

UBND HUYỆN PHÙ MỸ
KỶ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 8 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2022-2023
Thời gian : 150 phút

Bài 1. (4,0 điểm)

- a) Phân tích đa thức $(2x^2 - 4)^2 + 9$ thành nhân tử
b) Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên n thỏa mãn
 $(2020^{2021} + 1) : (n^3 + 2021n)$

Bài 2. (4,0 điểm)

- a) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 2021$

Tính giá trị biểu thức $P = \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) : (a+b+c)$

- b) Giải phương trình $x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 5$

Bài 3. (5,0 điểm)

- a) Cho các số a, b, c không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a-1)^3 + (b-1)^3 + (c-1)^3$

- b) Một học sinh từ lớp 5 đến lớp 9 đã trải qua 31 kỳ thi, trong đó số kỳ thi ở năm sau nhiều hơn số kỳ thi ở năm trước và số kỳ thi ở năm lớp 9 gấp ba lần số kỳ thi ở năm lớp 5. Hỏi học sinh đó thi bao nhiêu kỳ thi ở năm lớp 8

Bài 4. (4,0 điểm)

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên cạnh AD lấy điểm M , trên cạnh BC lấy điểm P sao cho $AM = CP$. Kẻ BH vuông góc với AC tại H . Gọi Q là trung điểm của CH , đường thẳng qua P song song với MQ cắt AC tại N

- a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

- b) Khi M là trung điểm của AD . Chứng minh BQ vuông góc với NP

Bài 5. (3,0 điểm) Cho hình thoi $ABCD$ có $\angle BAD = 120^\circ$. Một đường thẳng đi qua đỉnh D của hình thoi và cắt tia đối của hai tia AB và CB lần lượt tại M , N . Gọi E là giao điểm của AN và CM . Chứng minh $AD^2 = AN \cdot AE$

ĐÁP ÁN

Bài 1. (4,0 điểm)

c) Phân tích đa thức $(2x^2 - 4)^2 + 9$ thành nhân tử

Ta có :

$$\begin{aligned}(2x^2 - 4)^2 + 9 &= 4x^4 - 16x^2 + 25 = (4x^4 + 20x^2 + 25) - 36x^2 \\ &= (2x^2 + 5)^2 - (6x)^2 = (2x^2 - 6x + 5)(2x^2 + 6x + 5)\end{aligned}$$

d) Chứng minh rằng không tồn tại số nguyên n thỏa mãn $(2020^{2021} + 1):(n^3 + 2021n)$

Ta thấy $2020^{2021} + 1$ có giá trị là một số nguyên lẻ

Mặt khác: Với mọi số nguyên n thì n^3 và $2021n$ là hai số nguyên có cùng tính chẵn, lẻ nên $n^3 + 2021n$ là số nguyên chẵn với mọi số nguyên n

Vậy không tồn tại số nguyên n thỏa mãn $(2020^{2021} + 1):(n^3 + 2021n)$

Bài 2. (4,0 điểm)

c) Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 2021$

$$P = \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) : (a+b+c)$$

Tính giá trị biểu thức

Vì a, b, c là các số dương nên $a+b+c \neq 0$. Ta có :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 2021$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \cdot (a+b+c) = 2021(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c} \cdot (a+b+c) + \frac{b}{c+a} \cdot (a+b+c) + \frac{c}{a+b} \cdot (a+b+c) = 2021(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + a + \frac{b^2}{c+a} + b + \frac{c^2}{a+b} + c = 2021(a+b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 2021(a+b+c) - (a+b+c)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 2020(a+b+c)$$

$$P = \left(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \right) : (a+b+c) = 2020(a+b+c) : (a+b+c) = 2020$$

Vậy

$$x^2 + \frac{4x^2}{(x+2)^2} = 5$$

d) Giải phương trình

Phương trình xác định $\Leftrightarrow x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$. Khi đó phương trình đã cho tương đương

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 2x \cdot \frac{2x}{x+2} + \frac{4x^2}{(x+2)^2} \right) + 2x \cdot \frac{2x}{x+2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2x}{x+2} \right)^2 + \frac{4x^2}{x+2} = 5 \Leftrightarrow \left(\frac{x^2+2x}{x+2} - \frac{2x}{x+2} \right) + \frac{4x^2}{x+2} = 5$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x+2} \right)^2 + \frac{4x^2}{x+2} = 5$$

Đặt $y = \frac{x^2}{x+2}$ ta được phương trình $y^2 + 4y = 5$

$$\Leftrightarrow y^2 + 4y + 4 = 9 \Leftrightarrow (y+2)^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} y+2=3 \\ y+2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-5 \end{cases}$$

*Trường hợp 1: $y=1$. Ta có :

$$\frac{x^2}{x+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 = x+2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2(tm) \\ x=-1(tm) \end{cases}$$

*Trường hợp 2: $y=-5$. Ta có :

$$\frac{x^2}{x+2} = -5 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4} + \frac{15}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{2} \right)^2 = -\frac{15}{4} (ktm)$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{-1; 2\}$

Bài 3. (5,0 điểm)

c) Cho các số a, b, c không âm thỏa mãn $a+b+c=3$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (a-1)^3 + (b-1)^3 + (c-1)^3$

Với các số a, b, c không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Ta có :

$$*) (a-1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = a \left(a^2 - 3a + \frac{9}{4} \right) + \frac{3a}{4} - 1 = a \left(a - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3a}{4} - 1 \geq \frac{3a}{4} - 1 \quad (1)$$

$$*) (b-1)^3 = b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = b \left(b^2 - 3b + \frac{9}{4} \right) + \frac{3b}{4} - 1 = b \left(b - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3b}{4} - 1 \geq \frac{3b}{4} - 1 \quad (2)$$

$$*) (c-1)^3 = c^3 - 3c^2 + 3c - 1 = c \left(c^2 - 3c + \frac{9}{4} \right) + \frac{3c}{4} - 1 = c \left(c - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{3c}{4} - 1 \geq \frac{3c}{4} - 1 \quad (3)$$

Cộng theo vế (1), (2) và (3) ta được :

$$(a-1)^3 + (b-1)^3 + (c-1)^3 \geq \frac{3}{4}(a+b+c) - 3 = \frac{3}{4} \cdot 3 - 3 = -\frac{3}{4} \Rightarrow P \geq -\frac{3}{4}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} a\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \\ b\left(b - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \\ c\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a;b;c) = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \\ (a;b;c) = \left(\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2}\right) \\ (a;b;c) = \left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; 0\right) \end{cases}$$

Vậy $\min P = -\frac{3}{4}$ khi $(a;b;c) = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và các hoán vị của nó

d) Một học sinh từ lớp 5 đến lớp 9 đã trải qua 31 kỳ thi, trong đó số kỳ thi ở năm sau nhiều hơn số kỳ thi ở năm trước và số kỳ thi ở năm lớp 9 gấp ba lần số kỳ thi ở năm lớp 5. Hỏi học sinh đó thi bao nhiêu kỳ thi ở năm lớp 8

Gọi số kỳ thi trong mỗi năm (từ lớp 5 đến lớp 9) mà học sinh đó đã trải qua lần lượt là $x_1; x_2; x_3; x_4; x_5$ ($x_1; x_2; x_3; x_4; x_5$ là các số nguyên dương)

Ta có $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 31$ và $x_5 = 3x_1$

- Vì $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 < 5x_5$ hay $5x_5 > 31 \Rightarrow x_5 > 6(1)$
- Vì $x_5 = 3x_1 \Rightarrow x_5 : 3(2)$

Giả sử $x_5 \geq 12 \Rightarrow 3x_1 \geq 12 \Rightarrow x_1 \geq 4 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 4 + 5 + 6 + 7 + 12 = 34$

Suy ra không xảy ra vì $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 31 \Rightarrow x_5 < 12(3)$

Từ (1), (2), (3) suy ra $x_5 = 9, x_1 = 3 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 = 19$

Mà $x_2 < x_3 < x_4 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 < 3x_4$ hay $3x_4 > 19 \Rightarrow x_4 > 6$

Do $6 < x_4 < x_5 = 9$ nên $x_4 = 7$ hoặc $x_4 = 8$

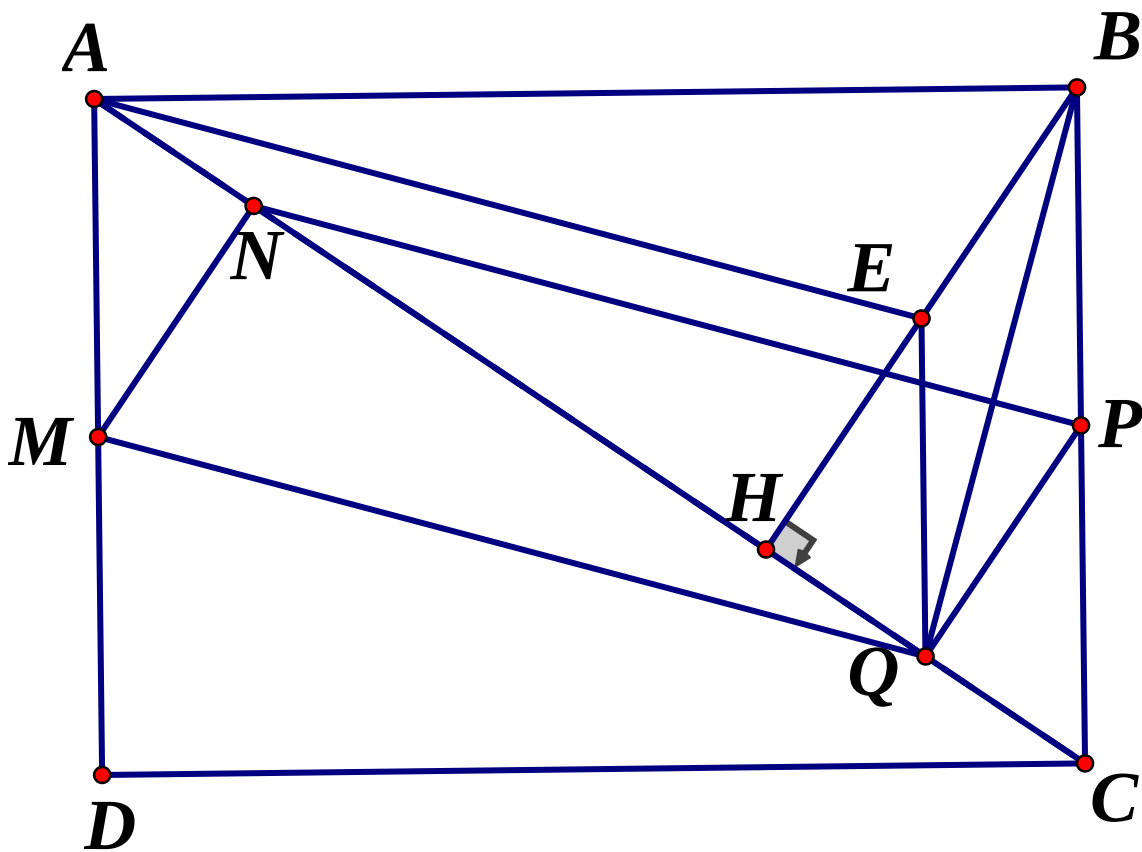
*Nếu $x_4 = 7 \Rightarrow x_2 + x_3 + x_4 < 5 + 6 + 7 = 18 < 19$ (loại)

*Nếu $x_4 = 8 \Rightarrow x_2 + x_3 = 11$. Khi đó $\begin{cases} x_2 = 4; x_3 = 7 \\ x_2 = 5; x_3 = 6 \end{cases} (tm)$

Vậy học sinh đó thi 8 kỳ thi ở năm lớp 8

Bài 4. (4,0 điểm)

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Trên cạnh AD lấy điểm M , trên cạnh BC lấy điểm P sao cho $AM = CP$. Kẻ BH vuông góc với AC tại H . Gọi Q là trung điểm của CH , đường thẳng qua P song song với MQ cắt AC tại N



c) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

Hình chữ nhật $ABCD \Rightarrow AD = BC \Rightarrow \angle DAC = \angle BCA$

$PN \parallel MQ(gt) \Rightarrow \angle AQM = \angle CNP$

Mà $\angle AQM + \angle DAC + \angle AMQ = 180^\circ$ và $\angle CPN + \angle BCA + \angle CNP = 180^\circ \Rightarrow \angle AMQ = \angle CPN$

Xét $\triangle AMQ$ và $\triangle CPN$ có : $AM = CP, \angle DAC = \angle BCA, \angle AMQ = \angle CPN$

$\Rightarrow \triangle AMQ = \triangle CPN(g.c.g) \Rightarrow MQ = PN$

Tứ giác $MNPQ$ có $MQ \parallel PN, MQ = PN$. Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành

d) Khi M là trung điểm của AD . Chứng minh BQ vuông góc với NP

Gọi E là trung điểm của BH, mà Q là trung điểm của HC

Nên QE là đường trung bình của $\triangle BHC \Rightarrow QE \parallel BC$ và $QE = \frac{BC}{2}$

$QE \parallel BC \Rightarrow QE \perp AB$, mà $BH \perp AQ$ nên E là trực tâm của $\triangle ABQ \Rightarrow AE \perp BQ$

$QE = \frac{BC}{2}$, mà $AM = \frac{AD}{2}$ và $AD = BC \Rightarrow QE = AM$

Mặt khác $QE \parallel AM$ (cùng $\parallel$ với BC) nên $AEQM$ là hình bình hành

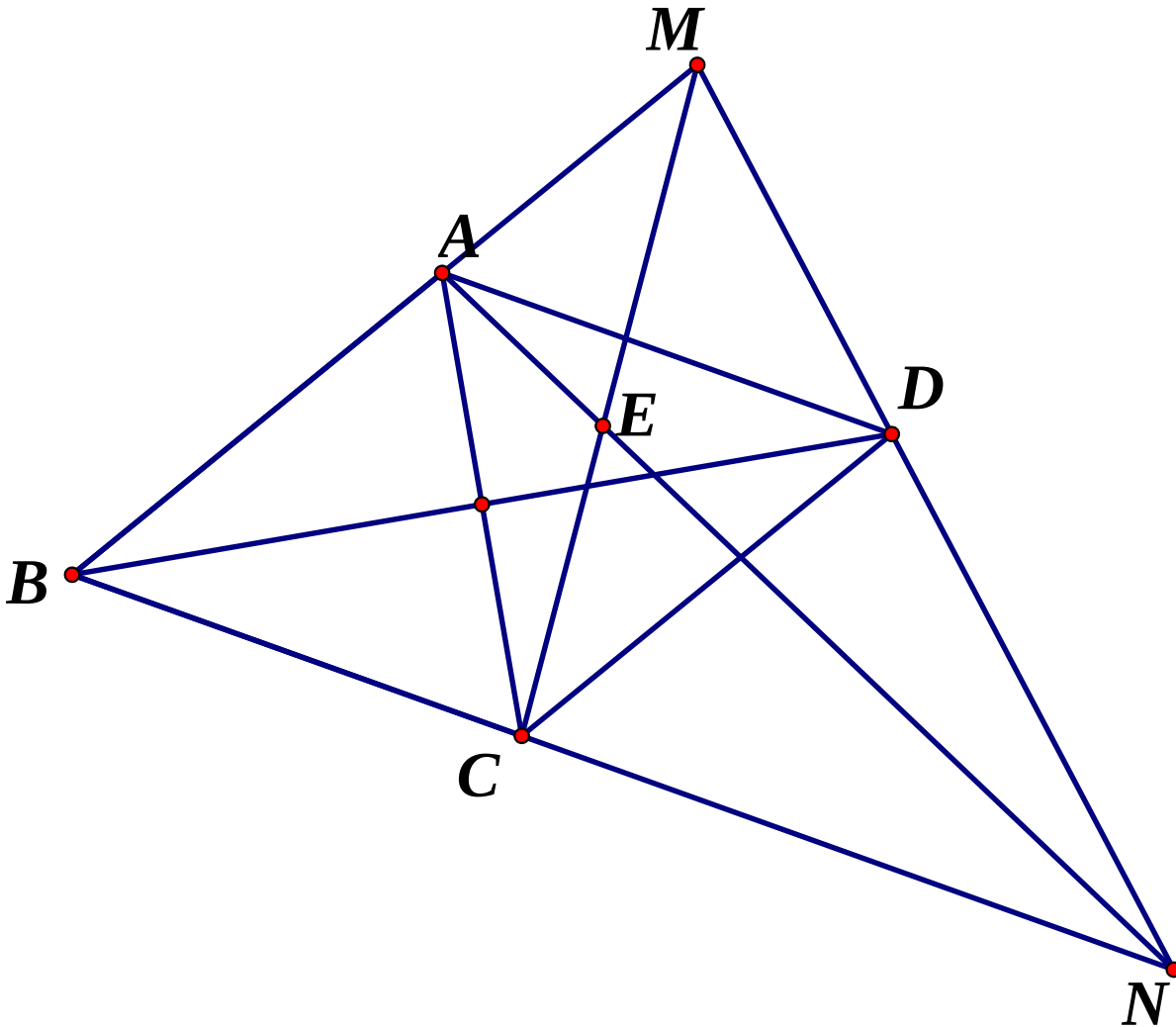
$\Rightarrow AE \parallel MQ \Rightarrow AE \parallel PN(\parallel MQ)$

Do $AE \perp BQ$ và $AE \parallel PN$ nên $BQ \perp PN$

Vậy khi M là trung điểm của AD thì $BQ \perp NP$

Bài 5. (3,0 điểm) Cho hình thoi $ABCD$ có $\angle BAD = 120^\circ$. Một đường thẳng đi qua đỉnh D của hình thoi và cắt tia đối của hai tia AB và CB lần lượt tại M , N . Gọi

E là giao điểm của AN và CM . Chứng minh $AD^2 = AN \cdot AE$



- Hình thoi $ABCD$ nên $AD = DC$ và $AB \parallel DC$

$$AB \parallel DC \Rightarrow \angle ADC + \angle BAD = 180^\circ \Rightarrow \angle ADC = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$AD = DC \Rightarrow \triangle ADC$ cân tại D , mà $\angle ADC = 60^\circ \Rightarrow \triangle ADC$ đều $\Rightarrow AD = AC = DC$

- Xét $\triangle ADM$ và $\triangle CDN$ có :

$\angle AMD = \angle CDN$ (hai góc đồng vị do $AB \parallel CD$), $\angle ADM = \angle CND$ (đồng vị do $AB \parallel BC$)

$$\Rightarrow \triangle ADM \sim \triangle CND (g.g) \Rightarrow \frac{AM}{CD} = \frac{AD}{CN} \text{ hay } \frac{AM}{AC} = \frac{AC}{CN}$$

- Xét $\triangle AMC$ và $\triangle CAN$ có : $\frac{AM}{AC} = \frac{AC}{CN}$; $\angle MAC = \angle ACN = 120^\circ$
 $\Rightarrow \triangle AMC \sim \triangle CAN (c.g.c) \Rightarrow \angle ACM = \angle CNA$ hay $\angle ACE = \angle ANC$

- Xét $\triangle ACE$ và $\triangle ANC$ có : $\angle NAC$ chung, $\angle ACE = \angle ANC$
 $\Rightarrow \triangle ACE \sim \triangle ANC (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AC}{AN} \Rightarrow AC^2 = AE \cdot AN$

Mà $AC = AD$. Vậy $AD^2 = AN \cdot AE$