MATHSVN INEQUALITY CONTEST 2009

ĐÁP ÁN VÒNG 1

◇◇◇◇◇

Bài 1. *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2+bc}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^2+ca}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^2+ab}{a^2-ab+b^2}\geq 3.$$

Ngô Đức Lộc

Lời giải. Vì bất đẳng thức là đối xứng nên ta có thể giả sử một cách không giảm tính tổng quát rằng $c=\min\{a,b,c\}$, và với giả thiết này, ta có các đánh giá sau

$$a^2+bc\geq a^2,\quad b^2+ca\geq b^2,\quad c^2+ab\geq ab,$$

và

$$b^2-bc+c^2=b^2+c(c-b)\leq b^2,\quad c^2-ca+a^2=a^2+c(c-a)\leq a^2.$$

Do đó

$$\frac{a^2+bc}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^2+ca}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^2+ab}{a^2-ab+b^2}\geq\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{ab}{a^2-ab+b^2}.$$

Mặt khác, thao bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}+\frac{ab}{a^2-ab+b^2} &\geq \left(\frac{2a}{b}-1\right)+\left(\frac{2b}{a}-1\right)+\frac{ab}{a^2-ab+b^2}\\ &= \left(\frac{a^2-ab+b^2}{ab}+\frac{ab}{a^2-ab+b^2}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)-1\\ &\geq 2+2-1=3.\end{aligned}$$

Từ đây, ta được

$$\frac{a^2+bc}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^2+ca}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^2+ab}{a^2-ab+b^2}\geq 3.$$

Đây chính là bất đẳng thức mà ta cần chứng minh. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ và các hoán vị tương ứng.

Bài 2. *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh bất đẳng thức*

$$8(2-a)(2-b)(2-c) \geq (a+bc)(b+ca)(c+ab).$$

Trần Quốc Luật

Lời giải 1. Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$, suy ra $0<c\leq 1$. Ta có các đánh giá sau

$$\begin{aligned}
2(2-a)(2-b) &= 8-4(a+b)+2ab = 8-4(a+b)+(a+b)^2-a^2-b^2 \\
&= 4-a^2-b^2+(a+b-2)^2 \geq 4-a^2-b^2 = c^2+1, \\
(a+bc)(b+ca) &\leq \frac{(a+bc+b+ca)^2}{4} = \frac{(a+b)^2(c+1)^2}{4} \leq \frac{(a^2+b^2)(c^2+1)}{2} \\
&= \frac{(3-c^2)(c+1)^2}{2} \leq (3-c^2)(c^2+1), \\
c+ab &\leq c+\frac{a^2+b^2}{2} = c+\frac{3-c^2}{2} = \frac{3+2c-c^2}{2}.
\end{aligned}$$

Vì vậy, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau là đủ

$$8(2-c) \geq (3-c^2)(3+2c-c^2),$$

là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì

$$8(2-c)-(3-c^2)(3+2c-c^2) = (7-c^2)(c-1)^2 \geq 0.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Lời giải 2. Tương tự như lời giải 1, ta cũng có đánh giá

$$2(2-a)(2-b) \geq c^2+1.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$2(2-c) = 4-2c \geq 4-(c^2+1) = a^2+b^2.$$

Do vậy,

$$\begin{aligned}
4(2-a)(2-b)(2-c) &\geq (a^2+b^2)(c^2+1) \\
&= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+1)} \cdot \sqrt{(a^2+b^2)(1+c^2)} \\
&\geq (ac+b)(a+bc) \text{ (\textit{Cauchy Schwarz})}.
\end{aligned}$$

Ngoài ra, áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta cũng có

$$2 = \frac{a^2+b^2}{2}+\frac{c^2+1}{2} \geq ab+c.$$

Kết hợp với kết quả ở trên, ta thu được

$$8(2-a)(2-b)(2-c) \geq (a+bc)(b+ca)(c+ab).$$

Bài 3. *Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số dương thì*

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le \frac{(a+b)(a+b+2c)}{(3a+3b+2c)^2} \le \frac{1}{8}.$$

Trần Quốc Anh

Lời giải 1. Trước hết, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bên trái. Theo bất đẳng thức $AM - GM$ thì

$$\frac{(a+c)(b+c)}{ab} = 1 + \frac{c^2}{ab} + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \ge 1 + \frac{4c^2}{(a+b)^2} + \frac{4c}{a+b} = \frac{(a+b+2c)^2}{(a+b)^2}.$$

Do đó, ta được

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le \frac{c(a+b)}{(a+b+2c)^2}.$$

Mặt khác, ta thấy

$$\begin{aligned} c(3a+3b+2c)^2 &= \frac{1}{8} \cdot 8c \cdot (3a+3b+2c) \cdot (3a+3b+2c) \\ &\le \frac{1}{8}\left[\frac{8c + (3a+3b+2c) + (3a+3b+2c)}{3}\right]^3 \\ &= (a+b+2c)^2. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{c}{(a+b+2c)^2} \le \frac{a+b+2c}{(3a+3b+2c)^2}.$$

Nên từ đây, ta dễ dàng suy ra được

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le \frac{(a+b)(a+b+2c)}{(3a+3b+2c)^2}.$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bên phải. Lại sử dụng bất đẳng thức $AM - GM$ một lần nữa, ta có

$$\frac{(a+b)(a+b+2c)}{(3a+3b+2c)^2} = \frac{(a+b)(a+b+2c)}{[2(a+b)+(a+b+2c)]^2} \le \frac{(a+b)(a+b+2c)}{4 \cdot 2(a+b) \cdot (a+b+2c)} = \frac{1}{8}.$$

Đẳng thức ở bất đẳng thức bên trái đạt được khi và chỉ khi $a = b = c$. Đẳng thức ở bất đẳng thức bên phải đạt được khi và chỉ khi $a + b = c$.

Lời giải 2. Ta sẽ nêu ra một các chứng minh khác cho bất đẳng thức ở bên trái, tức là

$$\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \le \frac{(a+b)(a+b+2c)}{(3a+3b+2c)^2}.$$

Ta hãy thử đưa nó về "dạng *Schwarz*". Muốn thế, ta phải biến đổi nó sao cho có một bình phương ở một vế. Một cách tự nhiên, ta sẽ viết nó lại thành

$$\frac{(a+b)(a+b+2c)}{abc} \ge \frac{(3a+3b+2c)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

để có dạng bình phương ở một vế. Sau khi phân tách và thu gọn, ta thấy bất đẳng thức này có dạng tương đương là

$$2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca} \geq \frac{(3a+3b+2c)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Đến đây, áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta thấy rằng

$$\begin{aligned}
2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca} &= \frac{a+b+c}{bc}+\frac{a+b+c}{ca}+\frac{a+b}{ab} \\
&= \frac{(a+b+c)^2}{bc(a+b+c)}+\frac{(a+b+c)^2}{ca(a+b+c)}+\frac{(a+b)^2}{ab(a+b)} \\
&\geq \frac{(3a+3b+2c)^2}{bc(a+b+c)+ca(a+b+c)+ab(a+b)} \\
&= \frac{(3a+3b+2c)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}.
\end{aligned}$$

Phép chứng minh của ta được hoàn tất.

Bài 4. *Biết rằng a, b, c, d là các số dương, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P(a,b,c,d) = 5\sqrt[25]{\frac{16a(a+b)(a+b+c)}{75(a+b+c+d)^3}} + \sqrt[5]{\frac{15bcd^2}{(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)^2}}.$$

Võ Quốc Bá Cẩn

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned}
& 5\sqrt[25]{\frac{16a(a+b)(a+b+c)}{75(a+b+c+d)^3}} = \\
= \;& 5\sqrt[5]{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[25]{\frac{2a}{a+b} \cdot \left[\frac{3(a+b)}{2(a+b+c)}\right]^2 \cdot \left[\frac{5(a+b+c)}{3(a+b+c+d)}\right]^3 \cdot 1^{19}} \\
\le \;& \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{2}{5}}\left[\frac{2a}{a+b} + \frac{3(a+b)}{a+b+c} + \frac{5(a+b+c)}{a+b+c+d} + 19\right],
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
& \sqrt[5]{\frac{15bcd^2}{(a+b)(a+b+c)(a+b+c+d)^2}} = \\
= \;& \sqrt[5]{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[5]{\frac{2b}{a+b} \cdot \frac{3c}{a+b+c} \cdot \left[\frac{5d}{2(a+b+c+d)}\right]^2 \cdot 1} \\
\le \;& \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{2}{5}}\left(\frac{2b}{a+b} + \frac{3c}{a+b+c} + \frac{5d}{a+b+c+d} + 1\right).
\end{aligned}$$

Cộng lại, ta thu được

$$P(a,b,c,d) \le \frac{1}{5}\sqrt[5]{\frac{2}{5}}\,(2+3+5+20) = 6\sqrt[5]{\frac{2}{5}}.$$

Mặt khác, dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{2a}{a+b} = \frac{3(a+b)}{2(a+b+c)} = \frac{5(a+b+c)}{3(a+b+c+d)} = 1,$$

tức là

$$a = b = c = \frac{d}{2} > 0.$$

Do vậy, giá trị lớn nhất mà ta cần tìm của P là $6\sqrt[5]{\frac{2}{5}}$. Bài toán được giải quyết xong.

Nhận xét. Chúng ta có một kết quả tương tự mà ta vẫn có thể dùng kiểu $AM-GM$ như trên để giải là bài IMO Shortlist 2004

Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương. Gọi g_n là trung bình nhân của chúng và $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là dãy các trung bình cộng được định nghĩa như sau

$$A_k = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}, \ \forall k = 1, 2, \ldots, n.$$

Gọi G_n là trung bình nhân của $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Khi đó ta có bất đẳng thức sau

$$n\sqrt[n]{\frac{G_n}{A_n}} + \frac{g_n}{G_n} \le n+1.$$

Bài 5. *Cho A, B, C là 3 góc của một tam giác nhọn. Chứng minh bất đẳng thức sau*

$$\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\tan A}\right)^2+\left(\frac{\cos\frac{B}{2}}{\tan B}\right)^2+\left(\frac{\cos\frac{C}{2}}{\tan C}\right)^2+\frac{3}{4}\cdot\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{\tan A+\tan B+\tan C}\ge\frac{9}{8}.$$

Trần Quốc Anh

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\tan A}+\frac{2\cos\frac{B}{2}}{\tan B}+\frac{2\cos\frac{C}{2}}{\tan C}\ge 3.$$

Thật vậy, từ bất đẳng thức quen thuộc $2\cos\frac{A}{2}\ge\sin B+\sin C$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\tan A}+\frac{2\cos\frac{B}{2}}{\tan B}+\frac{2\cos\frac{C}{2}}{\tan C} &\ge \frac{\sin B+\sin C}{\tan A}+\frac{\sin C+\sin A}{\tan B}+\frac{\sin A+\sin B}{\tan C}\\ &= \sum_{cyc}\sin A\left(\frac{1}{\tan B}+\frac{1}{\tan C}\right)=\sum_{cyc}\frac{\sin^2 A}{\sin B\sin C}\ge 3,\end{aligned}$$

với bất đẳng thức cuối đúng theo bất đẳng thức $AM-GM$.
Bây giờ trở lại bài toán ban đầu. Với chú ý rằng $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$ và $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$, ta có thể viết lại bất đẳng thức đã cho dưới dạng

$$\left(\frac{\cos\frac{A}{2}}{\tan A}\right)^2+\left(\frac{\cos\frac{B}{2}}{\tan B}\right)^2+\left(\frac{\cos\frac{C}{2}}{\tan C}\right)^2+\frac{3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{\tan A\tan B\tan C}\ge\frac{9}{8}.$$

Đặt $a=\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\tan A}, b=\frac{2\cos\frac{B}{2}}{\tan B}$ và $c=\frac{2\cos\frac{C}{2}}{\tan C}$ thì theo trên, ta thấy $a,b,c>0$ và $a+b+c\ge 3$. Ta phải chứng minh bất đẳng thức sau

$$2(a^2+b^2+c^2)+3abc\ge 9.$$

Áp dụng bất đẳng thức *Schur* bậc 3, ta có

$$\begin{aligned}2(a^2+b^2+c^2)+3abc &= \left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{3}\right)\\ &\ge \left(a^2+b^2+c^2\right)+\left(a^2+b^2+c^2+\frac{9abc}{a+b+c}\right)\\ &\ge a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2\ge 9.\end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức đã cho được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC là tam giác đều.

Bài 6. *Chứng minh rằng với mọi điểm P bất kì trong tam giác nhọn ABC, ta có bất đẳng thức sau*

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 \geq \frac{4}{\sqrt{3}} S \left(1 + \frac{OP^2}{3R^2}\right),$$

trong đó S là diện tích tam giác ABC và (O) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Trần Quang Hùng

Lời giải. Để giải bài toán này, ta cần 2 bổ đề quen thuộc sau trong tam giác (xin nêu ra không chứng minh, bạn đọc có thể kiểm tra lấy)

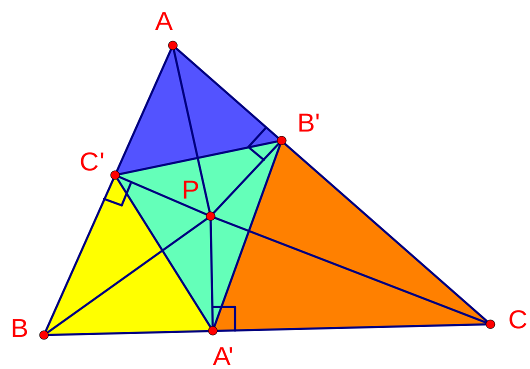
Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC có R và S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và diện tích tam giác. Khi đó*

$$3\sqrt{3}R^2 \geq 4S.$$

Bổ đề 2. (Công thức Euler) *Cho tam giác ABC và điểm P bất kì trong tam giác. Gọi A', B', C' là hình chiếu của P lên các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Khi đó, diện tích tam giác $A'B'C'$ cho bởi công thức*

$$S_{A'B'C'} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} S_{ABC}.$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh bài toán đã cho.



Hình 1

Gọi A', B', C' là hình chiếu của P lên các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Khi đó, ta dễ thấy rằng tam giác $AB'C'$ nội tiếp đường tròn đường kính PA, đặt $S_a = S_{AB'C'}$, thế thì theo bổ đề 1, ta có

$$3\sqrt{3}\left(\frac{PA}{2}\right)^2 \geq 4S_a.$$

Lập luận một cách tương tự với $S_b = S_{BC'A'}$ và $S_c = S_{CA'B'}$, ta cũng có

$$3\sqrt{3}\left(\frac{PB}{2}\right)^2 \geq 4S_b, \quad 3\sqrt{3}\left(\frac{PC}{2}\right)^2 \geq 4S_c.$$

Cộng lần lượt vế với vế cả ba bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(PA^2 + PB^2 + PC^2\right) \geq 4\left(S_a + S_b + S_c\right) = 4\left(S - S_{A'B'C'}\right).$$

Mặt khác, theo bổ đề 2 thì $S_{A'B'C'} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} S$, suy ra

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(PA^2 + PB^2 + PC^2\right) \geq 4\left(S - \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} S\right) = \frac{S(3R^2 + OP^2)}{R^2},$$

hay là

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 \geq \frac{4}{\sqrt{3}} S\left(1 + \frac{OP^2}{3R^2}\right).$$

Đây chính là bất đẳng thức mà ta cần chứng minh. Dễ thấy rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và điểm P trùng với tâm của tam giác.

— HẾT —

MATHSVN INEQUALITY CONTEST 2009

ĐÁP ÁN VÒNG 2

⋄ ⋄ ⋄ ⋄ ⋄

Bài 1. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + 2b + 3c = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P(a, b, c) = (a^2b + b^2c + c^2a + abc)(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc).$$

Trần Quốc Anh

Lời giải 1. Trước hết, ta sẽ chứng minh kết quả sau

$$\left(\frac{a + 2b + 3c}{2}\right)^6 \geq 8(a^2b + b^2c + c^2a + abc)(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc).$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$\begin{aligned} & 8(a^2b + b^2c + c^2a + abc)(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc) \leq \\ \leq \quad & \left[a^2b + b^2c + c^2a + abc + 2(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc)\right]^2. \end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned} & (a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) = \\ = \quad & 2\left[(a^2b + b^2c + c^2a) + 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) + 3abc\right] + 3abc \\ \geq \quad & 2\left[(a^2b + b^2c + c^2a) + 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) + 3abc\right]. \end{aligned}$$

và theo bất đẳng thức $AM - GM$, ta được

$$\begin{aligned} (a + 2b)(b + 2c)(c + 2a) &= \frac{1}{4} \cdot (a + 2b) \cdot 4(b + 2c) \cdot (c + 2a) \\ &\leq \frac{1}{4}\left[\frac{(a + 2b) + 4(b + 2c) + (c + 2a)}{3}\right]^3 \\ &= \frac{1}{4}(a + 2b + 3c)^3. \end{aligned}$$

Từ đó dẫn đến

$$(a^2b + b^2c + c^2a) + 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) + 3abc \leq \frac{1}{8}(a + 2b + 3c)^3.$$

Do vậy, bất đẳng thức nêu trên là bất đẳng thức đúng và ta thu được $P \leq 8$. Dễ thấy đẳng thức có thể xảy ra khi $a = 2, b = 1, c = 0$ nên đây chính là giá trị lớn nhất mà ta cần tìm.

Lời giải 2. Ta sẽ trình bày một lời giải khác bằng dồn biến cho bài toán này. Tương tự như trong lời giải 1, ta phải chứng minh

$$\left(\frac{a + 2b + 3c}{2}\right)^6 \geq 8(a^2b + b^2c + c^2a + abc)(ab^2 + bc^2 + ca^2 + abc).$$

Đến đây, áp dụng bất đẳng thức sắp xếp lại, với (x, y, z) là một hoán vị của (a, b, c) sao cho $x \geq y \geq z$, ta có

$$a + 2b + 3c = a \cdot 1 + b \cdot 2 + c \cdot 3 \geq x \cdot 1 + y \cdot 2 + z \cdot 3 = x + 2y + 3z.$$

Do vậy, nếu ta chứng minh được bất đẳng thức trên đúng với $a \geq b \geq c$ thì ta cũng chứng minh được nó đúng với mọi a, b, c không âm bất kì thông qua bất đẳng thức sắp xếp lại trên. Bây giờ, áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$ kiểu như lời giải 1, ta có thể đưa bất đẳng thức về chứng minh

$$F(a, b, c) = (a^2b + b^2c + c^2a) + 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) + 3abc \leq \frac{1}{8}(a + 2b + 3c)^3.$$

Ý tưởng của ta lúc này là dồn biến c về 0 (dựa trên đẳng thức của bài toán). Tuy nhiên, dù ý tưởng là vậy, nhưng nếu ta thực hiện trực tiếp sẽ vấp phải nhiều khó khăn (bạn đọc có thể thử kiểm chứng), do vậy lúc này ta sẽ thực hiện "đánh giá gián tiếp" như sau: Bằng một số tính toán đơn giản, ta có

$$F(a, b, c) - F(a - c, b + 2c, 0) = -3c(b + c)(a - b - 2c),$$

và

$$F(a, b, c) - F(a + c, b + c, 0) = c\left[a(a - 3b) - b^2 - 3ac - 3bc - 3c^2\right].$$

Do đó, nếu $a \geq b + 2c$ thì ta có ngay $F(a, b, c) \leq F(a - c, b + 2c, 0)$, còn nếu $a \leq b + 2c \leq 3b$ thì ta có ngay $F(a, b, c) \leq F(a + c, b + c, 0)$. Như vậy, trong mọi trường hợp, ta đều có thể dồn biến c về 0, tức là ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trên trong trường hợp $c = 0$ là đủ. Tuy nhiên, trong trường hợp này, kết quả của ta là hiển nhiên theo bất đẳng thức $AM - GM$. Phép chứng minh của ta đến đây được hoàn tất.

Bài 2. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số dương thì

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Ngô Đức Lộc

Lời giải. Theo bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}=\frac{a(b+c)}{\sqrt{(a^2+bc)\cdot a(b+c)}} \geq \frac{2a(b+c)}{a^2+bc+a(b+c)}=\frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)}.$$

Ta đi đến bất đẳng thức sau

$$\frac{2a(b+c)}{(a+b)(a+c)}+\frac{2b(c+a)}{(b+c)(b+a)}+\frac{2c(a+b)}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2},$$

$$2+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2},$$

$$\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{2(ab+bc+ca)-a^2-b^2-c^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Hiển nhiên bất đẳng thức này đúng nếu $2(ab+bc+ca) \leq a^2+b^2+c^2$. Trong trường hợp ngược lại, ta sử dụng bất đẳng thức *Schur* dạng bậc 3 như sau

$$abc \geq \frac{(a+b+c)\left[2(ab+bc+ca)-a^2-b^2-c^2\right]}{9}.$$

Áp dụng bất đẳng thức này, ta chỉ còn phải chứng minh rằng

$$8(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9(a+b)(b+c)(c+a),$$

là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì theo các bất đẳng thức *Cauchy Schwarz* và $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned} 24(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) &\geq 8(a+b+c)^3=[(a+b)+(b+c)+(c+a)]^3 \\ &\geq 27(a+b)(b+c)(c+a). \end{aligned}$$

Bài toán được giải quyết hoàn toàn. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị tương ứng.

Nhận xét. Bài toán này là một sự "tương tự hóa" với kết quả rất đẹp sau của *Vasile Cirtoaje*

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \geq 2.$$

Bạn đọc có thể thực hiện tương tự như trên để chứng minh bất đẳng thức này. Ở đây, chúng tôi xin được giới thiệu một cách khác khá độc đáo như sau

Do tính đối xứng, ta có thể giả sử rằng $a \geq b \geq c$. Khi đó, với chú ý ở bất đẳng thức quen thuộc (và hiển nhiên) sau với mọi $x, y \geq 0$

$$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy \geq x^2+y^2,$$

ta thu được

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}}\geq\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab}},$$

Bây giờ, ta sẽ chỉ chứng minh rằng

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab}\geq\frac{b^2+ca}{b(c+a)},$$

$$\frac{c(a+b)}{c^2+ab}\geq\frac{b^2+ca}{b(c+a)}-\frac{a(b+c)}{a^2+bc}.$$

$$\frac{c(a+b)}{c^2+ab}\geq\frac{c(a+b)(a-b)^2}{b(c+a)(a^2+bc)},$$

$$b(c+a)(a^2+bc)\geq(a-b)^2(ab+c^2).$$

Bất đẳng thức cuối là hiển nhiên bởi vì ta có

$$b(c+a)=ab+bc\geq ab+c^2,\quad a^2+bc\geq a^2\geq(a-b)^2.$$

Do đó, ta thu được

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}}\geq\sqrt{\frac{b^2+ca}{b(c+a)}},$$

Và như vậy, ta dẫn đến việc chứng minh bất đẳng thức sau để hoàn thành yêu cầu của bài toán

$$\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{b^2+ca}{b(c+a)}}\geq 2.$$

Tuy nhiên, bất đẳng thức này lại hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức $AM-GM$. Phép chứng minh của ta được hoàn tất.

Ngoài ra, ta cũng chứng minh được

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Bài 3. Chứng minh với mọi số thực x, y, z nằm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ta luôn có

$$3\cos x + 2\cos y + \cos z \geq \frac{3}{4}(\cos x + \cos y)(\cos y + \cos z)(\cos z + \cos x).$$

Trần Quốc Luật

Lời giải 1. Đặt $a = \cos x, b = \cos y, c = \cos z$ thì $a, b, c \in [0, 1]$, và ta phải chứng minh rằng

$$4(3a + 2b + c) \geq 3(a + b)(b + c)(c + a).$$

Trước hết, ta sẽ xét trường hợp $c \geq b \geq a$. Khi đó, ta có

$$2 \geq b + c, \quad 2 \geq c + a, \quad 3a + 2b + c \geq 3(a + b).$$

Nhân lại vế với vế cả ba bất đẳng thức trên, ta thu được ngay kết quả mà ta cần chứng minh.
Bây giờ, ta sẽ xét trường hợp tổng quát hơn khi mà chưa biết rõ thứ tự của a, b, c. Gọi (m, n, p) là một hoán vị của (a, b, c) sao cho $p \geq n \geq m$. Khi đó, theo bất đẳng thức sắp xếp lại, ta có

$$3a + 2b + c = 3 \cdot a + 2 \cdot b + 1 \cdot c \geq 3 \cdot m + 2 \cdot n + 1 \cdot p = 3m + 2n + p.$$

Mặt khác, do $p \geq n \geq m$ nên theo chứng minh trên, ta thu được

$$4(3m + 2n + p) \geq 3(m + n)(n + p)(p + m) = 3(a + b)(b + c)(c + a).$$

Kết hợp cả 2 bất đẳng thức trên, ta có

$$4(3a + 2b + c) \geq 4(3m + 2n + p) \geq 3(a + b)(b + c)(c + a).$$

Bài toán của ta được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = c \to 0$.

Lời giải 2. Cũng bằng phép đặt tương tự như trong lời giải 1, ta phải chứng minh bất đẳng thức sau với $a, b, c \in [0, 1]$

$$4(3a + 2b + c) \geq 3(a + b)(b + c)(c + a).$$

Bây giờ, ta hãy chú ý rằng

$$\begin{aligned} 3a + 2b + c &\geq (a + b + c)a + (b + c)b + c \cdot c \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca, \end{aligned}$$

và

$$a + b + c \geq a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = ab + bc + ca.$$

Do đó, ta có thể đưa bài toán về chứng minh một bất đẳng thức đồng bậc như sau

$$4(ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) \geq 3(a + b + c)(a + b)(b + c)(c + a).$$

Sau khi khai triển và thu gọn, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$ab(a - b)^2 + bc(b - c)^2 + ca(c - a)^2 \geq 0,$$

là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng do a, b, c là các số không âm.

Bài 4. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a \geq b \geq c$ và $a+b+c=3$. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+3abc \geq 5.$$

Võ Quốc Bá Cẩn

Lời giải 1. Đặt $P(a,b,c)=\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+3abc$, ta có

$$\begin{aligned} P(a,b,c)-P\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right) &= \left(\frac{a}{c}-\frac{a+b}{2c}\right)+\left(\frac{c}{b}-\frac{2c}{a+b}\right)+\left[3abc-\frac{3}{4}c(a+b)^2\right] \\ &= \frac{a-b}{2c}+\frac{c(a-b)}{b(a+b)}-\frac{3}{4}c(a-b)^2 \\ &= \frac{1}{4}(a-b)\left[\frac{2}{c}+\frac{4c}{b(a+b)}-3c(a-b)\right]. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta lại thấy

$$\frac{2}{c}-3c(a-b)=\frac{2}{c}-3c(3-2b-c)\geq \frac{2}{c}-3c(3-3c)=\frac{2-9c^2+9c^3}{c},$$

và theo bất đẳng thức $AM-GM$ thì

$$2-9c^2+9c^3=\left(2+\frac{9}{2}c^3+\frac{9}{2}c^3\right)-9c^2\geq 3\left(\sqrt[3]{\frac{81}{2}}-3\right)c^2>0.$$

Do vậy, ta thu được $P(a,b,c)\geq P\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)$, và ta có thể đưa bất đẳng thức cần chứng minh về

$$P\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)\geq 5.$$

Đặt $t=\frac{a+b}{2}$ thì $t\in\left[1,\frac{3}{2}\right)$ và $c=3-2t$. Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{t}{c}+\frac{c}{t}+3t^2c\geq 5,$$

hay là

$$\frac{t}{3-2t}+\frac{3-2t}{t}+3t^2(3-2t)\geq 5.$$

Bằng những biến đổi đơn giản, ta có thể thu gọn bất đẳng thức này thành

$$\frac{3(4t^2-3)(t-1)^3}{t(3-2t)}\geq 0,$$

là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng do $\frac{3}{2}>t\geq 1$.
Bài toán của ta được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Lời giải 2. Biến đổi bất đẳng thức về dạng đồng bậc, ta phải chứng minh

$$f(a)=\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{81abc}{(a+b+c)^3}-5\geq 0.$$

Tính đạo hàm theo a, ta có

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{1}{c} - \frac{81bc(2a-b-c)}{(a+b+c)^4} \geq \frac{1}{c} - \frac{81bc(2a-b-c)}{27abc(a+b+c)} \; (AM-GM) \\ &= \frac{1}{c} - \frac{3(2a-b-c)}{a(a+b+c)} = \frac{a^2+3bc+ab+3c^2-5ac}{ac(a+b+c)} > 0, \end{aligned}$$

do $a^2+3bc+ab+3c^2-5ac \geq a^2+3c^2+ac+3c^2-5ac = (a-2c)^2+2c^2 > 0$. Từ đây, ta suy ra $f(a)$ đồng biến, và ta thu được

$$f(a) \geq f(b) = \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{81b^2c}{(2b+c)^3} - 5 = \frac{(8b^2-4bc-c^2)(b-c)^3}{bc(2b+c)^3} \geq 0.$$

Phép chứng minh của ta được hoàn tất.

Bài 5. Cho p, q là các số dương thỏa mãn $p + q = 2$. Biết rằng a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác với bán kính đường tròn ngoại tiếp là R sao cho $pb^2 + qc^2 + R^2 = pqa^2$, chứng minh rằng $pq > \frac{3}{4}$.

Vasile Cirtoaje

Lời giải 1. Đặt $t = \frac{1}{4\sin^2 A}$. Áp dụng định lý hàm số sin và cosin, ta có $R^2 = ta^2$ và $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. Kết hợp các đẳng thức này với giả thiết $pb^2 + qc^2 + R^2 = pqa^2$, ta thu được

$$(p + t - pq)b^2 + (q + t - pq)c^2 = 2bc(t - pq)\cos A.$$

Do $t \geq \frac{1}{4}$ nên $p + t - pq \geq p + \frac{1}{4} - pq = \frac{1}{4}(1-2p)^2 \geq 0$, tương tự $q + t - pq \geq 0$. Do đó, theo bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$(p + t - pq)b^2 + (q + t - pq)c^2 \geq 2bc\sqrt{(p + t - pq)(q + t - pq)}.$$

Từ đó suy ra

$$(t - pq)\cos A \geq \sqrt{(p + t - pq)(q + t - pq)}.$$

Bình phương 2 vế, ta có

$$(t - pq)^2(4t - 1) \geq 4t\left[t^2 + 2(1 - pq)t + p^2q^2 - pq\right],$$

và sau khi thu gọn, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$-(3t - pq)^2 \geq 0.$$

Do vậy

$$pq = 3t = \frac{3}{4\sin^2 A} \geq \frac{3}{4}.$$

Dễ thấy đẳng thức không thể xảy ra được nên phép chứng minh của ta đến đây được hoàn tất.

Lời giải 2. Trong lời giải này, ta sẽ sử dụng bổ đề sau

Bổ đề. *Trong tam giác ABC, với mọi số thực x, y, z, ta luôn có*

$$yz\sin^2 A + zx\sin^2 B + xy\sin^2 C \leq \frac{(x + y + z)^2}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{\sin 2A} = \frac{y}{\sin 2B} = \frac{z}{\sin 2C}$.

Chứng minh. Hiển nhiên ta có $\left(x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}\right)^2 \geq 0$, với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Ngoài ra, khai triển bất đẳng thức này, ta thấy nó tương đương với bất đẳng thức nêu trong bổ đề, và do đó, bổ đề của ta được chứng minh. Để có đẳng thức xảy ra, ta phải có $x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$. Bây giờ, ta hãy lưu ý rằng trong tam giác thì $\sin 2A \cdot \overrightarrow{OA} + \sin 2B \cdot \overrightarrow{OB} + \sin 2C \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$, do vậy để có đẳng thức trên thì $\frac{x}{\sin 2A} = \frac{y}{\sin 2B} = \frac{z}{\sin 2C}$ (ở đây ta quy ước rằng nếu mẫu bằng 0 thì tử phải bằng 0, nếu không sẽ không có đẳng thức xảy ra).

Bây giờ ta sẽ giải bài toán đã cho. Theo định lý hàm số sin, dễ thấy điều kiện của bài toán tương đương với $p\sin^2 B + q\sin^2 C + \frac{1}{4} = pq\sin^2 A$, hay là $pq\sin^2 A - p\sin^2 B - q\sin^2 C = \frac{1}{4}$. Áp dụng bổ đề với $x = -1, y = q, z = p$, ta có

$$pq\sin^2 A - p\sin^2 B - q\sin^2 C \leq \frac{(p + q - 1)^2}{4} = \frac{1}{4}.$$

Do đó, theo trên, đẳng thức phải xảy ra, tức là

$$\frac{-1}{\sin 2A} = \frac{q}{\sin 2B} = \frac{p}{\sin 2C} = \frac{p+q}{\sin 2B + \sin 2C} = \frac{2}{\sin 2B + \sin 2C}.$$

Từ đây, ta suy ra $-2\sin 2A = \sin 2B + \sin 2C = 2\sin A\cos(B-C)$, hay là $\cos(B-C) = -2\cos A$. Ngoài ra, cũng từ trên, ta thu được

$$\begin{aligned} pq &= \frac{\sin 2B \sin 2C}{\sin^2 2A} = \frac{\cos(2B-2C) - \cos(2B+2C)}{8\sin^2 A\cos^2 A} \\ &= \frac{2\cos^2(B-C) - 1 - \cos 2A}{8\sin^2 A\cos^2 A} = \frac{2\cos^2(B-C) - 1 - (2\cos^2 A - 1)}{8\sin^2 A\cos^2 A} \\ &= \frac{8\cos^2 A - 1 - (2\cos^2 A - 1)}{8\sin^2 A\cos^2 A} = \frac{3}{4\sin^2 A} \ge \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\sin^2 A = 1$, hay $\sin 2A = 0$ nhưng $x = -1 \neq 0$ nên điều này là không thể xảy ra. Và như vậy, bài toán của ta được chứng minh xong.

Lời giải 3. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $p \ge q$. Khi đó, theo bất đẳng thức sắp xếp lại, ta thấy rằng chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp $c \ge b$ là đủ. Ngoài ra, từ giả thiết $p \ge q$, ta có thể đặt $p = 1+t, q = 1-t$ với $t > 0$. Bây giờ giả thiết bài toán yêu cầu ta chứng minh rằng $pq = 1 - t^2 > \frac{3}{4}$, hay là $t < \frac{1}{2}$. Áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có

$$\begin{aligned} R^2 &= \frac{a^2b^2c^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) - a^4 - b^4 - c^4} \\ &= \frac{a^2b^2c^2}{2c^2(a^2+b^2) + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4} \\ &\ge \frac{a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)^2 + c^4 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4} = \frac{c^4}{4}. \end{aligned}$$

Bây giờ ta sẽ xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. $b + c \ge \sqrt{\frac{3}{2}}a$. Khi đó từ trên, ta thu được[1]

$$pqa^2 \ge pb^2 + \left(q + \frac{1}{4}\right)c^2 \ge \frac{p\left(q+\frac{1}{4}\right)(b+c)^2}{p+q+\frac{1}{4}} = \frac{(4pq+p)(b+c)^2}{9} \ge \frac{(4pq+p)a^2}{6}.$$

Từ đó suy ra $2q \ge 1$, hay là $t \le \frac{1}{2}$. Mặt khác, dễ thấy rằng đẳng thức không thể xảy ra nên $t < \frac{1}{2}$.

Trường hợp 2. $b + c < \sqrt{\frac{3}{2}}a$. Từ đó, ta suy ra $a^2 > \frac{2}{3}c^2$. Mặt khác, cũng từ trên, ta có

$$pqa^2 \ge \frac{c^2}{4} + pb^2 + qc^2,$$

hay là

$$(1-t^2)a^2 \ge \frac{c^4}{4} + (1+t)b^2 + (1-t)c^2,$$

[1] Ở đây, ta chú ý rằng bất đẳng thức

$$xb^2 + yc^2 \ge \frac{xy(b+c)^2}{x+y}$$

được thỏa mãn với mọi số thực x, y thỏa mãn $x + y > 0$.

$$a^2t^2 + (b^2 - c^2)t + b^2 + \frac{5}{4}c^2 - a^2 \le 0.$$

Vì đây là một tam thức bậc 2 đối với t có hệ số cao nhất dương nên để nó không dương thì điều kiện cần là biệt thức của nó phải không âm, tức là

$$(b^2 - c^2)^2 \ge 4a^2\left(b^2 + \frac{5}{4}c^2 - a^2\right),$$

$$4a^4 - (4b^2 + 5c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2 \ge 0.$$

Từ đây suy ra ta phải có $a^2 \ge \frac{4b^2+5c^2+3c\sqrt{8b^2+c^2}}{8}$ hoặc $a^2 \le \frac{4b^2+5c^2-3c\sqrt{8b^2+c^2}}{8}$. Tuy nhiên, ta thấy rằng

$$\frac{4b^2 + 5c^2 - 3c\sqrt{8b^2 + c^2}}{8} < \frac{5}{8}c^2 < \frac{2}{3}c^2 < a^2,$$

nên không thể xảy ra trường hợp thứ 2, do vậy $a^2 \ge \frac{4b^2+5c^2+3c\sqrt{8b^2+c^2}}{8} > c^2$. Bây giờ, ta sẽ dùng kết quả này để chứng minh bài toán đã cho. Thật vậy, từ giả thiết, ta thu được

$$a^2t^2 + (b^2 - c^2)t + b^2 + c^2 + R^2 - a^2 = 0,$$

từ đó suy ra biệt thức của tam thức này phải không âm và khi đó, t phải nhận một trong hai giá trị sau

$$t_0 = \frac{c^2 - b^2 + \sqrt{(b^2 - c^2)^2 - 4a^2(b^2 + c^2 + R^2 - a^2)}}{2a^2},$$

hoặc

$$t_1 = \frac{c^2 - b^2 - \sqrt{(b^2 - c^2)^2 - 4a^2(b^2 + c^2 + R^2 - a^2)}}{2a^2}.$$

Dễ thấy $t_0 \ge t_1$ và từ yêu cầu của bài toán, ta chỉ cần chứng minh được $t_0 < \frac{1}{2}$ là xong. Điều này tương đương với

$$a^2 + b^2 - c^2 > \sqrt{(b^2 - c^2)^2 - 4a^2(b^2 + c^2 + R^2 - a^2)},$$

hay là

$$(a^2 + b^2 - c^2)^2 > (b^2 - c^2)^2 - 4a^2(b^2 + c^2 + R^2 - a^2),$$
$$6b^2 + 2c^2 - 3a^2 + 4R^2 > 0.$$

Đặt $x = a^2, y = c^2, z = b^2$ thì $x > y \ge z$, và ta phải chứng minh

$$2y + 6z - 3x + \frac{4xyz}{2(xy + yz + zx) - x^2 - y^2 - z^2} > 0.$$

Do $x > y \ge z$ và bất đẳng thức của ta đồng bậc nên không mất tính tổng quát, ta có thể đặt $x = z + m + 1$ và $y = z + m$ với $m \ge 0$. Bằng một số biến đổi, ta có thể thấy rằng bất đẳng thức cuối tương đương với

$$(1 - 5z)^2m + (z + 1)(19z^2 - 14z + 3) > 0,$$

là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng do $m, z \ge 0$. Phép chứng minh của ta đến đây được hoàn tất.

Nhận xét. Chú ý rằng kết quả bài toán vẫn đúng trong trường hợp p, q là các số thực bất kì, và các lời giải trên vẫn còn hiệu quả trong trường hợp này. Các lời giải 1 và 2 là những lời giải ngắn gọn và đẹp cho bài toán này, lời giải 3 dài dòng hơn nhưng xét trên một phương diện khác thì lời giải này lại rất tự nhiên (bạn đọc có thể xem xét ý tưởng vì sao mà ta phải xét 2 trường hợp?!) và hoàn toàn thuần túy đại số, nó chỉ sử dụng những kiến thức sơ cấp nhất về tam thức bậc 2, phần này các bạn học sinh đã được làm quen ngay từ thời còn học cấp 2, trong khi đó các lời giải 1, 2 lại mang đậm bản sắc hình học của chương trình cấp 3.

Bài 6. Cho tam giác ABC với 3 đường trung tuyến m_a, m_b, m_c, các điểm A_1, B_1, C_1 chạy trên các đường thẳng BC, CA, AB, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{B_1C_1^3}{m_a} + \frac{C_1A_1^3}{m_b} + \frac{A_1B_1^3}{m_c}.$$

Trần Quang Hùng

Lời giải. Để giải bài toán đã cho, trước hết ta sẽ chứng minh 2 bổ đề sau

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC với L là điểm Lemoine*[2]*. Khi đó, với mọi điểm M nằm trên mặt phẳng, ta có*

$$\sum_{cyc} a^2MA^2 \geq \sum_{cyc} a^2MA \cdot LA \geq \sum_{cyc} a^2LA^2.$$

Chứng minh. Dễ thấy

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} a^2MA \cdot LA &\geq \sum_{cyc} a^2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{LA} = \sum_{cyc} a^2\left(\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LA}\right)\overrightarrow{LA} \\ &= \overrightarrow{ML}\sum_{cyc} a^2\overrightarrow{LA} + \sum_{cyc} a^2LA^2 = \sum_{cyc} a^2LA^2.\end{aligned}$$

Từ đây, áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta được

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} a^2MA^2 + \sum_{cyc} a^2LA^2 &= \sum_{cyc} a^2\left(MA^2 + LA^2\right) \geq 2\sum_{cyc} a^2MA \cdot LA \\ &\geq \sum_{cyc} a^2MA \cdot LA + \sum_{cyc} a^2LA^2.\end{aligned}$$

Do đó

$$\sum_{cyc} a^2MA^2 \geq \sum_{cyc} a^2MA \cdot LA \geq \sum_{cyc} a^2LA^2.$$

Bổ đề 1 được chứng minh. Đẳng thức ở cả 2 bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv L$.

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC. Khi đó, với mọi điểm M nằm trên mặt phẳng thì biểu thức*

$$\frac{a^3MA^3}{m_a} + \frac{b^3MB^3}{m_b} + \frac{c^3MC^3}{m_c}$$

đạt giá trị nhỏ nhất khi $M \equiv L$ với L là điểm Lemoine.

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz* và bổ đề 2.3 ở trên, ta có

$$\begin{aligned}\left(\sum_{cyc}\frac{a^2MA^3}{LA}\right)\left(\sum_{cyc} a^2MA \cdot LA\right) &\geq \left(\sum_{cyc} a^2MA^2\right)^2 \\ &\geq \left(\sum_{cyc} a^2LA^2\right)\left(\sum_{cyc} a^2MA \cdot LA\right),\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sum_{cyc}\frac{a^2MA^3}{LA} \geq \sum_{cyc} a^2LA^2,$$

[2] Điểm L được gọi là điểm *Lemoine* nếu nó thỏa mãn hệ thức $a^2\overrightarrow{LA} + b^2\overrightarrow{LB} + c^2\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{0}$.

Mặt khác, ta chú ý rằng trong tam giác ABC, LA cho bởi công thức

$$LA = \frac{2bcm_a}{a^2+b^2+c^2},$$

nên từ đây, ta được

$$\sum_{cyc} a^2LA^2 \le \sum_{cyc} \frac{a^2MA^3}{LA} = \sum_{cyc} \frac{a^2(a^2+b^2+c^2)MA^3}{2bcm_a} = \frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}\sum_{cyc}\frac{a^3MA^3}{m_a}.$$

Do đó

$$\sum_{cyc}\frac{a^3MA^3}{m_a} \ge \frac{2abc}{a^2+b^2+c^2}\sum_{cyc} a^2LA^2,$$

là một hằng số. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi $M \equiv L$ nên bổ đề 2 được chứng minh.
Bây giờ ta trở lại bài toán đã cho. Sử dụng kết quả của *Miquel*, ta thấy rằng ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ đồng quy tại M. Gọi R_a là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1, khi đó ta có $B_1C_1 = 2R_a \sin A \ge MA \sin A = \frac{aMA}{2R}$, suy ra

$$\frac{B_1C_1^3}{m_a} \ge \frac{a^3MA^3}{8R^3m_a}.$$

Bằng lập luận tương tự, ta cũng có

$$\frac{C_1A_1^3}{m_b} \ge \frac{b^3MB^3}{8R^3m_b}, \quad \frac{A_1B_1^3}{m_c} \ge \frac{c^3MC^3}{8R^3m_c}.$$

Cộng tất cả lại, ta được

$$\frac{B_1C_1^3}{m_a} + \frac{C_1A_1^3}{m_b} + \frac{A_1B_1^3}{m_c} \ge \frac{1}{8R^3}\left(\frac{a^3MA^3}{m_a} + \frac{b^3MB^3}{m_b} + \frac{c^3MC^3}{m_c}\right),$$

với đẳng thức xảy ra khi A_1, B_1, C_1 là các hình chiếu của M lên các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Mặt khác, theo bổ đề 2.4, ta có

$$\frac{a^3MA^3}{m_a} + \frac{b^3MB^3}{m_b} + \frac{c^3MC^3}{m_c} \ge \frac{2abc}{a^2+b^2+c^2}\sum_{cyc} a^2LA^2,$$

với đẳng thức xảy ra khi $M \equiv L$. Kết hợp 2 bất đẳng thức này, ta thu được

$$\frac{B_1C_1^3}{m_a} + \frac{C_1A_1^3}{m_b} + \frac{A_1B_1^3}{m_c} \ge \frac{abc}{4R^3(a^2+b^2+c^2)}\sum_{cyc} a^2LA^2,$$

với đẳng thức xảy ra khi A_1, B_1, C_1 là các hình chiếu của điểm *Lemoine* L lên các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Do đó, giá trị nhỏ nhất mà ta cần tìm là

$$\frac{abc}{4R^3(a^2+b^2+c^2)}\sum_{cyc} a^2LA^2.$$

— HẾT —

ĐÁP ÁN VÒNG 3

◇◇◇◇◇

Bài 1. Cho a, b, c là các số không âm sao cho không có 2 số nào đồng thời bằng 0 và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a} \geq 4.$$

Ngô Đức Lộc

Lời giải 1. Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta thấy rằng

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3+ab^2+bc^2+ca^2 &= (a^3+ab^2)+(b^3+bc^2)+(c^3+ca^2) \\ &\geq 2a^2b+2b^2c+2c^2a. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} 3(a^2+b^2+c^2) &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \\ &= \left(a^3+b^3+c^3+ab^2+bc^2+ca^2\right)+a^2b+b^2c+c^2a \\ &\geq 3(a^2b+b^2c+c^2a). \end{aligned}$$

Từ đây, ta có thể đưa bài toán về chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn là

$$a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 4.$$

Đặt $x=a^2+b^2+c^2 \geq 3$ thì ta có $ab+bc+ca=\frac{9-x}{2}$, suy ra

$$a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}-4 = x+\frac{9-x}{2x}-4 = \frac{(x-3)(2x-3)}{2x} \geq 0.$$

Từ đây, ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Lời giải 2. Ý tưởng của chúng ta khi gặp những dạng hoán vị thường là biến đổi chúng về dạng đối xứng. Để thực hiện điều này, ta hãy chú ý rằng $ab^2+bc^2+ca^2-3abc \geq 0$, và điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} \frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a} &\geq \frac{ab+bc+ca}{a^2b+b^2c+c^2a+(ab^2+bc^2+ca^2-3abc)} \\ &= \frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-6abc} = \frac{ab+bc+ca}{3(ab+bc+ca)-6abc}. \end{aligned}$$

Do vậy, ta có thể đưa việc chứng minh về giải quyết bài toán mạnh hơn là

$$a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{3(ab+bc+ca)-6abc} \geq 4.$$

Đây là một bất đẳng thức đối xứng và ta có nhiều cách để giải quyết nó. Chẳng hạn, ta dùng "*phương pháp pqr*", đặt $q = ab + bc + ca, r = abc$, thế thì theo bất đẳng thức *Schur* bậc 3, ta có ngay $3r \geq 4q - 9$. Từ đây, ta được

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+\frac{ab+bc+ca}{3(ab+bc+ca)-6abc} &= 9-2q+\frac{q}{3q-6r} \geq 9-2q+\frac{q}{3q-2(4q-9)} \\ &= 9-2q+\frac{q}{18-5q} = 4+\frac{10(3-q)^2}{18-5q} \geq 4. \end{aligned}$$

Đến đây thì phép chứng minh của ta được hoàn tất.

Lời giải 3. Ta đặt $q = ab + bc + ca$ và $r = abc$. Khi đó, với chú ý ở bất đẳng thức quen thuộc $a^2b + b^2c + c^2a \leq 4 - r$, ta có thể đưa về giải quyết bài toán mạnh hơn là

$$9-2q+\frac{q}{4-r} \geq 4.$$

Đến đây, áp dụng bất đẳng thức *Schur* bậc 3, ta có $r \geq \frac{4q-9}{3}$. Từ đó suy ra được

$$9-2q+\frac{q}{4-r} \geq 9-2q+\frac{q}{4-\frac{4q-9}{3}} = 9-2q+\frac{3q}{21-4q} = 4+\frac{(3-q)(35-8q)}{21-4q} \geq 4.$$

Phép chứng minh được hoàn tất.

Bài 2. Cho a, b, c là các số dương và x, y, z là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{z+x-y}{z}ab}+\sqrt{\frac{y+z-x}{y}ca}+\sqrt{\frac{x+y-z}{x}bc} \le a+b+c.$$

Trần Quốc Luật

Lời giải 1. Sử dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta có

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{z+x-y}{z}ab}+\sqrt{\frac{y+z-x}{y}ca} &= \sqrt{a}\left(\sqrt{\frac{z+x-y}{z}b}+\sqrt{\frac{y+z-x}{y}c}\right) \\ &\le a+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{z+x-y}{z}b}+\sqrt{\frac{y+z-x}{y}c}\right)^2.\end{aligned}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sqrt{\frac{x+y-z}{x}bc}+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{z+x-y}{z}b}+\sqrt{\frac{y+z-x}{y}c}\right)^2 \le b+c,$$

$$\left(4-\frac{z+x-y}{z}\right)b+\left(4-\frac{y+z-x}{y}\right)c \ge 2\left[2\sqrt{\frac{x+y-z}{x}}+\sqrt{\frac{(z+x-y)(y+z-x)}{yz}}\right]\sqrt{bc}.$$

Chú ý rằng $4-\frac{z+x-y}{z}>0$ và $4-\frac{y+z-x}{y}>0$ nên sau khi áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau

$$\left(4-\frac{z+x-y}{z}\right)\left(4-\frac{y+z-x}{y}\right) \ge \left[2\sqrt{\frac{x+y-z}{x}}+\sqrt{\frac{(z+x-y)(y+z-x)}{yz}}\right]^2.$$

Bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức sau

$$\frac{x+y-z}{x}+\frac{z+x-y}{z}+\frac{y+z-x}{y}+\sqrt{\frac{(x+y-z)(y+z-x)(z+x-y)}{xyz}} \le 4.$$

Đặt $m=y+z-x, n=z+x-y$ và $p=x+y-z$ thì m, n, p là các số dương và bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{m}{m+p}+\frac{n}{n+m}+\frac{p}{p+n}+\sqrt{\frac{2mnp}{(m+n)(n+p)(p+m)}} \le 2,$$

$$\frac{m}{m+n}+\frac{n}{n+p}+\frac{p}{p+m} \ge 1+\sqrt{\frac{2mnp}{(m+n)(n+p)(p+m)}}.$$

Bất đẳng thức này đã được chứng minh trong "`topicofluat.pdf`" được biên tập bởi Võ Quốc Bá Cẩn.

Lời giải 2. Giả sử rằng x, y, z là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC, khi đó

$$\frac{z+x-y}{z}=\frac{\sin A-\sin B+\sin C}{\sin C}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{z+x-y}{z}ab}+\sqrt{\frac{y+z-x}{y}ca}+\sqrt{\frac{x+y-z}{x}bc} = \\
= \quad & \frac{\cos\frac{B}{2}\sqrt{ab\sin A}+\cos\frac{A}{2}\sqrt{ca\sin B}+\cos\frac{C}{2}\sqrt{bc\sin C}}{\sqrt{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}} \\
\leq \quad & \sqrt{\frac{\left(ab\cos^2\frac{B}{2}+ca\cos^2\frac{A}{2}+bc\cos^2\frac{C}{2}\right)(\sin A+\sin B+\sin C)}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}}\ (\textit{Cauchy Schwarz}) \\
= \quad & \sqrt{2ab\cos B+2ca\cos A+2bc\cos C+2ab+2bc+2ca}.
\end{aligned}$$

Mặt khác, với chú ý ở bất đẳng thức quen thuộc

$$2ab\cos B+2ca\cos A+2bc\cos C\leq a^2+b^2+c^2,$$

ta có thể dễ dàng suy ra kết quả của bài toán.

Bài 3. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca \geq 11$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P(a, b, c) = \sqrt[3]{a^2 + 3} + \frac{7}{5\sqrt[3]{14}}\sqrt[3]{b^2 + 3} + \frac{\sqrt[3]{9}}{5}\sqrt[3]{c^2 + 3}.$$

Trần Quốc Anh

Lời giải 1. Ta sẽ sử dụng bổ đề sau đây

Bổ đề 1. *Với mọi số thực a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca \geq 11$, ta luôn có*

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq 100.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) &= (ab + bc + ca - 1)^2 + (a + b + c - abc)^2 \\
&\geq (ab + bc + ca - 1)^2 \geq (11 - 1)^2 = 100.
\end{aligned}$$

Do đó, bổ đề của ta được chứng minh. Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $a = 1, b = 2, c = 3$.
Quay trở lại bài toán đã cho. Áp dụng bất đẳng thức trung bình lũy thừa, ta có

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{a^2 + 3} &= \sqrt[3]{4}\sqrt[3]{\frac{\frac{a^2+1}{2} + 1}{2}} \geq \sqrt[3]{4}\,\frac{\sqrt[3]{\frac{a^2+1}{2}} + \sqrt[3]{1}}{2} = \sqrt[3]{\frac{a^2 + 1}{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \\
\frac{7}{5\sqrt[3]{14}}\sqrt[3]{b^2 + 3} &= \frac{7\sqrt[3]{7}}{5\sqrt[3]{14}}\sqrt[3]{\frac{5 \cdot \frac{b^2+1}{5} + 1 + 1}{7}} \geq \frac{7\sqrt[3]{7}}{5\sqrt[3]{14}}\,\frac{5\sqrt[3]{\frac{b^2+1}{5}} + \sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1}}{7} = \sqrt[3]{\frac{b^2 + 1}{10}} + \frac{2}{5\sqrt[3]{2}}, \\
\frac{\sqrt[3]{9}}{5}\sqrt[3]{c^2 + 3} &= \frac{\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{12}}{5}\sqrt[3]{\frac{5 \cdot \frac{c^2+1}{10} + 1}{6}} \geq \frac{\sqrt[3]{9}\sqrt[3]{12}}{5}\,\frac{5\sqrt[3]{\frac{c^2+1}{10}} + \sqrt[3]{1}}{6} = \sqrt[3]{\frac{c^2 + 1}{20}} + \frac{1}{5\sqrt[3]{2}}.
\end{aligned}$$

Cộng tất cả lại, ta được

$$\begin{aligned}
P(a, b, c) &\geq \sqrt[3]{\frac{a^2 + 1}{4}} + \sqrt[3]{\frac{b^2 + 1}{10}} + \sqrt[3]{\frac{c^2 + 1}{20}} + \frac{8}{5\sqrt[3]{2}} \\
&\geq 3\sqrt[9]{\frac{(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)}{800}} + \frac{8}{5\sqrt[3]{2}} \; (AM - GM) \\
&\geq 3\sqrt[9]{\frac{100}{800}} + \frac{8}{5\sqrt[3]{2}} = \frac{23}{5\sqrt[3]{2}} \; \text{(theo bổ đề 1)}.
\end{aligned}$$

Ngoài ra, dễ thấy đẳng thức có thể xảy ra khi $a = 1, b = 2, c = 3$ nên đây chính là giá trị nhỏ nhất của P mà ta cần tìm.

Lời giải 2. Ta trình bày một lời giải khác cho bài toán này, công cụ mà ta sử dụng ở đây sẽ là tính chất lồi-lõm của hàm số. Trước khi đi vào lời giải này, xin được nhắc lại kết quả quen thuộc sau (bạn đọc có thể tự chứng minh lấy)

Bổ đề 2. *Cho hàm số f liên tục và có đạo hàm cấp 2 trên đoạn $[a, b]$. Khi đó, với mọi $x, y \in [a, b]$, ta luôn có*

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y).$$

Quay lại bài toán chính. Điều trước tiên ta có thể thấy là ta chỉ cần xét $a, b, c \geq 0$ là đủ bởi vì $|ab| + |bc| + |ca| \geq ab + bc + ca \geq 11$ và

$$\sqrt[3]{a^2+3} + \frac{7}{5\sqrt[3]{14}}\sqrt[3]{b^2+3} + \frac{\sqrt[3]{9}}{5}\sqrt[3]{c^2+3} = \sqrt[3]{|a|^2+3} + \frac{7}{5\sqrt[3]{14}}\sqrt[3]{|b|^2+3} + \frac{\sqrt[3]{9}}{5}\sqrt[3]{|c|^2+3}.$$

Điều thứ hai ta có thể thấy khi $a, b, c \geq 0$ là ta chỉ cần xét $ab + bc + ca = 11$ là đủ, bởi vì nếu ta đặt $a = ka_1, b = kb_1, c = kc_1$ với $k \geq 1$ và $a_1, b_1, c_1 \geq 0$ sao cho $a_1b_1 + b_1c_1 + c_1a_1 = 11$ thì

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^2+3} + \frac{7}{5\sqrt[3]{14}}\sqrt[3]{b^2+3} + \frac{\sqrt[3]{9}}{5}\sqrt[3]{c^2+3} &= \sqrt[3]{k^2a_1^2+3} + \frac{7}{5\sqrt[3]{14}}\sqrt[3]{k^2b_1^2+3} + \frac{\sqrt[3]{9}}{5}\sqrt[3]{k^2c_1^2+3} \\ &\geq \sqrt[3]{a_1^2+3} + \frac{7}{5\sqrt[3]{14}}\sqrt[3]{b_1^2+3} + \frac{\sqrt[3]{9}}{5}\sqrt[3]{c_1^2+3}.\end{aligned}$$

Tóm lại, với những nhận định này, ta có thể đưa bài toán về xét trong trường hợp $a, b, c \geq 0$ và $ab + bc + ca = 11$. Lúc này, đặt $a = \sqrt{11}\tan A, b = \sqrt{11}\tan B, c = \sqrt{11}\tan C$ với $A, B, C \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ thì ta có thể thấy ngay $\tan A \tan B + \tan B \tan C + \tan C \tan A = 1$, hay $A + B + C = \frac{\pi}{2}$. Bây giờ, xét hàm số $f(x) = \sqrt{11\tan^2 x + 3}$ với $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, ta có

$$f'(x) = \frac{22\tan x(\tan^2 x + 1)}{3(11\tan^2 x + 3)^{2/3}}, \quad f''(x) = \frac{22(\tan^2 x + 1)(55\tan^4 x + 16\tan^2 x + 9)}{9(11\tan^2 x + 3)^{5/3}} > 0,$$

nên $f(x)$ là hàm lồi. Bây giờ, xét các số $M = \arctan\frac{1}{\sqrt{11}}, N = \arctan\frac{2}{\sqrt{11}}, P = \arctan\frac{3}{11}$[1], ta dễ thấy $M, N, P \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ và $M + N + P = \frac{\pi}{2}$ nên theo tính chất của hàm lồi, ta có

$$\begin{aligned} f(A) &\geq f(M) + f'(M)(A - M) = \sqrt[3]{4} + \frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt{11}}(A - M), \\ f(B) &\geq f(N) + f'(N)(B - N) = \sqrt[3]{7} + \frac{20\sqrt[3]{7}}{7\sqrt{11}}(B - N), \\ f(C) &\geq f(P) + f'(P)(C - P) = \sqrt[3]{12} + \frac{10\sqrt[3]{12}}{3\sqrt{11}}(C - P). \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$P(a, b, c) = f(a) + \frac{7}{5\sqrt[3]{14}}f(b) + \frac{\sqrt[3]{9}}{5}f(c) \geq \frac{23}{5\sqrt[3]{2}} + \frac{2\sqrt[3]{4}}{\sqrt{11}}(A + B + C - M - N - P) = \frac{23}{5\sqrt[3]{2}}.$$

Đây chính là giá trị mà ta cần tìm.

Nhận xét. Cả 2 lời giải trên đều có thể giúp ta tìm ra những kết quả tổng quát thú vị hơn, đặc biệt là lời giải 2, nó có thể giúp ta giải được bài toán tổng quát với hệ số bất kì mà không cần chọn trước "*điểm rơi*". Về bản chất, thực ra lời giải 2 chính là một áp dụng của bất đẳng thức *Karamata có trọng số*, bạn đọc hãy thử phát biểu và chứng minh bất đẳng thức này xem sao!

[1] Tại sao ta lại xét các số này? Nếu như không dựa vào lời giải 1 ở trên thì liệu có cách nào để tìm được các số này không? Bạn đọc hãy dựa vào phần giải phía dưới và đưa ra suy luận của mình nhé!

Bài 4. a) Chứng minh rằng với mọi số dương a, b, c, ta luôn có

$$\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a} \geq \frac{4}{3a+4b+5c}+\frac{4}{3b+4c+5a}+\frac{4}{3c+4a+5b}.$$

Trần Quốc Luật

b) Cho các số dương a, b, c. Biết rằng $a \leq b \leq c$ và $a+b+c = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, chứng minh rằng

$$b \geq \frac{1}{a+c-1}.$$

Vasile Cirtoaje

Lời giải 1.

a) Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$\frac{16}{3a+4b+5c} = \frac{(1+1+1+1)^2}{(a+2b)+(b+2c)+(b+2c)+(c+2a)} \leq \frac{1}{a+2b}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{b+2c}+\frac{1}{c+2a}.$$

Thực hiện tương tự cho 2 biểu thức còn lại rồi cộng tất cả lại, ta có ngay điều phải chứng minh.

b) Từ giả thiết $a \leq b \leq c$, ta suy ra $(b-c)(b-a) \leq 0$, hay là $ac \leq b(a+c-b)$, từ đó dẫn đến

$$a+b+c = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{a+c}{ac}+\frac{1}{b} \geq \frac{a+c}{b(a+c-b)}+\frac{1}{b},$$

suy ra

$$b(a+c)^2 - 2(a+c) + b(1-b^2) \geq 0,$$

và ta thu được

$$a+c \leq \frac{1-\sqrt{b^4-b^2+1}}{b} \text{ hoặc } a+c \geq \frac{1+\sqrt{b^4-b^2+1}}{b}.$$

Mặt khác, ta thấy $a+c > b$ mà $\frac{1-\sqrt{b^4-b^2+1}}{b} < b$ nên không thể xảy ra trường hợp $a+c \leq \frac{1-\sqrt{b^4-b^2+1}}{b}$. Như vậy, ta phải có

$$a+c \geq \frac{1+\sqrt{b^4-b^2+1}}{b} \geq \frac{1+\sqrt{b^2}}{b} = \frac{1}{b}+1,$$

hay là

$$b \geq \frac{1}{a+c-1}.$$

Bất đẳng thức của ta được chứng minh xong. Dễ thấy rằng từ các lập luận trên, ta có đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Lời giải 2.

a) Ngoài các cách dùng bất đẳng thức kinh điển như trên, với bài này ta còn có thể sử dụng tích phân để giải nó. Áp dụng bất đẳng thức $AM-GM$, với mọi $x, y, z > 0$, ta có

$$x^4y^8+2y^4z^8+z^4x^8 \geq 4x^3y^4z^5, \quad y^4z^8+2z^4x^8+x^4y^8 \geq 4y^3z^4x^5, \quad z^4x^8+2x^4y^8+y^4z^8 \geq 4z^3x^4y^5.$$

Cộng lại, ta thu được

$$x^4y^8+y^4z^8+z^4x^8 \geq x^3y^4z^5+y^3z^4x^5+z^3x^4y^5.$$

Bây giờ, cho $x = t^a, y = t^b, z = t^c$ với $t > 0$, bất đẳng thức trên trở thành

$$t^{4a+8b} + t^{4b+8c} + t^{4c+8a} \geq t^{3a+4b+5c} + t^{3b+4c+5a} + t^{3c+4a+5b}.$$

Lấy tích phân 2 vế theo t trên đoạn $[0,1]$, ta được

$$\int_0^1 \left(t^{4a+8b} + t^{4b+8c} + t^{4c+8a}\right) dt \geq \int_0^1 \left(t^{3a+4b+5c} + t^{3b+4c+5a} + t^{3c+4a+5b}\right) dt,$$

hay là

$$\frac{1}{4a+8b} + \frac{1}{4b+8c} + \frac{1}{4c+8a} \geq \frac{1}{3a+4b+5c} + \frac{1}{3b+4c+5a} + \frac{1}{3c+4a+5b}.$$

Nhân cả 2 vế cho 4, ta thu được

$$\frac{1}{a+2b} + \frac{1}{b+2c} + \frac{1}{c+2a} \geq \frac{4}{3a+4b+5c} + \frac{4}{3b+4c+5a} + \frac{4}{3c+4a+5b}.$$

Đây chính là bất đẳng thức mà ta cần chứng minh.

b) Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}$ và $z = \frac{1}{c}$ thì ta phải chứng minh $y \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{z} - 1$ với $x \geq y \geq z > 0$ và $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Từ giả thiết $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, ta suy ra được

$$2y = (x+z)\left(\frac{1}{xz} - 1\right) + \sqrt{(x+z)^2\left(\frac{1}{xz} - 1\right)^2 + 4}.$$

Do đó, ta phải chứng minh

$$(x+z)\left(\frac{1}{xz} - 1\right) + \sqrt{(x+z)^2\left(\frac{1}{xz} - 1\right)^2 + 4} \leq 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} - 1\right),$$

hay là

$$\sqrt{(x+z)^2\left(\frac{1}{xz} - 1\right)^2 + 4} \leq (x+z)\left(\frac{1}{xz} + 1\right) - 2.$$

Do

$$(x+z)\left(\frac{1}{xz} + 1\right) - 2 = x + \frac{1}{x} + \frac{(z-1)^2}{z} > 0,$$

nên ta có thể bình phương 2 vế bất đẳng thức trên và thu gọn nó lại thành

$$\frac{4(x+z)(x-1)(z-1)}{xz} \leq 0.$$

Bất đẳng thức này đúng nếu $x \geq 1 \geq z$. Tuy nhiên, áp dụng giả thiết $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ một lần nữa, ta thấy rằng

$$\begin{aligned} 2(x+y+z) &= 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(y + \frac{1}{y}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) \geq 6. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$x \geq \frac{x+y+z}{3} \geq 1,$$

và

$$\frac{1}{z} \geq \frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}{3} \geq 1.$$

Phép chứng minh của ta được hoàn tất.

Bài 5. Cho các số không âm a, b, c sao cho không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng với mọi $k \geq 1$, bất đẳng thức sau luôn được thỏa mãn

$$\frac{a^2}{a^2+kab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+kbc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+kca+a^2}+\frac{2k+1}{k+2}\cdot\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq 2.$$

Võ Quốc Bá Cẩn

Lời giải. Đặt $x = ab+bc+ca$ và $y = a^2+b^2+c^2$ thì $0 < x \leq y$. Bất đẳng thức của ta tương đương với

$$\sum_{cyc}\left(1-\frac{a^2}{a^2+kab+b^2}\right) \geq \frac{(2k+1)x+(k+2)y}{(k+2)y},$$

hay là

$$\sum_{cyc}\frac{b(ka+b)}{a^2+kab+b^2} \geq \frac{(2k+1)x+(k+2)y}{(k+2)y}.$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$\left[\sum_{cyc}\frac{b(ka+b)}{a^2+kab+b^2}\right]\left[\sum_{cyc}\frac{b(a^2+kab+b^2)}{ka+b}\right] \geq \left(\sum_{cyc}b\right)^2 = 2x+y,$$

Và ta có thể đưa bài toán về chứng minh

$$\frac{(k+2)(2x+y)y}{(k+2)y+(2k+1)x} \geq \sum_{cyc}\frac{b(a^2+kab+b^2)}{ka+b},$$

Chú ý rằng

$$\frac{(k+2)(2x+y)y}{(k+2)y+(2k+1)x} = y+\frac{3xy}{(k+2)y+(2k+1)x}, \quad \frac{b(a^2+kab+b^2)}{ka+b} = b^2+\frac{a^2b}{ka+b}.$$

Bất đẳng thức trên có thể được thu gọn thành

$$\frac{3xy}{(k+2)y+(2k+1)x} \geq \sum_{cyc}\frac{a^2b}{ka+b},$$

Bất đẳng thức này tương đương với mỗi bất đẳng thức trong dãy các bất đẳng thức sau

$$\frac{3kxy}{(k+2)y+(2k+1)x} \geq \sum_{cyc}\frac{ka^2b}{ka+b},$$

$$\sum_{cyc}\left(ab-\frac{ka^2b}{ka+b}\right) \geq x-\frac{3kxy}{(k+2)y+(2k+1)x},$$

$$\sum_{cyc}\frac{ab^2}{ka+b} \geq \frac{x\left[(2k+1)x+(2-2k)y\right]}{(k+2)y+(2k+1)x}.$$

Đến đây, ta áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz* một lần nữa,

$$\sum_{cyc} \frac{ab^2}{ka+b} \ge \frac{\left(\sum\limits_{cyc} ab\right)^2}{\sum\limits_{cyc} a(ka+b)} = \frac{x^2}{ky+x}.$$

Như vậy, bất đẳng thức của ta sẽ được chứng minh nếu

$$\frac{x}{ky+x} \ge \frac{(2k+1)x+(2-2k)y}{(k+2)y+(2k+1)x}.$$

Bằng cách quy đồng và biến đổi tương đương, ta có thể thu gọn bất đẳng thức trên lại thành

$$\frac{2ky(k-1)(y-x)}{(x+ky)\left[(k+2)y+(2k+1)x\right]} \ge 0.$$

Kết quả này hiển nhiên đúng bởi vì $k \ge 1$ và $y \ge x > 0$. Và do đó, phép chứng minh của ta được hoàn tất. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Bài toán này là một tổng quát của kết quả quen thuộc

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^2}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^2}{c^2+ca+a^2} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \le 2.$$

Bài 6. Với mọi điểm M thuộc miền tam giác đều ABC cho trước, ta gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là các khoảng cách từ M đến BC, CA, AB tương ứng. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{d_a^2}{MB \cdot MC} + \frac{d_b^2}{MC \cdot MA} + \frac{d_c^2}{MA \cdot MB}.$$

Trần Quang Hùng, Võ Quốc Bá Cẩn

Lời giải. Vì M thuộc miền tam giác nên tồn tại các số không âm x, y, z sao cho $x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$. Sử dụng hệ thức *Leibnitz*, với mọi điểm P nằm trong mặt phẳng ta có

$$\begin{aligned} xPA^2 + yPB^2 + zPC^2 &= (x+y+z)PM^2 + \frac{yzBC^2 + zxCA^2 + xyAB^2}{x+y+z} \\ &= (x+y+z)PM^2 + \frac{xy+yz+zx}{x+y+z}a^2, \end{aligned}$$

trong đó a là độ dài cạnh của tam giác đều ABC.
Bây giờ, cho $P \equiv A$, ta thu được

$$(y+z)a^2 = (x+y+z)MA^2 + \frac{xy+yz+zx}{x+y+z}a^2,$$

từ đó suy ra

$$MA = \frac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{x+y+z}a.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng tính được

$$MB = \frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{x+y+z}a, \quad MC = \frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{x+y+z}a.$$

Đến đây, từ hệ thức quen thuộc $S_{MBC}\overrightarrow{MA} + S_{MCA}\overrightarrow{MB} + S_{MAB}\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ kết hợp với tính chất tâm tỉ cự, ta được

$$\frac{x}{S_{MBC}} = \frac{y}{S_{MCA}} = \frac{z}{S_{MAB}}.$$

Vì $S_{MBC} = \frac{1}{2}ad_a, S_{MCA} = \frac{1}{2}ad_b, S_{MAB} = \frac{1}{2}ad_c$ nên đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{x}{d_a} = \frac{y}{d_b} = \frac{z}{d_c} = \frac{x+y+z}{d_a+d_b+d_c},$$

suy ra

$$d_a = \frac{x(d_a+d_b+d_c)}{x+y+z}, \quad d_b = \frac{y(d_a+d_b+d_c)}{x+y+z}, \quad d_c = \frac{z(d_a+d_b+d_c)}{x+y+z}.$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} \frac{d_a^2}{MB \cdot MC} + \frac{d_b^2}{MC \cdot MA} + \frac{d_c^2}{MA \cdot MB} &= \sum_{cyc} \frac{\frac{x^2(d_a+d_b+d_c)^2}{(x+y+z)^2}}{\frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{x+y+z}a \cdot \frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{x+y+z}a} \\ &= \frac{(d_a+d_b+d_c)^2}{a^2} \sum_{cyc} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xx+z^2)}} \\ &= \frac{3}{4} \sum_{cyc} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xx+z^2)}}. \end{aligned}$$

Chú ý rằng ở đây ta đã sử dụng đẳng thức quen thuộc $d_a + d_b + d_c = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ để suy ra được đẳng thức cuối ở trên. Đến đây, sử dụng bổ đề sau (chứng minh xem ở cuối lời giải bài toán này)

Bổ đề. *Với mọi số không âm x, y, z, ta luôn có*

$$1 \le \sum_{cyc} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xx+z^2)}} \le \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Đẳng thức ở bên trái xảy ra khi $x = y = z = 1$ và đẳng thức ở bên phải xảy ra khi $x = y, z = 0$ cùng các hoán vị tương ứng.

Ta có thể dễ dàng suy ra được, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{d_a^2}{MB \cdot MC} + \frac{d_b^2}{MC \cdot MA} + \frac{d_c^2}{MA \cdot MB}$ là $\frac{3}{4}$ đạt được khi $x = y = z = 1$ hay M trùng với tâm của tam giác đều ABC; và giá trị lớn nhất của nó là $\frac{\sqrt{3}}{2}$ đạt được chẳng hạn khi $x = y, z = 0$ hay M trùng với trung điểm của cạnh AB.

Như vậy, công việc cuối cùng của ta để hoàn thành lời giải của bài toán là chứng minh bổ đề trên. Phép chứng minh như sau

Chứng minh. Bằng phép nhóm theo lũy thừa của x, ta thấy

$$\begin{aligned}
&\left(x^2 + \frac{y^2+z^2}{y+z}x + yz\right)^2 - (x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2) = \\
= \ & \left[\frac{2(y^2+z^2)}{y+z} - y - z\right]x^3 + \left[\frac{(y^2+z^2)^2}{(y+z)^2} + yz - y^2 - z^2\right]x^2 + xyz\left[\frac{2(y^2+z^2)}{y+z} - y - z\right] \\
= \ & \frac{x(x^2+yz)(y-z)^2}{y+z} - \frac{x^2yz(y-z)^2}{(y+z)^2} \ge \frac{2x^2\sqrt{yz}(y-z)^2}{y+z} - \frac{x^2\sqrt{yz}(y-z)^2}{2(y+z)} \ge 0.
\end{aligned}$$

Và ta được

$$\left(x^2 + \frac{y^2+z^2}{y+z}x + yz\right)^2 \ge (x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2),$$

hay là

$$\frac{1}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}} \ge \frac{y+z}{x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)}.$$

Thực hiện tương tự cho 2 biểu thức còn lại, rồi cộng tất cả lại, ta thu được

$$\sum_{cyc} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xx+z^2)}} \ge \sum_{cyc} \frac{x^2(y+z)}{x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)} = 1.$$

Đây chính là vế trái của bất đẳng thức nêu trong bổ đề. Bây giờ, ta sẽ chứng minh vế phải. Để thực hiện điều này, ta sẽ sử dụng tính đối xứng của nó và giả sử rằng $x \ge y \ge z \ge 0$. Với giả thiết này, ta có đánh giá sau

$$\frac{y^2}{\sqrt{y^2+yz+z^2}} \le y - \frac{z}{3}.$$

Đánh giá này đúng bởi vì $(3y-z)^2(y^2+yz+z^2) - 9y^4 = z\left[3y^3 + z(y-z)(4y-z)\right] \ge 0$. Điều này dẫn đến

$$\frac{y^2}{\sqrt{(y^2+yz+z^2)(y^2+yx+x^2)}} \le \frac{y - \frac{z}{3}}{\sqrt{x^2+xy+y^2}} \le \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{3y-z}{x+y}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xx+z^2)}} \le \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{3x-z}{x+y}.$$

Suy ra

$$\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xx+z^2)}} + \frac{y^2}{\sqrt{(y^2+yz+z^2)(y^2+yx+x^2)}} \le \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{4z}{3\sqrt{3}(x+y)}.$$

Lúc này, để phép chứng minh được hoàn tất thì ta cần có

$$\frac{4}{3\sqrt{3}(x+y)} \ge \frac{z}{\sqrt{(z^2+zx+x^2)(z^2+zy+y^2)}}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{x^2+xz+z^2}{z} &= \frac{x^2}{z}+z+x = \frac{x^2}{y}+y+x+\frac{(y-z)\,(x^2-yz)}{yz} \\ &\ge \frac{x^2}{y}+y+x = \frac{x^2+xy+y^2}{y},\end{aligned}$$

và

$$\frac{z^2+zy+y^2}{z} \ge 3y \;(AM-GM).$$

Từ đó suy ra

$$\frac{z}{\sqrt{(z^2+zx+x^2)(z^2+zy+y^2)}} \le \frac{1}{\sqrt{3(x^2+xy+y^2)}} \le \frac{2}{3(x+y)} < \frac{4}{3\sqrt{3}(x+y)}.$$

Bổ đề được chứng minh xong và bài toán của ta được giải quyết hoàn toàn.

— HẾT —