

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 14

Câu 41: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm tích các phần tử của S .

- A. 2. B. $\frac{1}{5}$. C. $-\frac{1}{5}$. D. -2.

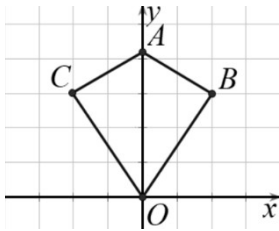
Lời giải

Chọn C

Để hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 5$ có ba điểm cực trị thì $y' = 0$ phải có ba nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4m^2x = 4x(x^2 - m^2) \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \\ x = -m \end{cases} \quad (m \neq 0)$$

Ba điểm cực trị là $A(0; m^4 + 5), B(m; 5), C(-m; 5)$.



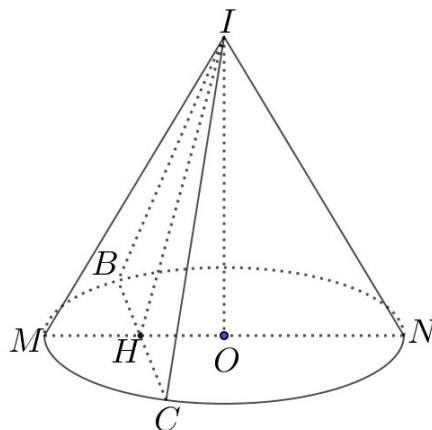
Ba điểm A, B, C và gốc tọa độ $O(0;0)$ tạo thành tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi $\angle B + \angle C = \pi$
 $\Leftrightarrow \angle B = \angle C = \frac{\pi}{2}$, $\Leftrightarrow \overline{BA} \cdot \overline{BO} = 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m^4 = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{5}$. Vậy S có 2 phần tử và có tích bằng $-\frac{1}{5}$.

Câu 42: Cắt hình nón đỉnh I bởi một mặt phẳng đi qua trục hình nón ta được một tam giác vuông cân có cạnh huyền bằng $a\sqrt{2}$; BC là dây cung của đường tròn đáy hình nón sao cho mặt phẳng (IBC) tạo với mặt phẳng đáy hình nón một góc 60° . Tính theo a diện tích S của tam giác IBC .

- A. $S = \frac{\sqrt{2}a^2}{6}$. B. $S = \frac{a^2}{3}$. C. $S = \frac{\sqrt{2}a^2}{3}$. D. $S = \frac{2a^2}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Giả sử thiết diện là tam giác $IMN \Rightarrow IM = IN = a; OB = OC = OM = ON = OI = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (với O là tâm của đường tròn đáy hình nón).
Gọi H là trung điểm BC .

Ta có
$$IH = \frac{OI}{\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; OH = IH \cdot \cos 60^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow HC = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$$

Vậy
$$S_{\Delta IBC} = IH \cdot HC = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{2}a^2}{3}$$

Câu 43: Trên tập hợp số phức, xét phương trình $z^2 - (a-3)z + a^2 + a = 0$ (a là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của a để phương trình có hai nghiệm phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$?

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Ta có
$$\Delta = (a-3)^2 - 4(a^2 + a) = -3a^2 - 10a + 9$$

TH1: $\Delta \geq 0$, khi đó $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ khi phương trình có nghiệm bằng 0, hay

$$a^2 + a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = -1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

TH2: $\Delta < 0$, khi đó
$$z_{1,2} = \frac{a-3 \pm i\sqrt{3a^2+10a-9}}{2}$$

Khi đó $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow (a-3)^2 = 3a^2 + 10a - 9 \Leftrightarrow 2a^2 + 16a - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -9 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$

Câu 44: Cho hàm số $f(x)$ có $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ và $f'(x) = \frac{2}{\sin^2 x} + 1, \forall x \in (0, \pi)$. Khi đó $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ bằng

A. $\frac{\pi^2}{9} - 2\ln 2.$

B. $\frac{\pi^2}{9} - 2\ln \frac{1}{2}.$

C. $\frac{5\pi^2}{36} - 2\ln 2.$

D. $-\frac{\pi^2}{9} + \ln \frac{1}{2}.$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) = \frac{2}{\sin^2 x} + 1, \forall x \in (0; \pi) \Rightarrow f(x) = -2\cot x + x + C, \forall x \in (0; \pi)$

Mà $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 + \frac{\pi}{2} + C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = -2\cot x + x.$

Xét $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (-2\cot x + x) dx = -2\ln|\sin x| + \frac{1}{2}x^2 \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} + 2\ln \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{72} = \frac{\pi^2}{9} - 2\ln 2.$

Câu 45: Cho hai hàm số $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + 2x$ và $g(x) = mx^3 + nx^2 - 2x$ với $a, b, c, m, n \in \mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-2, -1, 3$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = f'(x)$ và $g'(x)$ bằng

A. $\frac{131}{4}.$

B. $\frac{131}{6}.$

C. $\frac{125}{12}.$

D. $\frac{125}{6}.$

Lời giải

Chọn B

Do hàm số $y = f(x) - g(x)$ có ba điểm cực trị là $-2, -1, 3$ nên ta có:

$$f'(x) - g'(x) = 4a(x+2)(x+1)(x-3)$$

Mà $f'(x) - g'(x) = 4ax^3 + (3b - 3m)x^2 + (2c - 2n)x + 4$.

Đồng nhất hệ số, ta được: $-24a = 4 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{6} \Rightarrow f'(x) - g'(x) = -\frac{2}{3}(x+2)(x+1)(x-3)$

Vậy: $S = \int_{-2}^3 |f'(x) - g'(x)| dx = \frac{2}{3} \int_{-2}^3 |(x+2)(x+1)(x-3)| dx = \frac{131}{6}$

Câu 46: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2(a+4b)x + 2(a-b+c)y + 2(b-c)z + d = 0$, tâm I nằm trên mặt phẳng (α) có định. Biết rằng $4a+b-2c=4$. Khoảng cách từ điểm $D(1;2;-2)$ đến mặt phẳng (α) bằng

A. $\frac{9}{\sqrt{15}}.$

B. $\frac{1}{\sqrt{314}}.$

C. $\frac{1}{\sqrt{915}}.$

D. $\frac{15}{\sqrt{23}}.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $I(a+4b; -a+b-c; -b+c)$.

Giả sử $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$, vì $I \in (\alpha)$ nên ta có:

$$A(a + 4b) + B(-a + b - c) + C(-b + c) + D = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - B)a + (4A + B - C)b + (-B + C)c + D = 0$$

$$\begin{cases} A - B = 4 \\ 4A + B - C = 1 \\ -B + C = -2 \\ D = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{4} \\ B = -\frac{17}{4} \\ C = -\frac{25}{4} \\ D = -4 \end{cases}$$

Theo bài ra $4a + b - 2c = 4$, nên đồng nhất hệ số ta được:

Suy ra $(\alpha): -\frac{1}{4}x - \frac{17}{4}y - \frac{25}{4}z - 4 = 0$ hay $(\alpha): x + 17y + 25z + 16 = 0$

Vậy
$$d(D, (\alpha)) = \frac{|1 + 17 \cdot 2 + 25(-2) + 16|}{\sqrt{1^2 + 17^2 + 25^2}} = \frac{1}{\sqrt{915}}$$

- Câu 47:** Giả sử $(x; y)$ là cặp số nguyên thỏa mãn đồng thời $8 \leq x \leq 2022$ và $2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y$. Tổng các giá trị của y bằng
- A. 60. B. 63. C. 2022. D. 49.

Lời giải

Chọn A

$$2^y - \log_2(x + 2^{y-1}) = 2x - y \Leftrightarrow 2 \cdot 2^y + y = 2(x + 2^{y-1}) + \log_2(x + 2^{y-1})$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^y + \log_2 2^y = 2(x + 2^{y-1}) + \log_2(x + 2^{y-1})$$

Hàm số $f(t) = 2t + \log_2 t$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

Do vậy, $f(2^y) = f(x + 2^{y-1}) \Leftrightarrow 2^y = x + 2^{y-1} \Leftrightarrow x = 2^{y-1}$

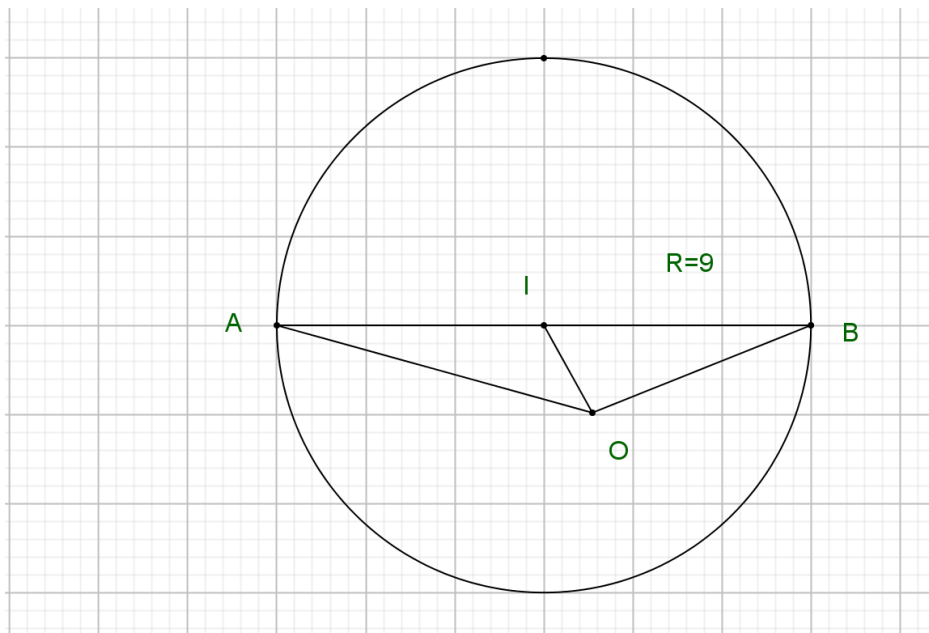
$$8 \leq x \leq 2022 \Rightarrow 8 \leq 2^{y-1} \leq 2022 \Leftrightarrow 3 \leq y - 1 \leq 10 \Leftrightarrow 4 \leq y \leq 11$$

Vậy $4 + 5 + 6 + \dots + 11 = 60$

- Câu 48:** Gọi S là tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z + 1 - 2i| = 9$ và $|z - 2 + mi| = |z - m + i|$, (trong đó $m \in \mathbb{R}$). Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1 - z_2|$ lớn nhất, khi đó giá trị của $|z_1 + z_2|$ bằng
- A. $2\sqrt{5}$. B. 6. C. $\sqrt{5}$. D. 18.

Lời giải

Chọn A



Đặt $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z + 1 - 2i| = 9 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 81$.

$$|z - 2 + mi| = |z - m + i| \Leftrightarrow |x - 2 + (y - m)i| = |x - m + (y + 1)i| \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - m)^2 = (x - m)^2 + (y + 1)^2 \\ \Leftrightarrow 2(2 - m)x + 2(m + 1)y - 3 = 0$$

Gọi z_1, z_2 là hai số phức thuộc S sao cho $|z_1 - z_2|$ lớn nhất

Giả sử A, B là 2 điểm biểu diễn z_1, z_2 . Khi đó $|z_1 - z_2|$ lớn nhất khi AB là đường kính
 $|z_1 - z_2| = AB = 18$.

$$\text{Ta có } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = 4OI^2 + 2R^2 \Rightarrow |z_1 + z_2| = 2OI = 2\sqrt{5}$$

Câu 49: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0; 0; -2)$ và $B(3; 4; 1)$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường tròn giao tuyến của hai mặt cầu $(S_1): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 16$ với $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 10 = 0$. M, N là hai điểm thuộc (P) sao cho $MN = 1$. Giá trị nhỏ nhất của $AM + BN$ là

A. $\sqrt{34} - 1$.

B. $\sqrt{34}$.

C. 5.

D. 4

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 10 = 0 \\ (x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 1)^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow z = 0$$

Vậy (P) là mặt phẳng (Oxy) .

Gọi $A'(0; 0; 0)$ và $B'(3; 4; 0)$ là hình chiếu của A, B trên mặt phẳng Oxy .

Ta có $A'M + MN + NB' \geq A'B' \Leftrightarrow A'M + NB' \geq 5 - 1 = 4$

Áp dụng bất đẳng thức Minkowski:

$$AM + BN = \sqrt{AA'^2 + A'M^2} + \sqrt{BB'^2 + B'N^2} \geq \sqrt{(AA' + BB')^2 + (A'M + B'N)^2} \geq 5$$

Đẳng thức xảy ra khi A', M, N, B' thẳng hàng và $\frac{AA'}{A'M} = \frac{BB'}{B'N}$.

Câu 50: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2019; 2019]$ của tham số thực m để hàm số $y = |x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

A. 4039.

B. 4037.

C. 2019.

D. 2016.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x$ trên khoảng $(0; 2)$

$$f'(x) = 3x^2 - 6(m+2)x + 3m(m+4) = 3[x^2 - 2(m+2)x + m(m+4)]$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m + 4 \end{cases}$$

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ luôn đi qua điểm $O(0; 0)$.

Trường hợp 1: Nếu $m > 0$

x	$-\infty$	0	m	$m+4$	$+\infty$
$f(x)$					
$ f'(x) $					

Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2) \Leftrightarrow (0; 2) \subset (0; m) \Leftrightarrow m \geq 2$

Kết hợp với $m > 0$, ta có $m \geq 2$.

Trường hợp 2: Nếu $m \leq 0 < m+4 \Leftrightarrow -4 < m \leq 0$

x	$-\infty$	m	0	$m+4$	$+\infty$
$f(x)$					
$ f(x) $					

Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2) \Leftrightarrow (0; 2) \subset (0; m+4) \Leftrightarrow m+4 \geq 2$
 $\Leftrightarrow m \geq -2$

Kết hợp với $-4 < m \leq 0$, ta có $-2 \leq m \leq 0$.

Trường hợp 3: Nếu $m+4 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -4$

x	$-\infty$	m	$m+4$	0	$+\infty$
$f(x)$					
$ f(x) $					

Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y = |f(x)|$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến

trên khoảng $(0; 2)$ với mọi $m \leq -4$. Vậy $\begin{cases} m \geq 2 \\ -2 \leq m \leq 0 \\ m \leq -4 \end{cases}$

Mà m nguyên thuộc khoảng $[-2019; 2019]$ nên có 4037 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.