F, P cùng nằm trên 1 đường tròn

Gợi ý

$$\text{Xét } \frac{\sin AFB}{\sin AFC} = \frac{AB.\sin ABF}{AC.\sin ACF} = \frac{AB.\sin BAD}{AC.\sin DAC} = 1$$

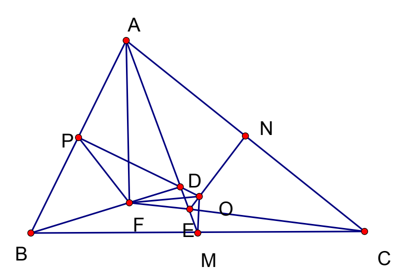
$\Rightarrow \angle AFB = \angle AFC$ (nhớ giải thích nhá v.v.)

Xét $\angle BFC = \angle FBA + \angle A + \angle ACF$

$= \angle BAD + \angle A + \angle DAC = 2\angle A$

mà $\angle BOC = 2\angle A$

$\Rightarrow$ BFOC là tứ giác nội tiếp



$\Rightarrow \angle AFB + \angle AFC = 180^o - \angle A$

$\Rightarrow \angle FAB = 180^o - \angle FBA - \angle AFB = 180^o - (180^o - \angle A - \angle BAD$

$= \angle DAC \;\; = \angle MAC$

mà: $\angle FON = 360^0 - \angle FOC - \angle CON = 360^0 - (180^0 - \angle FBC) - \angle ABC$

$= 180^o - \angle ABC + \angle FBC$

$= 180^o - \angle BAD \; = 180^o - \angle FAN$

$\Rightarrow$ FANO là tứ giác nội tiếp

mà APCN nội tiếp

$\Rightarrow$ A, N, F, P là tứ giác nội tiếp

II. Đường kính của đường tròn nội tiếp

Đường tròn (I) nội tiếp ΔABC, tiếp xúc với BC tại D. DE là đường kính của (I). Nếu AE cắt BC tại F. CMR. BD = CF.

Bài giải

Đây có lẽ là 1 bài toán quen thuộc nếu vẽ đầy đủ hình như hình bên.

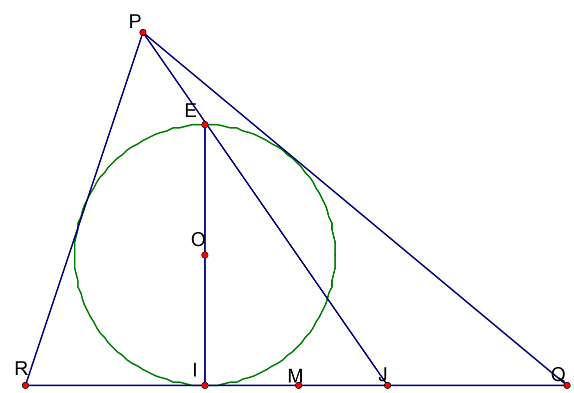
Xét phép vị tự tâm A: I $\rightarrow$ J

$\Rightarrow V_A$, E $\rightarrow$ F

(JE $\perp$ BC, IE $\perp$ BC, JE $\parallel$ IE)

$\Rightarrow$ A, E, F thẳng hàng

$\Rightarrow$ FC = BD $\rightarrow$ đpcm



*** Một số bài tập liên quan**

Ví dụ 1

Cho ΔABC có AB + BC = 3AC. Đường tròn (I) nội tiếp Δ ABC, tiếp xúc AB, BC tại D, E.

Lấy K, L là điểm đối xứng của D, E qua I

CMR: ALKC nội tiếp

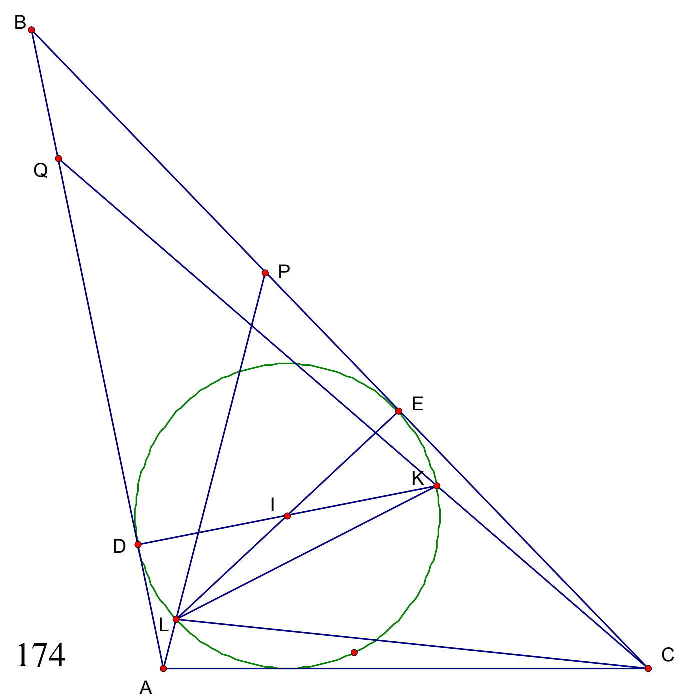
Bài giải Kẻ LA cắt CB tại P $\Rightarrow$ CP = BE

Ta thấy: BE + BD + DA + EC = 3AC

$\Rightarrow$ 2BE = 2BD = 2AC

$\Rightarrow$ BE = BD = AC = PC

Có: $\angle PLK = \angle PLE + \angle ELK =$



$\frac{1}{2}\langle ACB + \frac{1}{2}\langle ABC$

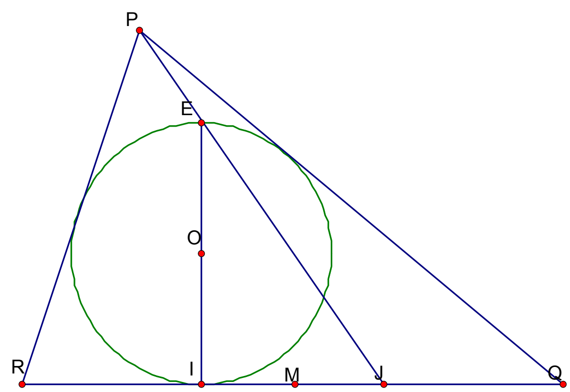
$= 90^o - \frac{1}{2}\langle BAC$

Lấy $CK \cap AB = (Q) \Rightarrow$ tương tự như trên ta có:

$\langle ACQ = \langle AQC = 90^o - \frac{1}{2}\langle BAC$

$\Rightarrow \langle PLK = \langle ACK \Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2: Cho đường tròn (C), đường thẳng l tiếp xúc với (C) và M nằm trên l. Tìm quỹ tích điểm P thoả mãn tính chất : Tồn tại 2 điểm R, Q trên l mà M là trung điểm RQ và (C) nội tiếp ΔPQR.



Bài toán này thực chất là bỏ bớt các đường và một số điểm trên bộ đề 2 buộc bạn phải có 1 cách nhìn khá độc đáo.

gọi (O) tiếp xuc với l tại I

Kéo dài OI cắt (O) tại E.

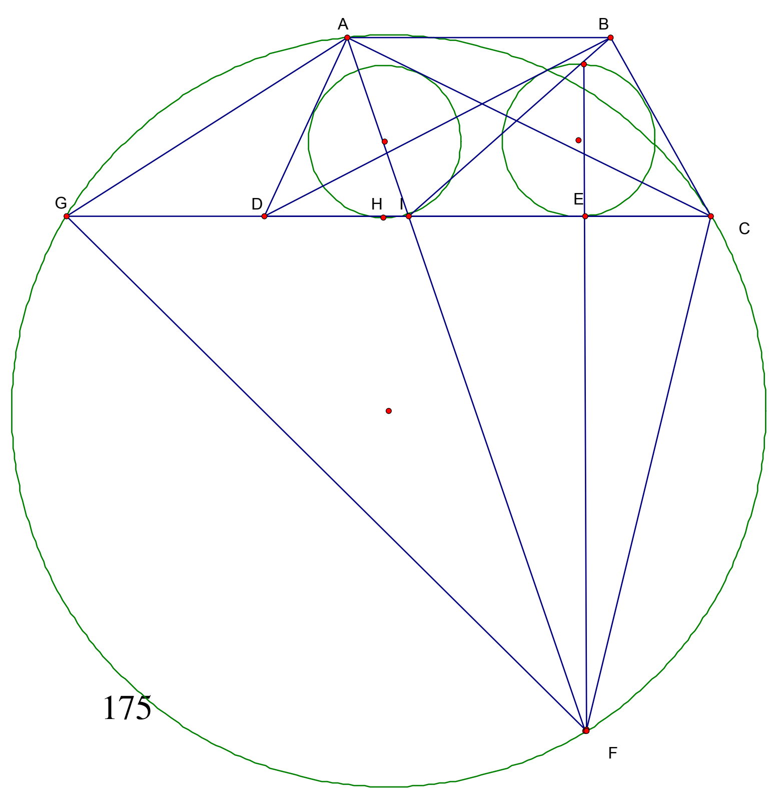
Lấy J sao cho M là trung điểm của IJ

Theo bộ đề (2) ta có P nằm trên đường thẳng EI.

Ví dụ 3

Cho hình thang cân ABCD với AB // CD. Đường tròn nội tiếp (w) của Δ ABC tiếp xúc với CD tại E. F là điểm nằm trên tia phân giác trong của góc DAC thoả mãn $EF \perp CD$, đường tròn ngoại tiếp ΔACF cắt CD tại C và G

CMR: AFG là tam giác cân.



Bài giải

Đây hoàn toàn là cách che giấu hình, che giấu điểm F là tâm bằng tiếp. Nếu đã nhận ra tính chất của điểm F thì bài toán lại vô cùng đơn giản. Đây chỉ là bài toán kiểm tra cách hiểu về bộ đề 2 đến đâu thôi.

Ta có $\langle GAF = \langle GCF = 90^o - \langle\frac{ACD}{2}$

$$= 180^o - \frac{\angle ACD}{2} - \frac{\angle ACD}{2} + \angle GCF = 180^o - \angle ACD - \angle GCF$$

$$= 180^o - \angle ACF = \angle AGF$$

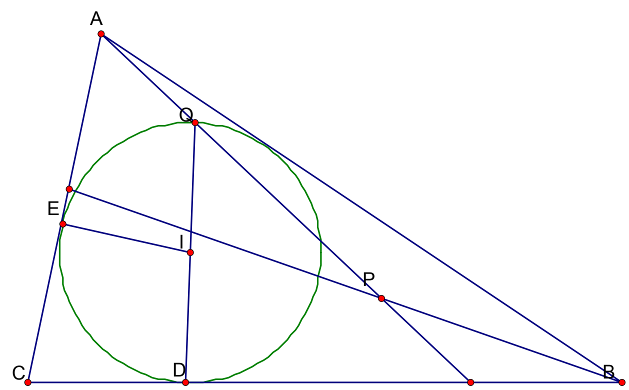
$\Rightarrow \Delta GAF$ cân tại F (đpcm).

<u>Ví dụ 4</u> ΔABC có (w) là đường tròn nội tiếp. (w) tiếp xúc BC, AC tại D_1, E_1. D_2, E_2 là điểm trên BC, AC mà $CD_2 = BD_1$, $CE_2 = AE_1$. $AD_2 \cap BE_2 = P$.

Đường tròn (w) cắt AD_2 tại 2 điểm, Q gần A (Q là giao điểm của AD_2 và (w)).

CMR: $AQ = D_2P$

<u>Bài giải</u>



Theo bộ đề (2) , Q, I, D_1 thẳng hàng

Ta có: $\frac{AQ}{AD_2} = \frac{r}{r'}$ với r, r' là bán kính nội tiếp của ΔABC

Xét ΔACD_2 có E_2, P, B thẳng hàng nên theo ĐL Mênêlauynl ta có

$$\frac{PA}{PD_2} \times \frac{PD_2}{BC} \times \frac{CE_2}{AE_2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{PA}{PD_2} = \frac{BC.\ CE_1}{CD_1.\ AE_1} = \frac{BC}{AE_1}$$

$$\Rightarrow \frac{D_2A}{PD_2} = \frac{BC.\ AE_1}{AE_1} = \frac{P}{P - a}$$

$$\Rightarrow \frac{PD_2}{D_2A} = \frac{r}{r'}$$

$\Rightarrow PD_2 = AQ.$

<u>Ví dụ 5</u>

ΔABC có trực tâm H, tâm nội tiếp I và ngoại tiếp O . (I) tiếp xúc BC tại K . Gỉa sử IO//BC. CMR: AO // HK.

<u>Bài giải</u>

I k $\cap$ (I) = {L}; {N} = CL $\cap$ BA

Theo bộ đề ta dễ có: $\begin{cases} NA = BK \\ KM = MN \end{cases}$

Ta có OM = IK (do IO // BC)

mà CH = 2OM, LK = 2 IK

$\Rightarrow$ KL = CH mà LK//CH ($\perp$BA)

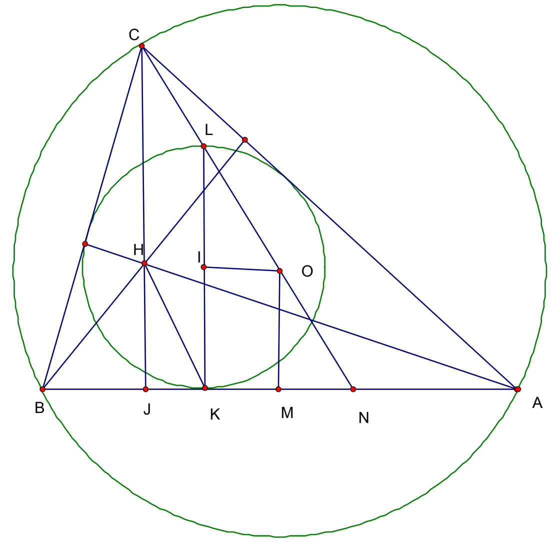
$\Rightarrow$ CLKH là hình bình hành $\Rightarrow$ HK//CL.

Kẻ IO' // KN $\Rightarrow$ IO' = $\frac{1}{2}$ KN = KM

$\Rightarrow$ IO' // BA $\Rightarrow$ O'M = $\frac{1}{2}$ CH và O'M $\perp$ BA

$\Rightarrow$ O' $\equiv$ O

$\Rightarrow$ đpcm



<u>Ví dụ 6</u> [IMO 2008]. Đây là bài toán chắc đã rất quen thuộc với hầu hết các bạn. Nó được coi là bài hình thuộc loại khó nhất trong các kỳ thi IMO trước đây. Nhưng nếu biết về bộ đề trên thì lại không khó. Bài toán này sẽ để các bạn tự nghĩ với 3 bộ đề sẽ cho bên dưới.

Cho ABCD là 1 tứ giác lồi mà BA $\neq$ BC. (I_1), (I_2) là đường tròn nội tiếp Δ ABC, ΔADC. Giả sử tồn tại 1 đường tròn (w) tiếp xúc với tia BA, BC tại BC, AB và đều tiếp xúc đến AD và CD CMR: tiếp tuyến chung ngoài của (I_1), (I_2) cắt nhau tại điểm nằm trên (w).

Gợi ý các bộ đề

Bộ đề 1: DA + BA = BC + CD

Bộ đề 2: D, I, J thẳng hàng.

Bộ đề 3: I, J, T thẳng hàng với OT $\perp$ AC và T thuộc (O)

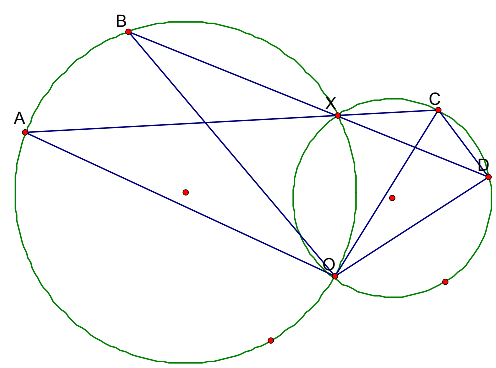
<u>III Tâm xoắn</u>

Cho 2 đoạn thẳng AB và CD. AC và BD cắt nhau tại X. (ABX)$\cap$(XCD)= {O}. Thì O là tâm xoắn biến AB thành CD hay AC thành BD.

Có $\angle OBD = \angle OAC$, $\angle ODB = \angle OCA \Rightarrow \Delta$OAC ~ ΔOBD (g.g)

$\Rightarrow$ ΔOAB ~ ΔOCD

$\Rightarrow$ đpcm.



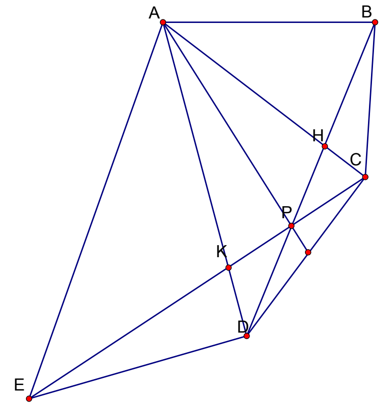
<u>Bài toán liên quan</u>

<u>Ví dụ 1</u>: Cho ngũ giác lồi ABCDE thoả mãn $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ và $\angle CBA = \angle EDA$ BD $\cap$ CE = (P)

CMR: AP cắt CD tại trung điểm của CD.

Gợi ý:

Ta dễ dùng tam giác đồng dạng



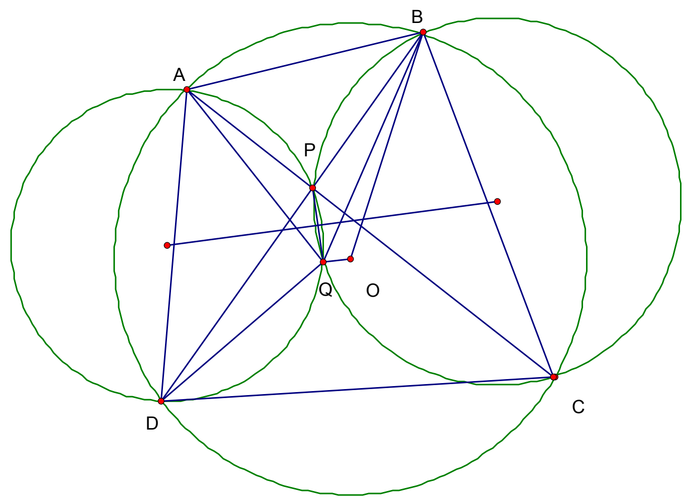
$\Rightarrow \dfrac{AH}{HC} = \dfrac{AK}{KD}$

$\Rightarrow$ đpcm (theo Menelauyt)

Ví dụ 2. ABCD là tứ giác lồi nội tiếp(O). $AC \cap BD = \{P\}$, (ABP) $\cap$ (CDP) =P và Q

Giả sử O, P, Q phân biệt. CMR: $\angle OQP = 90^0$

Bài giải



$\angle AQB = \angle AQP = \angle PQB$

$= \angle ADB + \angle ACB = \angle AOB$

$\Rightarrow$ AQOB là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle PQO = \angle AQO - \angle AQP$

$= 180^o - \angle ABO = \angle ADB$

$= 180^o - = \dfrac{\angle AOB}{2}$

$= 90^o$.

Vậy $\angle OQP = 90^o$.

Ví dụ 3: Tứ giác ABCD. AC $\cap$ BP = {P}, (O_1), (O_2) là đường tròn ngoại tiếp ΔADP và ΔBPC. M, N, D là trung điểm của AC, BD, O_1O_2. CMR: O là tâm ngoại tiếp ΔPMN

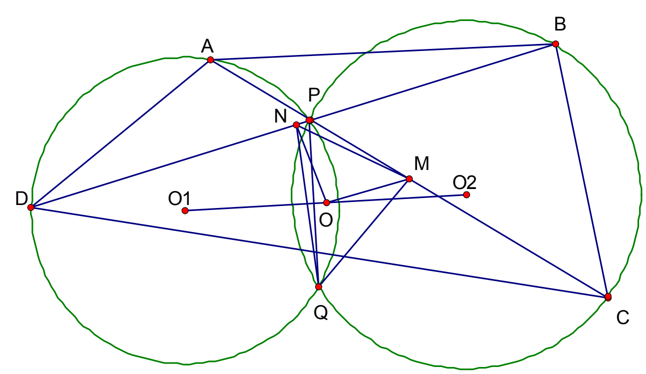
Gợi ý:

Chẳng qua bài này người ta giấu điểm Q đi. Chứ hoàn toàn giống bộ đề (3)

Có $\Delta AQC \sim \Delta DQB$

$\Rightarrow \Delta MQC \sim \Delta NQB$ (do N, M lần lượt là trung điểm của DB, AC)

$\Rightarrow \angle BNQ = \angle QMC \Rightarrow$ PNQM là tứ giác nội tiếp



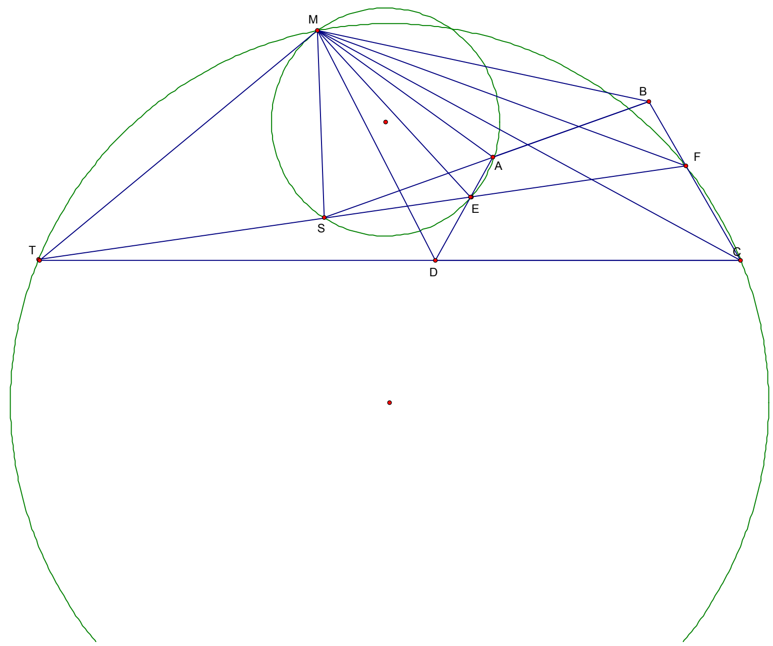
Ta lại có: $\Delta QDB \sim \Delta QO_1O_2$

$\Rightarrow \angle QOO_1 = \angle QND = \angle QMA = \angle QMP$

$\Rightarrow \angle QMP = \frac{1}{2}\angle QOP$

⇒ O là tâm ngoại tiếp ∆MNP (OO_1 là đường trung trực của PQ).

Ví dụ 4: Cho tứ giác lồi ABCD. E ∈ AD, F∈ BC thoả mãn $\frac{AE}{ED}=\frac{BF}{FC}$ tia FE cắt tia BA, CD tại S và T. CMR: (SAE) , (SBF), (TCF), (TDE) qua 1 điểm cố định.



Gợi ý:

Gọi (SAE) ∩ (SBF) = {M}

Ta có : M là tâm xoắn của (SAE), (SBF).

⇒ ∆MAE ~ ∆MBF (g.g).

⇒ ∆MAD ~ ∆MBC

⇒ ∆MAB ~ ∆MDC

⇒ $\angle MBA = \angle MCD$

mà $\angle MBA = \angle MFE$ (do MBFS là tứ giác nội tiếp).

⇒ $\angle MFE = \angle MCT$

⇒ MFCT là tứ giác nội tiếp.

Tương tự TMED là tứ giác nội tiếp.

Ví dụ 5

Cho tứ giác lồi ABCD với BC = AD và BD # AD. E ∈ [BC], F ∈ [AD] sao cho BE = DF. AC ∩ BD = (P), BD ∩ EF = (Q), EF ∩ AC = (R), giả sử E, F thay đổi. CMR (PQR) thay đổi nhưng luôn đi qua 1 điểm cố định khác P.

Bài giải

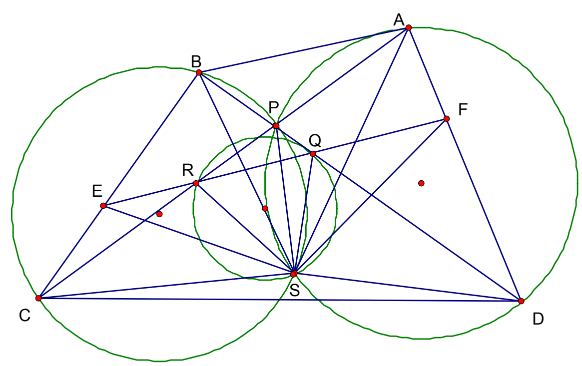
Gọi (BPC) ∩ (APD) = (S)

S là tâm xoắn biến CA thành BD

⇒ S là tâm xoắn biến CD thành AD.

⇒ ∆SCB ~ ∆SAD

mà BE = FD, CE = AF



⇒ ∆SCE ~ ∆SAF ⇒ $\angle SEC = \angle SFA$

⇒ ∆SEF ~ ∆SCA ~ ∆SBD (g.g)

$$\Rightarrow \begin{cases} \angle SER = \angle SCR \\ \angle SFG = \angle SOB \end{cases}$$

⇒ CERS, SQFD là tứ giác nội tiếp.

⇒ $\angle CRS + \angle DQS = \angle SEC + \angle SFD = \angle SFA + \angle SFD = 180^0$

$\Rightarrow \angle PRS + \angle \mathrm{PQS} = 180^0$

$\Rightarrow \angle PRSQ$ là tứ giác nội tiếp.

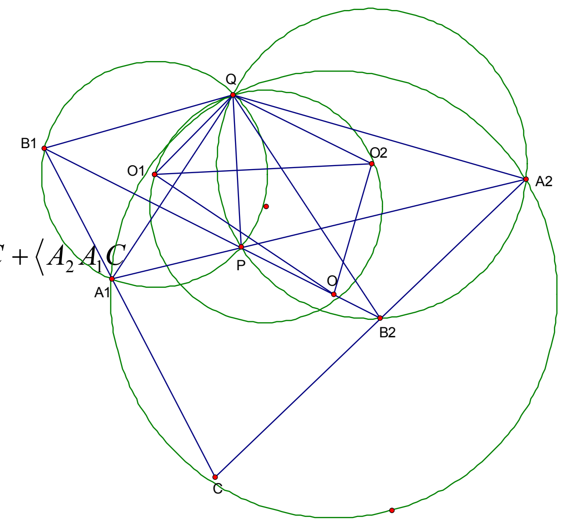
mà S cố định vì (S'F (PAD) $\cap$ (PBC)

Nên (PRQ) luôn đi qua điểm S cố định.

Ví dụ 6: Cho $(S_1) \cap (S_2)$ tại P, Q; lấy 2 điểm A_1, B_1 trên (S_1). A_1P và B_1P cắt (S_2) tại A_2 và B_2 và A_1B_1 và A_2B_2 cắt nhau tại C. CMR nếu A_1, B_1 thay đổi, (A_1A_2C) có tâm nằm trên đường tròn cố định.

Gợi ý:

G là tâm xoắn biến $B_1B_2 \rightarrow A_1A_2$, $B_1A_1 \rightarrow B_2A_2$



$\Rightarrow \angle A_1QA_2 = \angle B_1QB_2$, $\angle B_1QA_1 = \angle B_2QA_2$

Có $\angle A_2A_1C = \angle B_1QP = \angle A_1QB + \angle B_2QA_2$

$\Rightarrow \angle QA_1C + \angle QA_2C = \angle QA_1A_2 + \angle QA_2A_1 + \angle A_1A_2C + \angle A_2A_1C$

$\angle QA_1A_2 + \angle QA_2A_1 + \angle PQB_2 + \angle A_1QP + B_2QA$

=

$\angle A_1QA_2 + \angle QA_1A_2 + \angle QA_2A_1 = 180^0$

$\Rightarrow QA_1CA_2$ nội tiếp

$\Rightarrow OO_2 \perp A_2Q$

$\Rightarrow \angle QAO_2 = \angle QCA_2 = \angle QA_1A_2 = \angle QA_1A_2 = \angle QO_1O_2$

$\Rightarrow$ Vậy QO_1 OO_2 nội tiếp hay O luôn $\in$ đường tròn cố định QO_1O_2.

Ví dụ 7: ΔABC nhọn, đường cao AD, BE, CF và H là trực tâm. (w) tâm O đi qua A, H cắt AB, AC tại Q, P (khác A). (OPQ) tiếp xúc BC tại R.

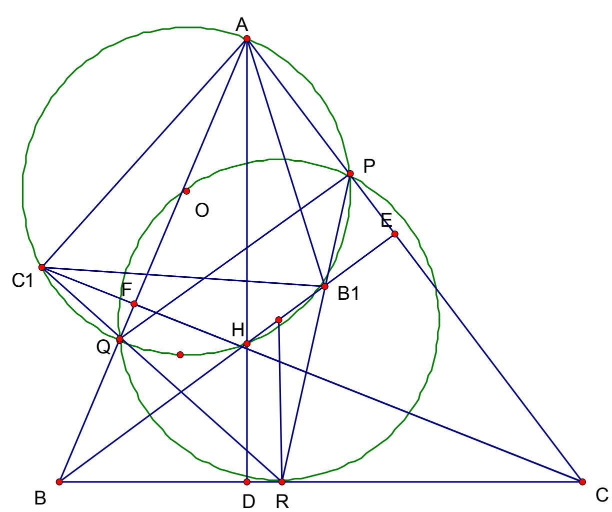
CMR: CR/BR = ED/FD

Bài giải

Theo Đl Pascal Áp dụng cho 6 điểm $ACEHB_1P$.

thì có: B, R', C thẳng hàng

với R' là giao điểm của QC_1, PB_1.



Có $\Delta AC_1F \sim \Delta AB_1E$

$\Rightarrow \angle C_1A\mathrm{F} = \angle B_1AE$

Có: $\angle QR'P = C_1HB_1 - HC_1R' - HB_1R'$

$= 180^o - \angle C_1AB_1 - \angle HAD - \angle HAQ$

$= 180^o - 2\angle BAC$

$= 180^o - \angle QOP$

$\Rightarrow \langle POQR'$ nội tiếp $\Rightarrow$ R' = R

có $\dfrac{CR}{CP}=\dfrac{\sin CPR}{\sin PRC}=\dfrac{\sin APB_1}{\sin PQR}=\dfrac{\sin APB_1}{\sin C_1AP}=\dfrac{AB_1}{C_1}\Rightarrow CR=CP.\dfrac{AB_1}{C_1P}$

mà: $\Delta C_1PC \sim \Delta AHC \Rightarrow \dfrac{CP}{C_1P}=\dfrac{HC}{AH}\Rightarrow CR=\dfrac{HC.AB_1}{AH}$

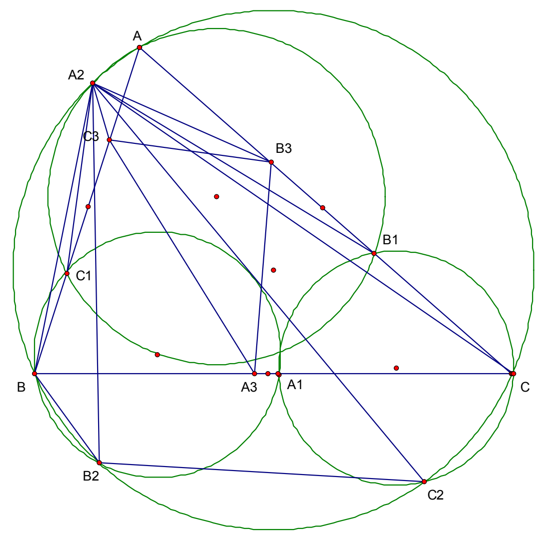
$\Rightarrow \dfrac{BR}{CR}=\dfrac{HB.AC_1}{HC.AB_1}=\dfrac{HB.AC}{HC.AB}=\dfrac{HB.\sin B}{HC.\sin C}=\dfrac{FD}{ED}$ (do $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta ABC$)

Bài này sẽ khá rối nếu bắt ta CM: $\dfrac{QR}{RP}=\dfrac{FD}{ED}$

Ví dụ 8: Các điểm A_1, B_1, C_1 được chọn trên BC, CA, AB của ΔABC (AB_1C_1), (BC_1A_1), (CA_1B_1) cắt (ABC) tại A_2, B_2, C_2 phân biệt với nhau và với A, B, C

A_3, B_3, C_3 đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của BC, CA, AB

CMR: $\Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta A_3B_3C_3$



Gợi ý:

có: $\Delta A_2BC_1 \sim \Delta A_2CB_1$

$\Rightarrow \dfrac{A_2B}{A_2C}=\dfrac{BC_1}{B_1C}=\dfrac{AC_3}{AB_3}$

$\Rightarrow \Delta A_2BC \sim \Delta AC_3B_3$

$\Rightarrow (CA_2, CB) = (B_3A, B_3C_3)$

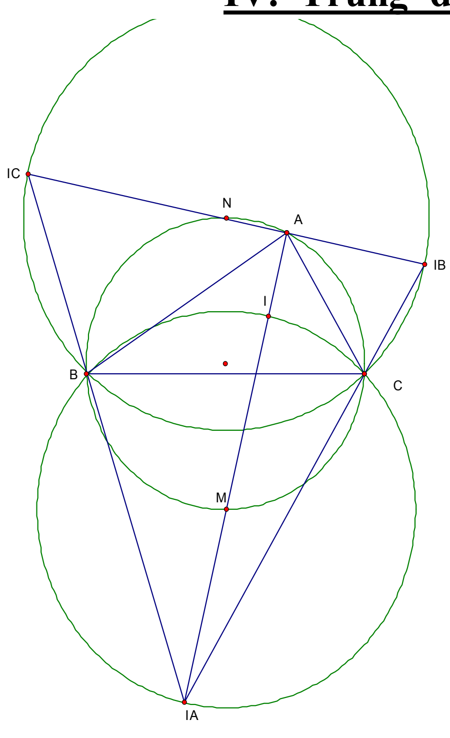
Tương tự $(AB, AC_2) = (A_3C_3; AC)$

Ta có $(B_2A_2, B_2C_2) = (B_2A_2, B_2B) + (B_2B; B_2C_2) = (CA_2, CB) + (AB, AC_2)$

$= (AC, B_3B_3) + (A_3C_3; AC)$

$= (A_3C_3; B_3B_3) \mapsto$ đpcm

IV. Trung điểm của cung cách đều các đỉnh và tâm nội tiếp và bàng tiếp



Cho ΔABC, I là tâm nội tiếp I_A, I_B, I_C là tâm bàng tiếp tương ứng. M là trung điểm cung BC của (ABC) không bao gồm A; N là trung điểm cung BC chứa A: CMR: $MB = MC = MI = MI_A$, $NB = NC = NI_B = NI_C$.

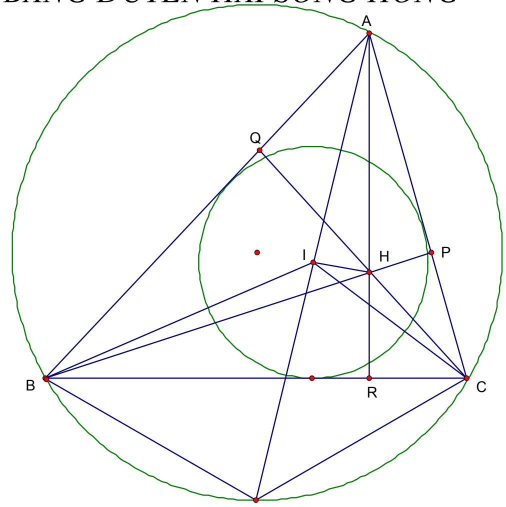
Bài này chỉ đơn thuần là cộng góc nên các bạn hãy tự làm

Bài toán liên quan

Ví dụ 1: Cho ΔABC nhọn $\langle BAC = 60^0, AB > AC$ I là tâm nội tiếp , H là trực tâm

CMR: $2\langle AHI = 3\langle ABC$

Bài giải



Dễ có BIHC là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle BHI = \angle BCI$

$\Rightarrow \angle IHR = \angle IHB + \angle BHR = \angle BCI + \angle C = \frac{3}{2}\angle C$

$\Rightarrow \angle AHI = 180^0 - \frac{3}{2}\angle C = \frac{3}{2}\angle B$

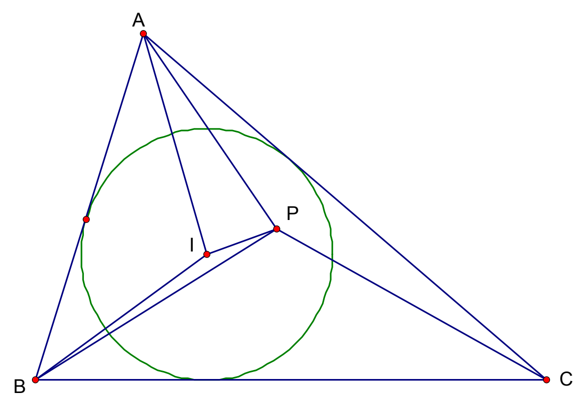
(vì $\angle B + \angle C = 120^0$)

$\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 2: Cho ΔABC ngoại tiếp (I).
1 điểm P nằm trong Δ thoả $\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$

CMR: AP $\geq$ AI. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ P $\equiv$ I

Gợi ý



TH1: $\angle BCD > \angle \frac{C}{2}$

Dễ có BIPC là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle BIP = 180^0 - \angle BCP$

có $\angle AIP = 360^0 - \angle AIB - \angle BIP$

$= 180^0 + \angle BCP - (180^0 - \frac{A}{2} - \frac{B}{2})$

$= \angle BCP + \frac{A}{2} + \frac{B}{2} > 90^0$

$\Rightarrow$ AP $\geq$ AI

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ P $\equiv$ I

TH2: Các bạn hãy tự làm

Ví dụ 3: Cho ABCD là tứ giác nội tiếp. $\mathcal{M}$ là tập hợp tâm nội tiếp và ngoại tiếp của ΔBCD, ΔCDA, ΔDAB, ΔABC (16 điểm tổng cộng) CMR. Tồn tại 2 tập hợp $\mathcal{K}$, $\mathcal{L}$ mỗi tập hợp có 4 đường thẳng phân biệt mà cứ 4 đường bất kì ở $K \cup L$ bao gồm chính xác 4 điểm của $\mathcal{M}$.

Bài làm

Gọi I_{xyz} là tâm nội tiếp ΔXYZ, $I_{x,y,z}$ là tâm bàng tiếp ΔXYZ đối với X.

có: $\angle AI_{ABD}I_{ACD} = 180^0 - \angle ADI_{ADC} = 180^0 - \angle\frac{ADC}{2}$

$\angle AI_{ABD}I_{ABC} = 180^0 - \angle ABI_{ABC} = 180^0 - \angle\frac{ABC}{2}$

$\Rightarrow \angle I_{ABC}I_{ABD}I_{ACD} = 90^0$

$\Rightarrow$ tương tự ta có $I_{ABC}I_{ABD}I_{ACD}I_{BCD}$ là hình chữ nhật

4 bộ thẳng hàng l_1: $I_{C,AD}$, I_{ABD}, I_{ABC}, $I_{D,BC}$

l_2: $I_{B,AD}$, I_{ACD}, I_{BCD}, $I_{A,BC}$

l_3: $I_{B,AC}$, $I_{B,CD}$, $I_{A,CD}$, $I_{D,AD}$

l_4: $I_{C,BD}$, $I_{C,BA}$, $I_{D,BA}$, $I_{D,AC}$

Để Cm 4 điểm thẳng hàng. Chúng ta sẽ CM l_1 //l_3

Vì $I_{A,CD}$, $I_{B,CD}$, I_{ACD}, I_{BCD} cùng $\in$ 1 đường tròn

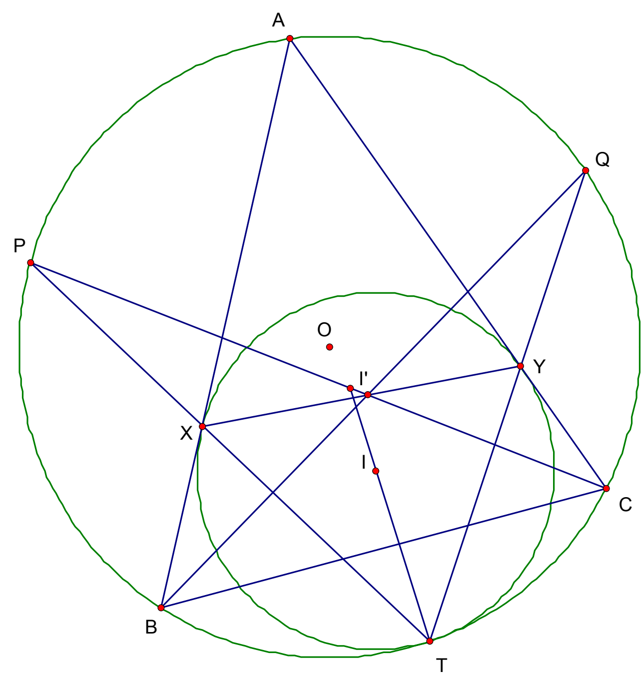
$\Rightarrow$ cần CM: $\angle I_{B,CD} I_{ACD} I_{BCD} = \angle I_{A,CD} I_{ACD} I_{BCD}$

mà $\angle I_{B,CD} I_{ACD} I_{BCD} = \angle I_{A,CD} I_{ACD} I_{BCD} = 180^0 - \left\langle \frac{ACD}{2} - \langle \frac{BDC}{2} \right.$

<u>V. I là trung điểm của dây cung được nối 2 tiếp điểm của các đường tròn tiếp xúc nhau</u>.

Cho ΔABC, (I) đường tròn tiếp xúc trong (O) và với 2 cạnh của Δ (I) tiếp xúc AB, AC tại X, Y CMR: I' là trung điểm của XY với I' là tâm nội tiếp Δ ABC

<u>Bài giải</u>



Từ TY kéo dài cắt (O) tại Q, TX kéo dài cắt (O) tại P

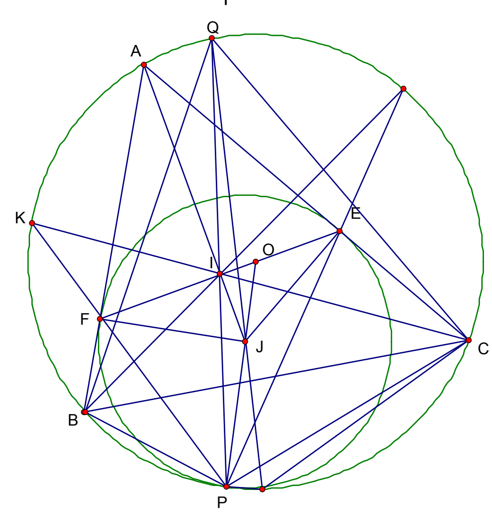
$\Rightarrow$ Q, P là trung điểm của cung AC, AB

$\Rightarrow$ CP,BQ là phân giác của $\langle ACB, \langle ABC$

Theo Đl Pascal áp dụng cho 6 điểm APBTCQ thì X, I', Y thẳng hàng

Ta có: AI' là phân giác của $\langle XAY$ mà XA = YA nên I' là trung điểm của XY (đpcm)

Một số bài toán liên quan



<u>Ví dụ 1</u>: Cho ΔABC, AB = AC, 1 đường tròn tiếp xúc với (ABC) và AB, AC tại P,Q . CMR: Trung điểm của đoạn PQ là tâm nội tiếp Δ ABC.

Đây là 1 bài toán IMO 1978 là dạng đặc biệt cho bổ đề 5.

<u>Ví dụ 2</u>: Cho ΔABC (w) tiếp xúc AB, AC và tiếp xúc trong với (ABC). Cho (ABC) và (w) tiếp xúc tại P. (I') là đường tròn nội tiếp ΔABC. PI cắt (ABC) tại P, Q.

CMR: BQ = CQ

<u>Bài giải</u>

Ta có $\langle ICP = \frac{1}{2}\langle KOP = \frac{1}{2}\langle FJP = FEP$

(với E, F, I thẳng hàng như bộ đề 5)

$\Rightarrow$ IECD nội tiếp

$\Rightarrow \langle IPC = IEA \rangle$

hay $\langle QBC = 90^0 - \left\langle \frac{BAC}{2} \right.$

hay $\langle QBC = 90^0 - \left\langle \frac{BQC}{2} \right. \Rightarrow \Delta BQC$ cân tại Q

$\Rightarrow$ QB = QC (đpcm)

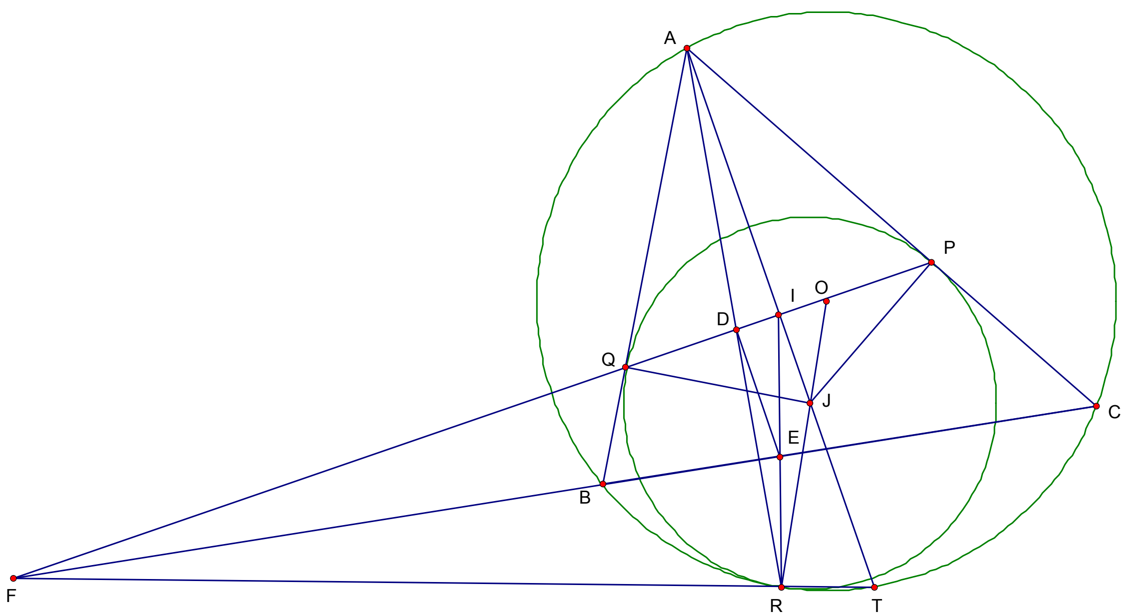
<u>Ví dụ 3</u>: Cho ΔABC với tâm nội tiếp (I) 1 đường tròn tiếp xúc với AC, AB và (ABC) tại P, Q, R. AR cắt PQ tại D, IR cắt BC tại E. CMR. DE//AI.

<u>Bài giải</u>

Dễ CM: TR, PQ, BC đồng quy tại F và theo bài 2 $\Rightarrow$ TR $\perp$RI.

Với T là trung điểm cung BC

Có IJ $\perp$QP nên để chứng minh AI//DE



Thì cần chứng minh DE$\perp$BC

Có $\langle PFC = \frac{\langle B - \langle C}{2} = \langle$ARI

$\langle B = \langle C$

$\Rightarrow$ (đpcm)

VI. Nhiều đường tròn tiếp xúc nhau

Cho ΔABC, (I) là đường tròn nội tiếp và D $\in$ [BC] 1 đường tròn tiếp xúc (ABC) nhưng tiếp xúc DC, DA tại E, F. CMR: E, F, I thẳng hàng.

Dễ chứng minh KE cắt AI tại trung điểm M của cung BC

$\Rightarrow MC = MI = MB$

Có $\Delta MEC \sim \Delta MCK$ (g.g)

$\Rightarrow \frac{ME}{MC} = \frac{MC}{MK} \Rightarrow \frac{ME}{MI} = \frac{MI}{MK}$

$\Rightarrow \Delta MIE \sim \Delta MKI$ (c.g.c)

$\Rightarrow \langle KIA = \langle IEK$

Gọi EI cắt (J) tại F'

$\Rightarrow$ dễ chứng minh: IF'AK là tứ giác nội tiếp

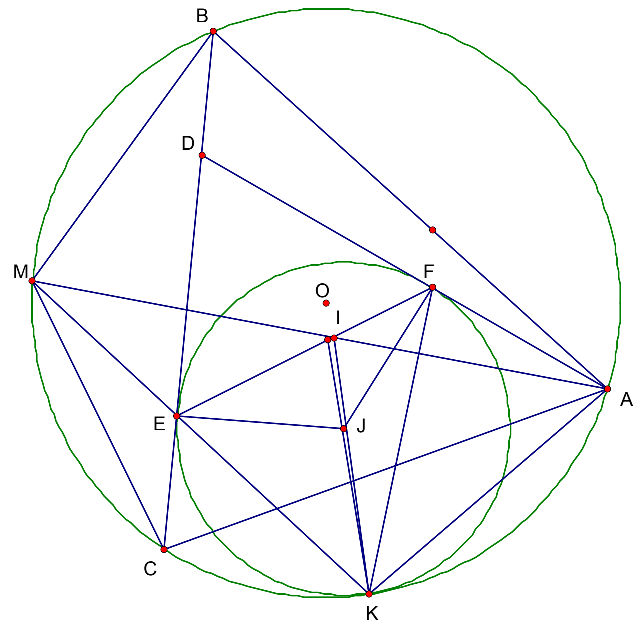
$\Rightarrow \langle KIA = \langle KF'A$

$\Rightarrow \langle IEK = \langle KF'A$

$\Rightarrow$ F'A là tiếp tuyến tại F' của (J).

$\Rightarrow$ F' = F

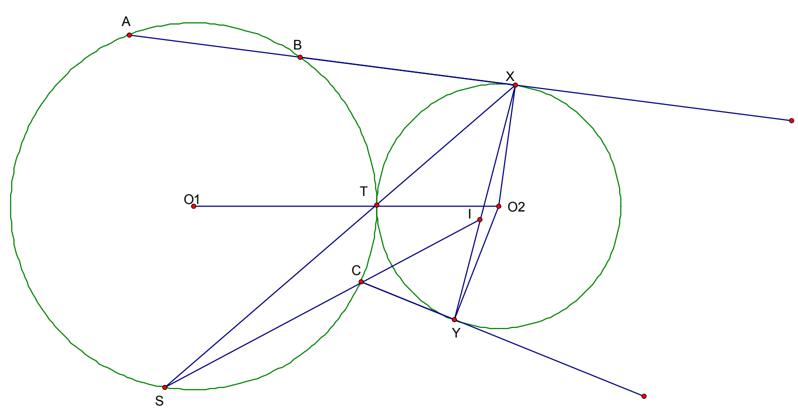
$\Rightarrow$ E, I, F thẳng hàng



Ví dụ 1. 2 đường tròn (k1), (k2) tiếp xúc ngoài tại T. 1 đường thẳng tiếp xúc (k2) tại X và cắt (k1) tại A, B. S là giao điểm thứ 2 của (k1) và XT. Trên ST không chứa A, B chọn C. CY là đường tiếp tuyến đến (k2), Y $\in$ (k2) thoả mãn [ST] và [CY] không cắt nhau. Gọi I = XY $\cap$ SC . CMR

a) C, T, Y, I cùng nằm trên 1 đường tròn

b) I là tâm bàng tiếp Δ ABC đối với BC



Gợi ý

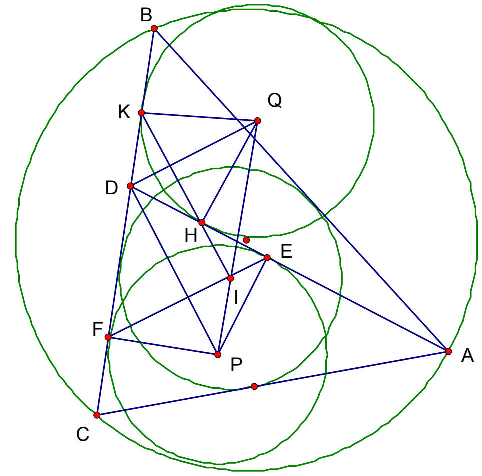
Nếu để ý tinh thì bộ đề 6 giống hệt bài này

Chỉ khác về (O_1), (O_2) tx ngoài. Còn lời giải không khác chút nào.

Ví dụ 2. Δ ABC có tâm (I) D $\in$ [BC]. P là tâm đường tròn tiếp xúc AD, DC và (ABC) và Q là tâm đường tròn tiếp xúc AD, BD và (ABC) . CMR P, Q, I thẳng hàng

Bài giải

Kẻ QH $\perp$ AD, QK $\perp$ BD



PF $\perp$ CD, PE $\perp$ AD

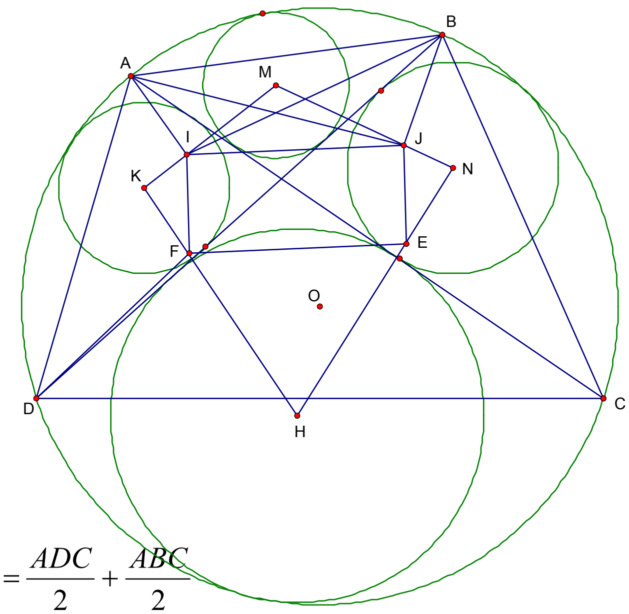
$\Rightarrow$ theo bộ đề 6 ta có: K, H, T thẳng hàng F, I, E thẳng hàng

Có DP// KT ($\perp$ EF) ($\langle QDP = 90^0$)

DQ// FI, KQ //FP

$\Rightarrow$ theo ĐL Papus, ta có Q, I, P thẳng hàng

Ví dụ 3. Cho $\mathcal{P}$ là 1 tứ giác nội tiếp (Ω) và đặt $\mathcal{Q}$ là tứ giác hình thành bởi tâm 4 đường tròn tiếp xúc với (O) và với mỗi đường chéo của $\mathcal{P}$. CMR: Tâm 4 tám giác (nội tiếp) tạo bởi cạnh, cạnh và đường chéo trong $\mathcal{P}$ tạo thành hình chữ nhật $\mathcal{R}$ nội tiếp trong $\mathcal{Q}$.



Bài giải

Đặt tên như hình vẽ

Theo bài 2 ta có.

I$\in$KM,J$\in$MN, E$\in$NH, E$\in$KH

Có:

$$\langle AIB = 90^0 + \frac{\langle ADB}{2} = 90^0 + \frac{\langle ACB}{3} = \langle AJB$$

$\Rightarrow$ ABJI là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ tương tự AIFD là tứ giác nội tiếp.

$$\langle JIF = 360^0 - \langle AIJ - \langle ADF = \langle ADF + \langle ABJ = \frac{ADC}{2} + \frac{ABC}{2}$$

$= 90^0$. Tương tự $\langle IJE = \langle JEF = \langle IFE = 90^0$

Vậy IJEF là hình chữ nhật có các đỉnh nằm trên các cạnh tứ giác MNHK.

Ví dụ 4. ΔABC có đường tròn ngoại tiếp (O), D$\in$BC. CMR: đường tròn tiếp xúc (O) AD, BD và đường tròn tiếp xúc (O), AD, DC tiếp xúc với nhau $\Leftrightarrow$ $\langle BAD = \langle CAD$

Bài giải

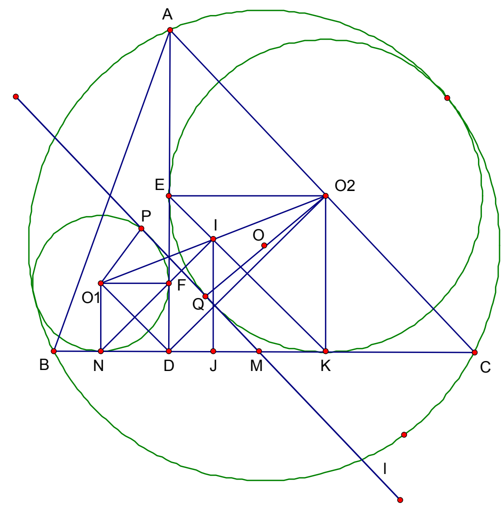
Đây hoàn toàn là bài 2 chỉ chèn thêm điều kiện đề bài. Mà điều kiện đặc biệt này là kiến thức đơn giản khi học về 2 đường tròn tiếp xúc.

Ví dụ 5. Cho ΔABC nhọn với $AB \neq AC$, AD $\perp$ BC (D$\in$BC).

(w_1) là đường tròn tiếp xúc AD, BD và (w), (w_2) là đường tròn tiếp xúc AD, CD và (w), l là tiếp tuyến chung trong của (w_1) (w_2) mà khác CD . CMR l đi qua trung điểm BC

$\Leftrightarrow$ 2BC = AB + AC

Bài giải



Gọi các điểm như hình vẽ

Theo bài 2 $\Rightarrow$ O_1, I, O_2 thẳng hàng

Vì $\langle INM = 45^0 = \langle IKN$

$\Rightarrow$ I là t/đ của O_1O_2

Hay J là trung điểm của NK

Ta có: DE - FE = FD = ND

$\Rightarrow$ DK - EF = MN + MK - PQ - NE = MP + MK - EF - ND

$\Rightarrow$ 2DF = MP- PQ + MK = 2MK

$\Rightarrow$ ND = MK hay DJ = JM

$\Rightarrow$ BJ - BD= BM - BJ

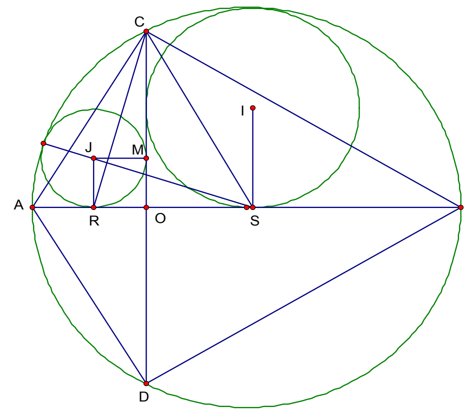
$\Rightarrow$ 2BJ = BM + BD

$\Rightarrow$ AB + BC - AC = $\dfrac{BC}{2} + AB.\cos B$

$\Rightarrow$ AB + BC = 2BC (đpcm)

Ví dụ 6. Với mỗi điểm O trên đường kính AB của đường tròn (w), đường thẳng vuông góc AB tại O cắt (w) tại P. 2 đường tròn (w1,2) được tiếp xúc với (w), AB và OP. (w_1), (w_2) tiếp xúc với AB tại R, S. Tính $\langle RPS$

Bài giải



Bẻ JM $\perp$ PO.

Ta thấy: tâm nội tiếp của ΔAPD nằm trên RM và AO

$\Rightarrow$ R là tâm nội tiếp ΔAPD

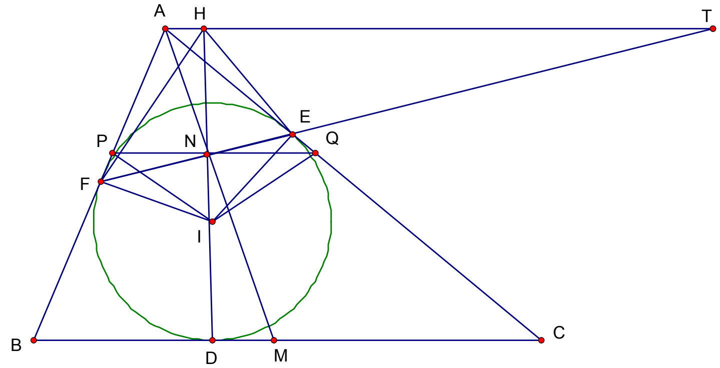
Tương tự S là tâm nội tiếp Δ BDP

$\Rightarrow \langle RPS = \dfrac{1}{2}\langle APB = 45^0$ (đpcm)

VII. Các đường thẳng đồng quy từ tâm nội tiếp.

Cho (I) của ABC với (I) là đường tròn nội tiếp, tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F lần lượt. Cho M là trung điểm của BC. CMR: EF, DI, AM đồng quy.

Khi xuất hiện các đường thẳng $\perp$ tới các cạnh 1 Δ nào đó mà thẳng hàng (chân các đường vuông góc thì ta nghĩ đến sim sơn)



C1: Kéo dài DI cắt EF tại N. Từ N kẻ PQ // BC (P thuộc [AB], Q thuộc [AC]

Xét Δ APQ mà IN $\perp$ PQ, IE $\perp$ AQ, IF $\perp$ AP

và E, N, F thẳng hàng

$\Rightarrow$ APIQ nội tiếp

mà I thuộc tia phân giác $\angle PAQ$ nên PI = IQ

hay PN = NQ

$\Rightarrow$ A, N, M thẳng hàng

$\Rightarrow$ đpcm.

Mặt khác chỉ bằng cộng góc của các tứ giác nội tiếp ta có thể giải quyết bài toán như sau:

C2: Dễ có: INEQ, INPF là các tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle IQN = \angle IEN = \angle IFN = \angle IPN$

$\Rightarrow$ IP = IQ $\Rightarrow$ NP = NQ

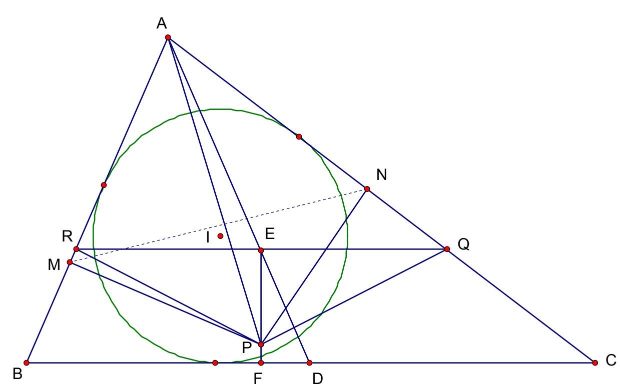
$\Rightarrow$ A, N, M thẳng hàng.

$\Rightarrow$ đpcm.

Bài này hoàn toàn có thể làm bằng cách "hàng điểm điều hoà" tuy nhiên có vẻ hơi dài so với 2 cách trên. Nhưng các bạn hãy thử làm nhé ! (hình sẽ gợi ý các bạn)

*** Bài toán liên quan**.

Ví dụ 1. Cho ΔABC, AB $\neq$ AC. D là trung điểm của BC. E $\in$[AD], EF $\perp$ BC (F $\in$BC) P$\in$EF, PM $\perp$AB, PN $\perp$ AC. CMR: M, E, N thẳng hàng $\Rightarrow \angle BAP = \angle PAC$



Gợi ý

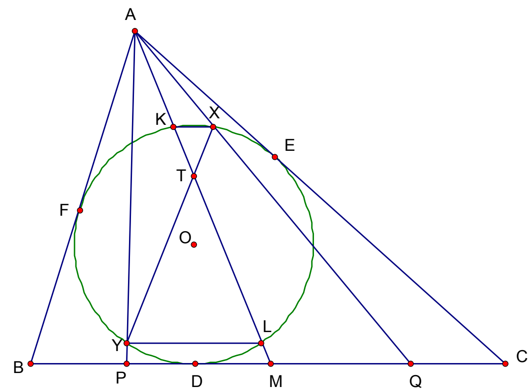
Bộ đề 7 là trường hợp đặc biệt của bài này. Nhưng lời giải thì lại giống hệt các bạn tự làm nhá.

Ví dụ 2. Đường trung tuyến AM của ΔABC cắt đường tròn nội tiếp (w) của ΔABC tại K và L. Từ K, L kẻ đường thẳng // BC cắt (w) tại X, Y; AX, AY cắt BC tại P và Q.

CMR. BP = CQ

<u>Gợi ý</u>

Các điểm như hình vẽ



Có $\frac{KX}{MQ} = \frac{AK}{AM}$, $\qquad \frac{YL}{PM} = \frac{AL}{AM}$

$\Rightarrow \frac{AK}{AL} = \frac{KX}{YL}.\frac{MP}{MQ} = \frac{KT}{TL}.\frac{MP}{MQ}$

$\Rightarrow$ Để chứng minh MP = MQ cần chứng minh $\frac{AK}{AL} = \frac{KT}{TL}$

hay (A, T, K, L) = - 1

$\Leftrightarrow$ T $\in$ EF

Đấy chính là bộ đề 7 $\Rightarrow$ đpcm

<u>VIII. Nhiều đường tròn xung quanh đường tròn nội tiếp</u>

Cho I là tâm nội tiếp ΔABC, AB $\neq$ AC. D là trung đểm của BC.

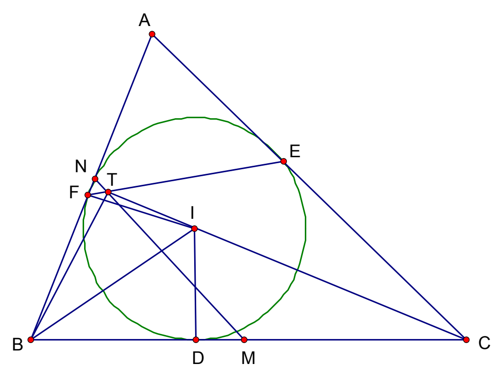
E $\in$ [AD]. CI cắt EF tại T. CMR: T, I, D, B, F cùng thuộc 1 đường tròn. Từ đó có $\angle BTC = 90^0$ và T nằm trên đường nối 2 trung điểm của 2 cạnh AB và BC.

<u>Bài giải</u>

Gọi các điểm như hình vẽ

Ta có $\angle ETC = \angle AEF - \angle ECT = \frac{\angle B2}{2} + \frac{\angle C}{2} - \frac{\angle C}{2} = \frac{\angle B}{2} = \angle FBI$

$\Rightarrow$FBIT là tứ giác nội tiếp ta lại có BFID là tứ giác nội tiếp nên F,B, D, T cùng thuộc 1 đường tròn



$\Rightarrow \angle BTI = \angle BFI = 90^0$ hay $\angle BTC = 90^0$

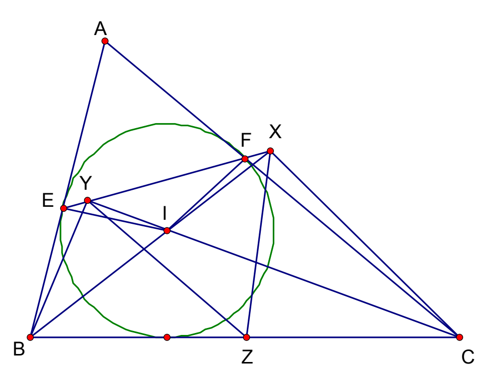
Có $\angle TMB = 2\angle TCB = \angle ACB$

$\Rightarrow$ TM//AC

$\Rightarrow$ T $\in$ MN (M, N là 2 trung điểm của BC, AB)

<u>* Bài toán liên quan</u>

<u>Ví dụ 1</u>. Cho ΔABC nhọn có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc AC, AB tại E, F. Tia Phân giác của $\angle ABC$ và $\angle ACB$ cắt EF tại X, Y. Z là



trung điểm của BC. CMR: ΔXYZ đều $\Leftrightarrow \angle A = 60^o$.

Bài giải

Theo bộ đề trên B, E, Y, I, Z và F, X, C, Z, I cùng thuộc 1 đường tròn (từng cặp 5 điểm)

Ta có : $\angle BZY = \angle AEF = \angle AFE = \angle XZC$

$\Rightarrow \angle YZX = \angle A$

Xét ΔXYZ có YZ = XZ

$\Rightarrow \angle A = 60^0 \Leftrightarrow \Delta XYZ$ là Δ đều

Ví dụ 2. Cho ΔABC, X $\in$ [BC] thoả mãn C nằm giữa B và X. Đường tròn nội tiếp ΔABX và ΔACX cắt nhau tại 2 điểm phân biệt P và Q. CMR. PQ qua 1 điểm cố định phụ thuộc vào cách chọn X.

Bài giải

Gọi tên như hình vẽ

Dễ có PQ // ED //FG mà MD = DF

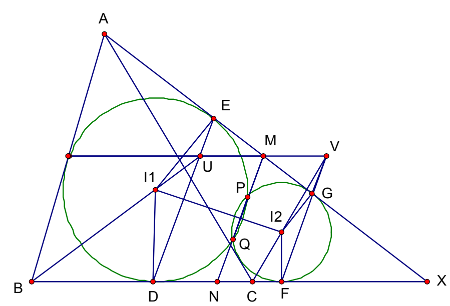
$\Rightarrow PQ //$ và cách đều FG, DE.

Gọi l là đường trung bình của ΔABX như hình vẽ

Theo bộ đề 8 có DE $\cap$ l $\cap$ BI_1 tại U

l $\cap$GF $\cap$$CI_2$ tại V $\Rightarrow$ UV//DF

$\Rightarrow$ PQ đi qua trung điểm của UV - cố định.



Ví dụ 3. Cho 2 điểm A, B nằm trên đường tròn (T). C là điểm nằm trong. Giả sử (w) là đường tròn tiếp xúc với AC, BC và T. (w) tiếp xúc AC và T tại P, G.

CMR: (APQ) đi qua I - tâm nội tiếp ΔABC.

Gợi ý

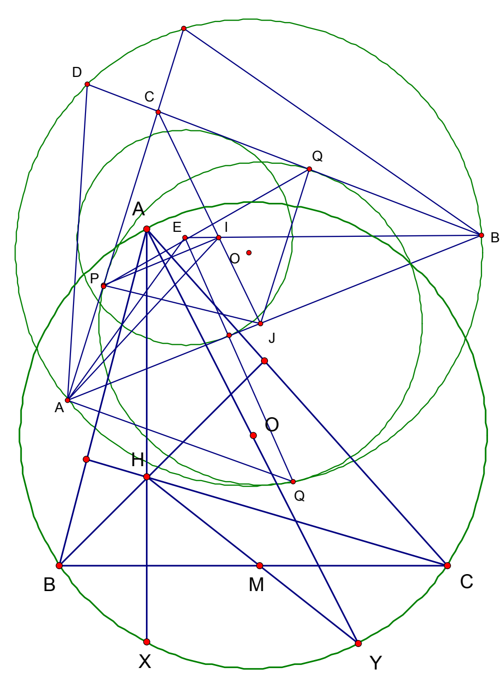
Nếu ta kẻ CB cắt (O) tại D, E là tâm nội tiếp ΔDAB.

Thì bài này đã được xét ở phần 5.

Chứng minh: PEIA nội tiếp rồi Chứng ninh: PEQA nội tiếp

IX. Ảnh đối xứng của trực tâm của 1 Δ nằm trên đường tròn ngoại tiếp

Cho H là trực tâm của ΔABC. X là điểm đối xứng của H qua BC và Y là điểm đối xứng qua trung điểm M của BC của H.



CMR. X, Y đều nằm trên đường tròn (ABC) và AY là đường kính của đường trònΔ.

Đây là bài hình học rất cơ bản chỉ trong sgk…

* **Bài toán liên quan**

Ví dụ 1. Đường tròn 9 điểm chắc ai cũng biết.

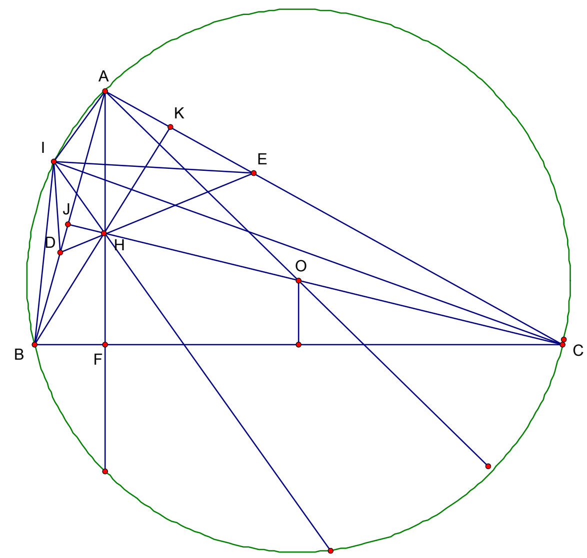
Ví dụ 2. Đường thẳng stainơ.

Ví dụ 3. Cho ΔABC nhọn với $AB \neq AC$. H là trực tâm, M là trung điểm BC. D $\in [AB]$

E $\in [A]$ thoả mãn AE = AD và D, H, E thẳng hàng

CMR a) NM $\perp$ với dây cung chung của (ADE) và (O)

b) HD, HE là phân giác của $\langle JHB$, $\langle KHC$



Gợi ý

Kẻ AO $\cap$ (O) = 0, HM $\cap$ (O) tại D, I

Rồi CM Δ IDB ~ ΔIEC $\Rightarrow$ I là tâm xoắn của 2 đường tròn (ADE) (O)

$\Rightarrow$ IAED là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow$ HM $\perp$ AI

Ví dụ 4. (w) là đường tròn ngoại tiếp Δ ABC. P là điểm nằm trong tam giác. AP, BP, CP cắt (w) tại A_1, B_1, C_1. A_2, B_2, C_2 lần lượt là ảnh của A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của BC, AC, AB. CMR trực tâm ABC nằm trên $(A_2B_2C_2)$.

Gợi ý:

A', B', C' là trung điểm của AA_1, BB_1, CC_1.

G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow$ G là trọng tâm Δ AA_1A_2…

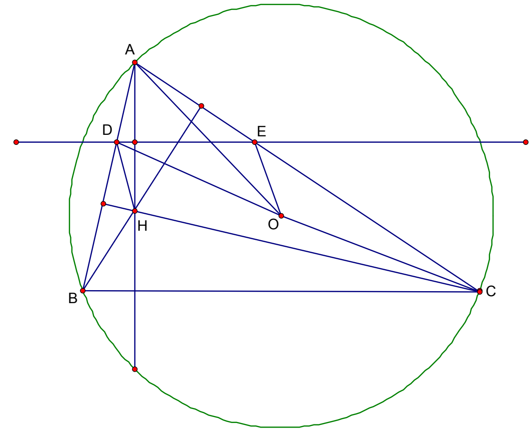
Có O, A', B', C', P là điểm cùng thuộc 1 đường tròn.

$\Rightarrow A_2, B_2, C_2$, H thuộc 1 đường tròn

$\Rightarrow$ đpcm

X. O, H đồng đẳng

Cho ΔABC, tâm ngoại tiếp O, trực tâm H và tâm nội tiếp I. AI là phân giác của $\langle HAO$



Đây cũng là 1 bài toán trong SGK lớp 9

* **Bài toán liên quan**

Ví dụ 1. ΔABC nội tiếp (O) và có trực tâm H (ΔABC nhọn) Đường trung trực của đoạn AH cắt AB, AC tại E, E. CMR: $\angle AOD = \angle AOE$

Gợi ý

Có ΔADH ~ ΔAOC (g.g)

$\Rightarrow$ ΔADO ~ ΔAHC

$\Rightarrow$ ΔAOD ~ ΔACH

Tương tự $\angle AOE = \angle ABH$

$\Rightarrow \angle AOD = \angle AOE$ (do $\angle ACH = \angle ABH$

Ví dụ 2. Mời các bạn thử sức bài toán sau (chỉ đơn thuần tính toán là xong)

CMR: IH = IO $\Leftrightarrow$ 1 trong 3 góc $\angle A, \angle B, \angle C$ bằng 60^0.

Ví dụ 3. Cũng là 1 bài tính toán nhưng là dạng Chứng minh BĐT. Các bạn cũng nghĩ xem cho $A_1A_2A_3$ là Δ nhọn; O, H là tâm ngoại tiếp và trực tâm. Cho $1 \le i \le 3$

Các điểm P_i, Q_i nằm trên OA_i và A_{i+1} A_{i+2} ($A_{i+3} = A_i$) thoả OP_iHQ_i là hình bình hành. CMR: $\frac{OQ_1}{OP_1} + \frac{OQ_2}{OP_2} + \frac{OQ_3}{OP_3} \ge 3$

Tài liệu tham khảo: 1. IMO training 2007 Yufei Zhao
2. Tạp chí THTT
3. Các chuyên đề hình học 10 Nguyễn Minh Hà