

Bài 1 (2,0 điểm).

Cho biểu thức :

$$P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy + y^2} \right) \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2} \text{ với } x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y.$$

a. Rút gọn biểu thức P.

b. Tính giá trị của biểu thức P biết x, y thỏa mãn đẳng thức:

$$x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y).$$

Bài 2 (2,0 điểm). Giải các phương trình sau:

a.) $\frac{2x+3}{2x+1} - \frac{2x+5}{2x+7} = 1 - \frac{6x^2+9x-9}{(2x+1)(2x+7)}.$

b. $\frac{x+11}{115} + \frac{x+22}{104} = \frac{x+33}{93} + \frac{x+44}{82}$

Câu 3. (3,5 điểm) Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a, biết hai đường chéo cắt nhau tại O. Lấy điểm I thuộc cạnh AB, điểm M thuộc cạnh BC sao cho $\angle OIM = 90^\circ$ (I và M không trùng với các đỉnh của hình vuông). Gọi N là giao điểm của AM và CD, K là giao điểm của OM và BN.

a) Chứng minh $\triangle BIO \cong \triangle CMO$ và tính diện tích tứ giác BIOM theo a.

b) Chứng minh $\angle KIM = \angle BCO$.

c) Chứng minh $\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}.$

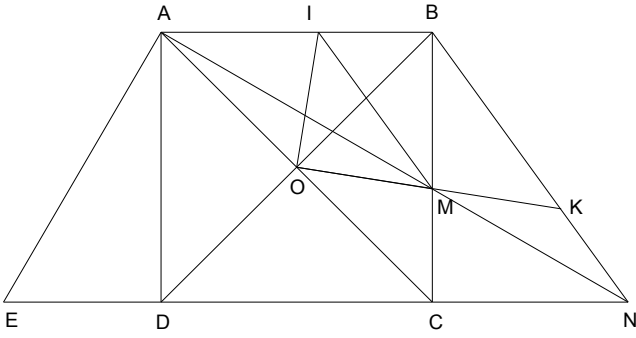
Câu 4. (1,5 điểm) Cho a, b, c > 0; a + b + c = 3.

Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}.$

Bài 5 (1,0 điểm). Cho số tự nhiên n > 3. Chứng minh rằng nếu $2^n = 10a + b$ (a, b ∈ N, 0 < b < 10) thì tích ab chia hết cho 6.

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Bài	Nội dung	Điểm
Bài 1 (2,0đ)	Với $x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$ ta có: $P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2y - (x^2 - y^2)(x+y) - xy^2}{xy(x+y)} \right) \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2}$	
a (1.0)	$= \frac{2}{x} - \frac{xy(x-y) - (x-y)(x+y)^2}{xy(x+y)} \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2}$	0.25
	$= \frac{2}{x} + \frac{(x-y)(x^2 + xy + y^2)}{xy(x+y)} \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2}$	0.25
	$= \frac{2}{x} + \frac{x-y}{xy} = \frac{x+y}{xy}$	0.25
		0.25
b (1.0)	Ta có: $x^2 + y^2 + 10 = 2(x-3y)$ $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$	0.25
	Lập luận suy ra $x=1; y=-3$	0.25
	Ta thấy $x=1; y=-3$ thỏa mãn điều kiện: $x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$	0.25
	nên thay $x=1; y=-3$ vào biểu thức $P = \frac{x+y}{xy}$ ta có: $P = \frac{1+(-3)}{1 \cdot (-3)} = \frac{2}{3}$	0.25
Bài 2 (2,0đ) a (1.0)	ĐK: $x \neq \frac{-1}{2}; x \neq \frac{-7}{2}$	0.25
	$\frac{(2x+3)(2x+7)}{(2x+1)(2x+7)} - \frac{(2x+5)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{(2x+7)(2x+1)}{(2x+7)(2x+1)} - \frac{6x^2 + 9x - 9}{(2x+7)(2x+1)}$	0.25
	$\Leftrightarrow \frac{4x^2 + 20x + 21 - 4x^2 - 12x - 5}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{4x^2 + 16x + 7 - 6x^2 - 9x + 9}{(2x+7)(2x+1)}$	0.25
	$\Leftrightarrow \frac{8x+16}{(2x+7)(2x+1)} = \frac{-2x^2 + 7x + 16}{(2x+7)(2x+1)}$	0.25
	$\Rightarrow 8x+16 = -2x^2 + 7x + 16 \Leftrightarrow 2x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{1}{2} \text{ (Loại)} \end{cases}$	0.25
	Vậy phương trình có một nghiệm $x=0$	
b (1.0)	$\Leftrightarrow \left(\frac{x+11}{115} + 1\right) + \left(\frac{x+22}{104} + 1\right) = \left(\frac{x+33}{93} + 1\right) + \left(\frac{x+44}{82} + 1\right)$	0.25
	$\Leftrightarrow \frac{x+126}{115} + \frac{x+126}{104} = \frac{x+126}{93} + \frac{x+126}{82}$ $\Leftrightarrow \frac{x+126}{115} + \frac{x+126}{104} - \frac{x+126}{93} - \frac{x+126}{82} = 0$	0.25

	$\Leftrightarrow \dots$ $\Leftrightarrow x + 126 = 0$ $\Leftrightarrow x = -126$	0.25 0.25
Câu 3 (3.5)		0.5
a (1.0)	Xét $\triangle BIO$ và $\triangle CMO$ có: $\angle BOI = \angle COM (=45^\circ)$ (tính chất đường chéo hình vuông) $BO = CO$ (tính chất đường chéo hình vuông) $\angle BOI = \angle COM$ (cùng phụ với $\angle BOM$) $\Rightarrow \triangle BIO = \triangle CMO$ (g.c.g)	0.5
	$\Rightarrow S_{BIO} = S_{CMO}$ mà $S_{BMOI} = S_{BOI} + S_{BMO}$ Do đó $S_{BMOI} = S_{CMO} + S_{BMO} = S_{BOC} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{1}{4} a^2$	0.5
b (1.0)	Ta có $\triangle BIO = \triangle CMO$ (cmt) $\Rightarrow CM = BI$ (cặp cạnh tương ứng) $\Rightarrow BM = AI$ Vì $CN \parallel AB$ nên $\frac{BM}{CM} = \frac{AM}{MN} \Rightarrow \frac{IA}{IB} = \frac{AM}{MN}$. Từ đó suy ra $IM \parallel BN$	0.5
	Ta có $OI = OM$ (vì $\triangle BIO = \triangle CMO$) $\Rightarrow \triangle IOM$ cân tại $O \Rightarrow \angle MOI = \angle MIO = 45^\circ$ Vì $IM \parallel BN \Rightarrow \angle KIM = \angle MOI = 45^\circ \Rightarrow \angle KIM = \angle BCO$	0.5
c (1.0)	Qua A kẻ tia Ax vuông góc AN cắt CD tại E. Chứng minh $\triangle ADE = \triangle ABM$ (g.c.g) $\Rightarrow AE = AM$	0.25
	Ta có $\triangle ANE$ vuông tại A có $AD \perp NE$ nên $S_{AEN} = \frac{AD \cdot NE}{2} = \frac{AN \cdot AE}{2} \Rightarrow AD \cdot NE = AN \cdot AE \Rightarrow (AD \cdot NE)^2 = (AN \cdot AE)^2$	0.25
	Áp dụng định lí Pitago vào $\triangle ANE$ ta có $AN^2 + AE^2 = NE^2$ $\Rightarrow AD^2 \cdot (AN^2 + AE^2) = AN^2 \cdot AE^2 \Rightarrow \frac{AN^2 + AE^2}{AN^2 \cdot AE^2} = \frac{1}{AD^2} \Rightarrow \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AD^2}$	0.25
	Mà $AE = AM$ và $CD = AD \Rightarrow \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$	0.25
Câu 4 (1.5)	Do $a, b > 0$ và $1 + b^2 \geq 2b$ với mọi b nên $\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2}$. Tương tự ta có : $\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}; \frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$	0.25 0.25 0.25

	mà $a + b + c = 3$ nên $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{ab+bc+ca}{2}$ (1) Cũng từ $a + b + c = 3 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 9$ $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 9$ mà $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $c^2 + a^2 \geq 2ac$ nên $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ suy ra $3(ab + bc + ca) \leq 9 \Leftrightarrow ab + bc + ca \leq 3$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$ đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.	0.25 0.25 0.25
Bài 5 (1.0)	Ta có $2^n = 10a + b \cdot b : 2 \cdot ab : 2$ (1) Ta chứng minh $ab : 3$ (2) Thật vậy, từ đẳng thức $2^n = 10a + b \cdot 2^n$ có chữ số tận cùng là b. Đặt $n = 4k + r$ ($k, r \in \mathbb{N}, 0 \leq r \leq 3$) ta có: $2^n = 16^k 2^r$. Nếu $r = 0$ thì $2^n = 16^k$ tận cùng là $6 \cdot b = 6 \cdot ab : 6$. Nếu $1 \leq r \leq 3$ thì $2^n - 2^r = 2^r(16^k - 1) : 10 \cdot 2^n$ tận cùng là 2^r suy ra $b = 2^r \cdot 10a = 2^n - 2^r = 2^r(16^k - 1) : 3 \cdot a : 3 \cdot ab : 3$. Từ (1) và (2) suy ra $ab : 6$	0.25 0.25 0.25 0.25

----- HẾT -----