# **BÀI 33. ĐẠO HÀM CẤP HAI**

1. **KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM**

Chuyển động của một vật gắn trên con lắc lò xo (khi bỏ qua ma sát và sức cản không khí) được cho bởi phương trình sau:



ở đó  tính bằng centimét và thời gian  tính bằng giây. Tìm gia tốc tức thời của vật tại thời điểm  giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

**1. KHÁI NIỆM ĐẠO HÀM CẤP HAI**

**HĐ1.** Nhận biết đạo hàm cấp hai của một hàm số

1. Gọi  là đạo hàm của hàm số  Tính .
2. Tính đạo hàm của hàm số 

**Lời giải**

a) Với hàm số , ta có:

đạo hàm cấp hai của  :



b) Giả sử  là đạo hàm của hàm số .

 Ta có: 

Để tính đạo hàm của hàm số , ta tính đạo hàm của  theo công thức:



Giả sử hàm số  có đạo hàm tại mỗi điểm . Nếu hàm số  lại có đạo hàm tại  thì ta gọi đạo hàm của  là đạo hàm cấp hai của hàm số  tại  kí hiệu là  hoặc 

**Ví dụ 1.** Tính đạo hàm cấp hai của hàm số . Từ đó tính .

**Lời giải**

Ta có: 



Vậy đạo hàm cấp hai của hàm số đã cho là .

Khi đó ta có: .

**Luyện tập 1.** Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a)  b) .

**Lời giải**

a) 

 là 

b) 

**2.Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI**

Xét một chuyển động có vận tốc tức thời . Cho số gia  tại  và . Tỉ số  gọi là gia tốc trung bình trong khoảng thời gian . Giới hạn của gia tốc trung bình (nếu có) khi  dần tới 0 được gọi là gia tốc tức thời của chuyền động tại thời điểm , kí hiệu là .

 Như vậy 

**HĐ2. Nhận biết ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai**

Xét một chuyển động có phương trình .

a) Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm .

b) Tính gia tốc tức thời tại thời điểm .

**Lời giải**

a) Để tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm , ta tính đạo hàm cấp nhất của  theo :

b) Để tính gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm , ta tính đạo hàm cấp hai của  theo  :



**Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai**

Một chuyển động có phương trình  thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số  là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có: 

**Ví dụ 2.** Giải bài toán trong tình huống mở đầu.

**Lời giải**

Vận tốc của vật tại thời điểm  là



Gia tốc tức thời của vật tại thời điểm  là



Tại thời điểm , gia tốc của vật là



**Vận dụng.** Một vật chuyển động thẳng có phương trình  (  tính bằng mét,  tính bằng giây). Tìm gia tốc của vật tại thời điểm  giây.

**Lời giải**

Đạo hàm cấp một của  theo  :

Đạo hàm cấp hai của  theo  :

Vậy, gia tốc của vật tại thời điểm  giây là:

## **B. PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP**

## **Dạng 1: Tính đạo hàm cấp cao của hàm số**

### **1. Phương pháp**

* **Tính đạo hàm cấp 1:** f’(x)
* **Tính đạo hàm cấp 2:**

**2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng**

**Ví dụ 1:**  Tính đạo hàm cấp hai của hàm số 

**Hướng dẫn giải**

 thì  do đó: 

**Ví dụ 2:**  Tính đạo hàm cấp hai của hàm số 

**Hướng dẫn giải**

 thì  Do đó 

**Ví dụ 3:** Cho hàm số  Giải 

**Hướng dẫn giải**

 thì 

Do đó 

**Ví dụ 4:**  Cho hàm số  Tính 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

**Ví dụ 5:**  Cho hàm số  Tính 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

Lại có 

Vậy: 

**Ví dụ 6:**  Cho hàm số Tính 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

Vậy: 

**Ví dụ 7:**  Cho hàm số  Tính 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

Vậy:



**Ví dụ 8:**  Cho hàm số Tính 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 



**Ví dụ 9:**  Cho hàm số . Giải phương trình 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

Phương trình 

 

**Ví dụ 10:**  Cho hàm số: 

Tìm m sao cho  với mọi 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 



Vì 

Vậy bất phương trình (\*) luôn nghiệm đúng  

**Ví dụ 11:**  Cho hàm số  Giải bất phương trình 

**Hướng dẫn giải**

Ta có: 

Vậy 

**Ví dụ 12 :** Hàm số  có . Tính .

**Lời giải**

Ta có :.

.

.

.

Do đó .

## **Dạng 2: Ý nghĩa vật lý của đạo hàm cấp hai**

**1. Phương pháp**

Ý nghĩa của đạo hàm cấp hai: Gia tốc tức thời  tại thời điểm  là đạo hàm cấp 2 của hàm số .

**2. Các ví dụ rèn luyện kĩ năng**

**Câu 1:** Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình : , trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính gia tốc của chuyển động khi .

**Lời giải**

* Gia tốc chuyển động tại  là 
* Ta có: 
* .

**Câu 2:** Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình , trong đó  tính bằng giây và  tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

**Lời giải**

* Vận tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp một của quãng đường: 
* Gia tốc của chuyển động chính là đạo hàm cấp hai của quãng đường: 
* Gia tốc triệt tiêu khi  .
* Khi đó vận tốc của chuyển động là .

**Câu 3:** Một chất điểm chuyển động theo quy luật  với  là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động,  là quãng đường đi được trong khoảng thời gian . Tính thời điểm  tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

**Lời giải**

 Ta có  có đồ thị là Parabol, do đó 

## **C. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA**

**Bài 9.13.** Cho hàm số . Tính .

**Lời giải**



Tính giá trị của  tại điểm : 

**Bài 9.14.** Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) ; b) .

**Lời giải**

a) 



b) 



**Bài 9.15.** Cho hàm số  là hằng số). Tìm  biết  và .

**Lời giải**

Ta có 



Vì 



Vậy



**Bài 9.16.** Cho hàm số . Chứng minh rằng  với mọi .

**Lời giải**









Do đó, với mọi giá trị của , ta có: 

**Bài 9.17.** Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi , trong đó  tính bằng centimét và  tính bằng giây. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm  giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

 **Lời giải**

Đạo hàm của  theo  : 

Đạo hàm cấp hai của  theo  : 

Tại  giây: 

## **D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

1. Đạo hàm cấp hai của hàm số  bằng biểu thức nào sau đây?

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Lời giải**

**CHỌN C**

 thì , do đó 

1. Đạo hàm cấp hai của hàm số  bằng biểu thức nào sau đây?

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Lời giải**

**CHỌN C**

 thì . Do đó .

1. Cho hàm số  Tính 

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Lời giải**

**CHỌN A**

Ta có: 

1. Cho hàm số  Tính 

**A. ** **B.** 0. **C. ** **D. **

**Lời giải**

**CHỌN B**

Ta có: 

.

1. Cho hàm số  Tính 

**A.** 27. **B.** 81. **C.** 96. **D.** 108.

**Lời giải**

**CHỌN D**

Ta có: Vậy 

1. Cho hàm số  Tính 

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Lời giải**

**CHỌN B**

Ta có: 

Vậy:



1. Cho hàm số  Giải bất phương trình

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Lời giải**

**CHỌN A**

Ta có: .



1. Cho hàm số Giải bất phương trình 

**A. ** **B. ** **C. ** **D.** Vô nghiệm.

**Lời giải**

**CHỌN A**

Ta có: 

Vậy 

1. Cho hàm số Đạo hàm cấp 2 của f là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Lời giải**

**CHỌN B**



1. Cho hàm số: 

Tìm m để phương trình  có hai nghiệm phân biệt.

**A. ** **B. **

**C. ** **D. **

**Lời giải**

**CHỌN D**

Ta có: 

Phương trình  có hai nghiệm phân biệt hay phương trình:  có hai nghiệm phân biệt.



1. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình 

(t: tính bằng giây, s: tính bằng mét).

Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** Vận tốc của chuyển động khi  là 

**B.** Vận tốc của chuyển động khi  là 

**C.** Gia tốc của chuyển động khi  là 

**D.** Gia tốc của chuyển động khi  là 

**Lời giải**

**CHỌN C**

 



 



1. Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: , trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi  là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Lời giải**

**CHỌN D**

Gia tốc của chuyển động khi  bằng 

 nên 

1. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình:

 (t: tính bằng giây, s tính bằng mét).

Khẳng định nào sau đây là đúng?

**A.** Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi  hoặc 

**B.** Giatốc của chuyển động tại thời điểm  là 

**C.** Gia tốc của chuyển động tại thời điểm  là 

**D.** Gia tốc của chuyển động bằng 0 khi 

**Lời giải**

**CHỌN C**

 



 



1. Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình: , trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi  là:

**A. ** **B. ** **C. ** **D. **

**Lời giải**

**CHỌN B**

Gia tốc của chuyển động khi  bằng 

 nên .

1. Phương trình chuyển động của một chất điểm được biểu thị bởi công thức , trong đó  và  tính bằng giây ,  tính bằng mét . Tìm gia tốc  của chất điểm tại thời điểm .

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn A**

Theo ứng dụng đạo hàm của hàm số có:

 và .

1. Một vật chuyển động có phương trình , *t* là thời gian tính bằng giây. Gia tốc của vật tại thời điểm là

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

**Lời giải**

**Chọn A**







Gia tốc của vật tại thời điểm là 

1. Một chất điểm chuyển động có phương trình  (  là thời gian tính bằng giây). Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất là

**A.** . **B.** . **C.** . **D.** .

**Lời giải**

**Chọn B**

Vận tốc của chất điểm có phương trình là: .

Vận tốc của chất điểm đạt GTLN khi .

Gia tốc của chất điểm có phương trình là: .

Tại thời điểm vận tốc đạt GTLN thì gia tốc bằng .

1. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình  trong đó t được tính bằng giây và  được tính bằng mét. Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm gia tốc bằng không là

**A.  B.  C.  D. **

**Lời giải**

**Chọn C**

Ta có, gia tốc tức thời của chuyển động bằng:  Thời điểm gia tốc bằng không là: Vậy khi đó vận tốc tức thời của chuyển động bằng  vậy chọn C

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

https://www.vnteach.com