

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 26. TÌM HÌNH CHIẾU VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN.

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Hình chiếu vuông góc của một điểm đến một mặt phẳng

- Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ thì hình chiếu vuông góc H của M trên mặt phẳng (P) là giao điểm của đường thẳng Δ và mặt phẳng (P)
- Δ là đường thẳng qua M và vuông góc với (P) (Δ nhận $\vec{n}_p$ làm $\vec{u}_\Delta$)

2. Hình chiếu vuông góc của một điểm đến một đường thẳng

- Cho điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ và đường thẳng $d: \frac{x-x_N}{a} = \frac{y-y_N}{b} = \frac{z-z_N}{c}$ thì hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d là điểm H thuộc d sao cho $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}_d \Leftrightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_d = 0$

3. Hình chiếu vuông góc của một đường thẳng đến một mặt phẳng

- Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) . Hình chiếu vuông góc của đường thẳng d đến mặt phẳng (P) là giao điểm của mặt phẳng (α) và mặt phẳng (P)
- (α) là mặt phẳng đi chứa d và vuông góc với (P)
- (α) nhận $\vec{u}_d$ và $\vec{n}_p$ là cặp vectơ chỉ phương
- (α) chứa mọi điểm nằm trong đường thẳng d

4. Lệnh Caso

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử Sở GD-ĐT tỉnh Hà Tĩnh lần 1 năm 2017]

Cho mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + z + 6 = 0$ và điểm $A(2; -1; 0)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (α) có tọa độ

A. $(2; -2; 3)$ B. $(1; 1; -2)$ C. $(1; 0; 3)$ D. $(-1; 1; -1)$

GIẢI

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên $(\alpha) \Rightarrow$ Đường thẳng AH song song với vectơ pháp

$$\text{tuyến } \vec{n}_\alpha(3; -2; 1) \text{ của } (\alpha) \Rightarrow (AH): \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = t \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Tọa độ điểm } A(2 + 3t; -1 - 2t; 1 + t)$$

(Phần này ta dễ dàng nhầm được mà không cần nháp)

- Để tìm t ta chỉ cần thiết lập điều kiện A thuộc (α) là xong

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

3 **(** **2** **+** **3** **ALPHA** **)** **)** **-** **2** **(** **-** **1** **-** **2** **ALPHA** **)** **)** **+** **ALPHA** **)**
+ **6** **SHIFT** **CALC** **1** **=**

$$3(2+3X)-2(-1-2X) \\ X= \\ L-R=$$

$$\Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1; 1; -1)$$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD2-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Tìm tọa độ của điểm M' đối xứng với điểm $M(3; 3; 3)$ qua mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$

- A. $M'(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ B. $M'(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$
 C. $M'(-\frac{7}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{7}{3})$ D. $M'(\frac{7}{3}; \frac{7}{3}; \frac{7}{3})$

GIẢI

- Tương tự ví dụ 1 ta nhẩm được tọa độ hình chiếu vuông góc H của M lên (P) là

$$M(3+t; 3+t; 3+t)$$

- Tính t bằng Casio.

3 **+** **ALPHA** **)** **+** **3** **+** **ALPHA** **)** **+** **3** **+** **ALPHA** **)** **-** **1** **SHIFT** **CALC** **1** **=**
 $3+X+3+X+3+X-1 \\ X= \\ L-R=$

$$\text{Ta thu được } t = -\frac{8}{3} \Rightarrow H(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$$

- Vì A' đối xứng với M qua H nên H là trung điểm của MM' . Theo quy tắc trung điểm ta suy ra được $M'(-\frac{7}{3}; -\frac{7}{3}; -\frac{7}{3})$.

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

VD3-[Thi thử THPT Quảng Xương – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$ và điểm

$M(1; 2; -3)$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm M lên đường thẳng d là:

- A. $H(1; 2; -1)$ B. $H(1; -2; -1)$ C. $H(-1; -2; -1)$ D. $H(1; 2; 1)$

GIẢI

- Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d .

$$\text{Đường thẳng } d \text{ có phương trình tham số } \begin{cases} x = 3+t \\ y = -1+t \\ z = 1+2t \end{cases} \Rightarrow \text{Tọa độ } H(3+2t; -1+t; 1+2t)$$

$$MH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_d = 0 \text{ với } \vec{u}_d(2; 1; 2)$$

- Sử dụng máy tính Casio bấm:

2 **(** **3** **+** **2** **ALPHA** **)** **-** **1** **)** **+** **(** **-** **1** **+** **ALPHA** **)** **-** **2** **)** **+**
2 **(** **1** **+** **2** **ALPHA** **)** **-** **-** **3** **)** **SHIFT** **CALC** **1** **=**

$$2(3+2x-1)+(-1+x) = -1$$

$$x = -1$$

$$L-R = 0$$

Khi đó $t = -1 \Rightarrow H(1; -2; -1)$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

VD4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ và điểm $A(2; -1; 1)$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của A lên d . Viết phương trình mặt cầu (C) có tâm I và đi qua A

A. $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 20$

B. $x^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 5$

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 20$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 14$

GIẢI

➤ Điểm I có tọa độ $I(1-t; 2+t; -1+t)$

➤ Thiết lập điều kiện vuông góc $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0$

$$-1(1-x-2) + (2+x-1) = 0$$

$$x = 0$$

$$L-R = 0$$

$$-1(1-x-2) + (2+x-1) = 0$$

$$x = 0$$

$$L-R = 0$$

$\Rightarrow t = 0 \Rightarrow I(1; 2; -1)$

➤ Với $I(1; 2; -1)$ và $A(2; -1; 1)$ ta có: $R^2 = IA^2 = |\overrightarrow{IA}|^2 = 14$

$$R^2 = IA^2 = |\overrightarrow{IA}|^2 = 14$$

Ans2

14

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD5-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$. Hình chiếu vuông góc của d lên mặt phẳng (Oxy) là:

A. $\begin{cases} x=0 \\ y=-1-t \\ z=0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$

GIẢI

➤ Ta hiểu: Hình chiếu vuông góc d' của d lên mặt phẳng (Oxy) là giao tuyến của mặt phẳng (α) chứa d vuông góc với (Oxy) và mặt phẳng (Oxy)

➤ Mặt phẳng (α) chứa d và vuông góc với (Oxy) nên nhận vecto chỉ phương $\vec{u}(2; 1; 1)$ của đường thẳng d và vecto pháp tuyến $\vec{n}_{Oxy}(0; 0; 1)$ là cặp vecto chỉ phương

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d; \vec{n}_{Oxy}] = (1; -2; 0)$$

MODE 8 1 1 2 = 1 = 1 = MODE 8 2 1 0 = 0 = 1 = ON
SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans 1 -2 0]

1

Hơn nữa (α) đi qua điểm có tọa độ $(1; -1; 2)$ nên có phương trình :

$$(\alpha): 1(x-1) - 2(y+1) + 0(z-2) = 0 \Leftrightarrow (\alpha): x - 2y - 3 = 0$$

- Phương trình của d' có dạng $\begin{cases} (\alpha): x - 2y - 3 = 0 \\ (Oxy): z = 0 \end{cases}$. Chuyển sang dạng tham số ta có :

$$\vec{u}_{d'} = [\vec{n}_{Oxy}; \vec{n}_\alpha] = (-2; -1; 0)$$

MODE 8 1 1 1 = - 2 = 0 = MODE 8 2 1 0 = 0 = 1 = ON
SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans -2 -1 0]

-2

Có 3 đáp án thỏa mãn vecto chỉ phương có tọa độ $(-2; -1; 0)$ là **B**, **C**, **D**

Tuy nhiên chỉ có đáp án **B** chứa điểm $M(1; -1; 0)$ và điểm này cũng thuộc d'

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

VD6-[Câu 61 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng $d: \begin{cases} x = \frac{7}{2} + 3t \\ y = -2t \\ z = -2t \end{cases}$ trên

$$(\alpha): x + 2y - 2z - 2 = 0$$

$$\text{A. } \frac{x-5}{-4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1}$$

$$\text{B. } \frac{x+5}{-4} = \frac{y-\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1}$$

$$\text{C. } 2 \frac{x-5}{4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1} \quad \text{D. } \frac{x+5}{4} = \frac{y-\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1}$$

GIẢI

- Lập phương trình mặt phẳng (β) chứa d và vuông góc với (α)

$$\vec{n}_\beta = [\vec{u}_d; \vec{n}_\alpha] = (8; 4; 8)$$

MODE 8 1 1 3 = - 2 = - 2 = MODE 8 2 1 1 = 2 = -
2 = ON SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans 8 4 8]

8

(β) đi qua điểm $\left(\frac{7}{2}; 0; 0\right)$ nên có phương trình $8\left(x - \frac{7}{2}\right) + 8y + 8z = 0 \Leftrightarrow 2x + 2y + 2z - 7 = 0$

➤ Ta có $d': \begin{cases} 2x + 2y + 2z - 7 = 0 \\ x + 2y - 2z - 2 = 0 \end{cases}$

Tính $\vec{n}_{d'} = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta] = (-8; 6; 2) \Rightarrow \vec{n}(-4; 3; 2)$ cũng là vectơ chỉ phương của d'

Đường thẳng d' lại đi qua điểm $\left(5; -\frac{3}{2}; 0\right)$ nên có phương trình: $\frac{x-5}{-4} = \frac{y+\frac{3}{2}}{2} = \frac{z}{1}$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **A**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử THPT Phạm Văn Đồng lần 1 năm 2017]

Hình chiếu vuông góc của $A(-2; 4; 3)$ lên mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 6z + 19 = 0$ có tọa độ là :

A. $(1; -1; 2)$ B. $\left(-\frac{20}{7}; \frac{37}{7}; \frac{3}{7}\right)$ C. $\left(-\frac{2}{5}; \frac{37}{5}; \frac{31}{5}\right)$ D. Kết quả khác

Bài 2-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxy cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 4 = 0$ và điểm $M(1; -2; -2)$

.Tìm tọa độ điểm N đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (P)

A. $N(3; 4; 8)$ B. $N(3; 0; -4)$ C. $N(3; 0; 8)$ D. $N(3; 4; -4)$

Bài 3-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

Cho $A(5; 1; 3), B(-5; 1; -1), C(1; -3; 0), D(3; -6; 2)$. Tọa độ của điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (BCD) là :

A. $(-1; 7; 5)$ B. $(1; 7; 5)$ C. $(1; -7; -5)$ D. $(1; -7; 5)$

Bài 4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng

$(P): -x + y + 2z + 3 = 0$. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) .

A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-3}$ B. $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$
C. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$ D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-3}$

Bài 5-[Câu 75 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho ba điểm $A(-1; 3; 2), B(4; 0; -3), C(5; -1; 4)$. Tìm tọa độ hình chiếu H của A lên đường thẳng BC

A. $\left(\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; \frac{12}{17}\right)$ B. $\left(\frac{77}{17}; \frac{9}{17}; \frac{12}{17}\right)$ C. $\left(\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; -\frac{12}{17}\right)$ D. $\left(-\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; -\frac{12}{17}\right)$

Bài 6-[Câu 76 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tìm tọa độ điểm đối xứng của $M(-3; 1; -1)$ qua đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng

$(\alpha): 4x - 3y - 13 = 0$ và $(\beta): y - 2z + 5 = 0$

A. $(-2; -5; -3)$ B. $(2; -5; 3)$ C. $(5; -7; -3)$ D. $(5; -7; 3)$

Bài 7-[Câu 22 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng tọa độ

(Oxy) là :

A. $\begin{cases} x=0 \\ y=-1-t \\ z=0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=1+t \\ z=0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-1+t \\ z=0 \end{cases}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử THPT Phạm Văn Đồng lần 1 năm 2017]

Hình chiếu vuông góc của $A(-2; 4; 3)$ lên mặt phẳng $(P): 2x - 3y + 6z + 19 = 0$ có tọa độ là :

A. $(1; -1; 2)$ B. $\left(-\frac{20}{7}; \frac{37}{7}; \frac{3}{7}\right)$ C. $\left(-\frac{2}{5}; \frac{37}{5}; \frac{31}{5}\right)$ D. Kết quả khác

GIẢI

▪ Đường thẳng Δ chứa A và vuông góc với (P) có phương trình : $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = 3 + 6t \end{cases}$

Điểm H là hình chiếu vuông góc của A lên (P) nên có tọa độ $H(-2 + 2t; 4 - 3t; 3 + 6t)$

▪ Tính t bằng Casio

▪ $\boxed{2} \boxed{(} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{+} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{3} \boxed{(} \boxed{4} \boxed{-} \boxed{3} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{6} \boxed{(} \boxed{3} \boxed{+} \boxed{6} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{+} \boxed{1} \boxed{9} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{1} \boxed{=}$

$2(-2+2X)-3(4-3X)+6(3+6X)=0$
 $X = -0.428571428$
 $L-R = 0$

Chuyển t về dạng phân thức

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{RCL}} \boxed{(} \boxed{=}$ Math ▲

Ans→A

$-\frac{3}{7}$

Vậy $t = -\frac{3}{7} \Rightarrow H\left(-\frac{20}{7}; \frac{37}{7}; \frac{3}{7}\right)$

Vậy đáp số chính xác là B

Bài 2-[Thi Học sinh giỏi tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ Oxy cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 4 = 0$ và điểm $M(1; -2; -2)$

.Tìm tọa độ điểm N đối xứng với điểm M qua mặt phẳng (P)

A. $N(3; 4; 8)$ B. $N(3; 0; -4)$ C. $N(3; 0; 8)$ D. $N(3; 4; -4)$

GIẢI

▪ Phương trình $\Delta: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 + t \\ z = -2 - t \end{cases} \Rightarrow$ Tọa độ hình chiếu $H(1 + t; -2 + t; -2 - t)$

▪ Tìm t bằng Casio ta được $t = 1$

$\boxed{1} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{+} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{(} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{-} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{4} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{1} \boxed{=}$

$$1+x-2+x-(-2-x)-4$$

$$x=1$$

$$L-R=0$$

Với $t=1 \Rightarrow H(2; -1; -3) \Rightarrow N(3; 0; -4)$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

Bài 3-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

Cho $A(5; 1; 3), B(-5; 1; -1), C(1; -3; 0), D(3; -6; 2)$. Tọa độ của điểm A' đối xứng với A qua mặt phẳng (BCD) là :

- A. $(-1; 7; 5)$ B. $(1; 7; 5)$ C. $(1; -7; -5)$ D. $(1; -7; 5)$

GIẢI

- Tính vectơ chỉ phương của $(BCD) : \vec{u} = [\vec{BC}; \vec{BD}] = (-5; -10; -10)$

MODE 8 1 1 1 - - 5 = - 3 - 1 = 0 - - 1 = MODE 8 2 1 3 - - 5 = - 6 - 1 = 2 - - 1 = ON SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans -5 -10 -10

-5

(BCD) qua $B(-5; 1; -1) \Rightarrow (BCD) : -5(x+5) - 10(y-1) - 10(z+1) = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y + 2z + 5 = 0$

- Gọi H là hình chiếu của A lên $(BCD) \Rightarrow H(5+t; 1+2t; 3+2t)$. Tính t

MODE 1 5 + ALPHA) + 2 (1 + 2 ALPHA)) + 2 (3 + 2 ALPHA)) + 5 SHIFT CALC 1 =

$$5+x+2(1+2x)+2(3+2x)$$

$$x=-2$$

$$L-R=0$$

$\Rightarrow t = -2 \Rightarrow H(3; -3; -1) \Rightarrow A'(1; -7; -5)$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

Bài 4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng $d : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng

$(P) : -x + y + 2z + 3 = 0$. Viết phương trình hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng (P) .

- A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-3}$ B. $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$
C. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$ D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{-3}$

GIẢI

- Lập mặt phẳng (α) chứa d và vuông góc với $(P) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d; \vec{n}_P] = (1; -7; 4)$

MODE 8 1 1 2 = 2 = 3 = MODE 8 2 1 - 1 = 1 = 2 = ON SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans 1 -7 4

1

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

$$(\alpha): (x+1) - 7y + 4(z+2) = 0 \Leftrightarrow x - 7y + 4z + 9 = 0$$

- Đường thẳng d có phương trình tổng quát $\begin{cases} x - 7y + 4z + 9 = 0 \\ -x + y + 2z + 3 = 0 \end{cases}$. Để so sánh kết quả ta phải chuyển

phương trình đường thẳng d về dạng chính tắc

Ta có: $\vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta] = (-18; -6; -6) \Rightarrow \vec{u}(3; 1; 1)$ cũng là vectơ chỉ phương của d

MODE 8 1 1 1 = - 7 = 4 = MODE 8 2 1 - 1 = 1 = 2 = ON

SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans -18 -6 -6

-18

Hơn nữa điểm $M(2; 1; -1)$ cũng thuộc $d \Rightarrow$ Phương trình chính tắc $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{1}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là C

Bài 5-[Câu 75 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho ba điểm $A(-1; 3; 2), B(4; 0; -3), C(5; -1; 4)$. Tìm tọa độ hình chiếu H của A lên đường thẳng BC

A. $\left(\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; \frac{12}{17}\right)$ B. $\left(\frac{77}{17}; \frac{9}{17}; \frac{12}{17}\right)$ C. $\left(\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; -\frac{12}{17}\right)$ D. $\left(-\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; -\frac{12}{17}\right)$

GIẢI

- Đường thẳng BC nhận vectơ $\vec{BC}(1; -1; 7)$ là vectơ chỉ phương và đi qua điểm $B(4; 0; -3)$

$$\Rightarrow BC: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = -t \\ z = -3 + 7t \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên $BC \Rightarrow H(4+t; -t; -3+7t)$

- Mặt khác $\vec{AH} \perp \vec{BC} \Rightarrow \vec{AH} \cdot \vec{BC} = 0$.

MODE 1 (4 + ALPHA) - - 1 - - 1 - - 1 - - (- ALPHA) - - 3 - + 7 (-

3 + 7 ALPHA) - 2) SHIFT CALC 1 =

(4+X--1)-(-X-3) =

X= 0.5294117647

L-R= 0

Chuyển t về dạng phân số

SHIFT RCL (-)

Ans A

$\frac{9}{17}$

$$\Rightarrow t = \frac{9}{17} \Rightarrow H\left(\frac{77}{17}; -\frac{9}{17}; \frac{12}{17}\right)$$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là A

Bài 6-[Câu 76 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tìm tọa độ điểm đối xứng của $M(-3; 1; -1)$ qua đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): 4x - 3y - 13 = 0$ và $(\beta): y - 2z + 5 = 0$

A. $(-2; -5; -3)$ B. $(2; -5; 3)$ C. $(5; -7; -3)$ D. $(5; -7; 3)$

GIẢI

- d là giao tuyến của 2 mặt phẳng $(\alpha); (\beta)$ nên có phương trình tổng quát :
$$\begin{cases} 4x - 3y - 13 = 0 \\ y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$
- Vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}_d = [\vec{n}_\beta; \vec{n}_\alpha] = (6; 8; 4) \Rightarrow$ nhận $\vec{u}(3; 4; 2)$ là vectơ chỉ phương

MODE 8 1 1 4 = - 3 = 0 = MODE 8 2 1 0 = 1 = - 2 = ON
SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans [] F 8 4]

6

Đường thẳng d có vectơ đi qua điểm $N(4; 1; 3)$ nên có phương trình tham số
$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 1 + 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

- Điểm H là hình chiếu vuông góc của M lên đường thẳng d nên có tọa độ $M(4 + 3t; 1 + 4t; 3 + 2t)$

Mặt khác $\overline{MH} \perp d \Rightarrow \overline{MH} \cdot \vec{u} = 0$

MODE 1 3 (4 + 3 ALPHA) - - 3) + 4 (1 + 4 ALPHA) - 1
) + 2 (3 + 2 ALPHA) - - 1) SHIFT CALC 1 =

3(4+3X--3)+4(1+4
X= -1
L-R= 0

$\Rightarrow t = -1 \Rightarrow H(1; -3; 1)$

M' đối xứng M qua d vậy H là trung điểm $MM' \Rightarrow M'(5; -7; 3)$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là D

Bài 7-[Câu 22 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}$. Hình chiếu vuông góc của d trên mặt phẳng tọa độ

(Oxy) là :

A. $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - t \\ z = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$

GIẢI

- Dựng mặt phẳng (α) chứa đường thẳng d và vuông góc với $(Oxy) \Rightarrow \vec{n}_\alpha = [\vec{u}_d; \vec{n}_{Oxy}] = (1; -2; 0)$

MODE 8 1 1 2 = 1 = 1 = MODE 8 2 1 0 = 0 = 1 = ON SHIFT 5
3 X SHIFT 5 4 =

Ans [] -2 0]

1

Mặt phẳng (α) chứa điểm $N(1; -1; 2)$ nên có phương trình là :

$$(\alpha): (x-1) - 2(y+1) + 0(z-2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0$$

- Đường thẳng d' là hình chiếu vuông góc của đường thẳng d lên mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow d'$ là giao tuyến của (α) và $(Oxy) \Rightarrow d': \begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

Tính $\vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_{Oxy}] = (-2; -1; 0) \Rightarrow$ nhận $\vec{u}(2; 1; 0)$ là vectơ chỉ phương

MODE 8 1 1 1 = - 2 = 0 = MODE 8 2 1 0 = 0 = 1 = ON SHIFT
5 3 X SHIFT 5 4 =
Ans
-1 0
-2

Lại có d' qua điểm có tọa độ $(1; -1; 0) \Rightarrow d': \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là B

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 27. TÍNH NHANH THỂ TÍCH CHÓP, DIỆN TÍCH TAM GIÁC.

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Ứng dụng tích có hướng tính diện tích tam giác

- Cho tam giác ABC có diện tích tam giác ABC tính theo công thức $S = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \right|$
- Ứng dụng tính chiều cao AH của tam giác ABC : $AH = \frac{2.S_{ABC}}{BC} = \frac{\left| [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] \right|}{\left| \overrightarrow{BC} \right|}$

2. Ứng dụng tích có hướng tính thể tích hình chóp

- Thể tích hình chóp $ABCD$ được tính theo công thức $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}] \right|$
- Ứng dụng tính chiều cao AH của hình chóp $ABCD$: $AH = \frac{3.V_{ABCD}}{S_{BCD}} = \frac{\left| \overrightarrow{AB} [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}] \right|}{\left| [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] \right|}$

3. Lệnh Caso

- Lệnh đăng nhập môi trường vecto MODE 8
- Nhập thông số vecto MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vecto : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vecto : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vecto SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Câu 41 đề minh họa vào ĐHQG HN năm 2016]

Cho 4 điểm $A(1;0;1)$, $B(2;2;2)$, $C(5;2;1)$, $D(4;3;-2)$. Tính thể tích tứ diện $ABCD$

A.6 B.12 C.4 D. 2

GIẢI

- Nhập thông số ba vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ vào máy tính Casio

MODE 8 1 1 2 - 1 = 2 - 0 = 2 - 1 = MODE 8 2 1 5
 - 1 = 2 - 0 = 1 - 1 = MODE 8 3 1 4 - 1 = 3 - 0
 = - 2 - 1 =

VCTO

A [1 2] B [4 2]

1

C [3 3]

-3

- Áp dụng công thức tính thể tích $V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}] \right| = 4$

ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4 X SHIFT 5 5)) ÷ 6
 =

$$\text{Abs}(\text{VctA} \cdot (\text{VctB} \times \text{VctC}))$$

4

⇒ Đáp số chính xác là C

VD2-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

Cho $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$. Điểm D nằm trên trục Oy và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tọa độ của D là :

- A. $(0;-7;0)$ B. $\begin{bmatrix} (0;-7;0) \\ (0;8;0) \end{bmatrix}$ C. $(0;8;0)$ D. $\begin{bmatrix} (0;7;0) \\ (0;-8;0) \end{bmatrix}$

GIẢI

➤ Ta có : $V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AD} [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]| = 5 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = \pm 30$

➤ Tính $[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]$ bằng Casio ta được $[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (0; -4; -2)$

MODE 8 1 1 1 = - 1 = 2 = MODE 8 2 1 0 = - 2 = 4
= ON SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =
Ans -4 -2]

0

➤ Điểm D nằm trên Oy nên có tọa độ $D(0; y; 0) \Rightarrow \overrightarrow{AD}(-2; y-1; 1)$

Nếu $\overrightarrow{AD} [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = 30$

MODE 1 0 X (- 2) - 4 (- 1) - 2 X 1 =
3 0 SHIFT CALC 1 =
0 X (-2) - 4 (X-1) - 2
X = -7
L-R = 0

Ta thu được $y = -7 \Rightarrow D(0; -7; 0)$

Nếu $\overrightarrow{AD} [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = -30$

◀ ◀ ◀ DEL + SHIFT CALC 1 =
0 X (-2) - 4 (X-1) - 2
X = 8
L-R = 0

Ta thu được $y = 8 \Rightarrow D(0; 8; 0)$

⇒ Đáp số chính xác là B

VD3-[Thi thử THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;2;0)$, $B(3;-1;1)$, $C(1;1;1)$. Tính diện tích S của tam giác ABC

- A. $S = \sqrt{3}$ B. $S = \sqrt{2}$ C. $S = \frac{1}{2}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3} S = 1$

GIẢI

➤ Nhập 2 vecto $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ vào máy tính Casio

MODE 8 1 1 2 = - 3 = 1 = MODE 8 2 1 0 = - 1 = 1
=

$$\vec{A} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \vec{B} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Diện tích tam giác ABC được tính theo công thức: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| [\vec{AB}; \vec{AC}] \right| = 1.732... = \sqrt{3}$

ON [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [X] [SHIFT] [5] [4] [)] [÷] [2] [=]

Abs(VctA×VctB)÷2

1.732050808

⇒ Đáp số chính xác là A

VD4-[Thi thử THPT Vĩnh Chân – Phú Thọ lần 1 năm 2017]

Cho hai điểm $A(1;2;0)$, $B(4;1;1)$. Độ dài đường cao OH của tam giác OAB là :

A. $\frac{1}{\sqrt{19}}$ B. $\sqrt{\frac{86}{19}}$ C. $\sqrt{\frac{19}{86}}$ D. $\sqrt{\frac{54}{11}}$

GIẢI

- Tính diện tích tam giác ABC theo công thức $S_{OAB} = \frac{1}{2} \left| [\vec{OA}; \vec{OB}] \right|$

MODE [8] [1] [1] [=] [2] [=] [0] [=] MODE [8] [2] [1] [4] [=] [1] [=] [1] [=] ON

[SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [X] [SHIFT] [5] [4] [)] [÷] [2] [=]

Abs(VctA×VctB)÷2

3.674234614

Vì giá trị diện tích này lẻ nên ta lưu vào biến A cho dễ nhìn

[SHIFT] [RCL] [(-)]

VCT

Ans→A

3.674234614

- Gọi h là chiều cao hạ từ O đến đáy AB ta có công thức $S_{OAB} = \frac{1}{2} h.AB \Leftrightarrow h = \frac{2S}{AB}$

- Tính độ dài cạnh $AB = |\vec{AB}|$

MODE [8] [1] [1] [3] [=] [-] [1] [=] [1] [=] ON [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [)] [=]

Abs(VctA)

3.31662479

Giá trị này lẻ ta lại lưu vào biến B

[SHIFT] [RCL] [0.00]

VCT

Ans→B

3.31662479

⇒ $h = \frac{2A}{B} = 2.2156... =$

[2] [ALPHA] [(-)] [÷] [ALPHA] [0.00] [=]

VCTB

$$2A \div B$$

$$2.215646838$$

⇒ Đáp số chính xác là **D**

VD5-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ có

$A(2;3;1), B(4;1;-2), C(6;3;7), D(-5;-4;8)$. Độ dài đường cao kẻ từ D của tứ diện là :

A. 11 B. $\frac{45}{7}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

GIẢI

- Ta tính được thể tích của tứ diện $ABCD$ theo công thức $V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}]| = \frac{154}{3}$

MODE 8 1 1 2 = - 2 = - 3 = MODE 8 2 1 4 = 0 = 6
= MODE 8 3 1 - 7 = - 7 = 7 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5
7 (SHIFT 5 4 X SHIFT 5 5)) ÷ 6 =

VCTB

$$\text{Abs}(VctA \cdot (VctB \times \dots$$

$$51.33333333$$

- Gọi h là khoảng cách từ $D \Rightarrow V = \frac{1}{3} h \cdot S_{ABC} \Rightarrow h = \frac{3V}{S_{ABC}} = \frac{154}{S_{ABC}}$:

- Tính S_{ABC} theo công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} [\overrightarrow{AC}]| = 14$

SHIFT hyp SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) ÷ 2 =

VCTB

$$\text{Abs}(VctA \times VctB) \div 2$$

$$14$$

$$\text{Khi đó } h = \frac{154}{14} = 11$$

⇒ Đáp số chính xác là **A**

VD6-[Thi thử THPT Nguyễn Đình Chiểu – Bình Định lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(1;5;0), B(3;3;6)$ và $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Điểm M

thuộc d để tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất có tọa độ là :

A. $M(-1;1;0)$ B. $M(3;-1;4)$ C. $M(-3;2;-2)$ D. $M(1;0;2)$

GIẢI

- Diện tích tam giác ABM được tính theo công thức $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} [\overrightarrow{AM}]| \Leftrightarrow 2S = |\overrightarrow{AB} [\overrightarrow{AM}]|$

- Với $M(-1;1;0)$ ta có $2S = 29.3938...$

MODE 8 1 1 2 = - 2 = 6 = MODE 8 2 1 - 2 = - 4 =
0 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) =

VCTB

$$\text{Abs}(VctA \times VctB)$$

$$29.39387691$$

- Với $M(3;-1;4)$ ta có $2S = 29.3938...$

MODE **8** **2** **1** **2** **=** **-** **6** **=** **4** **=** **ON** **SHIFT** **hyp** **SHIFT** **5** **3** **×** **SHIFT** **5** **4**
) **=**

^{VCT}
 Abs(VctA×VctB)

29.39387691

- Với $M(-3; 2; -2)$ ta có $2S = 32.8633...$

MODE **8** **2** **1** **-** **4** **=** **-** **3** **=** **-** **2** **=** **ON** **SHIFT** **hyp** **SHIFT** **5** **3** **×** **SHIFT**
5 **4** **)** **=**

^{VCT}
 Abs(VctA×VctB)

32.86335345

- Với $M(1; 0; 2)$ ta có $2S = 28.1424...$

MODE **8** **2** **1** **0** **=** **-** **5** **=** **2** **=** **ON** **SHIFT** **hyp** **SHIFT** **5** **3** **×** **SHIFT** **hyp** **4**
DEL **DEL** **SHIFT** **5** **4** **)** **=**

^{VCT}
 Abs(VctA×VctB)

28.14249456

So sánh 4 đáp số $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là C

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Câu 1 trang 141 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $A(2; -1; 6)$, $B(-3; -1; -4)$, $C(5; -1; 0)$, $D(1; 2; 1)$. Thể tích tứ diện $ABCD$ bằng :

A. 30 B. 40 C. 50 D. 60

Bài 2-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

Cho bốn điểm $A(a; -1; 6)$, $B(-3; -1; -4)$, $C(5; -1; 0)$, $D(1; 2; 1)$ và thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 30. Giá trị của a là :

A. 1 B. 2 C. 2 hoặc 32 D. 32

Bài 3-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1; 2; 4)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $V_{OABC} = 36$

A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{12} = 1$ B. $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ C. $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{12} = 1$ D. Đáp án khác

Bài 4-[Thi thử THPT Nho Quan – Ninh Bình lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(0; 1; 0)$, $B(2; 2; 2)$, $C(-2; 3; 1)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$. Tìm điểm M thuộc d sao cho thể tích tứ diện $MABC$ bằng 3

A. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; -\frac{11}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$

C. $\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$ D. $\left(\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$

Bài 5-[Câu 4 trang 141 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $A(0; 0; 2)$, $B(3; 0; 5)$, $C(1; 1; 0)$, $D(4; 1; 2)$. Độ dài đường cao của tứ diện $ABCD$ hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng (ABC) là :

A. $\sqrt{11}$ B. $\frac{1}{\sqrt{11}}$ C. 1 D. 11

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Câu 1 trang 141 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $A(2;-1;6)$, $B(-3;-1;-4)$, $C(5;-1;0)$, $D(1;2;1)$. Thể tích tứ diện $ABCD$ bằng :

A. 30 B. 40 C. 50 D. 60

GIẢI

- Thể tích tứ diện $ABCD$ được tính theo công thức $V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}] \right| = 30$

MODE 8 1 1 = 5 = 0 = - 1 0 = MODE 8 2 1 3 = 0 = - 6
= MODE 8 3 1 - 1 = 3 = - 5 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 ()
SHIFT 5 4 X SHIFT 5 5)) ÷ 6 =

Abs(VctA*(VctB×p

30

Vậy đáp số chính xác là A

Bài 2-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 1 năm 2017]

Cho bốn điểm $A(a;-1;6)$, $B(-3;-1;-4)$, $C(5;-1;0)$, $D(1;2;1)$ và thể tích của tứ diện $ABCD$ bằng 30. Giá trị của a là :

A. 1 B. 2 C. 2 hoặc 32 D. 32

GIẢI

- Vì điểm A chứa tham số nên ta ưu tiên vecto $\overrightarrow{BA}$ tính sau cùng. Công thức tính thể tích $ABCD$ ta sắp xếp như sau : $V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{BA} [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] \right|$

- Tính $[\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = (-12; -24; 24)$

MODE 8 1 1 8 = 0 = 4 = MODE 8 2 1 4 = 3 = 5 = ON SHIFT 5
3 X SHIFT 5 4 =

Ans -12 -24 24]

-12

- Ta có $V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{BA} [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] \right| = 30 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = \pm 180$

Với $\overrightarrow{BA} [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = 180 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] - 180 = 0 \Rightarrow a = 2$

MODE 1 - 1 2 (ALPHA) + 3) - 2 4 X 0 + 2 4 (6 + 4
) - 1 8 0 SHIFT CALC 1 =

-12(X+3)-24×0+24
X= 2
L-R= 0

Với $\overrightarrow{BA} [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] = -180 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} [\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD}] + 180 = 0 \Rightarrow a = 32$

◀ ◀ ◀ ◀ DEL + SHIFT CALC 1 =

-12(X+3)-24×0+24
X= 32
L-R= 0

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

⇒ Đáp án chính xác là C

Bài 3-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1;2;4)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho $V_{OABC} = 36$

- A. $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{12} = 1$ B. $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1$ C. $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{12} = 1$ D. Đáp án khác

GIẢI

- Trong các đáp án chỉ có mặt phẳng ở đáp án A đi qua điểm $M(1;2;4)$ cho nên ta chỉ đi kiểm tra tính đúng sai của đáp án A
- Theo tính chất của phương trình đoạn chắn thì mặt phẳng (P): $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{12} = 1$ cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm $A(3;0;0), B(0;6;0), C(0;0;12)$. Hơn nữa 4 điểm O, A, B, C lập thành một tứ diện vuông đỉnh O
- Theo tính chất của tứ diện vuông thì $V_{OABC} = \frac{1}{6}|OA||OB||OC| = \frac{1}{6}.3.6.12 = 36$ (đúng)

⇒ Đáp án chính xác là A

Bài 4-[Thi thử THPT Nho Quan – Ninh Bình lần 1 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho $A(0;1;0)$, $B(2;2;2)$, $C(-2;3;1)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$. Tìm điểm M thuộc d sao cho thể tích tứ diện $MABC$ bằng 3

- A. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; -\frac{11}{2}\right)$ B. $\left(-\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(-\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$
C. $\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$ D. $\left(\frac{3}{5}; -\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{15}{2}; \frac{9}{4}; \frac{11}{2}\right)$

GIẢI

- Điểm M thuộc d nên có tọa độ $M(1+2t; -2-t; 3+2t)$
- Thể tích tứ diện $MABC$ được tính theo công thức $V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AM}[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]|$

Tính $[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (-3; -6; 6)$

MODE 8 1 1 2 = 1 = 2 = MODE 8 2 1 - 2 = 2 = 1 = ON SHIFT
5 3 X SHIFT 5 4 =
VCT

Ans -6 6]

-3

- Ta có $V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AM}[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}]| = 3 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = \pm 18$

Với $\overrightarrow{AM}[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = 18 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] - 18 = 0$

MODE 1 - 3 (1 + 2 ALPHA)) - 6 (- 2 - ALPHA) - 1) +
6 (3 + 2 ALPHA)) - 1 8 SHIFT CALC 1 = SHIFT RCL (←)

-3(1+2X)-6(-2-X) Ans→A
X=
L-R=

-1.25
0

Math ▲
-5/4

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

Ta được $t = -\frac{5}{4} \Rightarrow M\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Với $\overrightarrow{AM}[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = -18 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}[\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] + 18 = 0$

Rõ ràng chỉ có đáp số A chứa điểm M trên $\Rightarrow$ A là đáp số chính xác

Bài 5-[Câu 4 trang 141 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $A(0;0;2)$, $B(3;0;5)$, $C(1;1;0)$, $D(4;1;2)$. Độ dài đường cao của tứ diện ABCD hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng (ABC) là :

A. $\sqrt{11}$ B. $\frac{1}{\sqrt{11}}$ C. 1 D. 11

GIẢI

- Tính thể tích tứ diện ABCD theo công thức $V = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB}[\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}] \right| = 0.5$

MODE 8 1 1 3 = 0 = 3 = MODE 8 2 1 1 = 1 = - 2 = MODE 8
3 1 4 = 1 = 0 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 (SHIFT 5 4 X
SHIFT 5 5)) ÷ 6 =

Abs(VctA*(VctB×VctC))

0.5

- Gọi h là chiều cao cần tìm. Khi đó $V_{ABCD} = \frac{1}{3} h.S_{ABC} \Leftrightarrow h = \frac{3S}{S_{ABC}}$

Tính diện tích tam giác ABC theo công thức $S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB}[\overrightarrow{AC}] \right|$

ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4) ÷ 2 = SHIFT RCL (-)

Abs(VctA×VctB)÷2 Ans→A

4.974937186

4.974937186

Vậy $h = \frac{3V}{S_{ABC}} = 0.3015... = \frac{1}{\sqrt{11}} \Rightarrow$ Đáp số chính xác là B

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 28. TÍNH NHANH GÓC GIỮA VECTO, ĐƯỜNG VÀ MẶT.

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Góc giữa hai vectơ

- Cho hai vectơ $\vec{u}(x; y; z)$ và $\vec{v}(x'; y'; z')$, góc giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ được tính theo công thức :

$$\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x.x' + y.y' + z.z'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

- Góc giữa hai vectơ thuộc khoảng $[0^\circ; 180^\circ]$

2. Góc giữa hai đường thẳng

- Cho hai đường thẳng d và d' có hai vectơ chỉ phương $\vec{u}_d$ và $\vec{u}_{d'}$. Góc α giữa hai đường thẳng

$$d, d' \text{ được tính theo công thức : } \cos \alpha = \left| \cos(\vec{u}_d; \vec{u}_{d'}) \right| = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{u}_{d'}|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{u}_{d'}|} \text{ (tích vô hướng chia tích độ dài)}$$

- Góc giữa hai đường thẳng thuộc khoảng $[0^\circ; 90^\circ]$

3. Góc giữa hai mặt phẳng

- Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) có hai vectơ pháp tuyến $\vec{n}_P$ và $\vec{n}_Q$. Góc α giữa hai mặt phẳng

$$(P), (Q) \text{ được tính theo công thức : } \cos \alpha = \left| \cos(\vec{n}_P; \vec{n}_Q) \right| = \frac{|\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|}$$

- Góc giữa hai đường thẳng thuộc khoảng $[0^\circ; 90^\circ]$

4. Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng

- Cho đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$. Góc α

$$\text{giữa đường thẳng } d \text{ và mặt phẳng } (P) \text{ được tính theo công thức } \sin \alpha = \left| \cos(\vec{u}; \vec{n}) \right|$$

- Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng thuộc khoảng $[0^\circ; 90^\circ]$

5. Lệnh Caso

- Lệnh đăng nhập môi trường vectơ MODE 8
- Nhập thông số vectơ MODE 8 1 1
- Tính tích vô hướng của 2 vectơ : vectoA SHIFT 5 7 vectoB
- Tính tích có hướng của hai vectơ : vectoA x vectoB
- Lệnh giá trị tuyệt đối SHIFT HYP
- Lệnh tính độ lớn một vectơ SHIFT HYP
- Lệnh dò nghiệm của bất phương trình MODE 7
- Lệnh dò nghiệm của phương trình SHIFT SOLVE

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(-2; 1; 0)$, $B(-3; 0; 4)$, $C(0; 7; 3)$. Khi đó

$\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC})$ bằng :

A. $\frac{14\sqrt{118}}{354}$ B. $-\frac{14}{3\sqrt{118}}$ C. $\frac{\sqrt{798}}{57}$ D. $-\frac{\sqrt{798}}{57}$

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO – VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

GIẢI

- Nhập hai vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ vào máy tính Casio

[MODE] [8] [1] [1] [=] [-] [1] [=] [-] [1] [=] [4] [=] [MODE] [8] [2] [1] [3] [=] [7] [=] [-]
[1] [=]
 H [-1 -1 [] B [3 1 []
 4 -1

- Tính $\cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = 0.4296... = -\frac{14}{3\sqrt{118}}$

- **[ON] [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [÷] [(] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [)] [X] [SHIFT]**
[hyp] [SHIFT] [5] [4] [)] [)] [=]
 VctA·VctB÷(Abs(▶
 -0.4296014884

⇒ Đáp số chính xác là B

VD2-[Câu 37 đề minh họa vào ĐHQG HN năm 2016]

Góc giữa hai đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d': \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$ là :

A. 45° B. 90° C. 60° D. 30°

GIẢI

- Đề bài yêu cầu tính góc theo đơn vị độ nên ta chuyển máy tính về chế độ độ **[SHIFT] [MODE] [3]**

Đường thẳng d có vecto chỉ phương $\vec{u}(1; -1; 2)$, đường thẳng d' có vecto chỉ phương $\vec{u'}(2; 1; 1)$

- Gọi α là góc giữa hai đường thẳng $d; d'$ thì $\cos \alpha = \left| \cos(\vec{u}; \vec{u'}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u'}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u'}|}$

[MODE] [8] [1] [1] [1] [=] [-] [1] [=] [2] [=] [MODE] [8] [2] [1] [2] [=] [1] [=] [1] [=]
[ON] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3] [SHIFT] [5] [7] [SHIFT] [5] [4] [)] [÷] [(] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [3]
[)] [X] [SHIFT] [hyp] [SHIFT] [5] [4] [)] [)] [=]
 Abs(VctA·VctB)÷▶
 0.5

- Ta có $\cos \alpha = 0.5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

Áp dụng công thức tính thể tích $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD}]| = 4$

[=] [SHIFT] [cos] [Ans] [)] [=]
 cos⁻¹(Ans)

60

⇒ Đáp số chính xác là C

VD3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 5 năm 2017]

Tìm m để góc giữa hai vecto $\vec{u}(1; \log_3 5; \log_m 2)$, $\vec{v}(3; \log_5 3; 4)$ là góc nhọn

A. $1 > m > \frac{1}{2}$ B. $\begin{cases} m > 1 \\ 0 < m < \frac{1}{2} \end{cases}$ C. $0 < m < \frac{1}{2}$ D. $m > 1$

GIẢI

- Gọi góc giữa 2 vecto $\vec{u}, \vec{v}$ là α thì $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Để góc α nhọn thì $\cos \alpha < 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow 1.3 + \log_3 5 \cdot \log_5 3 + 4 \cdot \log_m 2 < 0 \Leftrightarrow \log_m 2 + 1 < 0$
(1)

- Để giải bất phương trình (1) ta sử dụng chức năng MODE 7 với thiết lập Start -2 End 2 Step 0.5

MODE **7** **log** **ALPHA** **)** **2** **+** **1** **=** **=** **-** **0** **.** **5** **=** **1** **.** **5** **=**
0 **.** **2** **5** **=**

Ta thấy $f(0.25) = 0.5 > 0 \Rightarrow$ Đáp án **C** sai

Math
F(X)
0.5
0.25
0.75
-1.409

Ta thấy $f(1.25) = 4.1062 > 0 \Rightarrow$ Đáp số **B** và **D** sai

Math
F(X)
ERROR
4.1062
1.25
2.7095

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

VD4-[Câu 42a trang 125 Sách bài tập nâng cao hình học 12]

Tìm α để hai mặt phẳng $(P): x - \frac{1}{4}y - z + 5 = 0$ và $(Q): x \sin \alpha + y \cos \alpha + z \sin^3 \alpha + 2 = 0$ vuông góc với nhau

A. 15° **B.** 75° **C.** 90° **D.** Cả **A, B, C** đều đúng

GIẢI

- Mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}_P \left(1; -\frac{1}{4}; -1 \right)$, mặt phẳng (Q) có vecto pháp tuyến

$\vec{n}_Q (\sin \alpha; \cos \alpha; \sin^3 \alpha)$

Để hai mặt phẳng trên vuông góc với nhau $\Leftrightarrow$ góc giữa $\vec{n}_P$ và $\vec{n}_Q$ bằng $90^\circ \Leftrightarrow \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 0$

$\Leftrightarrow \sin \alpha - \frac{1}{4} \cos \alpha - \sin^3 \alpha = 0$. Đặt $P = \sin \alpha - \frac{1}{4} \cos \alpha - \sin^3 \alpha$

- Vì đề bài đã cho sẵn đáp án nên ta sử dụng phương pháp thử đáp án bằng chức năng CALC của máy tính Casio

Với $\alpha = 15^\circ \Rightarrow P = 0 \Rightarrow$ Đáp án **A** đúng

sin **ALPHA** **)** **)** **-** **=** **1** **▼** **4** **▶** **cos** **ALPHA** **)** **)** **-** **sin** **ALPHA** **)** **)** **x³** **3**
CALC **1** **5** **=**

Math **▲**
sin(X)-1/4cos(X)-
0

Với $\alpha = 75^\circ \Rightarrow P = 0 \Rightarrow$ Đáp án **B** đúng

CALC **7** **5** **=**
Math **▲**
sin(X)-1/4cos(X)-
0

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD5-[Thi học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Điểm $H(2; -1; -2)$ là hình chiếu vuông góc của gốc tọa độ O lên mặt phẳng (P) . Tìm số đo góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(Q): x - y - 6 = 0$

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

GIẢI

- Mặt phẳng (P) vuông góc với OH nên nhận $\overrightarrow{OH}(2; -1; -2)$ là vecto pháp tuyến

$$\Rightarrow (P): 2(x-2) - 1(y+1) - 2(z+2) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 2z - 9 = 0$$

Mặt phẳng (Q) có vecto pháp tuyến là $\vec{n}_Q(1; -1; 0)$

- Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (P) và $(Q) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{OH} \cdot \vec{n}_Q|}{|\overrightarrow{OH}| \cdot |\vec{n}_Q|}$

MODE 8 1 1 2 = - 1 = - 2 = MODE 8 2 1 1 = - 1 =
0 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT
5 3) X SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

Abs(VctA.VctB)÷

0.7071067812

$$\text{Vậy } \cos \alpha = 0.7071... = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

= SHIFT COS Ans) =

cos⁻¹(Ans)

45

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là B

VD6-[Câu 47 trang 126 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Mặt phẳng (Q) nào sau đây đi qua hai điểm $A(3; 0; 0)$ và $B(0; 0; 1)$ đồng thời tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc là 60°

A. $\begin{cases} x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \\ x - 5y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x + 5y + 3z - 3 = 0 \\ x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$

C. $\begin{cases} x - 5y + 3z - 3 = 0 \\ x + 5y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x + \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \\ x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$

GIẢI

❖ **Cách Casio**

Để thực hiện cách này ta sẽ làm các phép thử. Ta thấy tất cả các mặt phẳng xuất hiện trong đáp án đều đi qua 2 điểm A, B . Vậy ta chỉ cần tính góc giữa mặt phẳng xuất hiện trong đáp án và mặt phẳng (Oxy) là xong.

- Với mặt phẳng $(Q): x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q = (1; -\sqrt{26}; 3)$, mặt phẳng (Oxy) có vecto pháp tuyến $\vec{n} = (0; 0; 1)$

$$\text{Gọi } \alpha \text{ là góc giữa 2 mặt phẳng trên } \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_Q \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}_Q| \cdot |\vec{n}|} = 0.5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

MODE 8 1 1 1 = - √ 2 6) = 3 = MODE 8 2 1 0 = 0
 = 1 = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp
 SHIFT 5 3) × SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =
 Abs(VctA·VctB)÷

0.5

⇒ Đáp án chắc chắn phải chứa mặt phẳng (Q): $x - \sqrt{26}y + 3z - 3 = 0$.

- Tiếp tục thử với mặt phẳng $x - 5y + 3z - 3 = 0$ nếu thỏa thì đáp án A đúng nếu không thì đáp án D đúng

❖ **Cách tự luận**

- Gọi mặt phẳng (Q) có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$

(Q) qua A $\Rightarrow 3A + D = 0$, (Q) qua B $\Rightarrow C + D = 0$. Chọn $D = 1 \Rightarrow C = -1; A = -\frac{1}{3}$

Khi đó (Q): $-\frac{1}{3}x + By - z + 1 = 0$ và có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q\left(-\frac{1}{3}; B; -1\right)$

- Góc giữa hai mặt phẳng trên là $60^\circ \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{|\vec{n}_Q; \vec{n}|}{|\vec{n}_Q| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_Q; \vec{n}|}{|\vec{n}_Q| \cdot |\vec{n}|} - \frac{1}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|-\frac{1}{3} \cdot 0 + B \cdot 0 - 1 \cdot 1\right|}{\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + B^2 + 1} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{B^2 + \frac{10}{9}}} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{B^2 + \frac{10}{9}} = 2 \Leftrightarrow B^2 + \frac{10}{9} = 4 \Leftrightarrow B^2 = \frac{26}{9} \Leftrightarrow B = \pm \frac{\sqrt{26}}{3}$$

⇒ Đáp án chính xác là C

VD7-[Câu 71 trang 134 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Tính góc giữa đường thẳng $\Delta: \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$ và mặt phẳng (P): $x + 2y - z + 5 = 0$

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

GIẢI

- Đường thẳng Δ có vecto chỉ phương $\vec{u}(2;1;1)$ và mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}(1;2;-1)$

Gọi β là góc giữa giữa 2 vectơ $\vec{u}, \vec{n}$. Ta có $|\cos(\beta)| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

MODE 8 1 1 2 = 1 = 1 = MODE 8 2 1 1 = 2 = - 1 =
 ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3
) × SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =
 Abs(VctA·VctB)÷

0.5

- Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) $\Rightarrow \sin \alpha = |\cos \beta| = 0.5$

⇒ $\alpha = 30^\circ$

SHIFT sin Ans) =

$\sin^{-1}(\text{Ans})$

30

⇒ Đáp án chính xác là A

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Câu 21 trang 119 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho bốn điểm $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;0;2)$, $D(1;1;1)$. Tính góc giữa 2 đường thẳng AB và CD :

A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°

Bài 2-[Câu 8 trang 142 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Cho $\vec{u}(1;1;-2)$ và $\vec{v}(1;0;m)$. Tìm m để góc giữa hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ là 45°

A. $\begin{cases} m = 2 - \sqrt{6} \\ m = 2 + \sqrt{6} \end{cases}$ B. $m = 2 - \sqrt{6}$ C. $m = 2 + \sqrt{6}$ D. Không có m thỏa mãn

Bài 3-[Câu 14 trang 143 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Cho hai mặt phẳng $(P): m^2x - y + (m^2 - 2)z + 2 = 0$ và $2x + m^2y - 2z + 1 = 0$ vuông góc với nhau:

A. $|m| = 2$ B. $|m| = 1$ C. $|m| = \sqrt{2}$ D. $|m| = \sqrt{3}$

Bài 4-[Câu 94 trang 140 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Xét hai điểm là trung điểm $B'C'$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AP và BC'

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 5-[Câu 47a trang 126 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Oz và tạo với mặt phẳng $(Q): 2x + y - \sqrt{5}z = 0$ một góc 60°

A. $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -3x + y = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} -3x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} -3x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

Bài 6-[Câu 19 trang 145 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $(P): 3x + 4y + 5z + 8 = 0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng

$(\alpha): x - 2y + 1 = 0$, $(\beta): x - 2z - 3 = 0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

Khi đó:

A. $\varphi = 30^\circ$ B. $\varphi = 45^\circ$ C. $\varphi = 60^\circ$ D. $\varphi = 90^\circ$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Câu 21 trang 119 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho bốn điểm $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(1;0;2)$, $D(1;1;1)$. Tính góc giữa 2 đường thẳng AB và CD :

A. 30° B. 60° C. 90° D. 120°

GIẢI

- Đường thẳng AB nhận vectơ $\overrightarrow{AB}(-1;1;1)$ là vectơ chỉ phương, đường thẳng CD nhận $\overrightarrow{CD}(0;1;-1)$ là vectơ chỉ phương

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AB, CD và được tính theo công thức :

$$\cos \alpha = \left| \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|}$$

- Nhập các vecto $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ vào máy tính Casio

MODE 8 1 1 = 1 = 1 = 1 = MODE 8 2 1 0 = 1 = - 1 =

H [- |] E [0 |]

- Tính $\cos \alpha = \left| \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CD}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CD}|} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$

ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) X

SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

Abs(VctA.VctB)÷

0

Vậy đáp số chính xác là C

Bài 2-[Câu 8 trang 142 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Cho $\vec{u}(1;1;-2)$ và $\vec{v}(1;0;m)$. Tìm m để góc giữa hai vecto $\vec{u}, \vec{v}$ là 45°

- A. $\begin{cases} m = 2 - \sqrt{6} \\ m = 2 + \sqrt{6} \end{cases}$ B. $m = 2 - \sqrt{6}$ C. $m = 2 + \sqrt{6}$ D. Không có m thỏa mãn

GIẢI

- Ta có $\cos(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{m^2+1}}$
- Để góc giữa 2 vecto trên là 45° thì $\frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1-2m}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{m^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$
- Để kiểm tra giá trị m thỏa mãn ta sử dụng máy tính Casio với chức năng CALC

Với $m = 2 - \sqrt{6}$

MODE 1 = 1 = 2 ALPHA) ∇ √ 6 ► X √ ALPHA) x² + 1 ► ► - =

1 ∇ √ 2 CALC 2 - √ 6) =

$\frac{1-2X}{\sqrt{6} \times \sqrt{X^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

0

$\Rightarrow m = 2 - \sqrt{6}$ thỏa $\Rightarrow$ Đáp số đúng chỉ có thể là A hoặc B

Tiếp tục kiểm tra với $m = 2 + \sqrt{6}$

CALC 2 + √ 6) =

$\frac{1-2X}{\sqrt{6} \times \sqrt{X^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

-1.414213562

$\Rightarrow 2 + \sqrt{6}$ không thỏa $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là B

Bài 3-[Câu 14 trang 143 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

Cho hai mặt phẳng $(P): m^2x - y + (m^2 - 2)z + 2 = 0$ và $2x + m^2y - 2z + 1 = 0$ vuông góc với nhau :

A. $|m| = 2$ B. $|m| = 1$ C. $|m| = \sqrt{2}$ D. $|m| = \sqrt{3}$

GIẢI

- Mặt phẳng (P) có vecto pháp tuyến $\vec{n}(m^2; -1; m^2 - 2)$, mặt phẳng (Q) có vecto pháp tuyến $\vec{n}'(2; m^2; -2)$

- Để hai mặt phẳng trên vuông góc nhau thì $\vec{n} \perp \vec{n}' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$
 $\Leftrightarrow m^2 \cdot 2 - m^2 + (m^2 - 2) \cdot (-2) = 0 \Leftrightarrow 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là A

Bài 4-[Câu 94 trang 140 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Xét hai điểm là trung điểm $B'C'$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AP và BC'

A. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

GIẢI

- Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc là đỉnh A , tia Ox chứa AB , tia Oy chứa AD , tia Oz chứa AA' .
 Chọn $a = 1$ khi đó: $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $D(0; 1; 0)$, $A'(0; 0; 1)$, $B'(1; 0; 1)$, $C'(1; 1; 1)$

$\Rightarrow P\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$, $\overrightarrow{AP}\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$, $\overrightarrow{BC'}(0; 1; 1)$

- Góc giữa 2 đường thẳng AP, BC' là α thì $\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC'}|}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{BC'}|} = 0.7071... = \frac{\sqrt{2}}{2}$

MODE 8 1 1 1 = 0 . 5 = 1 = MODE 8 2 1 0 = 1 = 1 = ON
 SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) X SHIFT
 hyp SHIFT 5 4)) =

Abs(VctA.VctB)÷p

0.7071067812

$\Rightarrow$ D là đáp số chính xác

Bài 5-[Câu 47a trang 126 Sách bài tập hình học nâng cao 12]

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Oz và tạo với mặt phẳng $(Q): 2x + y - \sqrt{5}z = 0$ một góc 60°

A. $\begin{cases} x + 3y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x - 3y = 0 \\ -3x + y = 0 \end{cases}$ C. $\begin{cases} -3x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} -3x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

GIẢI

❖ Cách Casio

- Với mặt phẳng $(P): x + 3y = 0$ có vecto pháp tuyến $\vec{n}_p = (1; 3)$, mặt phẳng (Q) có vecto pháp tuyến $\vec{n}_q = (2; 1; -\sqrt{5})$

Gọi α là góc giữa 2 mặt phẳng trên $\Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q|}{|\vec{n}_p| \cdot |\vec{n}_q|} = 0.5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$

MODE 8 1 1 1 = 3 = 0 = MODE 8 2 1 2 = 1 = - √ 5
) = ON SHIFT hyp SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT
 5 3) X SHIFT hyp SHIFT 5 4)) =

$$\text{Abs}(\text{VctA} \cdot \text{VctB}) \div \rightarrow$$

0.5

$\Rightarrow$ Đáp án chắc chắn phải chứa mặt phẳng $x + 3y = 0$.

- Tiếp tục thử với mặt phẳng $x - 3y = 0$ nếu thỏa thì đáp án **A** đúng nếu không thì đáp án **C** đúng

❖ **Cách tự luận**

- Gọi mặt phẳng (P) có dạng $Ax + By + Cz + D = 0$. (P) chứa trục Oz thì (P) chứa 2 điểm thuộc trục Oz . Gọi hai điểm đó là $A(0;0;0)$ và $B(0;0;1)$

(P) qua $A \Rightarrow D = 0$, (P) qua $B \Rightarrow C + D = 0 \Rightarrow C = D = 0$ Chọn $A = 1$

Khi đó $(P): x + By = 0$ và có vecto pháp tuyến $\vec{n}_Q(1; B; 0)$

- Góc giữa hai mặt phẳng trên là $60^\circ \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{|\vec{n}_P; \vec{n}_Q|}{|\vec{n}_P| \cdot |\vec{n}_Q|} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|\vec{n}_Q; \vec{n}|}{|\vec{n}_Q| \cdot |\vec{n}|} - \frac{1}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{|1 \cdot 2 + B \cdot 1 + 0 \cdot (-\sqrt{5})|}{\sqrt{1^2 + B^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + (-\sqrt{5})^2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|B + 2|}{\sqrt{10} \sqrt{B^2 + 1}} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2|B + 2| = \sqrt{10} \sqrt{B^2 + 1} \Leftrightarrow 4(B^2 + 4B + 4) = 10(B^2 + 1) \Leftrightarrow 6B^2 - 16B - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B = 3 \\ B = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

Bài 6-[Câu 19 trang 145 Sách bài tập hình học nâng cao lớp 12]

Cho $(P): 3x + 4y + 5z + 8 = 0$ và đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng

$(\alpha): x - 2y + 1 = 0$, $(\beta): x - 2z - 3 = 0$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) .

Khi đó:

- A. $\varphi = 30^\circ$ B. $\varphi = 45^\circ$ C. $\varphi = 60^\circ$ D. $\varphi = 90^\circ$

GIẢI

- d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ nên nhận d vuông góc với hai vecto pháp tuyến của hai mặt phẳng này

$\Rightarrow$ Vecto chỉ phương $\vec{u}_d = [\vec{n}_\alpha; \vec{n}_\beta] = (4; 4; 4)$

MODE 8 1 1 1 = - 2 = 0 = MODE 8 2 1 1 = 0 = - 2 = ON

SHIFT 5 3 X SHIFT 5 4 =

Ans 4

4

- Gọi γ là góc giữa $\vec{u}_d; \vec{n}_P$ ta có $|\cos \gamma| = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{n}_P|}{|\vec{u}_d| \cdot |\vec{n}_P|} = 0.8660... = \frac{\sqrt{3}}{2}$

MODE 8 1 1 4 = 2 = 2 = MODE 8 2 1 3 = 4 = 5 = ON SHIFT hyp

SHIFT 5 3 SHIFT 5 7 SHIFT 5 4) ÷ (SHIFT hyp SHIFT 5 3) X SHIFT hyp SHIFT

5 4)) =

$$\text{Abs}(\text{VctA} \cdot \text{VctB}) \div \rightarrow$$

0.8660254038

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO – VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

Ta có $\sin \varphi = |\cos \gamma| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$

SHIFT **sin** **Ans** **)** **=**
VCTB
 $\sin^{-1}(\text{Ans})$

60

. $\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Chính xác là **B**

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 29. TÍNH NHANH CÁC PHÉP TOÁN CƠ BẢN SỐ PHỨC.

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Các khái niệm thường gặp

- Đơn vị ảo là một đại lượng được kí hiệu i và có tính chất $i^2 = -1$
- Số phức là một biểu thức có dạng $a + bi$ trong đó a, b là các số thực. Trong đó a được gọi là phần thực và b được gọi là số ảo
- Số phức liên hợp của số phức $z = a + bi$ là số phức $\bar{z} = a - bi$
- Số phức nghịch đảo của số phức $z = a + bi$ là số phức $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi}$
- Môđul của số phức $z = a + bi$ được kí hiệu là $|z|$ và có độ lớn $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

2. Lệnh Caso

- Để xử lý số phức ta sử dụng lệnh tính số phức MODE 2
- Lệnh tính Môđun của số phức là SHIFT HYP
- Lệnh tính số phức liên hợp $\bar{z}$ là SHIFT 2 2
- Lệnh tính Argument của số phức là SHIFT 2 1

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Đề minh họa THPT Quốc Gia lần 1 năm 2017]

Cho hai số phức $z_1 = 1 + i$ và $z_2 = 2 - 3i$. Tính Môđun của số phức $z_1 + z_2$

- A. $|z_1 + z_2| = \sqrt{13}$ B. $|z_1 + z_2| = \sqrt{5}$ C. $|z_1 + z_2| = 1$ D. $|z_1 + z_2| = 5$

GIẢI

- Đăng nhập lệnh số phức **MODE** **2**
CMPLX Math

|

(Khi nào máy tính hiển thị chữ CMPLX thì bắt đầu tính toán số phức được)

- Để tính Môđun của số phức ta nhập biểu thức vào máy tính rồi sử dụng lệnh SHIFT HYP

1 **+** **ENG** **+** **2** **-** **3** **ENG** **=** **SHIFT** **hyp** **Ans** **=**
CMPLX Math

1+i+2-3i

3-2i

|Ans|

 $\sqrt{13}$

Vậy $|z_1 + z_2| = \sqrt{13} \Rightarrow$ Đáp số chính xác là A

VD2-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 3 năm 2017]

Số phức liên hợp với số phức $z = (1 + i)^2 - 3(1 + 2i)^2$ là :

- A. $-9 - 10i$ B. $9 + 10i$ C. $9 - 10i$ D. $-9 + 10i$

GIẢI

- Sử dụng máy tính Casio tính z

(**1** **+** **ENG** **)** **x²** **-** **3** **(** **1** **+** **2** **ENG** **)** **x²** **=**

$$(1+i)^2 - 3(1+2i)^2$$

$$9-10i$$

$$\Rightarrow z = 9-10i$$

- Số phức liên hợp của $z = a+bi$ là $\bar{z} = a-bi$:

Vậy $\bar{z} = 9+10i \Rightarrow$ Đáp án **B** là chính xác

VD3-[Thi thử trung tâm Diệu Hiền – Cần thơ lần 1 năm 2017]

Cho số phức $z = a+bi$. Số phức z^2 có phần ảo là :

- A. a^2b^2 B. $2a^2b^2$ C. $2ab$ D. ab

GIẢI

- Vì đề bài cho ở dạng tổng quát nên ta tiến hành “cá biệt hóa” bài toán bằng cách chọn giá trị cho a, b (lưu ý nên chọn các giá trị lẻ để tránh xảy ra trường hợp đặc biệt).

Chọn $a=1.25$ và $b=2.1$ ta có $z = 1.25 + 2.1i$

- Sử dụng máy tính Casio tính z^2

$$1 \cdot 2.5 \cdot 2.1 \cdot 2.1 \cdot i$$

$$(1.25+2.1i)^2$$

$$-\frac{1139}{400} + \frac{21}{4}i$$

Vậy phần ảo là $\frac{21}{4}$

- Xem đáp số nào có giá trị là $\frac{21}{4}$ thì đáp án đó chính xác. Ta có :

$$2 \times 1.25 \times 2.1$$

$$\frac{21}{4}$$

Vậy $2ab = \frac{21}{4} \Rightarrow$ Đáp án **C** là chính xác

VD4-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Đề số phức $z = a + (a-1)i$ (a là số thực) có $|z|=1$ thì :

- A. $a = \frac{1}{2}$ B. $a = \frac{3}{2}$ C. $\begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$ D. $a = \pm 1$

GIẢI

- Để xử lý bài này ta sử dụng phép thử, tuy nhiên ta chọn a sao cho khéo léo nhất để phép thử tìm đáp số nhanh nhất. Ta chọn $a=1$ trước, nếu $a=1$ đúng thì đáp án đúng chỉ có thể là **C** hoặc **D**, nếu $a=1$ sai thì **C** và **D** đều sai.

- Với $a=1$ Sử dụng máy tính Casio tính z

$$1 + (1-1)i$$

$$|Ans|$$

$$1$$

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

Vậy $|z|=1 \Rightarrow$ Đáp án đúng chỉ có thể là **C** hoặc **D**

- Thử với $a=0$ Sử dụng máy tính Casio tính z :

$$0 + (0 - 1)i$$

$$|Ans| = 1$$

Vậy $|z|=1 \Rightarrow$ Đáp án chính xác là **C**

VD5-[Thi thử THPT Phạm Văn Đồng – Đắk Nông lần 1 năm 2017]

Số phức $z = 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{20}$ có giá trị bằng :

- A. -2^{20} B. $-2^{10} + (2^{20} + 1)i$ C. $2^{10} + (2^{10} + 1)i$ D. $2^{10} + 2^{10}i$

GIẢI

- Nếu ta nhập cả biểu thức $1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{20}$ vào máy tính Casio thì vẫn được, nhưng mất nhiều thao tác tay. Để rút ngắn công đoạn này ta tiến hành rút gọn biểu thức. Ta thấy các số hạng trong cùng biểu thức đều có chung một quy luật “số hạng sau bằng số hạng trước nhân với đại lượng $1+i$ ” vậy đây là cấp số nhân với công bội $1+i$

$$\Rightarrow 1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{20} = U_1 \frac{1-q^n}{1-q} = 1 \cdot \frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$$

- Với $z = \frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$ Sử dụng máy tính Casio tính z

$$\frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)} = -1024 + 1025i$$

Ta thấy $z = -1024 + 1025i = -2^{10} + (2^{10} + 1)i$

$\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

VD6-[Thi thử chuyên KHTN lần 1 năm 2017]

Nếu số phức z thỏa mãn $|z|=1$ thì phần thực của $\frac{1}{1-z}$ bằng :

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. Một giá trị khác

GIẢI

- Đặt số phức $z = a + bi$ thì Môđun của số phức z là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$

- Chọn $a = 0.5 \Rightarrow \sqrt{0.5^2 + b^2} = 1$. Sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE để tìm b

$$\sqrt{0.5^2 + x^2} - 1 = 0$$

$$X = 0.8660254038$$

$$L-R = 0$$

Lưu giá trị này vào b

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

SHIFT RCL 0.00

Math ▲

Ans→B

0.8660254038

- Trở lại chế độ CMPLX để tính giá trị $\frac{1}{1-z}$:

MODE 2 CMPLX 1 Math ▲ 1 - (0 5 + 1 i) =
 $\frac{1}{1-(0.5+Bi)}$
 $\frac{1}{2}+0.8660254038i$

Vậy phần thực của z là $\frac{1}{2} \Rightarrow$ Đáp án chính xác là **A**

VD7-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

Tìm số phức z biết rằng : $(1+i)z - 2\bar{z} = -5+11i$

A. $z = 5-7i$ B. $z = 2+3i$ C. $z = 1+3i$ D. $z = 2-4i$

GIẢI

- Với $z = 5-7i$ thì số phức liên hợp $\bar{z} = 5+7i$. Nếu đáp án A đúng thì phương trình :
 $(1+i)(5-7i) - 2(5+7i) = -5+11i$ (1)
 ➤ Sử dụng máy tính Casio nhập vế trái của (1)

(1 + 5 - 7 i) - 2 (5 + 7 i) =
 $(1+i)(5-7i)-2(5+7i)$
 $2-16i$

Vì $2-16i \neq -5+11i$ nên đáp án **A** sai

- Tương tự như vậy với đáp án **B**

(1 + 2 + 3 i) - 2 (2 - 3 i) =
 $(1+i)(2+3i)-2(2-3i)$
 $-5+11i$

Dễ thấy vế trái (1) = vế phải (1) = $-5+11i$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

VD8-[Đề minh họa của bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Cho số phức $z = a+bi$ thỏa mãn $(1+i)z + 2\bar{z} = 3+2i$. Tính $P = a+b$

A. $P = \frac{1}{2}$ B. $P = 1$ C. $P = -1$ D. $P = -\frac{1}{2}$

GIẢI

- Phương trình $\Leftrightarrow (1+i)z + 2\bar{z} - 3 - 2i = 0$ (1). Khi nhập số phức liên hợp ta nhấn lệnh

SHIFT 2 2
 CMPLX Math ▲
 Conj(

- Sử dụng máy tính Casio nhập vế trái của (1)

(1 + 1 + 2 i) - 3 - 2 i =
 $(1+i)(1+i)+2(1-i)-3-2i$

$$\text{Conjg}(X) - 3 - 2i$$

- X là số phức nên có dạng $X = a + bi$. Nhập $X = 1000 + 100i$ (có thể thay $a; b$ là số khác)

$$\text{CALC } (1 + i)X + 2\text{Conjg}(X)$$

$$(1 + i)X + 2\text{Conjg}(X)$$

$$2897 + 898i$$

Vậy vế trái của (1) bằng $2897 + 898i$. Ta có :

$$\begin{cases} 2897 = 3.1000 - 100 - 3 = 3a - b - 3 \\ 898 = 1000 - 100 - 2 = a - b - 2 \end{cases}$$

Mặt khác đang muốn vế trái $= 0 \Rightarrow \begin{cases} 3a - b - 3 = 0 \\ a - b - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}; b = \frac{-3}{2}$

Vậy $a + b = -1$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

VD9-Số phức $z = \frac{5 + 3i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}}$ có một Argument là :

A. $\frac{\pi}{6}$

B. $\frac{\pi}{4}$

C. $\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{8\pi}{3}$

GIẢI

- Thu gọn z về dạng tối giản $\Rightarrow z = -1 + \sqrt{3}i$

$$\frac{5 + 3i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}}$$

$$\frac{5 + 3i\sqrt{3}}{1 - 2i\sqrt{3}}$$

$$-1 + \sqrt{3}i$$

- Tìm Argument của z với lệnh SHIFT 2 1

$$\text{arg}(-1 + \sqrt{3}i)$$

$$\text{arg}(-1 + \sqrt{3}i)$$

$$\frac{2\pi}{3}$$

Vậy z có 1 Argument là $\frac{2\pi}{3}$. Tuy nhiên khi so sánh kết quả ta lại không thấy có giá trị nào là $\frac{2\pi}{3}$.

Khi đó ta nhớ đến tính chất “Nếu góc α là một Argument thì góc $\alpha + 2\pi$ cũng là một Argument”

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D** vì $\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}$

III) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2 năm 2017]

Cho hai số phức $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 3i$. Tìm số phức $w = (z_1)^2 \cdot z_2$

A. $w = 6 + 4i$

B. $w = 6 - 4i$

C. $w = -6 - 4i$

D. $w = -6 + 4i$

Bài 2-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

Cho số phức $z = a + bi$. Số phức z^{-1} có phần thực là :

A. $a + b$

B. $\frac{a}{a^2 + b^2}$

C. $\frac{-b}{a^2 + b^2}$

D. $a - b$

Bài 3-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 1 năm 2017]

Tìm môđun của số phức $z = 2 - \sqrt{3}i \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}i \right)$ là :

- A. $\frac{\sqrt{103}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{103}}{2}$ C. $\frac{5\sqrt{103}}{2}$ D. Đáp án khác

Bài 4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Cho số phức $z = (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{22}$. Phần thực của số phức z là :

- A. -2^{11} B. $-2^{11} + 2$ C. $-2^{11} - 2$ D. 2^{11}

Bài 5-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Cho số phức $z = 2 - 3i$. Phần ảo của số phức $w = (1+i)z - (2-i)\bar{z}$ là :

- A. $-9i$ B. -9 C. -5 D. $-5i$

Bài 6-[Đề thi Đại học –Cao đẳng khối A năm 2009]

Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn điều kiện $(2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} = -(1 + 3i)^2$. Tìm $P = 2a + b$ A. 3

- B. -1 C. 1 D. Đáp án khác

Bài 7-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2]

Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn điều kiện $(2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} = -(1 + 3i)^2$. Tìm $P = 2a + b$ A. 3

- B. -1 C. 1 D. Đáp án khác

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

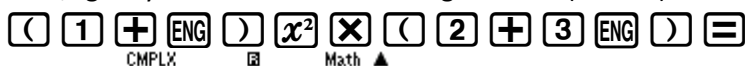
Bài 1-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2 năm 2017]

Cho hai số phức $z_1 = 1 + i, z_2 = 2 + 3i$. Tìm số phức $w = (z_1)^2 \cdot z_2$

- A. $w = 6 + 4i$ B. $w = 6 - 4i$ C. $w = -6 - 4i$ D. $w = -6 + 4i$

GIẢI

- Sử dụng máy tính Casio với chức năng MODE 2 (CMPLX)



$(1+i)^2 \times (2+3i)$

$-6+4i$

Vậy $w = -6 + 4i$ ta chọn **D** là đáp án chính xác

Bài 2-[Thi thử THPT Phan Chu Trinh – Phú Yên lần 1 năm 2017]

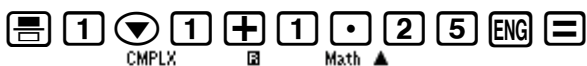
Cho số phức $z = a + bi$. Số phức z^{-1} có phần thực là :

- A. $a + b$ B. $\frac{a}{a^2 + b^2}$ C. $\frac{-b}{a^2 + b^2}$ D. $a - b$

GIẢI

- Vì đề bài mang tính chất tổng quát nên ta phải cá biệt hóa, ta chọn $a = 1; b = 1.25$.

- Với $z^{-1} = \frac{1}{z}$ Sử dụng máy tính Casio



$\frac{1}{1+1.25i}$

$\frac{16}{41} - \frac{20}{41}i$

Ta thấy phần thực số phức z^{-1} là : $\frac{16}{41}$ đây là 1 giá trị dương. Vì ta chọn $b > a > 0$ nên ta thấy ngay đáp số **C** và **D** sai.

Thử đáp số **A** có $a + b = 1 + 1.25 = \frac{9}{4} \neq \frac{16}{41}$ vậy đáp số A cũng sai $\Rightarrow$ Đáp án chính xác là **B**

Bài 3-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 1 năm 2017]

Tìm môđun của số phức $z = 2 - \sqrt{3}i \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}i \right)$ là :

- A. $\frac{\sqrt{103}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{103}}{2}$ C. $\frac{5\sqrt{103}}{2}$ D. Đáp án khác

GIẢI

- Tính số phức $z = 2 - \sqrt{3}i \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}i \right)$

$$2 - \sqrt{3}i \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}i \right)$$

$$5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Vậy $z = 5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

- Dùng lệnh SHIFT HYP tính Môđun của số phức z ta được

$$\left| 5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right|$$

$$\frac{\sqrt{103}}{2}$$

Vậy $|z| = \frac{\sqrt{103}}{2} \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 4-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Cho số phức $z = (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{22}$. Phần thực của số phức z là :

- A. -2^{11} B. $-2^{11} + 2$ C. $-2^{11} - 2$ D. 2^{11}

GIẢI

- Dãy số trên là một cấp số nhân với $U_1 = (1+i)^2$, số số hạng là 21 và công bội là $1+i$. Thu gọn z ta được

$$: z = U_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = (1+i)^2 \cdot \frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$$

- Sử dụng máy tính Casio tính z

$$(1+i)^2 \times \frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$$

$$-2050-2048i$$

Vậy $z = -2050 - 2048i$

$\Rightarrow$ Phần ảo số phức z là $-2050 = -2^{11} - 2 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 5-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 3 năm 2017]

Cho số phức $z = 2 - 3i$. Phần ảo của số phức $w = (1+i)z - (2-i)\bar{z}$ là :

- A. $-9i$ B. -9 C. -5 D. $-5i$

GIẢI

- Dãy số trên là một cấp số nhân với $U_1 = (1+i)^2$, số số hạng là 21 và công bội là $1+i$. Thu gọn z ta được

$$: z = U_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = (1+i)^2 \cdot \frac{1-(1+i)^{21}}{1-(1+i)}$$

- Sử dụng máy tính Casio tính z

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

$$(1+i)^2 \times \frac{1-(1+i)^2}{1-(1+i)} = -2050-2048i$$

Vậy $z = -2050 - 2048i$

$\Rightarrow$ Phần ảo số phức z là $-2048 = -2^{11} \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 6-[Đề thi Đại học -Cao đẳng khối A năm 2009]

Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn điều kiện $(2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} = -(1 + 3i)^2$. Tìm $P = 2a + b$. **A. 3**

B. -1

C. 1

D. Đáp án khác

GIẢI

- Phương trình $\Leftrightarrow (2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} + (1 + 3i)^2 = 0$
- Nhập vế trái vào máy tính Casio và CALC với $X = 1000 + 100i$

$$(2-3i)X+(4+i)CoP = 6392-2194i$$

Vậy vế trái $= 6392 - 2194i$ với $\begin{cases} 6392 = 6.1000 + 4.100 - 8 = 6a + 4b - 8 \\ 2194 = 2.1000 + 2.100 - 6 = 2a + 2b - 6 \end{cases}$

- Để vế trái $= 0$ thì $\begin{cases} 6a + 4b - 8 = 0 \\ 2a + 2b - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -2; b = 5$

Vậy $z = -2 + 5i \Rightarrow P = 2a + b = 1 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 7-[Thi thử chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa lần 2]

Cho số phức $z = a + bi$ thỏa mãn điều kiện $(2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} = -(1 + 3i)^2$. Tìm $P = 2a + b$. **A. 3**

B. -1

C. 1

D. Đáp án khác

GIẢI

- Phương trình $\Leftrightarrow (2 - 3i)z + (4 + i)\bar{z} + (1 + 3i)^2 = 0$
- Nhập vế trái vào máy tính Casio và CALC với $X = 1000 + 100i$

$$(2-3i)X+(4+i)CoP = 6392-2194i$$

Vậy vế trái $= 6392 - 2194i$ với $\begin{cases} 6392 = 6.1000 + 4.100 - 8 = 6a + 4b - 8 \\ 2194 = 2.1000 + 2.100 - 6 = 2a + 2b - 6 \end{cases}$

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 30. BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC.

I) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Các khái niệm thường gặp

- Hệ trục thực ảo gồm có 2 trục vuông góc với nhau : Trục nằm ngang là trục thực, trục đứng dọc là trục ảo
- Số phức $z = a + bi$ khi biểu diễn trên hệ trục thực ảo là điểm $M(a; b)$
- Môđun của số phức $z = a + bi$ là độ lớn của vectơ $\overrightarrow{OM}$

2. Lệnh Caso

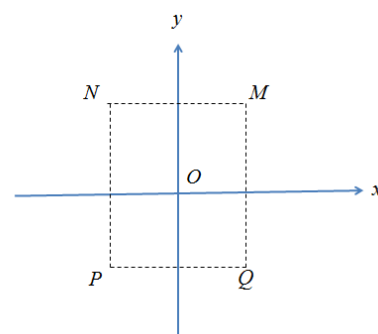
- Để xử lý số phức ta sử dụng lệnh tính số phức MODE 2
- Lệnh giải phương trình bậc hai MODE 5 3
- Lệnh giải phương trình bậc ba MODE 5 4

II) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Câu 31 Đề minh họa THPT Quốc Gia lần 1 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $(1+i)z = 3-i$. Hỏi điểm biểu diễn số phức z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q

A. điểm P B. điểm Q C. điểm M D. điểm N



GIẢI

➤ Cô lập $z = \frac{3-i}{1+i}$

Sử dụng máy tính Casio trong môi trường CMPLX để tìm z

MODE 2 $\frac{3-i}{1+i}$

$1-2i$

$\Rightarrow z = 1-2i$ và điểm biểu diễn z trong hệ trục thực ảo có tọa độ $(1; -2)$. Điểm có thực dương và ảo âm sẽ nằm ở góc phần tư thứ IV

$\Rightarrow$ Điểm phải tìm là Q và đáp án chính xác là **B**

VD2-[Thi thử trung tâm Diệu Hiền – Cần thơ lần 1 năm 2017]

Điểm biểu diễn số phức $z = 7 + bi$ với $b \in \mathbb{R}$, nằm trên đường thẳng có phương trình là :

A. $x = 7$ B. $y = x$ C. $y = x + 7$ D. $y = 7$

GIẢI

➤ Điểm biểu diễn số phức $z = 7 + bi$ là điểm M có tọa độ $M(7; b)$

Ta biết điểm M thuộc đường thẳng d nếu tọa độ điểm M thỏa mãn phương trình đường thẳng d

➤ Thử đáp án A ta có $x = 7 \Leftrightarrow 1.x + 0.y - 7 = 0$. Thế tọa độ điểm M vào ta được :

$1.7 + 0.b - 7 = 0$ (đúng)

Vậy điểm M thuộc đường thẳng $x = 7 \Rightarrow$ Đáp án **A** là chính xác

VD3-[Thi thử Group Nhóm toán – Facebook lần 5 năm 2017]

Các điểm M, N, P lần lượt là điểm biểu diễn cho các số phức

$z_1 = \frac{4i}{i-1}; z_2 = (1-i)(1+2i); z_3 = -1+2i$

A. Tam giác vuông B. Tam giác cân C. Tam giác vuông cân D. Tam giác đều

GIẢI

- Rút gọn z_1 bằng Casio

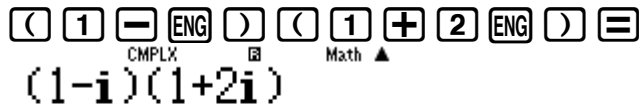


$$\frac{4i}{i-1}$$

$2-2i$

Ta được $z_1 = 2 - 2i$ vậy điểm $M(2; -2)$

- Rút gọn z_2 bằng Casio



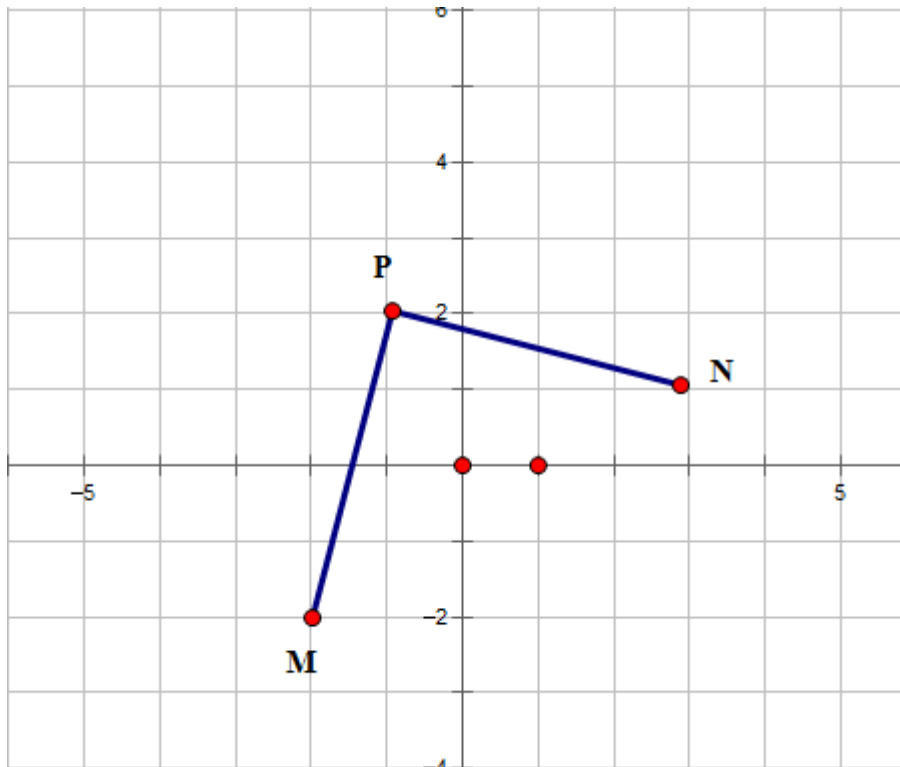
$$(1-i)(1+2i)$$

$3+i$

Ta được $z_2 = 3 + i$ vậy điểm $N(3;1)$

Tương tự $z_2 = -1 + 2i$ và điểm $P(-1;2)$

- Để phát hiện tính chất của tam giác MNP ta nên biểu diễn 3 điểm M, N, P trên hệ trục tọa độ



Dễ thấy tam giác MNP vuông cân tại $P \Rightarrow$ đáp án **C** chính xác

VD4-[Thi thử báo Toán học Tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trong mặt phẳng Oxy , gọi các điểm M, N lần lượt là điểm biểu diễn số phức $z_1 = 1 - i, z_2 = 3 + 2i$.

Gọi G là trọng tâm tam giác OMN , với O là gốc tọa độ. Hỏi G là điểm biểu diễn của số phức nào sau đây.

- A.** $5 - i$ **B.** $4 + i$ **C.** $\frac{4}{3} + \frac{1}{3}i$ **D.** $2 + \frac{1}{2}i$

GIẢI

- Điểm M biểu diễn số phức $z_1 = 1 - i \Rightarrow$ tọa độ $M(1; -1)$

Điểm N biểu diễn số phức $z_2 = 3 + 2i \Rightarrow$ tọa độ $N(3; 2)$

Gốc tọa độ $O(0; 0)$

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

➤ Tọa độ điểm $G\left(\frac{x_M + x_N + x_O}{3}; \frac{y_M + y_N + y_O}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$

Vậy G là điểm biểu diễn của số phức $\frac{4}{3} + \frac{1}{3}i \Rightarrow \mathbf{C}$ là đáp án chính xác

VD5-[Thi thử THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa lần 1 năm 2017]

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , gọi M là điểm biểu diễn số phức $z = 3 - 4i$, điểm M' là điểm biểu diễn số phức $z' = \frac{1+i}{2}z$. Tính diện tích $\Delta OMM'$

A. $S_{\Delta OMM'} = \frac{25}{4}$ B. $S_{\Delta OMM'} = \frac{25}{2}$ C. $S_{\Delta OMM'} = \frac{15}{4}$ D. $S_{\Delta OMM'} = \frac{15}{2}$

GIẢI

➤ Điểm M biểu diễn số phức $z_1 = 3 - 4i \Rightarrow$ tọa độ $M(3; -4)$

Điểm M' biểu diễn số phức $z' = \frac{1+i}{2}z \Rightarrow$ tọa độ $N\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

$$\frac{1+i}{2} \times (3-4i)$$

$$\frac{7}{2} - \frac{1}{2}i$$

Gốc tọa độ $O(0;0)$

➤ Để tính diện tích tam giác OMM' ta ứng dụng tích có hướng của 2 vectơ trong không gian. Ta thêm cao độ 0 cho tọa độ mỗi điểm O, M, M' là xong

$\overrightarrow{OM}(3; -4; 0), \overrightarrow{OM'}\left(\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow S = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}] \right|$

Tính $\left| [\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}] \right|$

$$\text{VctA} \cdot \text{VctB}$$

$$12.5$$

vậy $\left| [\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}] \right| = 12.5 = \frac{25}{2} \Rightarrow S_{OMM'} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OM'}] \right| = \frac{25}{4}$

$\Rightarrow \mathbf{A}$ là đáp án chính xác

VD6-[Đề thi minh họa bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Kí hiệu z_0 là nghiệm phức có phần ảo dương của phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$. Trên mặt phẳng tọa độ, điểm nào dưới đây là điểm biểu diễn số phức $w = iz_0$

A. $M\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ B. $M\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ C. $M\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$ D. $M\left(\frac{1}{4}; 1\right)$

GIẢI

➤ Sử dụng lệnh giải phương trình bậc hai MODE 5 3 để giải phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$

$$X_1 =$$

$$2 + \frac{1}{2}i$$

$$x_2 =$$

$$2 - \frac{1}{2}i$$

Vậy phương trình $4z^2 - 16z + 17 = 0$ có hai nghiệm $z = 2 + \frac{1}{2}i$ và $z = 2 - \frac{1}{2}i$

➤ Để z_0 có phần ảo dương $\Rightarrow z = 2 - \frac{1}{2}i$. Tính $w = z_0 i$

MODE 2 CPLX + 1 v 2 R ENG) ENG =
 $(2 + \frac{1}{2}i)i$
 $-\frac{1}{2} + 2i$

Vậy phương trình $w = -\frac{1}{2} + 2i \Rightarrow$ Điểm biểu diễn số phức w là $M(-\frac{1}{2}; 2)$

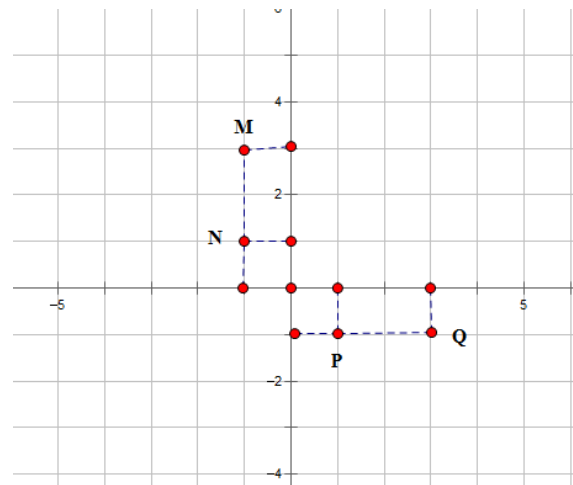
$\Rightarrow$ B là đáp án chính xác

II) BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Cho số phức $z = 2 + i$. Hãy xác định điểm biểu diễn hình học của số phức $w = (1 - i)z$

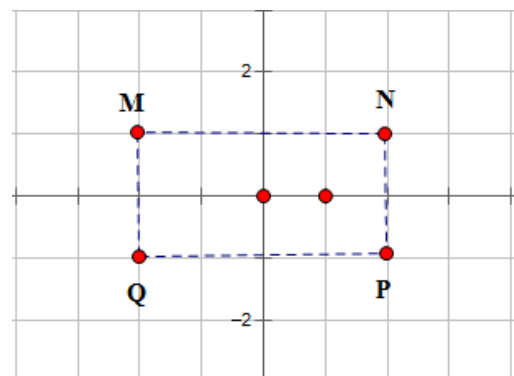
- A. Điểm M B. Điểm N
C. Điểm P D. Điểm Q



Bài 2-[Thi thử facebook nhóm toán lần 5 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $(2 - i)z = 4z + 5$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên.

- A. Điểm N B. Điểm P
C. Điểm M D. Điểm Q



Bài 3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trên mặt phẳng tọa độ các điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $\frac{4}{-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i}$,

$(1-i)(1+2i), -2i^3$ Khi đó tam giác ABC

A. Vuông tại C B. Vuông tại A C. Vuông cân tại B D. Tam giác đều

Bài 4- Các điểm A, B, C, A', B', C' trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số :

$1-i, 2+3i, 3+i$ và

$3i, 3-2i, 3+2i$ có G, G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. G trùng G'

B. Vecto $\overrightarrow{GG'} = (1; -1)$

C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GA'}$

D. Tứ giác $GAG'B$ lập thành một hình bình hành

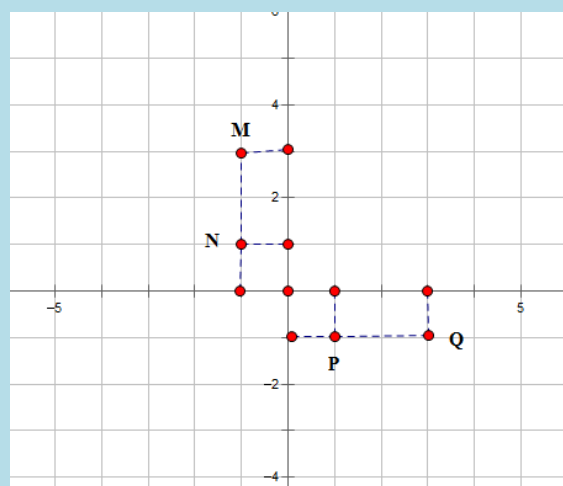
LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên Khoa học tự nhiên lần 2 năm 2017]

Cho số phức $z = 2+i$. Hãy xác định điểm biểu diễn hình học của số phức $w = (1-i)z$

A. Điểm M B. Điểm N

C. Điểm P D. Điểm Q



GIẢI

- Tính số phức $w = (1-i)z$ bằng máy tính Casio

$(1-i)(2+i)$

3-i

Vậy tọa độ của điểm thỏa mãn số phức w là $(3; -1)$. Đây là tọa độ điểm Q

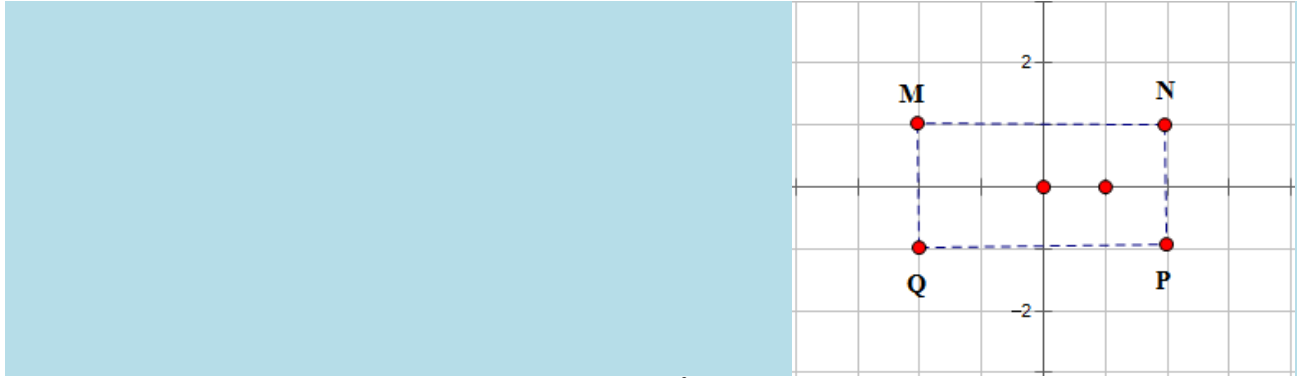
⇒ Đáp số chính xác là **D**

Bài 2-[Thi thử facebook nhóm toán lần 5 năm 2017]

Cho số phức z thỏa mãn $(2-i)z = 4z + 5$. Hỏi điểm biểu diễn của z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên.

A. Điểm N B. Điểm P

C. Điểm M D. Điểm Q



GIẢI

▪ Cô lập $(2-i)z - 4z = 5 \Leftrightarrow -(2+i)z = 5 \Leftrightarrow z = \frac{-5}{2+i}$

▪ Tìm số phức $z = \frac{-5}{2+i}$

$\frac{-5}{2+i}$

$-2+i$

Vậy tọa độ của điểm thỏa mãn số phức z là $(-2;1)$. Đây là tọa độ điểm M

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 3-[Thi thử báo Toán học tuổi trẻ lần 4 năm 2017]

Trên mặt phẳng tọa độ các điểm A, B, C lần lượt là điểm biểu diễn của số phức $\frac{4}{-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i}$,

$(1-i)(1+2i)$, $-2i^3$ Khi đó tam giác ABC

A. Vuông tại C B. Vuông tại A C. Vuông cân tại B D. Tam giác đều

GIẢI

▪ Rút gọn $\frac{4}{-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i}$ được $-2-4i$ vậy tọa độ điểm $A(-2;-4)$

$\frac{4}{-\frac{2}{5} + \frac{4}{5}i}$

$-2-4i$

$-2-4i$

▪ Rút gọn $(1-i)(1+2i)$ được $3+i$ vậy tọa độ điểm $B(3;1)$

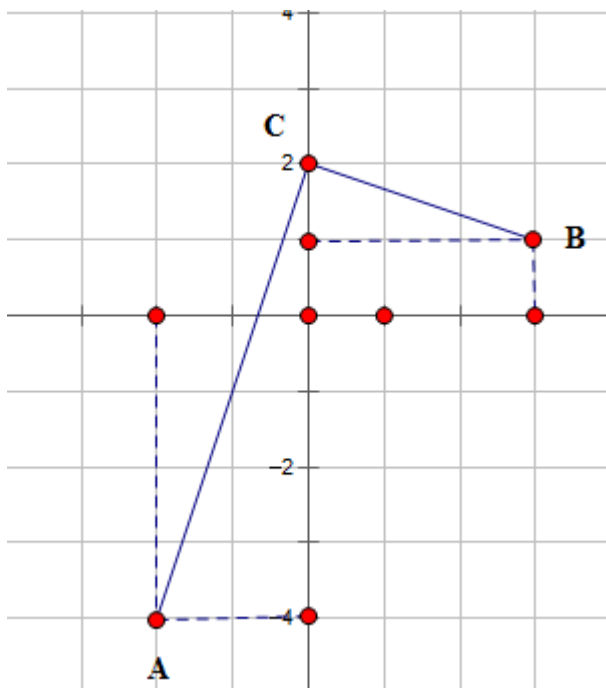
$(1-i)(1+2i)$

$3+i$

$3+i$

▪ Rút gọn $-2i^3 = -2i.i^2 = 2i$ vậy tọa độ điểm $C(0;2)$

▪ Để phát hiện tính chất của tam giác ABC ta chỉ cần biểu diễn trên hệ trục tọa độ là thấy ngay



Dễ thấy tam giác ABC vuông tại C

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

Bài 4-Các điểm A, B, C, A', B', C' trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số :

$1-i, 2+3i, 3+i$ và

$3i, 3-2i, 3+2i$ có G, G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và $A'B'C'$. Khẳng định nào sau đây đúng

A. G trùng G'

B. Vectơ $\overrightarrow{GG'} = (1; -1)$

C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{GA'}$

D. Tứ giác $GAG'B$ lập thành một hình bình hành

GIẢI

- Ta có tọa độ các đỉnh $A(1; -1), B(2; 3), C(3; 1) \Rightarrow$ Tọa độ trọng tâm $G(2; 1)$

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 2 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = 1 \end{cases}$$

- Ta có tọa độ các đỉnh $A'(0; 3), B'(3; -2), C'(3; 2) \Rightarrow$ Tọa độ trọng tâm $G'(2; 1)$

$$\begin{cases} x_{G'} = \frac{x_{A'} + x_{B'} + x_{C'}}{3} = 2 \\ y_{G'} = \frac{y_{A'} + y_{B'} + y_{C'}}{3} = 1 \end{cases}$$

Rõ ràng $G \equiv G' \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**