GIẢI TÍCH (CƠ BẢN)

Tài liệu ôn thi cao học năm 2005

Phiên bản đã chỉnh sửa

PGS TS. Lê Hoàn Hóa

Ngày 10 tháng 11 năm 2004

LÝ THUYẾT CHUỖI

1 Chuỗi số

1.1 Định nghĩa

Định nghĩa 1. Cho $(a_n)_n$ là dãy số (có thể thực hay phức), chuỗi tương ứng ký hiệu là $\sum_{1}^{\infty} a_n$.

Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, đặt $s_k = \sum_{1}^{k} a_n$ là tổng riêng phần thứ k. Khi k thay đổi trên $\mathbb{N}$, có dãy tổng riêng phần $(s_k)_k$.

Nếu $\lim_{k\to\infty} s_k$ tồn tại hữu hạn, ta nói chuỗi $\sum_{1}^{\infty} a_n$ hội tụ và đặt $S = \lim_{k\to\infty} s_k$ là tổng của chuỗi, $S = \sum_{1}^{\infty} a_n$.

Nếu $\lim_{k\to\infty} s_k$ không tồn tại hoặc $\lim_{k\to\infty} s_k = +\infty$ hay $\lim_{k\to\infty} s_k = -\infty$, ta nói chuỗi $\sum_{1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Tính chất

1. Tính hội tụ và tổng của chuỗi không thay đổi nếu thay đổi thứ tự của một số hữu hạn số hạng.
2. Chuỗi $\sum_{1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n\geq n_0} a_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.
3. Điều kiện cần: nếu chuỗi $\sum_{1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\lim_{k\to\infty} a_n = 0$.

1.2 Chuỗi không âm

Là chuỗi có dạng $\sum_{1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$.

Tính chất

Cho $\sum_{1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$. Khi đó dãy tổng riêng phần $(s_k)_k$ là dãy tăng và nếu $(s_k)_k$ bị chặn thì chuỗi $\sum_{1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Dấu hiệu so sánh

1. Giả sử $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall n \geq n_0$. Khi đó, nếu $\sum_{1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum_{1}^{\infty} a_n$ hội tụ, nếu $\sum_{1}^{\infty} a_n$ phân kỳ thì $\sum_{1}^{\infty} b_n$ phân kỳ.

2. Giả sử $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = k$. Khi đó:

   (a) Nếu $0 < k < \infty$ thì $\sum_{1}^{\infty} a_n$, $\sum_{1}^{\infty} b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

   (b) Nếu $k = 0$ và $\sum_{1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum_{1}^{\infty} a_n$ hội tụ, nếu $\sum_{1}^{\infty} a_n$ phân kỳ thì $\sum_{1}^{\infty} b_n$ phân kỳ.

   (c) Nếu $k = \infty$ và $\sum_{1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\sum_{1}^{\infty} b_n$ hội tụ, nếu $\sum_{1}^{\infty} b_n$ phân kỳ thì $\sum_{1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Tiêu chuẩn tích phân

Cho $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ liên tục, $f(x) \geq 0$ và f giảm. Với mọi $n \in \mathbb{N}$, đặt $a_n = f(n)$. Khi đó:

Tích phân suy rộng $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ hội tụ $\Leftrightarrow$ Chuỗi $\sum_{1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Chuỗi cơ bản:

- $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ hội tụ khi $s > 1$, phân kỳ khi $s \leq 1$.
- $\sum_{0}^{\infty} t^n$, $|t| < 1$, hội tụ và tổng $S = \sum_{0}^{\infty} t^n = \dfrac{1}{1-t}$

Dấu hiệu D'Alembert (tỉ số)

Cho chuỗi số dương $\sum_{1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$. Giả sử $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = k$. Khi đó:

1. Nếu $k < 1$ thì $\sum_{1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

2. Nếu $k > 1$ thì $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

3. Nếu $k = 1$, chưa kết luận về sự hội tụ.

   Ghi chú. Nếu có $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1, \forall n \geq n_0$ thì chuỗi $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Dấu hiệu Cauchy (căn số)

Cho chuỗi không âm $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$. Giả sử $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$. Khi đó:

1. Nếu $k < 1$ thì chuỗi hội tụ.

2. Nếu $k > 1$ thì chuỗi phân kỳ.

3. Nếu $k = 1$, chưa kết luận về sự hội tụ.

1.3 Chuỗi đan dấu

Có dạng $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^n a_n$ hoặc $\sum\limits_{0}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n \geq 0$.

Dấu hiệu Leibnitz

Cho chuỗi đan dấu $\sum\limits_{1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n \geq 0$. Giả sử $(a_n)_n$ là dãy giảm và $\lim\limits_{k\to\infty} a_n = 0$ thì chuỗi hội tụ. Gọi S là tổng của chuỗi. Khi đó: $|S| \leq a_1$.

1.4 Chuỗi bất kỳ

Có dạng $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ với a_n có thể âm hay dương.

Xét chuỗi không âm $\sum\limits_{1}^{\infty} |a_n|$. Nếu chuỗi $\sum\limits_{1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ thì chuỗi $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ hội tụ và ta nói chuỗi $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối. Nếu chuỗi $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ hội tụ nhưng chuỗi $\sum\limits_{1}^{\infty} |a_n|$ phân kỳ, ta nói chuỗi $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ là bán hội tụ.

Tính chất

Nếu chuỗi $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ hội tụ tuyệt đối thì chuỗi có được bằng cách thay đổi thứ tự các số hạng cũng hội tụ và tổng của chuỗi không thay đổi.

Ghi chú. Nếu bằng dấu hiệu D'Alembert hoặc Cauchy mà chuỗi $\sum\limits_{1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ (phân kỳ) thì chuỗi $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ cũng hội tụ (phân kỳ)

Định lí 1. *Cho $(a_n)_n$ là dãy giảm, $a_n \geq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Cho $(b_n)_n$ là dãy bất kỳ (không cần dương). Giả sử có hằng số $C > 0$ sao cho với mọi $n \in \mathbb{N}$, $\left|\sum\limits_{1}^{n} b_k\right| \leq C$.*

Khi đó, chuỗi $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n b_n$ hội tụ và tổng $S = \sum\limits_{1}^{\infty} a_n b_n$ thỏa mãn $|S| \leq Ca_1$.

Thí dụ

Xét sự hội tụ của chuỗi

1. $\sum\limits_{2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^\alpha n}$ Đặt $f : [2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^\alpha x}$ thì f liên tục, $f(x) \geq 0$ và f giảm. Khi đó, $f(n) = \dfrac{1}{n \ln^\alpha n}$, $n \geq 2$.

   Xét tích phân suy rộng $\displaystyle\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ (đổi biến $t = \ln x$)

   Tích phân hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kỳ khi $\alpha \leq 1$.

   Vậy chuỗi $\sum\limits_{2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^\alpha n}$ hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kỳ khi $\alpha \leq 1$.

2. $\sum\limits_{1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)^\alpha$ với $a > 1$

   Đặt $a_n = (\sqrt[n]{a} - 1)^\alpha = \left(e^{\frac{1}{n}\ln a} - 1\right)^\alpha$ và $b_n = \dfrac{\ln^\alpha a}{n^\alpha}$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$

   Chuỗi $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{\ln^\alpha a}{n^\alpha}$ hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kỳ khi $\alpha \leq 1$.

   Vậy chuỗi đã cho hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kỳ khi $\alpha \leq 1$.

3. $\sum\limits_{1}^{\infty} \left[\ln \dfrac{1}{n^{\frac{2}{5}}} - \ln\left(\sin \dfrac{1}{n^{\frac{2}{5}}}\right)\right]$

   Đặt $a_n = \left[\ln \dfrac{1}{n^{2/5}} - \ln\left(\sin \dfrac{1}{n^{2/5}}\right)\right] = -\ln\left(\dfrac{\sin \dfrac{1}{n^{2/5}}}{\dfrac{1}{n^{2/5}}}\right)$

   Do $\sin t = t - \dfrac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3)$ nên $\dfrac{\sin t}{t} = 1 - \dfrac{t^2}{6} + \mathrm{o}(t^2)$

   Đặt $b_n = \dfrac{1}{n^{4/5}}$, dùng $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{1}{6}$

   Do chuỗi $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{4/5}}$ phân kỳ nên chuỗi đã cho phân kỳ.

4. $\sum\limits_{1}^{\infty} \left[\sin \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\right]$

Đặt $a_n = \sin\dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$

Dùng khai triển Taylor:

$\sin t = t - \dfrac{t^3}{6} + \mathrm{o}(t^3), \quad \ln(1+t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$

Suy ra: $\sin t - \ln(1+t) = \dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$

Đặt $b_n = \dfrac{1}{2n^2}$, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$

Do chuỗi $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^2}$ hội tụ nên chuỗi đã cho hội tụ.

5. $\sum\limits_{1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n} - \ln\dfrac{n+1}{n}\right)$

   Đặt $a_n = \dfrac{1}{n} - \ln\dfrac{n+1}{n}$

   Do $t - \ln(1+t) = \dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}(t^2)$, đặt $b_n = \dfrac{1}{2n^2}$, ta có: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$

   Do chuỗi $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^2}$ hội tụ nên chuỗi đã cho hội tụ.

6. Xét sự hội tụ của chuỗi dương $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ thỏa điều kiện:

   $\forall n \geq n_0,\ \sqrt[n]{a_n} \leq \left(1 - \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ với $\alpha \in (0,1)$.

   Ta có: $0 < a_n \leq \left(1 - \dfrac{1}{n^\alpha}\right)^n, \forall n \geq n_0$

   Xét $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \left(1 - \dfrac{1}{n^\alpha}\right)^n$

   Ta có $\ln\left[n^2\left(1 - \dfrac{1}{n^\alpha}\right)^n\right] = 2\ln n - n\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^\alpha}\right) = n^{1-\alpha}\left[\dfrac{2\ln n}{n^{1-\alpha}} - n^\alpha \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^\alpha}\right)\right]$

   Do $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^{1-\alpha}} = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha \ln\left(1 - \dfrac{1}{n^\alpha}\right) = -1$ nên

   $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(1 - \dfrac{1}{n^\alpha}\right)^n = 0$

   Dẫn đến $\lim\limits_{n\to\infty} n^2.a_n = 0$

   Do chuỗi $\sum\limits_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ hội tụ nên $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

7. (a) Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ thỏa điều kiện:

$a_n > 0,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\alpha}$ với $\alpha > 1$

(b) Xét sự hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_1^{\infty} u_n$ với:

$u_n = \dfrac{1.3.\ldots.(2n-1)}{2.4.\ldots.2n.(2n+2)}$

(a) Đặt $b_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}}$, ta có

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{\alpha} = \dfrac{b_{n+1}}{b_n} = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{\alpha},\ \forall n$

Suy ra $\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \le \dfrac{a_n}{b_n} \le \cdots \le \dfrac{a_1}{b_1} = a_1,\ \forall n$

Vậy $a_n \le a_1.b_n,\ \forall n$. Do $\alpha > 1$, chuỗi $\displaystyle\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ hội tụ nên chuỗi $\displaystyle\sum_1^{\infty} a_n$ hội tụ.

(b) Ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+1}{2n+4} = 1 - \dfrac{3}{2(n+2)} \le \left(1 - \dfrac{1}{n+2}\right)^{\frac{3}{2}}$ $\quad (*)$

Tương tự (7a) với $b_n = \dfrac{1}{(n+1)^{3/2}}$ ta có chuỗi $\displaystyle\sum_1^{\infty} u_n$ hội tụ.

Ta chứng minh: với $t \in [0,1]$, $\alpha > 1$, $\quad (1-t)^{\alpha} \ge 1 - \alpha t$

Đặt $\varphi(t) = (1-t)^{\alpha} - (1-\alpha t)$, ta có: $\varphi'(t) = -\alpha(1-t)^{\alpha-1} + \alpha \ge 0$

Do $\varphi(0) = 0$ nên $\varphi(t) \ge 0,\ \forall t \in [0,1]$ hay $(1-t)^{\alpha} \ge 1 - \alpha t$

8. Cho $\alpha \in (0, 2\pi)$, $s > 0$. Xét sự hội tụ của hai chuỗi

$$\sum_1^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^s}, \quad \sum_1^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^s}$$

Trước tiên chứng minh: có $M > 0$ sao cho

$$\left|\sum_0^n \cos k\alpha\right| \le M, \quad \left|\sum_0^n \sin k\alpha\right| \le M, \quad \forall n$$

Do $e^{ik\alpha} = \cos k\alpha + i \sin k\alpha,\ \forall k \in \mathbb{N}$, ta có:

$$\sum_0^n e^{ik\alpha} = \frac{1 - e^{i(n+1)\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} = \frac{(1 - \cos(n+1)\alpha) - i\sin(n+1)\alpha}{(1-\cos\alpha) - i\sin\alpha}$$

$$= \frac{[(1-\cos(n+1)\alpha) - i\sin(n+1)\alpha][(1-\cos\alpha) + i\sin\alpha]}{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}$$

Đồng nhất phần thực và ảo

$$\left|\sum_0^n \cos k\alpha\right| = \frac{\left|[1-\cos(n+1)\alpha](1-\cos\alpha) + \sin\alpha.\sin(n+1)\alpha\right|}{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} \le \frac{5}{(1-\cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha}$$

$$\left|\sum_0^n \sin k\alpha\right| = \frac{\big|[1-\cos(n+1)\alpha]\sin\alpha + (1-\cos\alpha).\sin(n+1)\alpha\big|}{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha} \le \frac{4}{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}$$

Vậy điều khẳng định được chứng minh.

Do hai chuỗi đã cho có dạng $\sum_1^\infty a_n b_n$ với lần lượt $b_n = \cos n\alpha$, $b_n = \sin n\alpha$ và $a_n = \frac{1}{n^s}$, $(a_n)_n$ là dãy giảm, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ và có hằng số $C \ge 0$ thỏa mãn:

$$\left|\sum_1^n \cos k\alpha\right| \le C, \quad \left|\sum_1^n \sin k\alpha\right| \le C, \quad \forall n$$

Vậy chuỗi $\sum_1^\infty \frac{\cos n\alpha}{n^s}$, $\sum_1^\infty \frac{\sin n\alpha}{n^s}$ hội tụ.

9. Cho $\alpha > 0$, $s > 0$. Xét sự hội tụ của chuỗi đan dấu $\sum_2^\infty (-1)^n \frac{\ln^\alpha n}{n^s}$

   Xét hàm $\varphi(t) = \frac{\ln^\alpha t}{t^s}$

   Ta có $\varphi'(t) = \frac{\ln^{\alpha-1} t}{t^{s+1}}(\alpha - s\ln t) \le 0$ khi $\ln t \ge \frac{\alpha}{s}$

   Vậy φ là hàm giảm khi $t \ge e^{\alpha/s}$

   Với $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $n_0 \ge e^{\alpha/s}$, chuỗi đan dấu $\sum\limits_{n\ge n_0} (-1)^n \frac{\ln^\alpha n}{n^s}$ có dãy $\left(\frac{\ln^\alpha n}{n^s}\right)$ là dãy giảm, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln^\alpha n}{n^s} = 0$

   Theo dấu hiệu Leibnitz, chuỗi đã cho hội tụ.

2 Bài tập

1. Tính tổng riêng và tổng (nếu có) của chuỗi sau

   (a) $\sum_1^\infty \frac{1}{4n^2-1}$ HD: $a_n = \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$

   (b) $\sum_1^\infty \frac{3n^2+3n+1}{n^3(n+1)^3}$ HD: $a_n = \frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}$

   (c) $\sum_1^\infty \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+n+1}$ HD: $\operatorname{arctg} a - \operatorname{arctg} b = \operatorname{arctg} \frac{a-b}{1+ab}$

2. Xét sự hội tụ của các chuỗi sau

(a) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

(b) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^{3/4}}$

(c) $\displaystyle\sum_1^\infty (\sqrt{n^2+1}-n)^\alpha$

(d) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^\alpha}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ HD: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$

(e) $\displaystyle\sum_1^\infty \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ HD: $\ln(1+t)\sim t$

(f) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

(g) $\displaystyle\sum_1^\infty \left(1-\cos\frac{1}{n^\alpha}\right)$ HD: $1-\cos t\sim\dfrac{t^2}{2}$

(h) $\displaystyle\sum_1^\infty n^{4/3}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}$

(i) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{\ln n}{n^{3/2}}$

(j) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{2^n+3^n}{4^n+n^2}$

3. Dùng tiêu chuẩn tỉ số hoặc căn số xét sự hội tụ của chuỗi

(a) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{n!}{8^n.n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1.3.5.\ldots.(2n-1)}{2^{2n}.(n-1)!}$

(c) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{7^n(n!)^2}{n^{2n}}$

(d) $\displaystyle\sum_1^\infty n\left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^n$

(e) $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

(f) $\displaystyle\sum_1^\infty \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

4. Xét sự hội tụ của chuỗi đan dấu:

(a) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n.\frac{n+1}{n^2+n+1}$

(b) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n.\ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad \alpha>0$

(c) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$

(d) $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}$

(e) $\sum_{1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cos n\pi$ HD: $\cos n\pi = (-1)^n$

(f) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1.4.7.\ldots.(3n-2)}{3.5.7.\ldots.(2n+1)}$

5. Xét sự hội tụ và hội tụ tuyệt đối của chuỗi

(a) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^\alpha\ln n}, \quad \alpha>0$

(b) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^\alpha.n^{1/n}}, \quad \alpha>0$

(c) $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+1}{2n^2+1}\right)^\alpha, \quad \alpha>0$

(d) $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos na}{n^\alpha}, \quad \alpha>0, \quad a\in(0,\pi)$

HD (5d)

$\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos^2 na}{n^\alpha}, = \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos 2na+1}{n^\alpha}$

Với $\alpha\le 1$, chuỗi $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ phân kỳ, $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos 2na}{n^\alpha}$ hội tụ.

Suy ra chuỗi $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos^2 na}{n^\alpha}$ phân kỳ.

Do $|\cos na|\ge\cos^2 na, \forall n\in\mathbb{N}$ nên chuỗi $\sum_{1}^{\infty}\frac{|\cos na|}{n^\alpha}$ phân kỳ.

Vậy chuỗi $\sum_{1}^{\infty}\frac{\cos na}{n^\alpha}$, $\alpha\le 1$, hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối.

3 Chuỗi hàm số

3.1 Sự hội tụ :

Định nghĩa 2. Với mọi $n \in \mathbb{N}, u_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, chuỗi hàm tương ứng ký hiệu là $\sum\limits_1^n u_n$. Với mỗi $x \in I$, có chuỗi số thực $\sum\limits_1^\infty u_n(x)$, khi x thay đổi trên I, có vô số chuỗi số, trong số đó có những chuỗi số hội tụ và những chuỗi phân kỳ.

Đăt $D = \left\{ x \in I, \sum\limits_1^\infty u_n(x) \text{ hội tụ} \right\}$ và đặt $u(x) = \sum\limits_1^\infty u_n(x), x \in D$. D được gọi là miền hội tụ của chuỗi, ký hiệu : $u = \sum\limits_1^\infty u_n$.

Ta nói :

– $\sum\limits_1^\infty u_n$ hội tụ về u trên $D \Leftrightarrow \forall x \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists k_0 : \forall k \geq k_0 \Longrightarrow \left| \sum\limits_{n \geq k_0} u_n(x) \right| < \varepsilon$.

– $\sum\limits_1^\infty u_n$ hội tụ đều về u trên $D \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 \Longrightarrow \left| \sum\limits_{n \geq k_0} u_n(x) \right| < \varepsilon, \forall x \in D$.

Dấu hiệu Weierstrass:

Giả sử : $|u_n(x)| \leq a_n, \forall x \in D, \forall n \geq n_0$ và $\sum\limits_1^\infty a_n$ hội tụ. Khi đó chuỗi $\sum\limits_1^\infty u_n$ hội tụ đều trên D.

Định lí 2 (Weierstrass).

1) Giả sử : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ liên tục trên $D, \sum\limits_1^\infty u_n$ hội tụ đều về u trên D. Khi đó u liên tục trên D.

2) Giả sử : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ khả vi liên tục trên $[a, b]$, chuỗi đạo hàm $\sum\limits_1^\infty u'_n$ hội tụ đều về v và có $x_0 \in [a, b]$ sao cho chuỗi số $\sum\limits_1^\infty u_n(x_0)$ hội tụ.

Khi đó có hàm u khả vi liên tục trên $[a, b]$ sao cho chuỗi $\sum\limits_1^\infty u_n$ hội tụ đều về u trên $[a, b]$ và $u' = v = \sum\limits_1^\infty u'_n$.

Hơn nữa : $\int\limits_a^x u(t)dt = \sum\limits_1^\infty \int\limits_a^x u(t)dt$.

4 Chuỗi lũy thừa:

Định nghĩa 3. Chuỗi lũy thừa là chuỗi có dạng $\sum\limits_0^\infty a_n(x - x_0)^n, x_0$ là tâm của chuỗi.

Định lí 3. *Cho chuỗi lũy thừa* $\sum_0^\infty a_n(x-x_0)^n$. *Giả sử :* $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$ *hoặc* $\lim_{n\to\infty} n^{\sqrt{|a_n|}} = \rho$.

Đặt $R = \frac{1}{\rho}$ *và gọi R là bán kính hội tụ của chuỗi. Khi đó :*

i. Chuỗi $\sum_0^\infty a_n(x-x_0)^n$ *hội tụ về hàm u trên* $(x_0 - R, x_0 + R)$.

ii. Chuỗi $\sum_0^\infty a_n(x-x_0)^n$ *phân kỳ khi* $|x - x_0| > R$.

iii. Hàm u khả vi và $u'(x) = \sum_1^\infty na_n(x-x_0)^{n-1}, \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

Hơn nữa : $\int_{x_0}^{x} u(t)dt = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}, \forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$. *Miền hội tụ của chuỗi* $\sum_0^\infty a_n(x-x_0)^n$ *là* $(x_0 - R, x_0 + R)$ *có thể thêm vào điểm đầu* $x_0 - R$ *và điểm cuối* $x_0 + R$ *tùy từng trường hợp.*

Thí dụ :

1) Chuỗi $\sum_0^\infty \frac{1}{1+x^{2n}}$ có miền hội tụ là $|x| > 1$.

Với $a > 1$, ta có : $\frac{1}{1+x^{2n}} \le \frac{1}{1+a^{2n}}$, $\forall x, |x| \le a$ và $\sum_0^\infty \frac{1}{a^{2n}}$ hội tụ. Vậy chuỗi hàm hội tụ đều trên miền $|x| \ge a$.

2) Chuỗi $\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n^{\ln x}}$ là chuỗi hàm đan dấu, có miền hội tụ là $x > 1$. Với $a > 1, \varepsilon > 0$, do tính chất của chuỗi đan dấu, có $k_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{k_0^{\ln a}} < \varepsilon$, với $k \ge k_0$ ta có : $\left|\sum_{n\ge k} \frac{(-1)^n}{n^{\ln x}}\right| \le \frac{1}{k^{\ln a}} \le \frac{1}{k_0^{\ln a}} < \varepsilon$. Vậy chuỗi hội tụ đều trên miền $x \ge a$.

3) Chuỗi $\sum_0^\infty \frac{x^n}{1+x^n}, x \neq 1$.

Với $|x| < 1$, có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho : $\forall n \ge n_0$ thì $|x|^n < \frac{1}{2}$.

Suy ra : $\left|\frac{x^n}{1+x^n}\right| \le 2|x|^n$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi là $(-1, 1)$. Tuy nhiên chuỗi không hội tụ đều trên $(-1, 1)$. Thật vậy, với $\varepsilon = 1$, với mọi $k \in \mathbb{N}$ có thể chọn $x \in (0, 1)$ sao cho: $\frac{x^k}{1-x^2} > 1$

Khi đó :

$$1 < \frac{x^k}{1-x^2} = \sum_{n\ge k} \frac{x^n}{1+x} \le \sum_{n\ge k} \frac{x^n}{1+x^n}.$$

Với mọi $0 < a < 1$, ta có : $\left|\dfrac{x^n}{1+x^n}\right| \leq \dfrac{a^n}{1-a}$, $\forall x, |x| \leq a, \forall n \in \mathbb{N}$.

Chuỗi $\sum\limits_0^\infty a^n$ hội tụ. Vậy chuỗi $\sum\limits_0^\infty \dfrac{x^n}{1+x^n}$ hội tụ đều trên $[-a, a]$.

4) Với $s > 0$, chuỗi $\sum\limits_1^\infty \dfrac{\cos nx}{n^s}, \sum\limits_1^\infty \dfrac{\sin nx}{n^s}$ hội tụ khi $x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Thật vậy, với mỗi $k, p \in \mathbb{N}$ có hằng số M sao cho:

$$\left|\sum_k^{k+p} \cos nx\right| \leq \frac{M}{1-\cos x}, \left|\sum_k^{k+p} \sin nx\right| \leq \frac{M}{1-\cos x}$$

dãy $\left(\dfrac{1}{n^s}\right)$ giảm về 0 nên chuỗi $\sum\limits_k^\infty \dfrac{\cos nx}{n^s}, \sum\limits_k^\infty \dfrac{\sin nx}{x^s}$ hội tụ, có tổng

$$S_1 = \sum_k^\infty \frac{\cos nx}{n^s}, S_2 = \sum_k^\infty \frac{\sin nx}{n^s}$$

thỏa mãn: $|S_1| \leq \dfrac{1}{k^s}\dfrac{M}{1-\cos x}, |S_2| \leq \dfrac{1}{k^s}\dfrac{M}{1-\cos x}$.
Với $a > 0$ và $\varepsilon > 0$ bất kỳ,
do $\dfrac{M}{1-\cos x} \leq \dfrac{M}{1-cosa}, \forall x \in [a + 2i\pi, 2(i+1)\pi - a],\ \forall i \in \mathbb{Z}$,
chọn $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho:$\dfrac{1}{k^s}.\dfrac{M}{1-\cos a} < \varepsilon$. Khi đó, với $k \geq k_0$, ta có:

$$\left|\sum_k^\infty \frac{\cos nx}{n^s}\right| < \varepsilon, \left|\sum_k^\infty \frac{\sin nx}{n^s}\right| \varepsilon,\ \forall x \in [a + 2i\pi, 2(i+1)\pi - a].$$

Suy ra: chuỗi $\sum\limits_1^\infty \dfrac{\sin nx}{x^s}, \sum\limits_1^\infty \dfrac{\cos nx}{x^s}$ hội tụ đêu trên miền $[a + 2i\pi, 2(i+1)\pi - a], i \in \mathbb{Z}$.

Ghi chú: Chuỗi $\sum\limits_1^\infty \dfrac{\sin n^2 x}{n^2}$ hội tụ trên $\mathbb{R}$ nhưng chuỗi đạo hàm từng số hạng $\sum\limits_1^\infty \cos n^2 x$ không hội tụ.

Công thức Maclaurin của các hàm cơ bản:

1) $\dfrac{1}{1-t} = \sum\limits_0^\infty t^n, |t| < 1$

2) $\dfrac{1}{1+t} = \sum\limits_0^\infty (-1)^n t^n, |t| < 1$

3) $e^t = \sum\limits_0^\infty \dfrac{t^n}{n!},\ \forall t \in \mathbb{R}$

4) $\sin t = \sum_{0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \forall t \in \mathbb{R}$

5) $\cos t = \sum_{0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!},\ \forall t \in \mathbb{R}$

6) $ln(1+t) = \sum_{0}^{\infty}(-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}, t > -1$

7) $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + \ldots, |t| < 1.$

Chuỗi Taylor:

Cho hàm f khả vi vô hạn lần trong lân cận của x_0. Chuỗi $\sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ là chuỗi Taylor của f trong lân cận của x_0. Nếu chuỗi Taylor của f có bán kính hội tụ $R > 0$ thì $f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, x \in (x_0 - R, x_0 + R).$

Bài Tập

1. Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm :

   1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

   2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{1+n^x}$

   3) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n-1}{xn^x}$

   4) $\sum_{0}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n}\right)$

2. Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm:

   1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n}+n}$ trên $\mathbb{R}$. HD : dùng chuỗi đan dấu.

   2) $\sum_{0}^{\infty} x^n e^{-nx}$ trên $[0, a]$ với $a > 0$.

   3) $\sum_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(x^{2n} - x^{2n+1})$ trên $[0, 1]$.

      HD : $0 \le u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}}(x^{2n} - x^{2n+1}) \le \frac{1}{\sqrt{n}(2n+1)},\ \forall x \in [0, 1].$

   4) $\sum_{0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ trên $\mathbb{R}$.

3. Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa sau :

1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^s}, s > 0.$

3) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(2n-1)!}$

4) $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n + 2^n}$

5) $\sum_{0}^{\infty} 2^{\sqrt{n}}(x+1)^n$

6) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}$

7) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n2^n} x^n$

8) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n (x-2)^{2n}$, HD : đặt $t = (x-2)^2$

9) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{n^2 4^n}$, HD : xét $(x+5)\sum_{1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-2}}{n^2 4^n}$.

10) $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}(x-1)^n$

11) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}(x+2)^n$.

4. Tính tổng của các chuỗi sau :

1) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n 2n x^{2n-1}, x \in (-1, 1).$

HD: đặt $f(x) = \sum_{1}^{\infty} (-1)^n 2n x^{2n-1}, x \in (-1, 1)$. Tính tích phân hai vế.

2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, x \in (-1, 1)$

HD: $f(x) = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, f(0) = 0$. Đạo hàm hai vế.

3) $\sum_{1}^{\infty} n x^n, x \in (-1, 1)$

HD : $f(x) = x.\sum_{1}^{\infty} n x^{n-1} = x.S(x)$ với $S(x) = \sum_{1}^{\infty} n x^{n-1}$.

4) $\sum\limits_{0}^{\infty}\left(1+\dfrac{2}{3^{n+1}}\right)x^n, x \in (-1,1)$.
HD: tách thành tổng hai chuỗi.

5) $\sum\limits_{2}^{\infty} n(n+1)x^{n-2}, x \in (-1,1)$.
HD : đặt $S(x)=\sum\limits_{2}^{\infty} n(n+1)x^{n-2}, S(0)=6, xS(x)=\sum\limits_{2}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$.

5. Khai triển Maclaurin của các hàm số sau :

1) $f(x)=\sin^2 x$.
HD : $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$.

2) $f(x)=\dfrac{x^3+x+1}{x^3-4x+3}$.
HD : $f(x)=x+4-\frac{3}{2(x-1)}+\frac{31}{2(x-3)}$.

3) $f(x)=xe^{x^2}$, Tính $f^{(19)}(0)$.
HD : $f(x)=\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{n!}=\sum\limits_{0}^{\infty}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$. Đồng nhất hệ số của x^{19} ở hai vế.

4) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^4}$, Tính $f^{(17)}(0)$.

5) $f(x)=\sqrt[3]{8+x}$.

6) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.
HD : $f(0)$, $f'(x)=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $f'(x)=\sum\limits_{0}^{\infty}\int\limits_{0}^{x}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}t^{2n}dt$, với $\alpha=-\dfrac{1}{2}$.

7) $f(x)=\int\limits_{0}^{x}\dfrac{\sin t}{t}dt$.