

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu I (2,0 điểm)

- 1) Phân tích đa thức sau thành nhân tử $a^2(b-2c)+b^2(c-a)+2c^2(a-b)+abc$.
- 2) Cho x, y thỏa mãn $x = \sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x^4 + x^3y + 3x^2 + xy - 2y^2 + 1$.

Câu II (2,0 điểm)

- 1) Giải phương trình $(x^2 - 4x + 11)(x^4 - 8x^2 + 21) = 35$.
- 2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 2012})(y + \sqrt{y^2 + 2012}) = 2012 \\ x^2 + z^2 - 4(y + z) + 8 = 0 \end{cases}$$
.

Câu III (2,0 điểm)

- 1) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $(n^2 + n + 1)$ không chia hết cho 9.
- 2) Xét phương trình $x^2 - m^2x + 2m + 2 = 0$ (1) (ẩn x). Tìm các giá trị nguyên dương của m để phương trình (1) có nghiệm nguyên.

Câu IV (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$ ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC, BC; BO cắt EF tại I. M là điểm di chuyển trên đoạn CE.

- 1) Tính $\angle BIF$.
- 2) Gọi H là giao điểm của BM và EF. Chứng minh rằng nếu $AM = AB$ thì tứ giác ABHI nội tiếp.
- 3) Gọi N là giao điểm của BM với cung nhỏ EF của (O), P và Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE, DF. Xác định vị trí của điểm M để PQ lớn nhất.

Câu V (1,0 điểm)

Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = (a+b+c+3) \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right)$.

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh.....Số báo danh.....
Chữ kí của giám thị 1: Chữ kí của giám thị 2:

HƯỚNG DẪN VÀ BIỂU ĐIỂM CHẤM MÔN TOÁN (chuyên)

Hướng dẫn chấm gồm : 03 trang

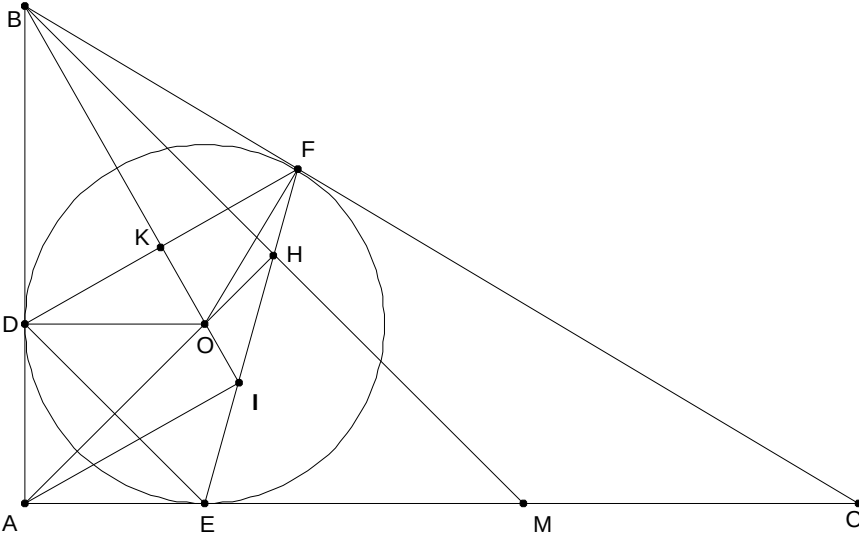
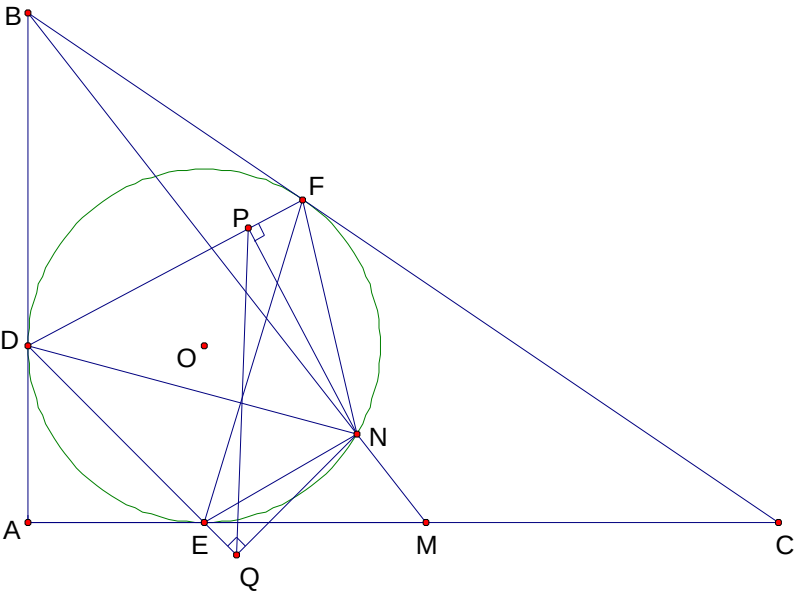
I) HƯỚNG DẪN CHUNG.

- Thí sinh làm bài theo cách riêng nhưng đáp ứng được yêu cầu cơ bản vẫn cho đủ điểm.
- Việc chi tiết điểm số (nếu có) so với biểu điểm phải được thống nhất trong Hội đồng chấm.
- Sau khi cộng điểm toàn bài, điểm lẻ đến 0,25 điểm.

II) ĐÁP ÁN VÀ BIỂU ĐIỂM CHẤM.

Câu	Nội dung	Điểm
Câu I (2,0đ)		
1) 1,0 điểm	$a^2(b - 2c) + b^2(c - a) + 2c^2(a - b) + abc = 2c^2(a - b) + ab(a - b) - c(a^2 - b^2) - ac(a - b)$	0,25
	$= (a - b)[2c^2 - 2ac + ab - bc]$	0,25
	$= (a - b)[2c(c - a) + b(a - c)]$	0,25
	$= (a - b)(a - c)(b - 2c)$	0,25
2) 1,0 điểm	Có $x = \sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}}$	0,25
	$\Rightarrow x^3 = 2y + 3\sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} \cdot \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}} \left(\sqrt[3]{y - \sqrt{y^2 + 1}} + \sqrt[3]{y + \sqrt{y^2 + 1}} \right)$	
	$\Rightarrow x^3 + 3x - 2y = 0$	0,25
	$A = x^4 + x^3y + 3x^2 - 2xy + 3xy - 2y^2 + 1 = (x^4 + 3x^2 - 2xy) + (x^3y + 3xy - 2y^2) + 1$	0,25
	$= x(x^3 + 3x - 2y) + y(x^3 + 3x - 2y) + 1 = 1$	0,25
Câu II (1,0đ)		
1) 1,0 điểm	phương trình đã cho tương đương với $[(x - 2)^2 + 7][(x^2 - 4)^2 + 5] = 35$	0,25
	(1)	
	Do $\left. \begin{matrix} (x - 2)^2 + 7 \geq 7 \forall x \\ (x^2 - 4)^2 + 5 \geq 5 \forall x \end{matrix} \right\} \Rightarrow [(x - 2)^2 + 7][(x^2 - 4)^2 + 5] \geq 35 \forall x$	0,25
	(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + 7 = 7 \\ (x^2 - 4)^2 + 5 = 5 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow x = 2$	0,25
2) 1,0 điểm	$\begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + 2012})(y + \sqrt{y^2 + 2012}) = 2012 & (1) \\ x^2 + z^2 - 4(y + z) + 8 = 0 & (2) \end{cases}$	0,25
	(1) $\Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + 2012})(y + \sqrt{y^2 + 2012})(\sqrt{y^2 + 2012} - y) = 2012(\sqrt{y^2 + 2012} - y)$	
	(Do $\sqrt{y^2 + 2012} - y \neq 0 \forall y$)	

	$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x^2 + 2012})2012 = 2012(\sqrt{y^2 + 2012} - y) \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + 2012} = \sqrt{y^2 + 2012} - y$ $\Leftrightarrow x + y = \sqrt{y^2 + 2012} - \sqrt{x^2 + 2012}$ $\Leftrightarrow x + y = \frac{(\sqrt{y^2 + 2012} - \sqrt{x^2 + 2012})(\sqrt{y^2 + 2012} + \sqrt{x^2 + 2012})}{\sqrt{y^2 + 2012} + \sqrt{x^2 + 2012}}$ $\Leftrightarrow x + y = \frac{y^2 - x^2}{\sqrt{y^2 + 2012} + \sqrt{x^2 + 2012}} \Leftrightarrow (x + y) \frac{\sqrt{y^2 + 2012} - y + \sqrt{x^2 + 2012} + y}{\sqrt{y^2 + 2012} + \sqrt{x^2 + 2012}}$	
	Do $\left. \begin{array}{l} \sqrt{y^2 + 2012} > y \geq y \forall y \\ \sqrt{x^2 + 2012} > x \geq -x \forall x \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{y^2 + 2012} - y + \sqrt{x^2 + 2012} + x > 0 \Rightarrow y = -x$	0,25
	Thay $y = -x$ vào (2) $\Rightarrow x^2 + z^2 + 4x - 4z + 8 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (z - 2)^2 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + 2)^2 = 0 \\ (z - 2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow y = -x = 2$ Vậy hệ có nghiệm $(x; y; z) = (-2; 2; 2)$.	0,25
Câu III (2,0đ)		
1) 1,0 điểm	Đặt $A = n^2 + n + 1$ do $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 3k; n = 3k + 1; n = 3k + 2 (k \in \mathbb{Z})$	0,25
	* $n = 3k \Rightarrow A$ không chia hết cho 9 (vì A không chia hết cho 3)	0,25
	* $n = 3k + 1 \Rightarrow A = 9k^2 + 9k + 3$ không chia hết cho 9.	0,25
	* $n = 3k + 2 \Rightarrow A = 9k^2 + 9k + 7$ không chia hết cho 9 Vậy với mọi số nguyên n thì $A = n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9.	0,25
2) 1,0 điểm	Gi¶ s¶ t¶n t¶i $m \in \mathbb{N}^* \text{ ® } \text{Ó ph¬ng tr¬nh c¶ nghiÖm } x_1, x_2$ Theo vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m^2 \\ x_1 x_2 = 2m + 2 \end{cases} \Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = -m^2 + 2m + 3$	0,25
	V¶i $m \in \mathbb{N}^*$. Ta c¶ $x_1 x_2 \geq 4 \forall m, x_1 + x_2 \geq 1$ mà $x_1 \text{ hoÆc } x_2$ nguyªn $\forall m, x_1 + x_2 = m^2 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq 0$ $\Leftrightarrow -m^2 + 2m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (m + 1)(m - 3) \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 3 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\}$	0,25
	V¶i $m = 1; m = 2$ thay v¶o ta th¶y ph¬ng tr¬nh ®· cho v« nghiÖm.	0,25
	V¶i $m = 3$ thay v¶o ph¬ng tr¬nh ta ®¶c nghiÖm c¶ ph¬ng tr¬nh ®· cho l¶ $x = 1; x = 8$ tho¶ m·n. V¶y $m = 3$	0,25
Câu IV (2,0đ)		
1) 1,0 điểm	Vẽ hình đúng theo yêu cầu chung của đề	0,25

		
	Gọi K là giao điểm của BO với DF $\Rightarrow \Delta IKF$ vuông tại K	0,25
	Có $\widehat{BFE} = \frac{1}{2} \widehat{BOE} = 45^\circ$	0,25
	$\Rightarrow \widehat{BIF} = 45^\circ$	0,25
2) 1,0 điểm	Khi $AM = AB$ thì ΔABM vuông cân tại A $\Rightarrow \widehat{ABH} = 45^\circ$. Có $\widehat{BFH} = 45^\circ$ $\Rightarrow$ Tứ giác BDHF nội tiếp $\Rightarrow$ 5 điểm B, D, O, H, F cùng thuộc một đường tròn. $\Rightarrow \widehat{BFO} = \widehat{BHO} = 90^\circ \Rightarrow OH \perp BM$, mà $OA \perp BM \Rightarrow A, O, H$ thẳng hàng $\widehat{BAH} = \widehat{BIH} = 45^\circ \Rightarrow$ Tứ giác ABHI nội tiếp.	0,25
3) 1,0 điểm	 Có tứ giác PNQD nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QPN} = \widehat{QDN} = \widehat{EFN}$. Tương tự có $\widehat{NQP} = \widehat{NDP} = \widehat{FEN} \Rightarrow \Delta NEF$ và ΔNQP đồng dạng $\Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{NQ}{NE} \leq 1 \Rightarrow PQ \leq EF$ Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $P \equiv F; Q \equiv E \Rightarrow DN$ là đường kính	0,25
		0,25

	của (O) => PQ lớn nhất bằng EF.	
	Cách xác định điểm M : Kẻ đường kính DN của (O), BN cắt AC tại M thì PQ lớn nhất.	0,25
Câu V (1,0đ)	Đặt $x=1+c$, $y=1+b$, $z=1+a$ do $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \Rightarrow 1 \leq z \leq y \leq x \leq 2$ Khi đó $A = (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + 3 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}$	0,25
	$\left(1 - \frac{x}{y}\right)\left(1 - \frac{y}{z}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{y} - \frac{y}{z} + \frac{x \cdot y}{y \cdot z} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} \leq \frac{x}{z} + 1$ $\left(1 - \frac{z}{y}\right)\left(1 - \frac{y}{x}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{z}{y} - \frac{y}{x} + \frac{z \cdot y}{y \cdot x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{z}{x} + 1$ $\Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{y}{x} \leq \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + 2 \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} \leq 2\left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + 2$	0,25
	Đặt $\frac{x}{z} = t \Rightarrow 1 \leq t \leq 2$ $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} = t + \frac{1}{t} = \frac{t^2 + 1}{t} = \frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} + \frac{5}{2} = \frac{(2t - 1)(t - 2)}{2t} + \frac{5}{2}$ Do $1 \leq t \leq 2 \Rightarrow \frac{(2t - 1)(t - 2)}{2t} \leq 0 \Rightarrow \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \leq \frac{5}{2}$ $\Rightarrow A \leq 3 + 2 \cdot \frac{5}{2} + 2 = 10$	0,25
	Ta thấy khi $a=b=0$ và $c=1$ thì $A=10$ nên giá trị lớn nhất của A là 10	0,25