UBND HUYỆN THANH BA
PHÒNG GD&ĐT

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2022 - 2023
Môn: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)
Đề thi gồm có: 03 trang

I. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN(8,0 điểm):

Hãy chọn phương án trả lời đúng

Câu 1: Rút gọn biểu thức $M=\sqrt{2x+\sqrt{4x-1}}+\sqrt{2x-\sqrt{4x-1}}$ với $\frac{1}{4}\le x\le\frac{1}{2}$ được kết quả là

A. $\sqrt{2}$. B. $\sqrt{2}\sqrt{4x-1}$. C. $2\sqrt{4x-1}$. D. 2.

Câu 2: Cho $x;y;z$ là những số dương thỏa mãn $xy+yz+zx=2$.
Giá trị của biểu thức $x.\sqrt{\frac{(2+y^2)(2+z^2)}{2+x^2}}+y.\sqrt{\frac{(2+x^2)(2+z^2)}{2+y^2}}+z.\sqrt{\frac{(2+y^2)(2+x^2)}{2+z^2}}$ là

A. 8. B. 6. C. 5. D. 4.

Câu 3: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm $A(2;3);B(4;4);C(3;2)$. Điểm $D(x;y)$ sao cho $ABCD$ là hình bình hành, khi đó $x+y$ bằng

A. 0. B. 2. C. –1. D. 1.

Câu 4: Cho $x;y;z$ dương thỏa mãn $x\sqrt{x}+y\sqrt{y}+z\sqrt{z}=3\sqrt{xyz}$. Giá trị của biểu thức $P=\left(1+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\right)\left(1+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{z}}\right)\left(1+\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x}}\right)$ bằng

A. 2. B. 4. C. 8. D. 27.

Câu 5: Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt[3]{24+x}+\sqrt{12-x}=6$ là

A. –61. B. –109. C. 61. D. 109.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(2;-3);B(6;1)$. Độ dài đường cao hạ từ đỉnh O của tam giác OAB bằng

A. $\frac{5}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $5\sqrt{2}$. D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Câu 7: Biết điểm $M(x_0;y_0)$ là điểm mà đường thẳng $y=(1-m)x+4m-6$ luôn đi qua với mọi giá trị của m. Giá trị của biểu thức $A=x_0^3+y_0^3$ bằng

A. –56. B. 56. C. 72. D. –72.

Câu 8: Gọi S là tập nghiệm của phương trình
$|x|+|x+1|+...+|x+2022|=x^2+2022x-2023$. Số phần tử của tập S là

A. 2. B. 1. C. 2022. D. 2023.

Câu 9: Cho ΔABC có đường trung tuyến AM, trọng tâm G. Qua G kẻ đường thẳng cắt AB và AC lần lượt tại D và E. Tổng tỉ số $\frac{AB}{AD}+\frac{AC}{AE}$ là

A. 2. B. 2,5. C. 3. D. 3,5.

Câu 10: Cho ΔABC có $AB = 6cm$; $AC = 8cm$. Biết hai đường trung tuyến từ đỉnh B và C vuông góc với nhau. Khi đó độ dài cạnh BC là

A. $10cm$. B. $2\sqrt{5}\,cm$. C. $4\sqrt{5}\,cm$. D. $15cm$.

Câu 11: Cho ΔABC vuông tại A có đường cao AH $(H \in BC)$; đường phân giác AD $(D \in BC)$. Biết $BH = 20cm$; $HC = 45cm$, khi đó độ dài đoạn thẳng HD là

A. $4cm$. B. $5cm$. C. $6cm$. D. $7cm$.

Câu 12: Cho ΔABC gọi O là trung điểm của BC và I là trung điểm của AO. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $5AM = 2AB$. Đường thẳng MI cắt cạnh AC tại N. Khi đó tỉ số $AN : AC$ bằng

A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $\frac{3}{5}$.

Câu 13: Một hình hộp chữ nhật có chiều cao $3cm$, đáy là một hình vuông cạnh $2cm$. Một hình chóp tứ giác đều cũng có chiều cao $3cm$, diện tích xung quanh bằng diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật. Thể tích của hình chóp tứ giác đều là

A. $36cm^3$. B. $24cm^3$. C. $12cm^3$. D. $8cm^3$.

Câu 14: Cho ΔABC vuông tại A có $BC = 10cm$. Diện tích tam giác ΔABC bằng $24\,cm^2$. Khi đó bán kính của đường tròn nội tiếp ΔABC bằng

A. $6cm$. B. $4cm$. C. $2cm$. D. $1{,}5cm$..

Câu 15: Cho $(O;R)$, điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho $OA=2R$, qua A kẻ cát tuyến ABC, B nằm giữa A và C. Biết góc $COB = 90^o$. Độ dài AC là

A) $\frac{R\sqrt{2}(\sqrt{7}+1)}{2}$. B) $\frac{R\sqrt{3}(\sqrt{7}+1)}{2}$. C) $\frac{R(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{2}$. D) $\frac{3R(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{2}$.

Câu 16: Bà Thanh thường xuyên nhận được cuộc gọi từ ba người cháu ở xa. Người cháu thứ nhất cứ 3 ngày thì gọi một lần. Người cháu thứ hai cứ 4 ngày thì gọi một lần. Người cháu thứ ba cứ 5 ngày thì gọi một lần. Vào ngày 31 tháng 12 năm 2021, bà Thanh nhận được cuộc gọi từ cả ba người cháu. Hỏi trong năm tiếp theo, có bao nhiêu ngày mà bà Thanh không nhận được cuộc gọi từ bất kì người cháu nào?

A. 144. B. 146. C. 149. D. 156.

II. PHẦN TỰ LUẬN (12,0 điểm):

Câu 1. *(3 điểm)*

a) Tìm các số nguyên dương x, y, z thoả mãn $2020x^3 + 2023y^3 - 4043z^3 = 0$ và $x+y+z$ là số nguyên tố.

b) Tìm các số nguyên m để $m.(m^2+3m+2)$ là một số chính phương.

c) Cho các số nguyên a và b thỏa mãn $S = a^2 + b^2 + ab + 3(a+b) + 2023$ chia hết cho 5. Tìm số dư khi chia $a-b$ cho 5.

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Cho a,b,c là các số thực khác 0 và thỏa mãn $(a+b+c)(ab+bc+ca) - abc = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = (a^3+b^3)(b^5+c^5)(c^{2023}+a^{2023})$.

b) Giải phương trình: $(x-1)^2 + \sqrt[3]{x^4 - x^2} = 2$.

c) Cho đa thức với hệ số nguyên $f(x)$ thỏa mãn $f(m^2+n^2) = f^2(m) + f^2(n)$ với mọi số nguyên dương m,n và $f(x)$ nhận giá trị dương với $x \neq 0$. Biết $f(0) = 0$ và $f(1) \neq 0$. Tính giá trị của $f(3)$.

Câu 3. *(4,0 điểm)*

Cho điểm A cố định thuộc $(O;R)$, điểm H di động trên đường tròn sao cho $AH < R$, qua H kẻ tiếp tuyến d với đường tròn (O). Lấy điểm B và C thuộc d sao cho H nằm giữa B,C thoả mãn $AB = AC = R$. Vẽ HM vuông góc với OB $(M \in OB)$, vẽ HN vuông góc với OC $(N \in OC)$.

a) Chứng minh rằng ΔOMN đồng dạng với ΔOCB.

b) Chứng minh rằng khi H di động trên đường tròn sao cho $AH < R$, thì MN luôn thuộc một đường cố định và tích $OB.OC$ luôn không đổi.

c) Tìm vị trí của điểm H để diện tích tam giác OMN đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4. *(1,0 điểm)*

Cho $x,y,z > 0$ và $x+y+z = 3$. Chứng minh rằng:

$$P = \frac{x}{x^2+x+1+yz} + \frac{y}{y^2+y+1+zx} + \frac{z}{z^2+z+1+xy} \leq \frac{3}{4}.$$

------------------------------ Hết ------------------------------

——— HẾT ———

Họ và tên thí sinh: ..Nguyễn..Cẩm..Ly............ Số báo danh: ..150.........

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

UBND HUYỆN THANH BA
PHÒNG GD&ĐT

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2022 - 2023
Môn: TOÁN
HDC gồm có: 07 trang

I. Một số chú ý khi chấm bài tự luận

- Hướng dẫn chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách. Khi chấm thi giám khảo cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp logic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.

- Thí sinh làm bài theo cách khác với hướng dẫn chấm mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của hướng dẫn chấm.

- Điểm bài thi là tổng điểm các câu không làm tròn số.

II. Đáp án – Thang điểm

1. Phần trắc nghiệm khách quan: Mỗi câu trả lời đúng được 0,5 điểm.

Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6	Câu 7	Câu 8
A	**D**	**B**	**C**	**B**	**D**	**B**	**A**
Câu 9	Câu 10	Câu 11	Câu 12	Câu 13	Câu 14	Câu 15	Câu 16
C	**B**	**C**	**B**	**C**	**C**	**A**	**B**

2. Phần tự luận

Câu 1 *(3.0 điểm).*

a) Tìm các số nguyên dương x,y,z thoả mãn $2020x^3+2023y^3-4043z^3=0$ và $x+y+z$ là số nguyên tố.

b) Tìm các số nguyên m để $m.(m^2+3m+2)$ là một số chính phương.

c) Cho các số nguyên a và b thỏa mãn $S=a^2+b^2+ab+3(a+b)+2023$ chia hết cho 5. Tìm số dư khi chia $a-b$ cho 5.

Nội dung	Điểm
a) Tìm các số nguyên dương x,y,z thoả mãn $2020x^3+2023y^3-4043z^3=0$ và $x+y+z$ là số nguyên tố.	***1,0***
Vì x,y,z nguyên dương suy ra $x+y+z\geq 3$ Nếu $x+y+z\,\vdots\,3 \Rightarrow x+y+z=3$ (vì $x+y+z$ là số nguyên tố) $\Rightarrow x=y=z=1$	***0,25***

Nếu $x+y+z>3$ Xét hiệu $H=2020(x+y+z)-2020x^3-2023y^3+4043z^3$ $H=2020(x-x^3)+2020(y-y^3)-3y^3+2020(z-z^3)+6063z^3$
Dễ có $x-x^3⋮3;\ y-y^3⋮3;\ z-z^3⋮3$ Nên $H⋮3 \Rightarrow x+y+z⋮3$ suy ra loại Vậy $x=y=z=1$.
b) Tìm các số nguyên m để $m.(m^2+3m+2)$ là một số chính phương.
Ta có $m.(m^2+3m+2)$ là một số chính phương. Suy ra $m.(m^2+3m+2)=k^2\ (k\in \mathbb{Z})$ Vì $k^2\ge 0 \Rightarrow m.(m^2+3m+2)\ge 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m\ge 0 \\ -2\le m\le -1\end{array}\right.$ Với $m\in\{-2;-1;0\}$ ta đều có $k^2=0$ (thoả mãn)
Với $m>0$ ta có $k^2=m.(m^2+3m+2)=m(m+1)(m+2)=(m+1)(m^2+2m)$ Gọi d là ước chung nguyên tố của $m+1$ và m^2+2m Suy ra $\begin{cases} m+1⋮d \\ m^2+2m⋮d\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m+1⋮d \\ m⋮d\end{cases} \Rightarrow 1⋮d \Rightarrow d=1$
Nên $m.(m^2+3m+2)$ là một số chính phương khi $m+1$ và m^2+2m đều là số chính phương.
Để m^2+2m là số chính phương thì $m^2+2m=a^2\ (a\in \mathbb{Z})$. Suy ra $(m+1)^2-1=a^2 \Rightarrow (m+1+a)(m+1-a)=1 \Rightarrow m+1+a=m+1-a \Rightarrow a=0$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=-2\end{array}\right.$ (không thoả mãn) Vậy $m\in\{-2;-1;0\}$ thì $m.(m^2+3m+2)$ là một số chính phương.
c) Cho các số nguyên a và b thỏa mãn $S=a^2+b^2+ab+3(a+b)+2023$ chia hết cho 5. Tìm số dư khi chia $a-b$ cho 5.

0,25
0,25

Ta có $S=a^2+b^2+ab+3(a+b)+2023$ chia hết cho 5 nên ta được $4a^2+4b^2+4ab+12(a+b)+12 \vdots 5 \Leftrightarrow (2a+b+3)^2+3(b+1)^2 \vdots 5$ Đặt $x=2a+b+3; y=b+1$ thì ta được $x^2+3y^2 \vdots 5$. Ta biết rằng một số chính phương khi chia cho 5 có các số dư là 0; 1; 4. Do đó ta xét các trường hợp sau	***0,25***
+ Nếu y^2 chia hết cho 5, khi đó x^2 cũng chia hết cho 5. Từ đó ta được $\begin{cases}(2a+b+3)^2 \vdots 5\\(b+1) \vdots 5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a+b+3 \vdots 5\\b+1 \vdots 5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a+b+3 \vdots 5\\3(b+1) \vdots 5\end{cases} \Rightarrow (2a+b+3)-(3b+3) \vdots 5$ Từ đó ta được $2(a-b) \vdots 5 \Rightarrow a-b \vdots 5$ (vì 2 và 5 nguyên tố cùng nhau) Do đó dư trong phép chia $a-b \vdots 5$ cho 5 là 0.	***0,25***
+ Nếu y^2 chia cho 5 dư 1, khi đó x^2 chia cho 5 dư 2. Trường hợp này loại.	***0,25***
+ Nếu y^2 chia cho 5 dư 4, khi đó x^2 chia cho 5 dư 3. Trường hợp này loại. Vậy dư trong phép chia $a-b$ cho 5 là 0.	***0,25***

Câu 2. *(4,0 điểm)*

a) Cho a,b,c là các số thực khác 0 và thỏa mãn $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=(a^3+b^3)(b^5+c^5)(c^{2023}+a^{2023})$.

b) Giải phương trình: $(x-1)^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2$.

c) Cho đa thức với hệ số nguyên $f(x)$ thỏa mãn $f(m^2+n^2)=f^2(m)+f^2(n)$ với mọi số nguyên dương m,n và $f(x)$ nhận giá trị dương với $x \neq 0$. Biết $f(0)=0$ và $f(1) \neq 0$. Tính giá trị của $f(3)$.

Nội dung	Điểm
a) Cho a,b,c là các số thực khác 0 và thỏa mãn $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0$. Tính giá trị của biểu thức $P=(a^3+b^3)(b^5+c^5)(c^{2023}+a^{2023})$.	*1,5*
Vì $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc=0 \quad (a;b;c \neq 0)$ $\Rightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1$ *nên* $a+b+c \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{a+b+c}$.	0,5

$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+b+c}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=0\Leftrightarrow\frac{b+c}{a(a+b+c)}+\frac{b+c}{bc}=0$ $\Leftrightarrow(b+c)\left(\frac{1}{a(a+b+c)}+\frac{1}{bc}\right)=0$	0,5
$\Leftrightarrow(b+c)\left(\frac{bc+a^2+ab+ac}{abc(a+b+c)}\right)=0\Leftrightarrow\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc(a+b+c)}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-b\\b=-c\\c=-a\end{array}\right.$ Vậy $(a^3+b^3)(b^{23}+c^{23})(c^{2021}+a^{2021})=0$.	0,5
b) Giải phương trình: $(x-1)^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2$.	**1,5**
ĐKXĐ: $\forall x\in R$ Phương trình $(x-1)^2+\sqrt[3]{x^4-x^2}=2\Leftrightarrow x^2-2x-1+\sqrt[3]{x^4-x^2}=0$ Ta có $x=0$ không là nghiệm của phương trình, ta chia 2 vế phương trình cho $x\neq 0$ ta được phương trình: $x-\frac{1}{x}-2+\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=0$ (*)	0,5
Đặt $\sqrt[3]{x-\frac{1}{x}}=y$ phương trình (*) trở thành: $y^3+y-2=0\Leftrightarrow(y-1)(y^2+y+2)=0$ Vì $y^2+y+2=\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0\ \forall y$	0,5
$\Rightarrow y=1\Rightarrow x-\frac{1}{x}=1\Rightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\quad(t/m)\\x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\quad(t/m)\end{array}\right.$ Vậy tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$	0,5
c) Cho đa thức với hệ số nguyên $f(x)$ thỏa mãn $f(m^2+n^2)=f^2(m)+f^2(n)$ với mọi số nguyên dương m,n và $f(x)$ nhận giá trị dương với $x\neq 0$. Biết $f(0)=0$ và $f(1)\neq 0$. Tính giá trị của $f(3)$.	**1,0**
Ta có $f(1)=f(0^2+1^2)=f^2(0)+f^2(1)=0+f^2(1)$ $\Leftrightarrow f(1).[f(1)-1]=0\Leftrightarrow f(1)=1$ hoặc $f(1)=0$ (loại) Ta lại có $f(2)=f(1^2+1^2)=f^2(1)+f^2(1)=1+1=2$	0,5

$f(4)=f(0^2+2^2)=f^2(0)+f^2(2)=2^2+0=4$ $f(5)=f(1^2+2^2)=f^2(1)+f^2(2)=2^2+1=5$ $f(25)=f(0^2+5^2)=f^2(0)+f^2(5)=0+5^2=25$ $f(25)=f(3^2+4^2)=f^2(3)+f^2(4)=f^2(3)+16=25$ $\Rightarrow f^2(3)=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(3)=3 \\ f(3)=-3 \end{array}\right.$ Vậy $f(3)=3$ hoặc $f(3)=-3$	0,5

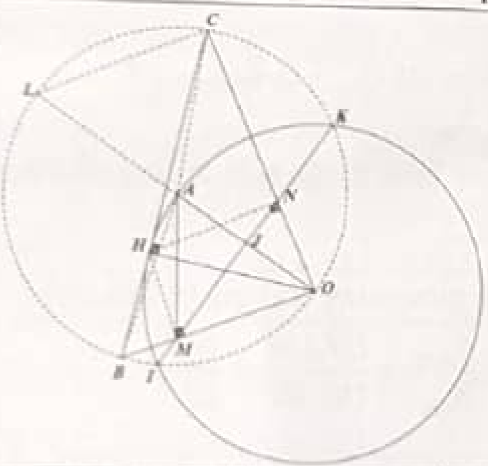
Câu 3. *(4,0 điểm)*

Cho điểm A cố định thuộc $(O;R)$, điểm H di động trên đường tròn sao cho $AH < R$, qua H kẻ tiếp tuyến d với đường tròn (O). Lấy điểm B và C thuộc d sao cho H nằm giữa B,C thoả mãn $AB = AC = R$. Vẽ HM vuông góc với OB $(M \in OB)$, vẽ HN vuông góc với OC $(N \in OC)$.

a) Chứng minh rằng ΔOMN đồng dạng với ΔOCB.

b) Chứng minh rằng khi H di động trên đường tròn sao cho $AH < R$, thì MN luôn thuộc một đường cố định và tích $OB.OC$ luôn không đổi.

c) Tìm vị trí của điểm H để diện tích tam giác OMN đạt giá trị lớn nhất.

Nội dung	Điểm
	0,25
a) Chứng minh rằng ΔOMN đồng dạng với ΔOCB.	1,25
Gọi $(A;AO)$ giao d tại B và C. Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác $\Delta OHB; \widehat{OHB}=90^0; HM \perp OB \quad \Rightarrow OM.OB = OH^2$	0,25
Tương tự có $ON.OC = OH^2$	0,25
Suy ra $\Rightarrow OM.OB = ON.OC \Rightarrow \dfrac{OB}{OC} = \dfrac{ON}{OM}$	0,25
Xét ΔOMN và ΔOCB có $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{ON}{OM}$ và $\widehat{MON}$ chung	0,25
$\Rightarrow \Delta OMN$ dd $\Delta OCB(c-g-c)$	0,25

b) Chứng minh rằng khi H di động trên đường tròn sao cho $AH < R$, **thì** MN luôn đi qua một điểm cố định và tích $OB.OC$ luôn không đổi.	*1,5*
Ta có $OM.OB = OH^2 = OA^2 \Rightarrow \Delta MOA\ dd\ \Delta AOB(\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{ABO}$ Ta lại có $\widehat{ABO} = \widehat{AOB}$ (ΔABO cân tại A) $\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{AOB}$ => Tam giác ΔMAO cân tại M	*0,5*
Gọi $I;K$ là giao (O) và (A) => IK là trung trực của OA. Tam giác ΔMAO cân tại M. Suy ra M thuộc IK. Do $(O;R);(A;R)$ cố định. Nên IK cố định. Suy ra MN thuộc đường thẳng IK cố định.	*0,25*
Gọi J là giao của OA và IK. Xét tứ giác $OIAK$ có $OI = IA = AK = KO = R$ suy ra $OIAK$ là hình thoi. Suy ra $MN \perp OA$ tại J.	*0,25*
Gọi OL là đường kính của $(A;R)$. Ta dễ có $\Delta OJN\ dd\ \Delta OCL(\text{g.g})$ Mặt khác $\Delta OJN\ dd\ \Delta OHB(\text{g.g})$	*0,25*
Suy ra $\Delta OHB\ dd\ \Delta OCL(\text{g.g}) \Rightarrow \dfrac{OB}{OL} = \dfrac{OH}{OC} \Rightarrow OB.OC = OH.OL = 2R^2$ Vậy khi H di động trên đường tròn thì MN luôn thuộc một đường cố định và tích $OB.OC$ luôn không đổi bằng $2R^2$.	*0,25*
c) Tìm vị trí của điểm H để diện tích tam giác OMN đạt giá trị lớn nhất.	**1,0**
Ta có ΔOMN dd $\Delta OCB(c-g-c)$ Suy ra $\dfrac{S_{OMN}}{S_{OBC}} = \dfrac{OJ.MN}{OH.BC} = \dfrac{OJ^2}{OH^2}$	*0,25*
Mà $OH = OA = 2OJ$ (Vì $OIAK$ là hình thoi)	*0,25*
$\Rightarrow S_{OMN} = \dfrac{1}{4}S_{OBC} = \dfrac{OH.BC}{8} = \dfrac{R.BC}{8} \le \dfrac{R.2R}{8} = \dfrac{R^2}{4}$ (Hoặc $\Rightarrow S_{OMN} = \dfrac{1}{4}S_{OBC} = \dfrac{OB.OC.\text{Sin}\,BOC}{8} \le \dfrac{2R^2}{8} = \dfrac{R^2}{4}$ Khi $\text{Sin}\,BOC = 1 \Leftrightarrow \widehat{BOC} = 90^0$)	*0,25*
Dấu "=" $\Leftrightarrow BC = 2R \Leftrightarrow H \equiv A$ Vậy H trùng với A thì diện tích tam giác OMN đạt giá trị lớn nhất.	*0,25*

Câu 4. *(1,0 điểm)*

Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=3$. Chứng minh rằng:

$$P=\frac{x}{x^2+x+1+yz}+\frac{y}{y^2+y+1+zx}+\frac{z}{z^2+z+1+xy}\le\frac{3}{4}.$$

Nội dung	Điểm
Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=3$. Chứng minh rằng: $P=\frac{x}{x^2+x+1+yz}+\frac{y}{y^2+y+1+zx}+\frac{z}{z^2+z+1+xy}\le\frac{3}{4}$.	*1,0*
Ta có: $x^2+1\ge 2x;\ y^2+1\ge 2y;\ z^2+1\ge 2z$ Do đó $P\le\frac{x}{3x+yz}+\frac{y}{3y+zx}+\frac{z}{3z+xy}=Q$ $Q=\frac{x}{x(x+y+z)+yz}+\frac{y}{y(x+y+z)+zx}+\frac{z}{z(x+y+z)+xy}$ $Q=\frac{x}{(x+y).(x+z)}+\frac{y}{(x+y).(y+z)}+\frac{z}{(y+z).(x+z)}$	**0,25**
Xét hiệu $Q-\frac{3}{4}=\frac{x}{(x+y).(x+z)}+\frac{y}{(x+y).(y+z)}+\frac{z}{(y+z).(x+z)}-\frac{3}{4}$ $Q-\frac{3}{4}=\frac{4x(y+z)+4y(x+z)+4z(x+y)-3(x+y)(x+z)(y+z)}{4(x+y).(x+z).(y+z)}$ $Q-\frac{3}{4}=\frac{8(xy+yz+zx)-3(3-z)(3-y)(3-x)}{4(x+y).(x+z).(y+z)}$	**0,25**
Đặt $T=8(xy+yz+zx)-3(3-x)(3-y)(3-z)$ $T=8(xy+yz+zx)-3\left[3(xy+yz+zx)-xyz\right]$ $T=3xyz-(xy+yz+zx)$	**0,25**
Ta có $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge\frac{9}{x+y+z}=\frac{9}{3}=3\Rightarrow xy+yz+zx\ge 3xyz\Leftrightarrow 3xyz-(xy+yz+zx)\le 0$ Suy ra $T\le 0\Rightarrow Q-\frac{3}{4}\le 0\Rightarrow Q\le\frac{3}{4}\Rightarrow P\le\frac{3}{4}$ Dấu "=" xảy ra khi $\begin{cases}x,y,z\ge 0\\x+y+z=3\\x=y=z=1\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=1$	**0,25**

------------------------------ **HẾT** ------------------------------