



Chương

Bài 2. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN



Lý thuyết

1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn



Định nghĩa

- » Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mà ta phải tìm nghiệm chung của chúng.
- » Mỗi nghiệm chung đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

2. Biểu diễn nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn



Cách biểu diễn

- » Ta có thể biểu diễn hình học miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn: là giao của các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.
- » Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình ta làm như sau:
 - Trong cùng hệ tọa độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.

3. Bài toán tối ưu (Quy hoạch tuyến tính).



- » Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các biểu thức dạng $F = ax + by$, trong đó x, y nghiệm đúng của một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn đã cho:
 - Vẽ miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Miền nghiệm nhận được thường là một đa giác. (Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của F đạt được tại một trong các đỉnh của miền đa giác).
 - Tính giá trị của F ứng với (x, y) là tọa độ các đỉnh của miền đa giác này.
 - So sánh các kết quả vừa tính được từ đó suy ra giá trị lớn nhất và



Các dạng bài tập

Dạng 1. Biểu diễn miền nghiệm hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn



Phương pháp

- » Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình ta làm như sau:
 - Trong cùng hệ toạ độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách tô màu phần không thuộc miền nghiệm của nó.
 - Phần không bị tô là miền nghiệm cần tìm.



Ví dụ 1.1.

$$\begin{cases} 3x + y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình.

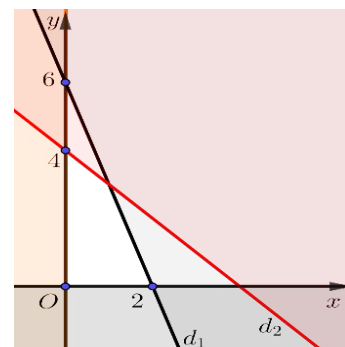
Lời giải

Vẽ các đường thẳng

$$d_1: 3x + y = 6; d_2: x + y = 4; d_3: x = 0 (Oy); d_4: y = 0 (Ox)$$

Vì điểm $M_0(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ trên nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ $(d_1), (d_2), (d_3), (d_4)$ không chứa điểm M_0 .

Miền không bị tô đậm (hình tứ giác $OCIA$ kể cả bốn cạnh AI, IC, CO, OA) trong hình vẽ là miền nghiệm của hệ đã cho.



Ví dụ 1.2.

$$\begin{cases} 3x - y + 3 > 0 \\ -2x + 3y - 6 < 0 \\ 2x + y + 4 > 0 \end{cases}$$

Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình.

Lời giải

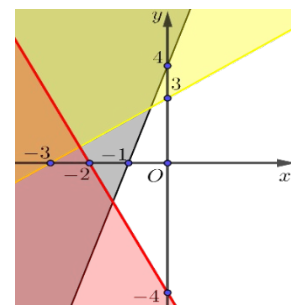
Vẽ đường thẳng:

$$3x - y + 3 = 0 (d_1);$$

$$-2x + 3y - 6 = 0 (d_2);$$

$$2x + y + 4 = 0 (d_3)$$

Sau khi tô màu các miền không thích hợp, miền còn lại không tô màu, không kể biên (hình vẽ) là miền nghiệm của hệ





Ví dụ 1.3.

Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình 2 ẩn

$$(1) \begin{cases} x - 3y < 0 \\ x + 2y > -3 \\ y + x < 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 3x - 2y - 6 \geq 0 \\ 4(x - 1) + 3y \leq 8 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Lời giải

$$(1) \begin{cases} x - 3y < 0 & (1) \\ x + 2y > -3 & (2) \\ y + x < 2 & (3) \end{cases}$$

Vẽ các đường thẳng

$$d_1: x - 3y = 0; d_2: x + 2y + 3 = 0; d_3: x + y - 2 = 0$$

Lấy $M(-1; 0) \notin d_1; d_2; d_3$

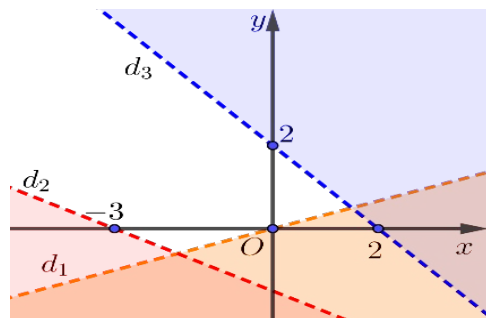
Ta thấy

$M(-1; 0)$ là nghiệm của bất phương trình (1), nên tô màu miền không chứa M .

$M(-1; 0)$ là nghiệm của bất phương trình (2), nên tô màu miền không chứa M .

$M(-1; 0)$ là nghiệm của bất phương trình (3), nên tô màu miền không chứa M .

Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không tô màu (không kể bờ $d_1; d_2; d_3$).



$$(2) \begin{cases} 3x - 2y - 6 \geq 0 & (1) \\ 4(x - 1) + 3y \leq 8 & (2) \\ x \geq 0 & (3) \end{cases}$$

Vẽ các đường thẳng

$$d_1: 3x - 2y - 6 = 0; d_2: 4(x - 1) + 3y - 8 = 0; d_3: x = 0$$

Lấy $M(3; -2) \notin d_1; d_2; d_3$

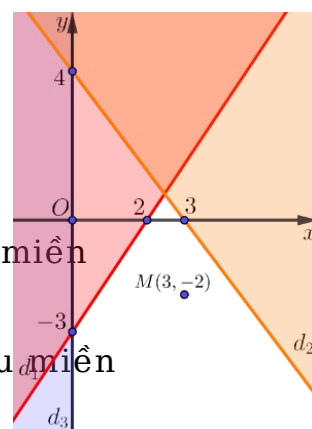
Ta thấy

$M(3; -2)$ là nghiệm của bất phương trình (1), nên tô màu miền không chứa M .

$M(3; -2)$ là nghiệm của bất phương trình (2), nên tô màu miền không chứa M .

$M(3; -2)$ là nghiệm của bất phương trình (3), nên tô màu miền không chứa M .

thẳng





Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu (kể bờ $d_1; d_2; d_3$).



Ví dụ 1.4.

Xác định miền nghiệm của các hệ bất phương trình 2 ẩn

$$(1) \begin{cases} 2x + y \geq 1 \\ x - y \leq -2 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x + y \geq 0 \\ x + 3y \leq -3 \\ x - y \geq 5 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 > 0 \\ 4(x - 1) + y < 8 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 4x + 5y + 20 > 0 \\ y < 0 \\ y > -3 \end{cases}$$

Lời giải

$$(1) \begin{cases} 2x + y \geq 1 \quad (1) \\ x - y \leq -2 \quad (2) \end{cases}$$

Vẽ các đường thẳng $d_1: 2x + y - 1 = 0; d_2: x - y + 2 = 0$.

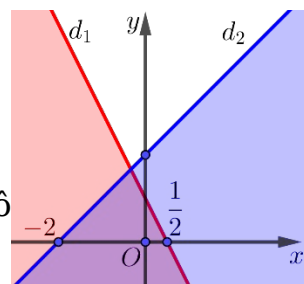
Lấy $O(0;0) \notin d_1; d_2$.

Ta thấy

$O(0;0)$ không là nghiệm của bất phương trình (1), nên tô màu miền chứa O .

$O(0;0)$ không là nghiệm của bất phương trình (2), nên tô màu miền chứa O .

Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu (kể bờ $d_1; d_2$).



$$(2) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 > 0 \quad (1) \\ 4(x - 1) + y < 8 \quad (2) \end{cases}$$

Vẽ các đường thẳng $d_1: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} - 1 = 0; d_2: 4(x - 1) + y - 8 = 0$.

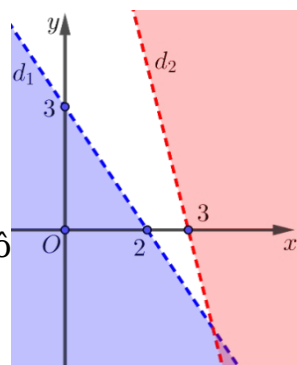
Lấy $O(0;0) \notin d_1; d_2$.

Ta thấy

$O(0;0)$ không là nghiệm của bất phương trình (1), nên tô màu miền chứa O .

$O(0;0)$ là nghiệm của bất phương trình (2), nên tô màu miền không chứa O .

Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu (không kể bờ $d_1; d_2$).





$$(3) \begin{cases} x+y \geq 0 & (1) \\ x+3y \leq -3 & (2) \\ x-y \geq 5 & (3) \end{cases}$$

Vẽ các đường
 $d_1: x+y=0; d_2: x+3y+3=0; d_3: x-y-5=0$.

Lấy $M(1;1) \notin d_1; d_2; d_3$.

Ta thấy

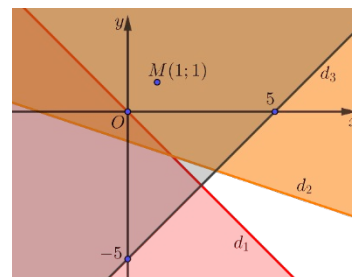
$M(1;1)$ là nghiệm của bất phương trình (1) , nên tô màu miền không chứa M .

$M(1;1)$ không là nghiệm của bất phương trình (2) , nên tô màu miền chứa M .

$M(1;1)$ không là nghiệm của bất phương trình (3) , nên tô màu miền chứa M .

Vậy miền nghiệm cần tìm là phần mặt phẳng không được tô màu (kể bờ $d_1; d_2; d_3$).

thẳng



$$(4) \begin{cases} 4x+5y+20 > 0 & (1) \\ y < 0 & (2) \\ y > -3 & (3) \end{cases}$$

Vẽ các đường thẳng $d_1: 4x+5y+20=0; d_2: y=0; d_3: y+3=0$.

Lấy $M(-1;-1) \notin d_1; d_2; d_3$.

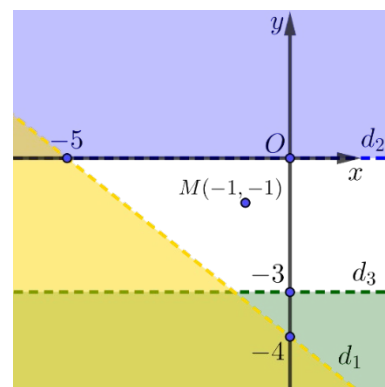
Ta thấy

$M(-1;-1)$ là nghiệm của bất phương trình (1) , nên tô màu miền không chứa M .

$M(-1;-1)$ là nghiệm của bất phương trình (2) , nên tô màu miền không chứa M .

$M(-1;-1)$ là nghiệm của bất phương trình (3) , nên tô màu miền không chứa M .

Vậy miền nghiệm cần tìm là phần không được tô màu (không kể bờ $d_1; d_2; d_3$).





▮ Dạng 2. Giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất, bài toán tối ưu



Phương

► Bài toán:

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T(x,y) = ax + by$ với (x,y) nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho trước.

» **Bước (1):** Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Kết quả thường được miền nghiệm S là đa giác.

» **Bước (2):** Tính giá trị của F tương ứng với (x,y) là tọa độ của các đỉnh của đa giác.

» **Bước (3):** Kết luận:



Ví dụ 2.1.

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của

(1) $T = 2x + y$ với (x,y) là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x - y - 3 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ x + 3y - 3 \leq 0 \end{cases}$$

(2) $F = 30x - 4y - 6$ với (x,y) là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x - y + 5 \geq 0 \\ 2x + y + 4 \geq 0 \\ x + y - 5 \leq 0 \\ 2x - y - 4 \leq 0 \end{cases}$$

Lời giải

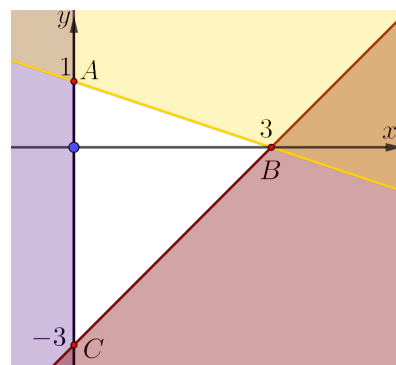
(1) $T = 2x + y$ với (x,y) là nghiệm của hệ bất phương trình

$$\begin{cases} x - y - 3 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ x + 3y - 3 \leq 0 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) là miền tam giác ABC kể cả bờ, với $A(3;0), B(0;1), C(0;-3)$

$$T(3;0) = 6; \quad T(0;1) = 1; \quad T(0;-3) = -3$$

Vậy GTLN là $T = 6$ và GTNN là $T = -3$



$$\begin{cases} x - y - 3 \leq 0 \\ x \geq 0 \\ x + 3y - 3 \leq 0 \end{cases}, (1)$$



(2) $F=30x-4y-6$ với $(x;y)$ là nghiệm của hệ bất phương trình

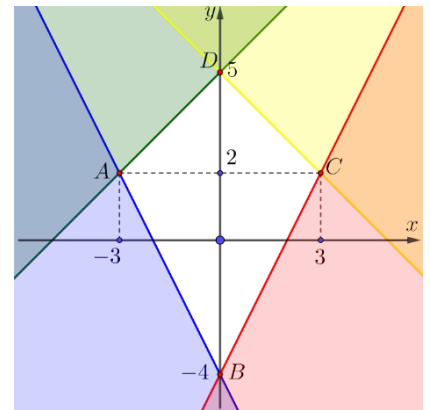
$$\begin{cases} x-y+5 \geq 0 \\ 2x+y+4 \geq 0 \\ x+y-5 \leq 0 \\ 2x-y-4 \leq 0 \end{cases}$$

Miền nghiệm của hệ bất phương trình

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) là miền tứ giác ABCD kể cả bờ, với $A(-3;2), B(0;-4), C(3;2), D(0;5)$

$$F(-3;2)=-104; F(0;-4)=-10; F(3;2)=66; F(0;5)=-26$$

Vậy GTLN là $F=66$ và GTNN là $F=-104$



Ví dụ 2.2.

Tìm trị lớn nhất của biểu thức

(1) $F(x;y)=x+2y$, với điều kiện

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x-y-1 \leq 0 \\ x+2y-10 \leq 0 \end{cases}$$

(2) $F(x;y)=2x-3y$, với điều kiện

$$\begin{cases} y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ x+y-3 \leq 0 \\ x+2y-4 \leq 0 \end{cases}$$

Lời giải

(1) $F(x;y)=x+2y$, với điều kiện $\begin{cases} 0 \leq y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ x-y-1 \leq 0 \\ x+2y-10 \leq 0 \end{cases}$

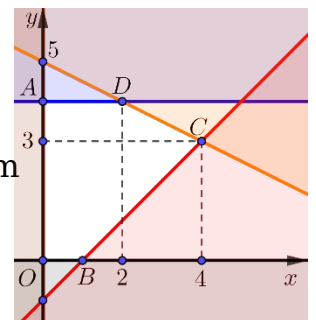
Vẽ đường thẳng $d_1: x-y-1=0$, đường thẳng d_1 qua hai điểm $(0;-1)$ và $(1;0)$.

Vẽ đường thẳng $d_2: x+2y-10=0$, đường thẳng d_2 qua hai điểm $(0;5)$ và $(2;4)$.

Vẽ đường thẳng $d_3: y=4$.

Miền nghiệm là ngũ giác AOBCE với $A(0;4), B(1;0), C(4;3), E(2;4)$

Ta có: $F(4;3)=10, F(2;4)=10, F(0;4)=8, F(1;0)=1, F(0;0)=0$

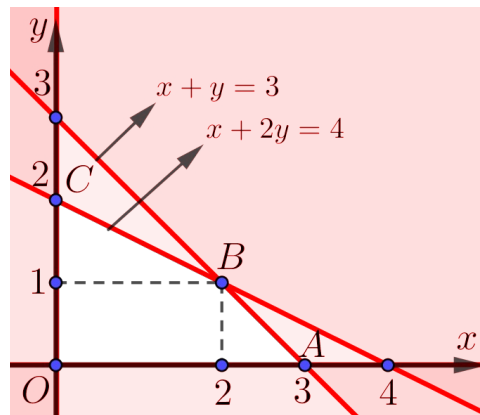




Vậy giá trị lớn nhất của biết thức $F(x; y) = x + 2y$ bằng 10.

(2) $F(x; y) = 2x - 3y$, với điều kiện

$$\begin{cases} y \leq 0 \\ x \geq 0 \\ x + y - 3 \leq 0 \\ x + 2y - 4 \leq 0 \end{cases}$$



Vẽ đường thẳng $d_1: x + y - 3 = 0$, đường thẳng d_1 qua hai điểm $(0;3)$ và $(3;0)$.

Vẽ đường thẳng $d_2: x + 2y - 4 = 0$, đường thẳng d_2 qua hai điểm $(0;2)$ và $(4;0)$.

Miền nghiệm là tứ giác $OCBA$ với $O(0;0), C(0;2), B(2;1), A(3;0)$.

Ta có: $F(0;0) = 0$, $F(0;2) = -6$, $F(2;1) = 1$, $F(3;0) = 6$.

Vậy giá trị lớn nhất của biết thức $F(x; y) = 2x - 3y$ bằng 6.



Ví dụ 2.3.

$$\begin{cases} x - 2y \geq 0 \\ x + 3y \geq -2 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

Cho hệ bất phương trình (S) . Xác định miền nghiệm (S) của hệ bất phương trình trên. Trong (S) tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x, y) = 2x - 3y$.

Lời giải

Miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là phần không tô đậm trong hình vẽ (cả biên).

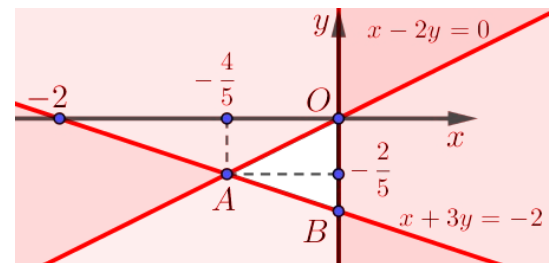
Như vậy miền nghiệm là $DABC$ (cả biên).

Toạ độ A là nghiệm của:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + 3y = -2 \end{cases} \Rightarrow A\left(-\frac{4}{5}; -\frac{2}{5}\right).$$

Toạ độ B là nghiệm của: $\begin{cases} x = 0 \\ x + 3y = -2 \end{cases} \Rightarrow B\left(0; -\frac{2}{3}\right).$

Ta sẽ tính các giá trị của $f(x, y)$ với là toạ độ của các đỉnh A, B, O .





$$f\left(-\frac{4}{5}; -\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5}; \quad f(0;0) = 0; \quad f\left(0; -\frac{2}{3}\right) = 2$$

Suy ra giá trị lớn nhất của $f(x,y)$ bằng 2 khi $(x;y) = \left(0; -\frac{2}{3}\right)$.

Vậy giá trị lớn nhất của $f(x,y) = 2x - 3y$ trên miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho bằng 2 khi $(x;y) = \left(0; -\frac{2}{3}\right)$.



Ví dụ 2.4.

Có 3 nhóm máy A, B, C dùng để sản xuất ra 2 loại sản phẩm I và II . Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc nhóm máy khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng bên dưới:

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất một đơn vị SP	
		Loại I	Loại II
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Một đơn vị sản phẩm I lãi 3000 đồng, một đơn vị sản phẩm II lãi 5000 đồng. Hãy lập phương án sản xuất hai loại sản phẩm trên sao cho có lãi cao nhất.

Lời giải

Gọi x và y lần lượt là số đơn vị sản phẩm I và II ($x, y \geq 0$).

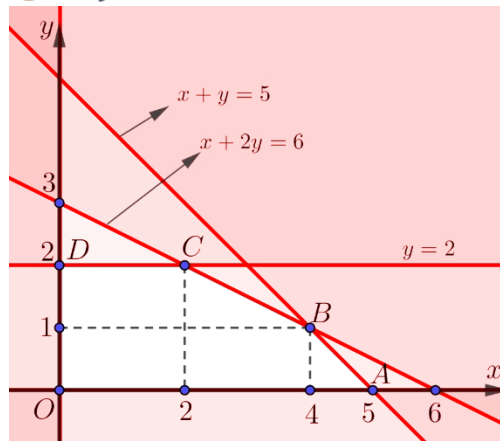
Số tiền lãi của đơn vị này là $f(x;y) = 3x + y$ (nghìn đồng).

$$\begin{cases} 2x + 2y \leq 10 \\ 2y \leq 4 \\ 2x + 4y \leq 12 \\ x, y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 5 \\ y \leq 2 \\ x + 2y \leq 6 \\ x, y \geq 0 \end{cases} (*)$$

Ta có hệ bất phương trình:

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $f(x;y) = 3x + y$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Miền nghiệm của hệ (*) là ngũ giác $OABCD$ (kể cả biên).



Ta có: $O(0;0), A(5;0), B(4;1), C(2;2), D(0;2)$

$$f(0;0)=0, f(5;0)=150, f(4;1)=190, f(2;2)=160, f(0;2)=100$$

Để thấy $f(x;y)=3x+y$ lớn nhất khi $(x;y)=(4;1)$ tức là cần sản xuất 4 sản phẩm I và 1 sản phẩm II để thu về lợi nhuận cao nhất.



Ví dụ 2.5.

Một xưởng cơ khí có hai công nhân là Chiến và Bình. Xưởng sản xuất loại sản phẩm I và II. Mỗi sản phẩm I bán lãi 500 nghìn đồng, mỗi sản phẩm II bán lãi 400 nghìn đồng. Để sản xuất được một sản phẩm I thì Chiến phải làm việc trong 3 giờ, Bình phải làm việc trong 1 giờ. Để sản xuất được một sản phẩm II thì Chiến phải làm việc trong 2 giờ, Bình phải làm việc trong 6 giờ. Một người không thể làm được đồng thời hai sản phẩm. Biết rằng trong một tháng Chiến không thể làm việc quá 180 giờ và Bình không thể làm việc quá 220 giờ.

Lời giải

Gọi x, y lần lượt là số sản phẩm loại I và loại II được sản xuất ra. Điều kiện x, y nguyên dương.

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 180 \\ x + 6y \leq 220 \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Ta có hệ bất phương trình sau:

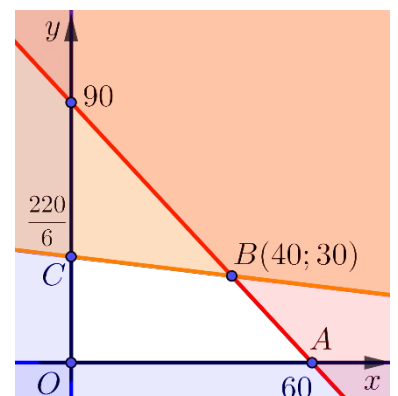
Tiền lãi trong một tháng của xưởng là $T = 0,5x + 0,4y$ (triệu đồng).

Ta thấy T đạt giá trị lớn nhất chỉ có thể tại các điểm A, B, C . Vì C có tọa độ không nguyên nên loại.

Tại $A(60;0)$ thì $T=30$ triệu đồng.

Tại $B(40;30)$ thì $T=32$ triệu đồng.

Vậy tiền lãi lớn nhất trong một tháng của xưởng là 32 triệu đồng.





Ví dụ 2.6.

Một hộ nông dân định trồng đậu và cà trên diện tích 800 m^2 . Nếu trồng đậu thì cần 20 công và thu $3.000.000$ đồng trên 100 m^2 nếu trồng cà thì cần 30 công và thu $4.000.000$ đồng trên 100 m^2 . Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên diện tích là bao nhiêu để thu được nhiều tiền nhất khi tổng số công không quá 180 .

Lời giải

Gọi x là số 100 m^2 đất trồng đậu, y là số 100 m^2 đất trồng cà. Điều kiện $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Số tiền thu được là $T = 3x + 4y$ triệu đồng.

$$\begin{cases} x + y \leq 8 \\ 20x + 30y \leq 180 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \leq 8 \\ 2x + 3y \leq 18 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Theo bài ra ta có

Dựa đồ thị ta có tọa độ các đỉnh $A(0;6)$, $B(6;2)$, $C(8;0)$, $O(0;0)$.

