

HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 TAO ĐÀN 2023-2024

Câu 1. (4 điểm)

Tính giá trị biểu thức: $A = (x^{31} + x^3 - x^{2010})^{2009}$ với $x = \frac{3(2+\sqrt{5})\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}{\sqrt{5}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}}$

Câu 2. (4 điểm)

- a. Giải phương trình $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = 0$
- b. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:
$$\begin{cases} xy + x + y = a + 1 \\ x^2y + xy^2 = a \end{cases}$$

Câu 3. (4 điểm)

- a. Giải bất phương trình:

$$\frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1} \leq 0$$

- b. Tìm giá trị lớn nhất của: $B = \frac{1}{x^3 + y^3 + 1} + \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} + \frac{1}{z^3 + x^3 + 1}$

Với x, y, z là các số dương và $xyz = 1$

Câu 4. (6 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R). D là một điểm bất kì thuộc cung nhỏ AC (D khác A và C). Gọi M, N lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ D tới các đường thẳng AB, AC. Gọi P là giao điểm các đường thẳng MN, BC.

- 1) Chứng minh DP và BC vuông góc với nhau
- 2) Đường tròn (I; r) nội tiếp tam giác ABC. Tính IO với R = 5cm, r = 1,6 cm.

Bài 5. (2 điểm) Tìm x, y nguyên dương để C là một số nguyên

$$\text{dương với } C = \frac{x^3 + x}{xy - 1}$$

LỜI GIẢI

Câu 1:

$$\begin{aligned} \text{Tính } x &= \frac{3(2+\sqrt{5})\sqrt[3]{17\sqrt{5}-38}}{\sqrt{5}+3-\sqrt{5}} \\ &= \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})^3(17\sqrt{5}-38)} = \sqrt[3]{(17\sqrt{5}+38)(17\sqrt{5}-38)} = 1 \Rightarrow A=1 \end{aligned}$$

Câu 2:

a) $x = 0$ không là nghiệm của phương trình.

Xét $x \neq 0$ chia hai vế phương trình cho x^2 ta được:

$$\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) + 3\left(x - \frac{2}{x}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 2 = 0 \\ x^2 + 2x - 2 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ thống 2 phương trình thu được 4 nghiệm của PT (1) như sau:

$$\{1; -2; -1+\sqrt{3}; -1-\sqrt{3}\}$$

b) Dễ thấy (x, y) là nghiệm thì (y, x) cũng là nghiệm của hệ.

Để hệ có nghiệm duy nhất thì $x = y$.

Từ hệ suy ra $a \in \left\{-2; 2; \frac{1}{4}\right\} \Rightarrow a \in \left\{2; \frac{1}{4}\right\}$ thỏa mãn (sau khi thử lại).

Câu 3:

a) Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{(x+1)^2(x^2-x+1)}{(x^2+1)(x^2-x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

b) Ta có bất đẳng thức: $x^3 + y^3 \geq xy(x+y) \quad \forall x, y > 0$ (*)

Thật vậy bất đẳng thức (*) tương đương với: $x^3 + y^3 - xy(x+y) \geq 0$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2) - xy(x+y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2-2xy+y^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng các phép biến đổi là tương đương nên bất đẳng thức (*) được chứng minh. Dấu “=” xảy ra khi $x = y$.

Áp dụng (*) ta được:

$$x^3 + y^3 + 1 = x^3 + y^3 + xyz \geq xy(x+y) + xyz = xy(x+y+z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3+y^3+1} \leq \frac{1}{xy(x+y+z)}$$

$$\text{Chứng minh tương tự ta được: } \frac{1}{y^3+z^3+1} \leq \frac{1}{yz(x+y+z)}; \frac{1}{z^3+x^3+1} \leq \frac{1}{zx(x+y+z)}$$

Cộng theo vế các bất thức trên ta được:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{x^3+y^3+1} + \frac{1}{y^3+z^3+1} + \frac{1}{z^3+x^3+1} \leq \frac{1}{xy(x+y+z)} + \frac{1}{yz(x+y+z)} + \frac{1}{zx(x+y+z)} \\ &= \frac{x+y+z}{xyz(x+y+z)} = \frac{1}{xyz} = 1 \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của B là 1 khi $x = y = z = 1$.

Câu 4: (Các bạn tự vẽ hình)

a) Nhiều cách làm. Xin giới thiệu một cách dễ nghĩ đến.

Kẻ DP' vuông góc BC . Suy ra P' , M , N thẳng hàng (Đường thẳng Simson). Dẫn tới P và P' trùng nhau (do MN và BC chỉ có một giao điểm duy nhất).

b) Dễ chứng minh được:

$OI^2 = R^2 - 2Rr$ (Hệ thức Ô – le). Từ đó suy ra kết quả.

Câu 5:

$$\begin{aligned} C \text{ thuộc } Z \text{ thì } y^2 C &= \frac{x^3 y^2 + x y^2}{xy-1} = \frac{(x^3 y^2 - x^2 y) + (x^2 y - x) + (x y^2 - y) + (x + y)}{xy-1} \\ &= \frac{x^2 y + x + y}{xy-1} = x^2 y + x + y + \frac{x+y}{xy-1} \in Z \\ \Rightarrow x+y &\geq -1 + xy \leq (x-1)(y-1) \leq 2 \end{aligned}$$

Với $x = 1$ thì $y = 3$.

Với $x > 1$ thì $y-1 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq y \leq 3 \Rightarrow y \in \{1; 2; 3\}$

Nếu $y = 1$ thì $\frac{x+y}{xy-1} = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1} \in Z \Rightarrow x = 3; 2$ (do $x > 1$)

Nếu $y = 2$ thì $\frac{x+y}{xy-1} = \frac{x+2}{2x-1} = \frac{1}{2} + \frac{5}{4x-2} \in Z$ từ đây tìm được x

Nếu $y = 3$ thì $\frac{x+y}{xy-1} = \frac{x+3}{3x-1} = \frac{1}{3} + \frac{5}{4x-2} \in Z$ từ đây tìm được x