

Câu 1. (6 điểm)

a) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 + 9x + 20} + \frac{1}{x^2 + 11x + 30} + \frac{1}{x^2 + 13x + 42} = \frac{1}{18}$

b) Cho a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$$

Câu 2. (5 điểm)

a) Chứng minh rằng nếu tổng của hai số nguyên chia hết cho 3 thì tổng các lập phương của chúng chia hết cho 9

b) Tìm các số nguyên n để $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

Câu 3. (3 điểm)

a) Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

b) Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính $a^{2011} + b^{2011}$

Câu 4. (6 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi M là một điểm di động trên AC. Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với tia BM cắt tia BM tại H, cắt tia BA tại O. Chứng minh rằng:

a) $OA.OB = OC.OH$

b) $\angle H$ có số đo không đổi

c) Tổng $BM.BH + CM.CA$ không đổi

ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) ĐKXD: $x \neq -4; x \neq -5; x \neq -6; x \neq -7$

Phương trình trở thành:

$$\frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18}$$

$$\Leftrightarrow 18(x+7) - 18(x+4) = (x+7)(x+4)$$

$$\Leftrightarrow (x+13)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ x = 2 \end{cases}$$

b) Đặt $b+c-a=x>0$; $c+a-b=y>0$; $a+b-c=z>0$

Từ đó suy ra $a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+z}{2}; c = \frac{x+y}{2}$

Thay vào ta được:

$$A = \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) \right]$$

Từ đó suy ra $A \geq \frac{1}{2}(2+2+2)$ hay $A \geq 3 \Leftrightarrow a=b=c$

Câu 2.

a) Gọi 2 số phải tìm là a và b , ta có $a+b$ chia hết cho 3

Ta có: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)[(a+b)^2 - 3ab]$

Vì $a+b$ chia hết cho 3 nên $(a+b)^2 - 3ab$ chia hết cho 3.

Do vậy, $(a+b)\left[(a+b)^2 - 3ab\right]$ chia hết cho 9

b)

$$n^5 + 1 : (n^3 + 1) \Leftrightarrow (n^5 + n^2 - n^2 + 1) : (n^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) : (n^3 + 1)$$

$$\Leftrightarrow (n - 1)(n + 1) : (n + 1)(n^2 - n + 1)$$

$$\Leftrightarrow n - 1 : n^2 - n + 1$$

$$\Rightarrow n(n - 1) : n^2 - n + 1$$

$$n^2 - n : n^2 - n + 1 \Rightarrow (n^2 - n + 1) - 1 : (n^2 - n + 1)$$

$$\text{Hay } \Rightarrow 1 : n^2 - n + 1$$

Xét hai trường hợp:

$$+) n^2 - n + 1 = 1 \Leftrightarrow n^2 - n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \end{cases}$$

$$+) n^2 - n + 1 = -1 \Leftrightarrow n^2 - n + 2 = 0, \text{ không có giá trị của } n \text{ thỏa mãn}$$

Câu 3.

$$a + b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\ \frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \\ \frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \end{cases}$$

a. Từ

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

$$\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$$

Dấu “=” xảy ra

b) $(a^{2001} + b^{2001})(a + b) - (a^{2000} + b^{2000})ab = a^{2002} + b^{2002}$

$$\Rightarrow (a+b) - ab = 1$$

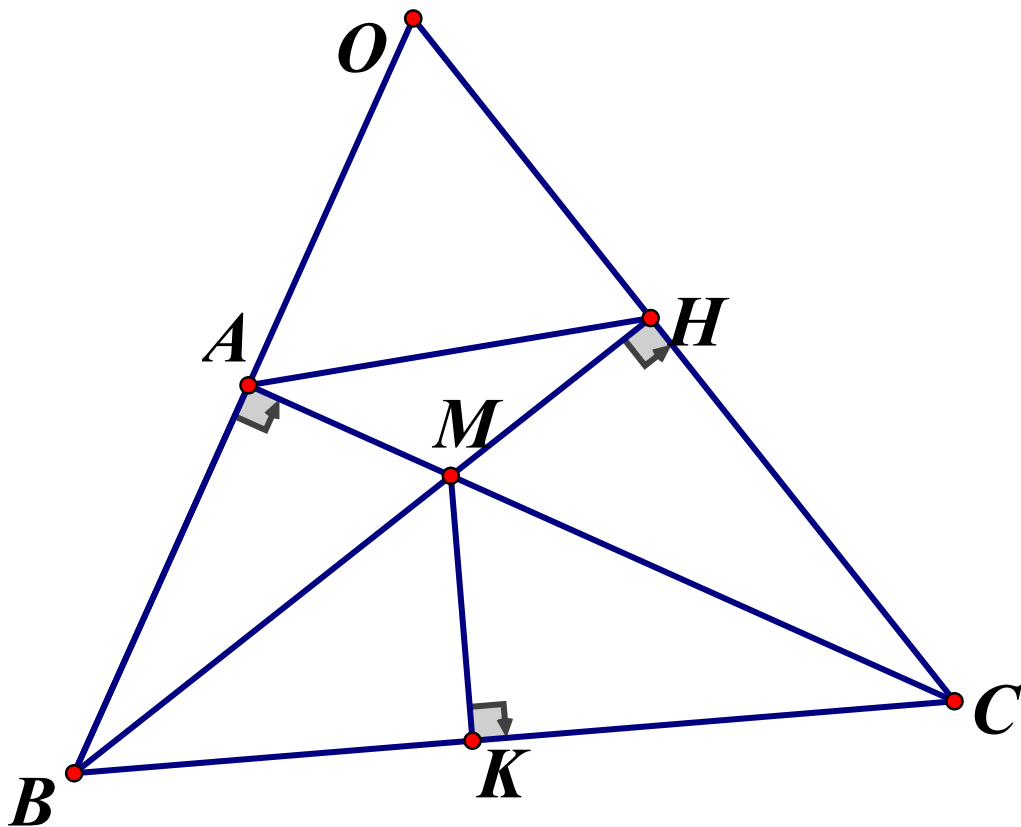
$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

Với $a=1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b=1(tm) \\ b=0(ktm) \end{cases}$

Với $b=1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a=1(tm) \\ a=0(ktm) \end{cases}$

Vậy $a=1; b=1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$

Câu 4.



a) $\triangle BOH \sim \triangle COA (g.g) \Rightarrow \frac{OB}{OC} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow OA \cdot OB = OH \cdot OC$

$$\text{b) } \frac{OB}{OC} = \frac{OH}{OA} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OH}{OB} \text{ và } \angle \text{ chung} \Rightarrow \triangle OHA \sim \triangle OBC$$

$$\Rightarrow \angle OHA = \angle OBC \text{ (không đối)}$$

$$\text{c) Vẽ } MK \perp BC; \triangle BKM \sim \triangle BHC (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{BK}{BH} \Rightarrow BM \cdot BH = BK \cdot BC \quad (3)$$

$$\triangle CKM \sim \triangle CAB (g.g) \Rightarrow \frac{CM}{CB} = \frac{CK}{CA} \Rightarrow CM \cdot CA = BC \cdot CK \quad (4)$$

Cộng từng vế của (3) và (4) ta có:

$$BM \cdot BH + CM \cdot CA = BK \cdot BC + BC \cdot CK = BC \cdot (BK + KC) = BC^2 \text{ (Không đổi)}$$