**3) Phương pháp tính tích phân**

**a) Phương pháp đổi biến**

**- Định lí:**

Cho 1) Hàm  có đạo hàm liên tục trên ;

2) Hàm hợp  được xác định trên ;

3) 

Khi đó: .

**- Phương pháp chung**



❖ **Bước 1:** Đặt 

❖ **Buớc 2:** Tính vi phân hai vế: 

Đổi cận:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

❖ **Buớc 3:** Chuyển tích phân đã cho sang tích phân theo biến 

Vậy: 

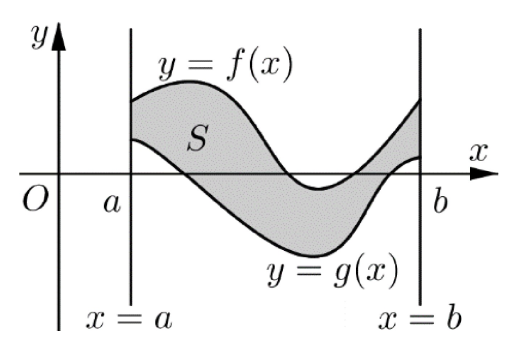
**III. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHÅNG**

**1) Hình phẳng giới hạn bởi một đường cong và trục hoành**

![](data:application/octet-stream;base64,) Nếu hàm số  liên tục trên đoạn  thì diện tích  của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục hoành và hai đường thẳng  là



\*Chú ý: Nếu trên đoạn , hàm số  không đổi dấu thì: 

**2) Hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong**

Nếu hai hàm số  liên tục trên đoạn  thì diện tích  của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số ,  và hai đường thẳng  là



Một số bài toán ta phải xây dựng các hệ trục để áp dụng công thức ứng dụng.

* Đường parabol đứng ứng với hàm số bậc hai 
* Đường parabol nằm ngang thường gặp có phương trình , phương trình này biến đổi thành  ứng với hai nhánh phía trên và phía dưới trục hoành.
* Đường tròn tâm  và bán kính  có phương trình .
* Đường tròn tâm  và bán kính  có phương trình , phương trình này biến đổi thành  ứng với hai nhánh phía trên và phía dưới trục hoành.
* Đường elip phương trình  có độ dài hai trục lần lượt bằng  và 



**PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG**

**Bài 1:** Cổng trường Đại học Bách Khoa Hà Nội có hình dạng parabol, chiều rộng 8 m , chiều cao . Diện tích của cổng bằng bao nhiêu?

**![](data:application/octet-stream;base64,)Bài 2:** Người ta trồng hoa vào phần đất được tô màu đen được giới hạn bởi cạnh  đường trung bình  của mảnh đất hình chữ nhật  và một đường cong hình sin (như hình vẽ). Biết . Tính diện tích

phần còn lại.

**Bài 3:** Một chiếc cổng có hình dạng là một parabol có khoảng cách giữa hai chân cổng là 8 m . Người ta treo một tấm phông hình chữ nhật có hai đỉnh  nằm trên Parabol và hai đỉnh ,  nằm trên mặt đất như hình vẽ bên. Ở phần phía ngoài phông người ta mua hoa để trang trí với chi phí 200.000 đồng , biết . Hỏi số tiền để mua hoa trang trí gần với số tiền nào sau đây ?

![](data:application/octet-stream;base64,)**Bài 4:** Bác Năm làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thuê mỗi mét vuông là 1500000 đồng. Vậy số tiền bác Năm phải trả là bao nhiêu?

**Bài 5:** Ông  muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên là một parabol, chất liệu làm là inox. Giá  vật tư và công làm là 1.300.000 đồng. Hỏi ông X phải trả bao nhiêu tiền để làm cái cửa sắt như vậy.

![](data:application/octet-stream;base64,)**Bài 6:** Cho một mảnh vườn hình chữ nhật  có chiều rộng là 2 m , chiều dài gấp ba chiều rộng. Người ta chia mảnh vườn bằng cách dùng hai đường parabol, mỗi đường parabol có đỉnh là trung điểm mỗi cạnh dài và đi qua hai mút của canh dài đối diện. Tính tỉ số diện tích phần mảnh vườn nằm ở miền trong hai parabol với diện tích phần còn lại.

**Bài 7:** Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 40 cm được thiết kế như hình bên dưới.

a) Diện tích một cánh hoa bằng bao nhiêu?

b) Diện tích hoa văn trang trí bằng bao nhiêu?

![](data:application/octet-stream;base64,)

**Bài 8:** Một cổng chào có dạng hình Parabol chiều cao 18 m , chiều rộng chân đế 12 m . Người ta căng hai sợi dây trang trí  nằm ngang đồng thời chia hình giới hạn bởi Parabol và mặt đất thành ba phần có diện tích bằng nhau. Tỉ số  bằng bao nhiêu?

![](data:application/octet-stream;base64,)**Bài 9:** Một hoa văn hình tròn tâm , ngoại tiếp tam giác đều  có cạnh . Đường cong qua ba điểm ,  là một phần của parabol. Diện tích phần gạch chéo bằng bao nhiêu?

![](data:application/octet-stream;base64,)

**Bài 10:** Một khu đất có hình dạng là một hình tròn với đường kính . Người ta muốn trồng rau trên dải đất rộng 10 m lấy tâm của đường tròn khu đất làm tâm đối xứng. Diện tích phần đất trống còn lại bao nhiêu  ?

![](data:application/octet-stream;base64,)

**Bài 11:** Một hoa văn trang trí được tạo ra từ một miếng bìa hình vuông cạnh 20 cm bằng cách khoét đi bốn phần bằng nhau đều có hình dạng một nửa elip như hình vẽ. Biết một nửa trục lớn là , trục bé . Diện tích bề mặt của hoa văn đó bằng bao nhiêu?

**![](data:application/octet-stream;base64,)Bài 12:** Một biển quảng cáo có dạng hình elip với bốn đỉnh  như hình vẽ bên. Biết chi phí sơn phần tô đậm là 200.000 đồng  và phần còn lại là 100.000 đồng . Hỏi số tiền để sơn theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết  và tứ giác  là hình chữ nhật có  ?

![](data:application/octet-stream;base64,)

**Bài 13:** Đáy của một bể bơi có dạng hình elip với bốn đỉnh  như hình vẽ bên. Biết chi phí phần lát gạch xanh tô đậm là 300.000 đồng  và phần lát gạch trắng còn lại là 100.000 đồng . Hỏi số tiền để làm đáy bể bơi theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây, biết  và tứ giác  là hình chữ nhật có  ?

**Bài 14:** Một mảnh vườn hình elip có trục lớn bằng 100 m , trục nhỏ bằng 80 m được chia thành 2 phần bởi một đoạn thẳng nối hai đỉnh liên tiếp của elip. Phần nhỏ hơn trồng cây con và phần lớn hơn trồng rau. Biết lợi nhuận thu được là 2000 mỗi  trồng cây con và 4000 mỗi  trồng rau. Hỏi thu nhập từ cả mảnh vườn là bao nhiêu?

![](data:application/octet-stream;base64,)

**Bài 15:** Một khu vườn dạng hình tròn có hai đường kính  vuông góc với nhau, . Người ta làm một hồ cá có dạng elip với bốn đỉnh  như hình vẽ. Biết , . Diện tích phần trồng cỏ (phần gạch sọc) bằng bao nhiêu?

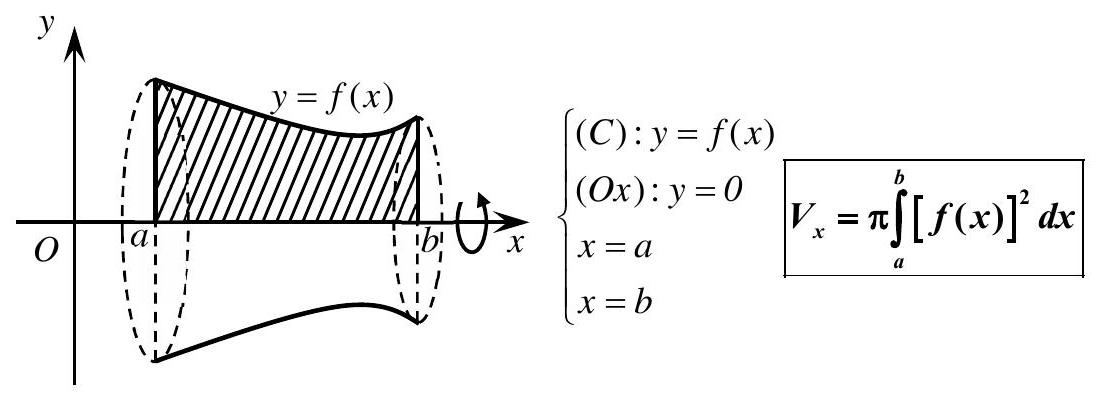
**BÀI 8. THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY GIỚI HẠN**

**BỞI CÁC ĐỒ THỊ HÀM XÁC ĐỊNH**

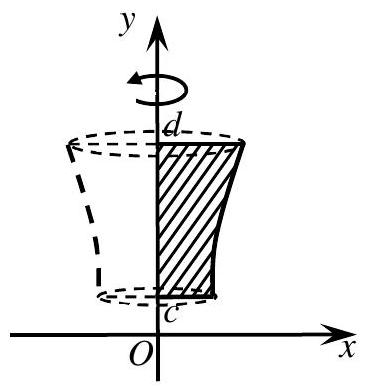
**PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM**

**Thể tích khối tròn xoay**

* Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục hoành và hai đường thẳng  quanh trục  :

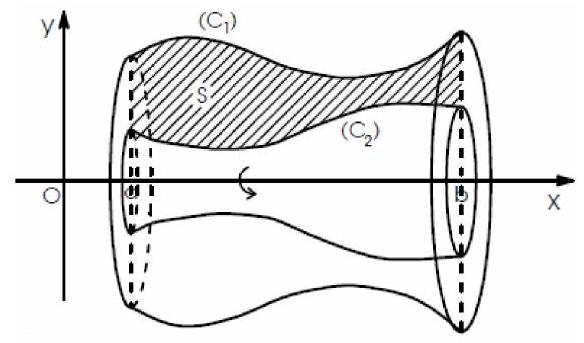


* Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục hoành và hai đường thẳng  quanh trục  :





* Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số  và hai đường thẳng  quanh trục  :

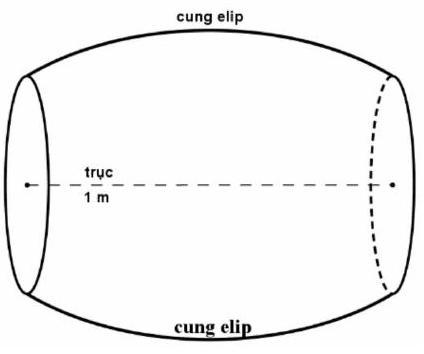




Một số bài toán ta phải xây dựng các hệ trục để áp dụng công thức ứng dụng.

**PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG**

**Bài 1:** Một cái trống trường có khoảng cách giữa hai mặt trống là 1 m . Một mặt phẳng qua trục của trống cắt phần xung quanh của trống theo hai cung của elip  (tham khảo hình vẽ). Biết rằng elip  có trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 2 m và 1 m . Hãy tính thể tích của phần không gian mà cái trống đã nêu chiếm chỗ.



**Bài 2:** Một cái trống (hình vẽ) có đường kính 1 m , hai mặt trống có đường kính  và chiều cao của trống là 1 m . Thể tích khối giới hạn bởi bề mặt của trống gần với số nào?

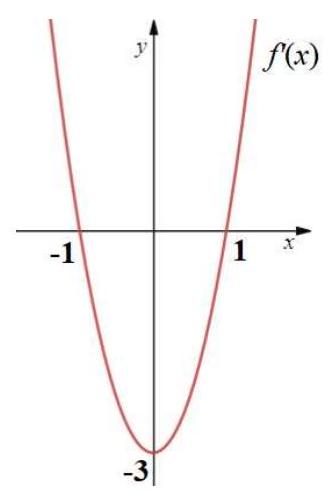


**Bài 3:** Một thùng chứa rượu bằng gỗ là một hình tròn xoay như hình bên có hai mặt đáy là hai hình tròn bằng nhau, khoảng cách giữa hai đáy là 8 dm . Đường cong mặt bên của thùng là một phần của đường elip có độ dài trục lớn bằng 10 dm , trục bé bằng 6 dm . Hỏi thùng gỗ này đựng được bao nhiêu lít rượu?



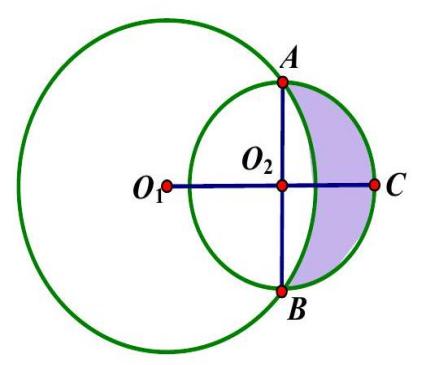
**Bài 4:** Một bình cắm hoa dạng khối tròn xoay với đáy bình và miệng bình có đường kính lần lượt là 2 và 4 . Mặt xung quanh của bình là một phần của mặt tròn xoay khi quay đường cong  quay quanh trục . Thể tích của bình cắm hoa đó bằng bao nhiêu?

**Bài 5:** Cho hàm số  có đồ thị . Biết rằng đồ thị  tiếp xúc với đường thẳng  tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số  cho bởi hình vẽ dưới y. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng  giới hạn bởi đồ thị  và trục hoành khi quay xung quanh trục .

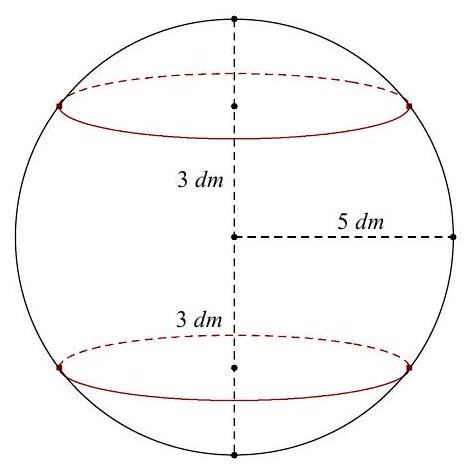


**Bài 6:** Cho hai đường tròn  và  cắt nhau tại hai điểm  sao cho  là một đường kính của đường tròn . Gọi  là hình phẳng giới hạn bởi hai đường tròn.

Quay  quanh trục  ta được một khối tròn xoay. Tính thể tích  của khối tròn xoay tạo thành.

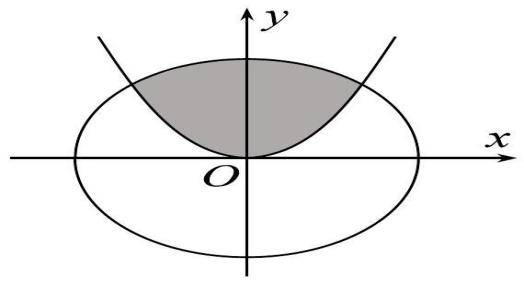


**Bài 7:** Một khối cầu có bán kính là , người ta cắt bỏ hai phần của khối cầu bằng hai mặt phẳng song song cùng vuông góc với đường kính và cách tâm một khoảng  để làm một chiếc lu đựng nước. Tính thể tích nước tối đa mà chiếc lu có thể chứa được.



**Bài 8:** Một thùng rượu vang có dạng hình tròn xoay có hai đáy là hai hình tròn bằng nhau, khoảng cách giữa hai đáy bằng 80 cm . Đường sinh của mặt xung quanh thùng là một phần đường tròn có bán kính bằng 60 cm . Hỏi thùng đó có thể đựng được bao nhiêu lít rượu?

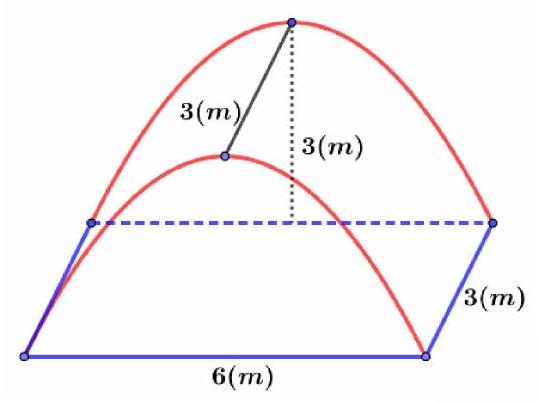
**Bài 9:** Cho  là hình phẳng giới hạn bởi parabol  và đường tròn  (phần tô đậm trong hình bên). Tính thể tích  của khối tròn xoay tạo thành khi quay  quanh trục hoành.



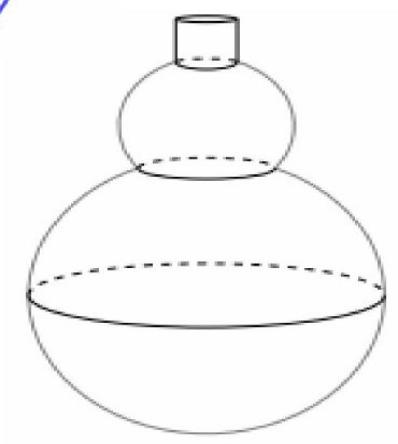
**Bài 10:** Trong mặt phẳng, cho đường elip  có độ dài trục lớn là , độ dài trục nhỏ là , đường tròn tâm  có đường kính là  (như hình vẽ bên dưới). Tính thể tích  của khối tròn xoay có được bằng cách cho miền hình hình phẳng giới hạn bởi đường elip và được tròn (được tô đậm trên hình vẽ) quay xung quanh trục .



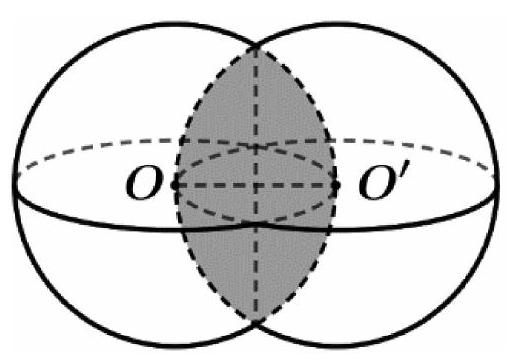
**Bài 11:** Để chuẩn bị cho hội trại do Đoàn trường tổ chức, lớp 12B dự định dựng một cái lều trại có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 6 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Tính thể tích phần không gian bên trong lều trại.



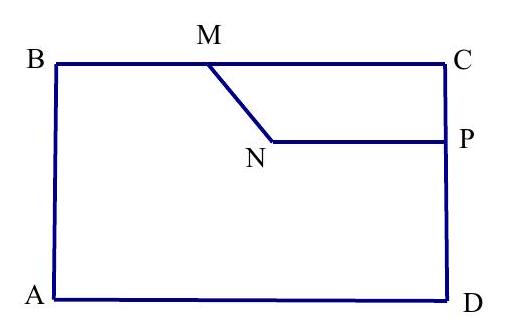
**Bài 12:** Người ta cắt hai hình cầu có bán kính lẩn lượt là  và  và một phần của mặt trụ để làm hồ lô đựng rượu như hình vẽ dưới đây. Biết giao của hai hình cầu là đường tròn có bán kính  và cổ của hồ lô là một hình trụ có bán kính đáy bằng , chiều cao bằng 4 cm . Giả sử độ dày của hồ lô không đáng kể. Hỏi hồ lô đựng được tối đa bao nhiều lít rượu?



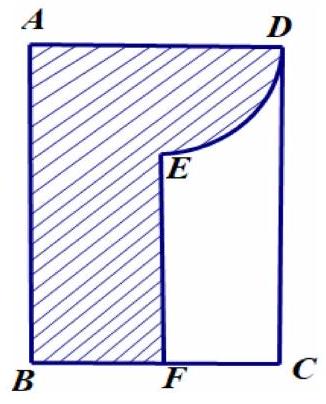
**Bài 13:** Một đồ chơi được thiết kế gồm hai mặt cầu  có cùng bán kính  thỏa mãn tính chất: tâm của  thuộc  và ngược lại (xem hình vẽ). Tính thể tích phần chung  của hai khối cầu tạo bởi  và .



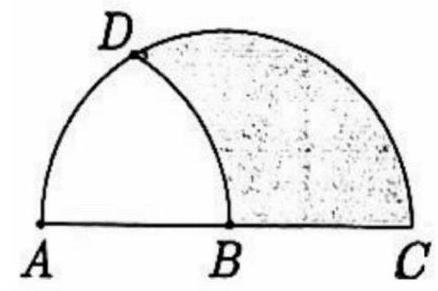
**Bài 14:** Cho hình chữ nhật  có . Cắt hình chữ nhật theo đường gấp khúc  với  và bỏ đi phần hình thang vuông  (tham khảo hình vẽ). Gọi  là phần hình phẳng còn lại của hình chữ nhật đã cho sau khi cắt bỏ. Tính thể tích của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay  quanh trục .



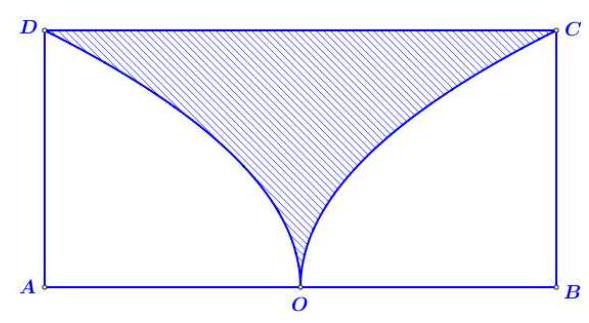
**Bài 15:** Một vật trang trí có dạng khối tròn xoay tạo thành khi quay miền  (phần gạch chéo trong hình vẽ) quay xung quanh trục . Biết  là hình chữ nhật cạnh  là trung điểm của ; điểm  cách  một đoạn bằng 1 cm . Thể tích của vật thể trang trí trên là (quy tròn đến hàng phần mười)



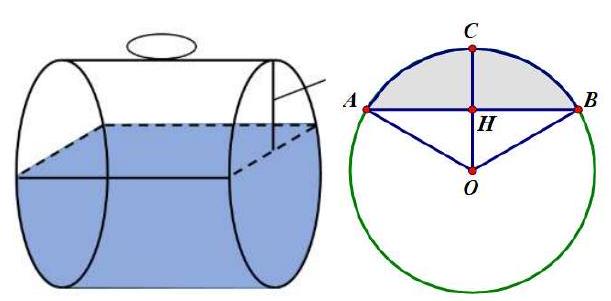
**Bài 16:** Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền  (phần màu xám trong hình vẽ bên) quanh trục . Biết rằng  là trung điểm của . Miền  được giới hạn bởi đoạn thẳng  và các cung tròn bán kính 1 cm có tâm  và . Thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu?   
(Làm tròn đến chữ số thấp phân thứ nhất)



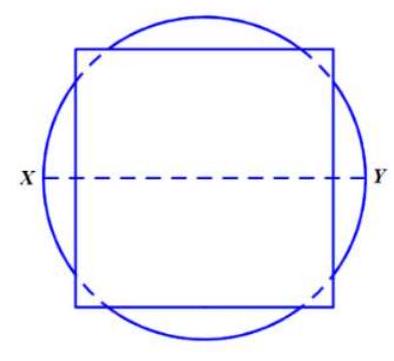
**Bài 17:** Từ hình chữ nhật  có chiều dài  và chiều rộng ; Người ta cắt bỏ miền  được giới hạn bởi cạnh  của hình chữ nhật và hai nửa đường parabol có chung đỉnh là trung điểm của cạnh , chúng lần lượt đi qua hai đầu mút  của hình chữ nhật đó (phần tô đậm như hình vẽ). Phần còn lại cho quay quanh trục  để tạo nên một đồ vật làm trang trí, thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu?



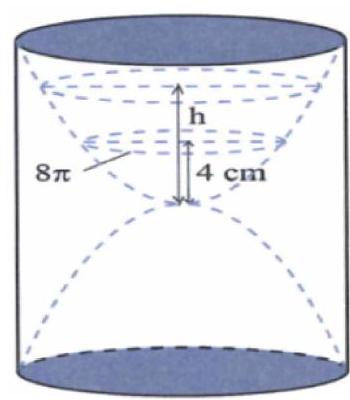
**Bài 18:** Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5 m , có bán kính đáy 1 m , với nắp bồn đặt trên mặt nằm ngang của mặt trụ. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với  của đường kính đáy. Tính thể tích gần đúng nhất của khối dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị  ).



**Bài 19:** Cho hình vuông có độ dài 8 cm và một hình tròn có bán kính 5 cm được xếp chồng lên nhau sau cho tâm của hình tròn trùng với tâm của hình vuông như hình vẽ bên. Biết thể tích  của vật thể tròn xoay tạo thành khi quay mô hình trên quanh trục  bằng và  là phân số tối giản. Khi đó bằng bao nhiêu?



**Bài 20:** Một chiếc đồng hồ cát như hình vẽ, gồm hai phần đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang và đặt trong một hình trụ. Thiết diện thẳng đứng qua trục của nó là hai Parabol chung đỉnh và đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang. Ban đầu lượng cát dồn hết ở phần trên của đồng hồ thì chiều cao của mực cát bằng  chiều cao của bên đó (xem hình vẽ). Cát chảy từ trên xuống dưới với lưu lượng không đi  phút. Khi chiều cao của cát còn  thì bề mặt trên cùng của cát tạo thành một đường tròn có chu vi . Biết sau 20 phút thì cát chảy hết xuống phần bên dưới của đồng hồ. Hỏi chiều cao của khối trụ bên ngoài? (Làm tròn đến chữ số thấp phân thứ nhất)

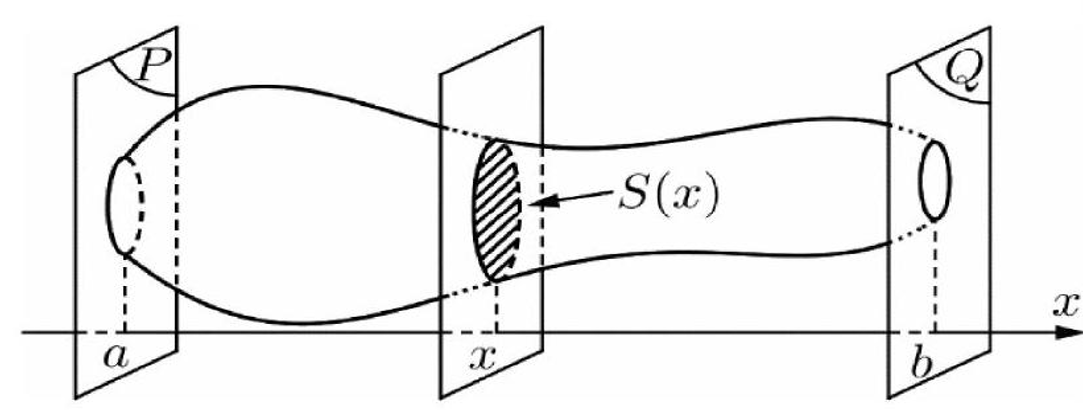


**BÀl 9. THÉ TÍCH VẬT THÉ̉ TRÒN XOAY TÍNH THEO MẶT CÁT**

**PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM**

**◼ Thể tích vật thể:**

Cắt một vật thể  bởi hai mặt phẳng  và  vuông góc với trục  lần lượt tại , . Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với  tại điểm  cắt  theo thiết diện có diện tích là . Giả sử  liên tục trên đoạn .



Người ta chứng minh đ c rằng thể tích  của phần vật thể  giới hạn bởi hai mặt phẳng  và  được tính bởi công thức .

Một số bài toán ta phải xây dựng các hệ trục để áp dụng công thức ứng dụng.

**PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG**

**Bài 1:** Tính thể tích  của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục  tại đi m có hoành đ  là một tam giác đều cạnh .

**Bài 2:** Cho vật thể  được giới hạn bởi hai mặt phẳng  và . Biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông với góc với trục  tại điểm có hoành độ ,  là một hình vuông có cạnh . Thể tích vật  bằng bao nhiêu?

**Bài 3:** Tính thể tích  của vật thể nằm giữa hai mặt phẳng biết rằng thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục  tại điểm có hoành độ  là một tam giác đều cạnh .