

MỤC LỤC

I	HỌC SINH GIỎI TỈNH 9	2
II	HỌC SINH GIỎI HUYỆN 9	68
III	HỌC SINH GIỎI HUYỆN 8	86
IV	HỌC SINH GIỎI HUYỆN 7	191
V	THI VÀO 10 KHÔNG CHUYÊN	225
VI	THI VÀO 10 CHUYÊN	267

HỌC SINH GIỎI TỈNH 9

DANH SÁCH ĐỀ THI

1	Năm học 2018-2019	3
2	Năm học 2017-2018	8
3	Năm học 2016-2017	.16
4	Năm học 2015-2016	.23
5	Năm học 2014-2015	.29
6	Năm học 2013-2014	.34
7	Năm học 2012-2013	.41
8	Năm học 2011-2012	.47
9	Năm học 2010-2011	.52
10	Năm học 2009-2010	.57
11	Năm học 2008-2009	.63

Bài 1 (4 điểm) ✓

1. Rút gọn biểu thức :

$$P = \left(\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^3} - 2\sqrt{2b^3}} - \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{2ab} + 2b} \right) \left(\frac{\sqrt{a^3} + 2\sqrt{2b^3}}{2b + \sqrt{2ab}} - \sqrt{a} \right)$$

với $a \geq 0, b > 0, a \neq 2b$

2. Cho hàm số $y = (m^2 - 4m - 4)x + 3m - 2$ có đồ thị là d . Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng d cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A, B sao cho tam giác OAB có diện tích là 1cm^2 , O là gốc tọa độ, đơn vị đo trên trục là cm

Lời giải

1.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{2(a+b)}{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})(a + \sqrt{2ab} + 2b)} - \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{2ab} + 2b} \right) \left(\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{2b})(a - \sqrt{2ab} + 2b)}{\sqrt{2b}(\sqrt{a} + \sqrt{2b})} - \sqrt{a} \right) \\ &= \frac{2(a+b) - \sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{2b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})(a + \sqrt{2ab} + 2b)} \cdot \frac{(a - \sqrt{2ab} + 2b) - \sqrt{2ab}}{\sqrt{2b}} \\ &= \frac{a + \sqrt{2ab} + 2b}{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})(a + \sqrt{2ab} + 2b)} \cdot \frac{(a - \sqrt{2b})^2}{\sqrt{2b}} \\ &= \frac{a - \sqrt{2b}}{\sqrt{2b}} \end{aligned}$$

2.

d cắt trục tung và trục hoành tại 2 điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow m^2 - 4m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2 \pm 2\sqrt{2}$
 Với điều kiện đó, ta có $A\left(\frac{2-3m}{m^2-4m-4}; 0\right)$ và $B(0; 3m-2)$. Từ đó :

$$\begin{aligned} S_{AOB} = 1 &\Leftrightarrow OA \cdot OB = 2 \\ &\Leftrightarrow \left| \frac{2-3m}{m^2-4m-4} \cdot (3m-2) \right| = 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (3m-2)^2 = 2(m^2-4m-4) \\ (3m-2)^2 = -2(m^2-4m-4) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 7m^2 - 4m + 12 = 0 \\ 11m^2 - 20m - 4 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{2}{11} \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn}) \end{aligned}$$

Vậy $m = 2$ và $m = -\frac{2}{11}$ là các giá trị cần tìm của m

Bài 2 (4 điểm) ✓

1. Cho phương trình $x^2 - (3m - 2)x + 2m^2 - 5m - 3 = 0$. Tìm m để phương trình có ít nhất 1 nghiệm dương.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{3y + 1} = \sqrt{x} + \sqrt{x + 2y} \\ x^3 - 3x + 2 = 2y^3 - y^2 \end{cases}$$

Lời giải**1.**

Phương trình $x^2 - (3m - 2)x + 2m^2 - 5m - 3 = 0$ có 2 nghiệm $x_1 = m - 3$ và $x_2 = 2m + 1$
Do đó, phương trình đã cho có ít nhất 1 nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m - 3 > 0 \\ 2m + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m > -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$$

Vậy $m > -\frac{1}{2}$ là các giá trị cần tìm của m

2.

$$\begin{cases} \sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{3y + 1} = \sqrt{x} + \sqrt{x + 2y} & (*) \\ x^3 - 3x + 2 = 2y^3 - y^2 & (**) \end{cases}$$

Điều kiện : $x \geq 0; 3y + 1 \geq 0; x + 2y \geq 0; 2x - y - 1 \geq 0$

Xét (*) có :

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow (\sqrt{2x - y - 1} + \sqrt{3y + 1})^2 = (\sqrt{x} + \sqrt{x + 2y})^2 \\ &\Leftrightarrow (2x - y - 1)(3y + 1) = x(x + 2y) \\ &\Leftrightarrow (x - y - 1)(3y - x + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1 \\ x = 3y + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

• Nếu $x = y + 1$, thay vào (**) ta có :

$$\begin{aligned} &(y + 1)^3 - 3(y + 1) + 2 - 2y^3 + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -y^3 + 4y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

• Nếu $x = 3y + 1$, thay vào (**) ta có :

$$\begin{aligned} &(3y + 1)^3 - 3(3y + 1) + 2 - 2y^3 + y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 25y^3 + 28y^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow y^2(25y + 28) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \quad (\text{vì } 3y + 1 \geq 0) \\ &\Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm là $(x, y) \in \{(5, 4); (1, 0)\}$

Bài 3 (4 điểm) ✓

- Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a+c)(b+c) = 4c^2$.
Tìm GTLN, GTNN của biểu thức $P = \frac{a}{b+3c} + \frac{b}{a+3c} + \frac{ab}{bc+ca}$
- Tìm số nguyên tố p thỏa mãn $p^3 - 4p + 9$ là số chính phương

Lời giải

1.

$$(a+c)(b+c) = 4c^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c} + 1\right) \left(\frac{b}{c} + 1\right) = 4$$

$$\text{Đặt } 0 < x = \frac{a}{c}; 0 < y = \frac{b}{c} \text{ thì } \begin{cases} (1+x)(1+y) = 4 & (*) \\ P = \frac{x}{y+3} + \frac{y}{x+3} + \frac{xy}{x+y} & (**) \end{cases}$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow xy = 3 - (x+y)$$

$$\text{Từ } (**) \Rightarrow P = \frac{(x+y)^2 + 3(x+y) - 2xy}{xy + 3(x+y) + 9} + \frac{xy}{x+y} = \frac{(x+y)^2 + 5(x+y) - 6}{2(x+y) + 12} + \frac{3 - (x+y)}{x+y}$$

Từ (*) ta có :

$$(1+x+1+y)^2 \geq 4(1+x)(1+y) = 16 \Rightarrow x+y \geq 2 \text{ (vì } x, y > 0)$$

$$\text{Lại có : } 0 < xy = 3 - (x+y) \Rightarrow x+y < 3$$

Do đó, nếu đặt $t = x+y$ thì $2 \leq t < 3$ và ta có :

$$P = \frac{t^2 + 5t - 6}{2t + 12} + \frac{3-t}{t} = \frac{t}{2} + \frac{3}{t} - \frac{3}{2} = \frac{(t-2)(t-3)}{2t} + 1$$

$$\text{Theo AM-GM : } P = \frac{t}{2} + \frac{3}{t} - \frac{3}{2} \geq 2\sqrt{\frac{t}{2} \cdot \frac{3}{t}} - \frac{3}{2} = \sqrt{6} - \frac{3}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \frac{t}{2} = \frac{3}{t} \Leftrightarrow t = \sqrt{6} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \sqrt{6} \\ \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c} = 3 - \sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = \sqrt{6}c \\ ab = (3 - \sqrt{6})c^2 \end{cases}$$

$$\text{Lại có : } P = \frac{(t-2)(t-3)}{2t} + 1 \leq 1 \text{ (vì } 2 \leq t < 3)$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 2c \\ ab = c^2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \text{Max}P = 1 \text{ và } \text{Min}P = \sqrt{6} - \frac{3}{2}$$

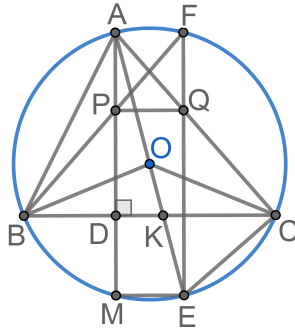
Bài 4 (7 điểm) ✓

1. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) ($AB < AC$) và đường cao AD . Vẽ đường kính AE của (O) .
 - a. Chứng minh rằng $AD.AE = AB.AC$
 - b. Vẽ dây AF của (O) song song với BC , EF cắt AC tại Q , BF cắt AD tại P . Chứng minh rằng $PQ \parallel BC$
 - c. Gọi K là giao điểm của AE và BC . Chứng minh rằng $AB.AC - AD.AK = \sqrt{BD.BK.CD.CK}$
2. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $\widehat{ABC} = 20^\circ$. Các điểm E và F lần lượt nằm trên các cạnh AC, AB sao cho $\widehat{ABE} = 10^\circ$ và $\widehat{ACF} = 30^\circ$. Tính số đo của $\widehat{CFE}$

Lời giải

1.

a. Ta có $\triangle ABD \sim \triangle AEC \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AE} \Rightarrow AD.AE = AB.AC$



b.

Ta có $\begin{cases} \widehat{PFQ} = \widehat{BAE} \\ \widehat{BAE} = \widehat{PAQ} \end{cases} \Rightarrow \widehat{PFQ} = \widehat{PAQ} \Rightarrow AFQP$ là tứ giác nội tiếp
 $\Rightarrow \widehat{FPQ} = \widehat{FAQ} = \widehat{FBC} \Rightarrow PQ \parallel BC$

c.

Giả sử AD cắt (O) tại M . Khi đó $DK \parallel ME \Rightarrow \frac{AD}{DM} = \frac{KA}{KE} \Rightarrow AD.KE = DM.KA$

Ta có $\begin{cases} BD.DC = AD.DM \\ BK.CK = KA.KE \end{cases} \Rightarrow BD.BK.CD.CK = AD.DM.KA.KE = (AD.KE)^2$

$\Rightarrow \sqrt{BD.BK.CD.CK} = AD.KE$

Mặt khác $AB.AC - AD.AK = AD.AE - AD.AK = AD.KE$

Vậy $AB.AC - AD.AK = \sqrt{BD.BK.CD.CK}$

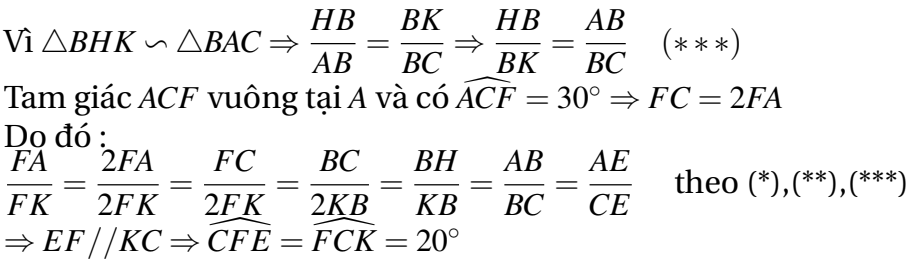
2.

Gọi H là trung điểm của BC . Đường thẳng vuông góc với BC tại H cắt AB tại K

Khi đó $\triangle BKC$ cân tại $K \Rightarrow \widehat{KCB} = \widehat{KBC} = 20^\circ$

Suy ra $\widehat{KCF} = 20^\circ = \widehat{KCB} \Rightarrow KC$ là phân giác của $\widehat{BCF} \Rightarrow \frac{FC}{FK} = \frac{BC}{KB} \quad (*)$

Mặt khác BE là phân giác của $\widehat{ABC} \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC} \quad (**)$



Trong kỳ thi Olympic có 17 thí sinh môn toán được mang số báo danh là số tự nhiên trong khoảng từ 1 đến 1000. Chứng minh rằng có thể chọn ra 9 học sinh có tổng các số báo danh được mang chia hết cho 9.

Với 5 số tự nhiên đôi một khác nhau xảy ra 2 khả năng sau :

- Có nhiều nhất 2 số có cùng số dư khi chia cho 3. Khi đó, tồn tại 3 số khi chia 3 lần lượt dư 0,1,2 $\Rightarrow$ tổng 3 số này chia hết cho 3
- Có ít nhất 3 số có cùng số dư khi chia cho 3 $\Rightarrow$ tổng 3 số cùng số dư chia hết cho 3.

Chia tập 17 số báo danh của 17 thí sinh làm 3 tập lần lượt có 5,5 và 7 phần tử.

Trong 5 số s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 lại chọn được 3 số s_i, s_j, s_k có tổng chia hết cho 3. Do đó, 9 số báo danh có tổng tương ứng bằng $3(s_i + s_j + s_k) : 9$

Bài 1 (4 điểm) ✓

1. Rút gọn $P = \frac{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$ với $x \geq 2$

2. Cho $x \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$. Tính $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$ và $B = x^7 + \frac{1}{x^7}$

Lời giải

1.

$$\begin{aligned}x + 2\sqrt{x-1} &= (\sqrt{x-1} + 1)^2 \\x - 2\sqrt{x-1} &= (\sqrt{x-1} - 1)^2\end{aligned}$$

Mà với $x \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x-1} \geq 1$ nên :

$$\begin{aligned}P &= \frac{(\sqrt{x-1} + 1) + (\sqrt{x-1} - 1)}{(\sqrt{x-1} + 1) - (\sqrt{x-1} - 1)} \\&= \frac{2\sqrt{x-1}}{2} \\&= \sqrt{x-1}\end{aligned}$$

2.

Ta có : $7 = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 9$

Mà $x \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3$. Từ đó :

$$\begin{aligned}A = x^3 + \frac{1}{x^3} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \\&= 7.3 - 3 = 18 \\x^4 + \frac{1}{x^4} &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 2 = 7^2 - 2 = 47 \\ \Rightarrow B = x^7 + \frac{1}{x^7} &= \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) \\&= 18.47 - 3 \\&= 843\end{aligned}$$

Vậy $A = 18$ và $B = 843$

Bài 2 (4 điểm) ✓

1. Cho phương trình $x^2 + (m^2 + 1)x + m - 2 = 0$ (1). Tìm tham số m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn : $\frac{2x_1 - 1}{x_2} + \frac{2x_2 - 1}{x_1} = x_1x_2 + \frac{55}{x_1x_2}$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+1)^2 + y = xy + 4 \\ 4x^2 - 24x + 35 = 5(\sqrt{3y-11} + \sqrt{y}) \end{cases} \quad (I)$$

Lời giải**1.**

Xét phương trình (1) có :

$$\begin{aligned} \Delta &= (m^2 + 1)^2 - 4(m - 2) \\ &= m^4 + 2m^2 - 4m + 9 \\ &= m^4 + 2(m - 1)^2 + 7 > 0 \quad \forall m \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Suy ra (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $\forall m$ Xét điều kiện của x_1, x_2 :

$$\begin{aligned} \frac{2x_1 - 1}{x_2} + \frac{2x_2 - 1}{x_1} &= x_1x_2 + \frac{55}{x_1x_2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1x_2 \neq 0 \\ 2(x_1 + x_2)^2 - (x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = (x_1x_2)^2 + 55 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Theo Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m^2 + 1) \\ x_1x_2 = m - 2 \end{cases}$. Thay vào (*) ta được :

$$\begin{cases} m - 2 \neq 0 \\ m^4 + 2m^2 - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm của m **2.**

$$(I) \begin{cases} (x+1)^2 + y = xy + 4 \\ 4x^2 - 24x + 35 = 5(\sqrt{3y-11} + \sqrt{y}) \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$$\text{Điều kiện : } y \geq \frac{11}{3}$$

Xét (1) có :

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (x-1)(x+3-y) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = x + 3 \end{cases} \end{aligned}$$

- Nếu $x = 1$. Thay vào (2) ta có $\sqrt{3y-11} + \sqrt{y} = 3$
Hàm $f(y) = \sqrt{3y-11} + \sqrt{y}$ đồng biến trên $\left[\frac{11}{3}; +\infty\right)$ và $f(4) = 3$ nên :

$$\sqrt{3y-11} + \sqrt{y} = 3 \Leftrightarrow y = 4$$

- Nếu $y = x + 3$. Thay vào (2) ta có :

$$\begin{aligned} 4x^2 - 24x + 35 &= 5 \left(\sqrt{3x-2} + \sqrt{x+3} \right) \\ \Leftrightarrow (4x^2 - 28x + 24) + (3x + 2 - 5\sqrt{3x-2}) + (x + 9 - 5\sqrt{x+3}) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(x-1)(x-6) + \frac{(3x+2)^2 - 25(3x-2)}{3x+2+5\sqrt{3x-2}} + \frac{(x+9)^2 - 25(x+3)}{x+9+5\sqrt{x+3}} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(x-1)(x-6) + \frac{9(x-1)(x-6)}{3x+2+5\sqrt{3x-2}} + \frac{(x-1)(x-6)}{x+9+5\sqrt{x+3}} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x-6) \left[4 + \frac{9}{3x+2+5\sqrt{3x-2}} + \frac{1}{x+9+5\sqrt{x+3}} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x-6) = 0 \text{ (vì } 4 + \frac{9}{3x+2+5\sqrt{3x-2}} + \frac{1}{x+9+5\sqrt{x+3}} > 0) & \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

$$+ x = 1 \Rightarrow y = 4$$

$$+ x = 6 \Rightarrow y = 9$$

Vậy hệ (I) có các nghiệm là $(x, y) \in \{(1, 4); (6, 9)\}$

Bài 3 (3,5 điểm) ✓

1. Tìm tất cả các số nguyên dương m, n sao cho $m + n^2$ chia hết cho $m^2 - n$ và $n + m^2$ chia hết cho $n^2 - m$
2. Cho tập hợp A gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất : " trong mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại 2 số phân biệt a, b sao cho $a^2 + b^2$ là số nguyên tố "

Lời giải

1.

$$\begin{aligned} (m + n^2) : (m^2 - n) &\Rightarrow m + n^2 \geq m^2 - n \\ \Leftrightarrow m^2 - m &\leq n^2 + n \\ \Leftrightarrow m(m-1) &\leq n(n+1) \\ \Rightarrow n &\geq m-1 \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự từ } (n + m^2) : (n^2 - m) \Rightarrow m + 1 \geq n$$

$$\text{Như vậy } m-1 \leq n \leq m+1$$

$\Rightarrow$ có 3 khả năng sau :

- $n = m - 1$. Khi đó :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} m + n^2 : m^2 - n \\ n + m^2 : n^2 - m \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m + (m-1)^2 : m^2 - (m-1) \\ m-1 + m^2 : (m-1)^2 - m \end{cases} \\ \Leftrightarrow & m^2 + m - 1 : m^2 - 3m + 1 \\ \Leftrightarrow & 4m : m^2 - 3m + 1 \\ \Leftrightarrow & 4m \geq m^2 - 3m + 1 \\ \Leftrightarrow & m^2 - 7m + 1 \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{7 - \sqrt{45}}{2} \leq m \leq \frac{7 + \sqrt{45}}{2} \end{aligned}$$

Mà $m, n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow m \geq 2 \Rightarrow m \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$

Thử lại thấy $(m, n) = (2, 1)$ và $(m, n) = (3, 2)$ thỏa mãn.

- $n = m$. Làm tương tự tìm được $(m, n) = (2, 2)$ và $(m, n) = (3, 3)$ thỏa mãn.
- $n = m + 1$. Làm tương tự tìm được $(m, n) = (1, 2)$ và $(m, n) = (2, 3)$ thỏa mãn.

Vậy những cặp giá trị thỏa mãn yêu cầu là $(m, n) \in \{(1, 2); (2, 1); (2, 3); (3, 2); (2, 2); (3, 3)\}$

2.

$A = \{1; 2; 3; \dots; 16\}$. Gọi $U = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16\}$.

Khi đó $U \subset A$ và $\forall a, b \in U$ thì $a^2 + b^2 : 2$ nên $a^2 + b^2$ là hợp số.

U có 8 phần tử nên $k \geq 9$

Chia 16 phần tử của A thành 8 cặp như sau $(1, 4); (2, 3); (5, 16); (6, 15); (7, 12); (8, 13); (9, 10)$ và $(11, 14)$. Tổng bình phương của 2 số trong mỗi cặp đều là số nguyên tố.

Gọi V là tập con chứa 9 phần tử của A . Theo nguyên lý Dirichle, V sẽ chứa ít nhất 1 cặp số trong 8 cặp số chia ở trên. Điều đó có nghĩa, mọi tập con có 9 phần tử của A đều thỏa mãn tính chất mà bài toán yêu cầu.

Kết hợp với $k \geq 9 \Rightarrow k = 9$

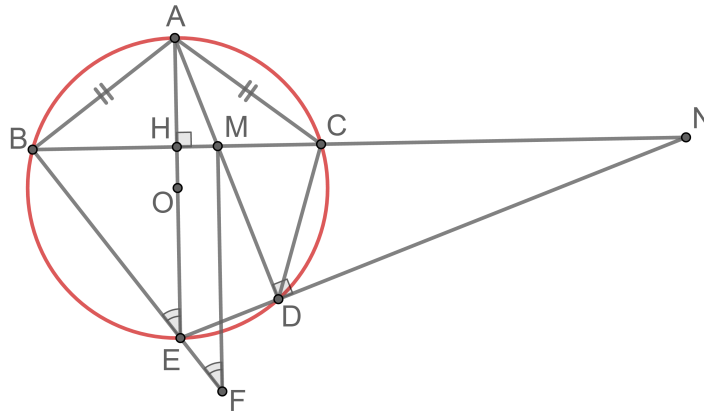
Bài 4 (6 điểm) ✓

Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{BAC} > 90^\circ$) nội tiếp (O, R) . M là điểm nằm trên cạnh BC

($BM > CM$). Gọi D là giao điểm của AM và (O, R) ($D \neq A$). H là trung điểm của BC . E là điểm chính giữa cung lớn BC . ED cắt BC tại N

1. Chứng minh rằng $MA.MD = MB.MC$ và $BN.CM = BM.CN$
2. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD . Chứng minh rằng B, I, E thẳng hàng
3. Khi $2AB = R$, xác định vị trí của M để $2MA + AD$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



1.

$$\Delta_{ABM} \sim \Delta_{CDM}(g.g) \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MD} \Rightarrow MA.MD = MB.MC \quad (*_1)$$

Lại có :

$$\triangle AMH \sim \triangle NMD(g.g) \Rightarrow \frac{MA}{MN} = \frac{MH}{MD} \Rightarrow MA.MD = MH.MN \quad (*_2)$$

Từ $(*_1)$ và $(*_2)$ suy ra : $MB.MC = MH.MN$

Mà $MB - MC = 2MH$ nên ta có :

$$\begin{aligned} 2MB.MC &= (MB - MC).MN \\ \Leftrightarrow 2MB.MC &= MB.MN - MC.MN \\ \Leftrightarrow MB.MC + MC.MN &= MB.MN - MB.MC \\ \Leftrightarrow MC(MB + MN) &= MB(MN - MC) \\ \Leftrightarrow MC.BN &= MB.CN \end{aligned}$$

2.

Qua M dựng đường thẳng song song với AE cắt BE tại F . Khi đó: $\widehat{AEB} = \widehat{MFB}$.

Mà $\widehat{AEB} = \widehat{MDB} \Rightarrow \widehat{MFB} = \widehat{MDB} \Rightarrow BMDF$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow$ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD cũng là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF . Mà tam giác BMF vuông tại $M \Rightarrow I$ là trung điểm của BF

$$\Rightarrow B, I, E \text{ thẳng hàng.}$$

3.

Ta có $\triangle AHM \sim \triangle ADE(g.g) \Rightarrow \frac{AM}{AE} = \frac{AH}{AD} \Rightarrow AM \cdot AD = AH \cdot AE \quad (*_3)$

Xét tam giác ABE vuông tại B có BH là đường cao nên :

$$\Rightarrow AH = \frac{AB^2}{AE} = \frac{R}{8}$$

Thay $AH = \frac{R}{8}$ và $AE = 2R$ vào $(*)_3$ ta được : $AM.AD = \frac{R}{8}.2R = \frac{R^2}{4}$

Theo AM-GM, ta có :

$$2AM + AD = AM + AM + \frac{AD}{2} + \frac{AD}{2} \geq 4\sqrt[4]{\frac{AM^2 \cdot AD^2}{4}} = 4\sqrt{\frac{R^2}{8}} = R\sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AM = \frac{AD}{2} \Leftrightarrow AM = \frac{R\sqrt{2}}{4}$

Khi đó, xét $\triangle AHM$ vuông tại H ta có : $HM^2 = AM^2 - AH^2 = \frac{7R^2}{64} \Rightarrow HM = \frac{R\sqrt{7}}{8}$

Vậy $2AM + AD$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $R\sqrt{2}$ khi M nằm ở vị trí giữa H và C sao cho $HM = \frac{R\sqrt{7}}{8}$

Bài 5 (2,5 điểm) ✓

1. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ xy + yz + zx \neq 0 \end{cases}$

Chứng minh rằng $\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leq \frac{25}{3\sqrt[3]{4(xy+yz+zx)}}$

2. Cho tam giác ABC vuông tại C có CD là đường cao. X là điểm thuộc CD . K là điểm thuộc đoạn AX sao cho $BK = BC$. T thuộc đoạn BX sao cho $AT = AC$. AT cắt BK tại M . Chứng minh rằng $MK = MT$

Lời giải

1.

Theo AM-GM:

$$\begin{aligned} 3\sqrt[3]{4(xy+yz+zx)} &= 3\sqrt[3]{2 \cdot 2 \cdot (xy+yz+zx)} \\ &\leq 2 + 2 + (xy+yz+zx) \\ &= x + y + z + 1 + xy + yz + zx \\ &\leq xy + yz + zx + x + y + z + 1 + xyz \\ &= (x+1)(y+1)(z+1) \end{aligned}$$

Suy ra $\frac{25}{3\sqrt[3]{4(xy+yz+zx)}} \geq \frac{25}{(x+1)(y+1)(z+1)} \quad (*)_1$

Đẳng thức ở $(*)_1$ xảy ra $\begin{cases} xy + yz + zx = 2 \\ xyz = 0 \end{cases}$

Ta chứng minh $\frac{25}{(x+1)(y+1)(z+1)} \geq \frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \quad (*)_2$

Ta có :

$$\begin{aligned} (*)_2 &\Leftrightarrow (x+1)^2(z+1) + (y+1)^2(x+1) + (z+1)^2(y+1) \leq 25 \\ &\Leftrightarrow (x^2z + y^2x + z^2y) + (x+y+z)^2 + 3(x+y+z) + 3 \leq 25 \\ &\Leftrightarrow x^2z + y^2x + z^2y \leq 4 \quad (*)_3 \end{aligned}$$

Để chứng minh $(*)_3$, giả sử $x \leq y \leq z$. Khi đó :

$$\begin{aligned} (x-y)(y-z) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow xy - zx - y^2 + yz &\geq 0 \\ \Leftrightarrow xy + yz &\geq zx + y^2 \end{aligned}$$

Suy ra :

$$\begin{aligned} x(xy + yz) &\geq x(zx + y^2) \\ \Leftrightarrow x^2y + xyz &\geq x^2z + y^2x \\ \Rightarrow x^2y + xyz + z^2y &\geq x^2z + y^2x + z^2y \quad (*_4) \end{aligned}$$

Đẳng thức ở $(*_4)$ xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x - y)(y - z) = 0 \end{cases}$

Mặt khác $x^2y + xyz + z^2y \leq x^2y + 2xyz + z^2y = y(x + z)^2$

Theo AM-GM :

$$\begin{aligned} y.(x + z)^2 &= \frac{1}{2}.2y.(z + x).(z + x) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{2y + (z + x) + (z + x)}{3} \right)^3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2y + xyz + z^2y \leq 4 \quad (*_5)$$

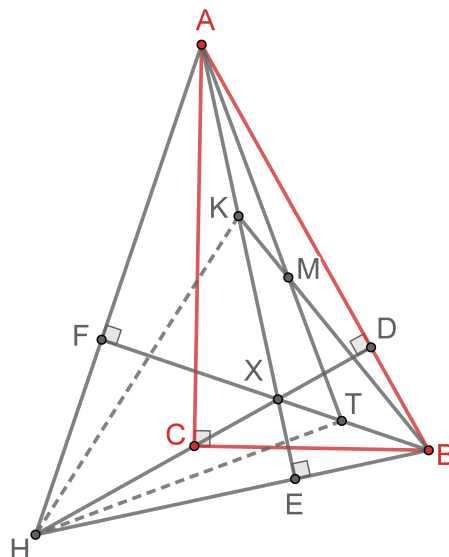
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 0 \\ x + z = 2y \end{cases}$

Từ $(*_4)$ và $(*_5) \Rightarrow (*_3)$ đúng $\Rightarrow (*_2)$ đúng.

Từ $(*_1)$ và $(*_2)$ suy ra $\frac{x+1}{y+1} + \frac{y+1}{z+1} + \frac{z+1}{x+1} \leq \frac{25}{3\sqrt[3]{4(xy+yz+zx)}}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ đẳng thức ở $(*_1)$ và $(*_2)$ xảy ra $\Leftrightarrow$ trong 3 số x, y, z có 1 số bằng 0; 1 số bằng 1 và 1 số bằng 2.

2. Qua A và B dựng 2 đường thẳng lần lượt vuông góc với BX và AX.



Hai đường thẳng này cắt nhau tại H. BX cắt AH tại F và AX cắt BH tại E. Khi đó X là trực tâm của tam giác ABH.

Mà $CX \perp AB \Rightarrow H \in CX$

Ta chứng minh $\triangle AHT$ vuông tại T.

Theo giả thiết $AT = AC \Rightarrow AT^2 = AC^2 = AD.AB$

Lại có $\triangle AFB \sim \triangle ADH \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AF}{AD} \Rightarrow AB \cdot AD = AH \cdot AF$

Suy ra $AT^2 = AH \cdot AF \Rightarrow \triangle ATH$ cân tại $T \Rightarrow HT^2 = HF \cdot HA$ (1)

Chứng minh tương tự $\triangle HBK$ vuông tại $K \Rightarrow HK^2 = HE \cdot HB$ (2)

Mà $\triangle AHE \sim \triangle BHF \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{HE}{HF} \Rightarrow AH \cdot HF = HE \cdot BH$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $HT^2 = HK^2 \Rightarrow HT = HK$

Xét 2 tam giác vuông HKM và HTM có : $\begin{cases} \text{chung } HM \\ HT = HK (\text{cmt}) \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle HKM = \triangle HTM \Rightarrow MK = MT$

Bài 1 (4 điểm) ✓

1. Rút gọn : $B = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$

2. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn :
$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^2 + b^2 \neq c^2 \\ b^2 + c^2 \neq a^2 \\ c^2 + a^2 \neq b^2 \end{cases}$$

Tính $P = \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2 - a^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2}$

Lời giải

1.

$$\begin{aligned} 9 + 4\sqrt{2} &= (2\sqrt{2} + 1)^2 \\ \Rightarrow 2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}} &= 2 + 2\sqrt{2} + 1 = (\sqrt{2} + 1)^2 \\ \Rightarrow 13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}} &= (5 + 3\sqrt{2})^2 \end{aligned}$$

Suy ra $B = 5 + 3\sqrt{2}$

2.

Vì $a + b + c = 0$ nên

$$a^2 - b^2 - c^2 = a^2 - (b + c)^2 + 2bc = 2bc$$

Tương tự ta có

$$b^2 - c^2 - a^2 = 2ca; c^2 - a^2 - b^2 = 2ab$$

Từ đó

$$P = \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ca} + \frac{c^2}{2ab} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc}$$

Hơn nữa

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a + b)^3 = -3ab(a + b) = 3abc$$

Suy ra $P = \frac{3abc}{2abc} = \frac{3}{2}$

Bài 2 (4 điểm) ✓

1. Trong hệ tọa độ oxy , tìm trên đường thẳng $y = 2x + 1$ những điểm $M(x, y)$ sao cho $y^2 - 5y\sqrt{x} + 6x = 0$
2. cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $\frac{a}{6} + \frac{b}{5} + \frac{c}{4} = 0$.
Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm.

Lời giải**1.**Tọa độ của điểm M là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} y = 2x + 1 & (*_1) \\ y^2 - 5y\sqrt{x} + 6x = 0 & (*_2) \end{cases}$$

Giải $(*_2)$ có $(*_2) \Leftrightarrow (y - 2\sqrt{x})(y - 3\sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x} \\ y = 3\sqrt{x} \end{cases}$

- Nếu $y = 2\sqrt{x}$. Thay vào $(*_1)$ ta có :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{x} &= 2x + 1 \\ \Leftrightarrow 2x - 2\sqrt{x} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x + (\sqrt{x} - 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x = \sqrt{x} - 1 &= 0 \text{ (vô nghiệm)} \end{aligned}$$

- Nếu $y = 3\sqrt{x}$. Thay vào $(*_1)$ ta có :

$$\begin{aligned} 3\sqrt{x} &= 2x + 1 \\ \Leftrightarrow 2x - 3\sqrt{x} + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ 2\sqrt{x} = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

$$+ x = 1 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow M(1, 3)$$

$$+ x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

Vậy có 2 điểm M thỏa mãn yêu cầu là : $M_1(1, 3), M_2\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right)$

2.

$$\begin{aligned} \frac{a}{6} + \frac{b}{5} + \frac{c}{4} &= 0 \Rightarrow 10a + 12b + 15c = 0 \\ &\Rightarrow 12b = -(10a + 15c) \\ &\Rightarrow 144b^2 = (10a + 15c)^2 \end{aligned}$$

Xét phương trình $ax^2 + bx + c = 0 \quad (*_3)$

- Nếu $a = 0 \Rightarrow \frac{b}{5} + \frac{c}{4} = 0 \Leftrightarrow 4b + 5c = 0 \Leftrightarrow 5c = -4b$. Khi đó :

$$\begin{aligned} (*_3) &\Leftrightarrow bx + c = 0 \\ &\Leftrightarrow 5bx - 4b = 0 \\ &\Leftrightarrow b(5x - 4) = 0 \text{ luôn luôn có nghiệm } \forall b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Nếu $a \neq 0$ thì $(*_3)$ là phương trình bậc hai có :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ \Rightarrow 144\Delta &= 144b^2 - 576ac \\ &= (10a + 15c)^2 - 576ac \\ &= (10a)^2 - 276ac + (15c)^2 \\ &\geq (10a)^2 - 276ac + \left(\frac{138}{10}c\right)^2 \\ &= \left(10a - \frac{138}{10}c\right)^2 \geq 0 \quad \forall a, c \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow (*_3) &\text{ luôn có nghiệm} \end{aligned}$$

Vậy phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm.

Bài 3 (4 điểm) ✓

1. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Chứng minh rằng :

$$\begin{aligned} M &= \frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} + \frac{8}{(b+c)^2 + 4abc} + \frac{8}{(c+a)^2 + 4abc} + a^2 + b^2 + c^2 \\ &\geq \frac{8}{a+3} + \frac{8}{b+3} + \frac{8}{c+3} \end{aligned}$$

3. Tìm các số nguyên tố a, b, c và $k \in \mathbb{Z}^+$ sao cho $a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1$

Lời giải

1.

$$\begin{aligned} 4ab &\leq (a+b)^2 \Rightarrow 4abc \leq (a+b)^2 \cdot c \\ \Rightarrow \frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} &\geq \frac{8}{(a+b)^2(1+c)} \\ \text{Tương tự : } \frac{8}{(b+c)^2 + 4abc} &\geq \frac{8}{(b+c)^2(1+a)} \\ \frac{8}{(c+a)^2 + 4abc} &\geq \frac{8}{(c+a)^2(1+b)} \\ \Rightarrow \frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} + \frac{8}{(b+c)^2 + 4abc} + \frac{8}{(c+a)^2 + 4abc} &\geq \\ &\frac{8}{(a+b)^2(1+c)} + \frac{8}{(b+c)^2(1+a)} + \frac{8}{(c+a)^2(1+b)} \quad (*) \end{aligned}$$

Đẳng thức ở (*) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Mặt khác :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\geq \frac{(a+b)^2}{2}; b^2 + c^2 \geq \frac{(b+c)^2}{2}; c^2 + a^2 \geq \frac{(c+a)^2}{2} \\ \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 &\geq \frac{(a+b)^2}{4} + \frac{(b+c)^2}{4} + \frac{(c+a)^2}{4} \quad (**) \end{aligned}$$

Đẳng thức ở (**) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Kết hợp (*) và (**) suy ra :

$$\begin{aligned} M &\geq \left[\frac{8}{(a+b)^2(1+c)} + \frac{(a+b)^2}{4} \right] + \left[\frac{8}{(b+c)^2(1+a)} + \frac{(b+c)^2}{4} \right] + \left[\frac{8}{(c+a)^2(1+b)} + \frac{(c+a)^2}{4} \right] \\ &\geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+a}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+b}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+c}} \quad (***) \quad (AM - GM) \end{aligned}$$

Đẳng thức ở (***) xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$

Lại có :

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+a}} &= \frac{4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+a}} \geq \frac{4}{\frac{a+3}{2}} = \frac{8}{a+3} \quad (AM - GM) \\ \text{Tương tự : } \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+b}} &\geq \frac{8}{3+b} \\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1+c}} &\geq \frac{8}{3+c} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M \geq \frac{8}{3+a} + \frac{8}{3+b} + \frac{8}{3+c}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ \sqrt{1+a} = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

$$2.a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1 \quad (*)$$

Một số chính phương hoặc chia hết cho 3, hoặc chia 3 dư 1. Mà $9k^2 + 1$ chia 3 dư 1 nên trong 3 số $a^2, b^2, 16c^2$ có 2 số chia hết cho 3 và 1 số chia 3 dư 1. Vì vai trò của a, b là như nhau nên không mất tính tổng quát, ta xét 2 khả năng sau :

$$\bullet \begin{cases} a^2, b^2 \text{ chia hết cho 3} \\ 16c^2 \text{ chia 3 dư 1} \end{cases} . \text{ Do } a, b \text{ nguyên tố } \Rightarrow a = b = 3, \text{ thay vào } (*) \text{ ta có :}$$

$$\begin{aligned} 3^2 + 3^2 + 16c^2 &= 9k^2 + 1 \\ \Leftrightarrow 9k^2 - 16c^2 &= 17 \\ \Leftrightarrow (3k - 4c)(3k + 4c) &= 17 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3k - 4c = 1 \\ 3k + 4c = 17 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ c = 2 \end{cases} & \quad (\text{thỏa mãn}) \end{aligned}$$

$$\bullet \begin{cases} a^2, 16c^2 \text{ chia hết cho 3} \\ b^2 \text{ chia 3 dư 1} \end{cases} . \text{ Do } a, c \text{ nguyên tố } \Rightarrow a = c = 3, \text{ thay vào } (*) \text{ ta có :}$$

$$3^2 + b^2 + 16.3^2 = 9k^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow 9k^2 - b^2 = 152$$

$$\Leftrightarrow (3k - b)(3k + b) = 152 = 2^3 \cdot 19$$

Do $3k - b$ và $3k + b$ cùng tính chẵn lẻ nên có các khả năng sau :

$$+ \begin{cases} 3k - b = 4 \\ 3k + b = 38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 7 \\ b = 17 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$+ \begin{cases} 3k - b = 2 \\ 3k + b = 76 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 13 \\ b = 37 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

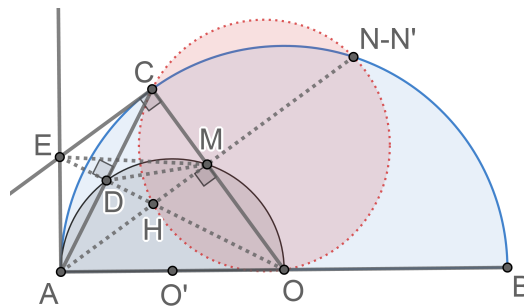
Vậy các bộ số thỏa mãn là : $(a, b, c, k) \in \{(3, 3, 2, 3); (3, 17, 3, 7); (3, 37, 3, 13); (17, 3, 3, 7); (37, 3, 3, 13)\}$

Bài 4 (6 điểm) ✓

Cho đoạn $AB = 2a$ có trung điểm là O . Trên nửa mặt phẳng bờ AB dựng nửa đường tròn tâm O , đường kính AB và nửa đường tròn tâm (O') , đường kính AO . Điểm M thay đổi trên nửa (O') ($M \neq A, O$). Tia OM cắt (O) tại C . Gọi D là giao điểm thứ 2 của CA với (O')

1. Chứng minh rằng tam giác ADM cân
2. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt OD tại E . Chứng minh EA là tiếp tuyến chung của (O) và (O')
3. Đường thẳng AM cắt OD tại H . Đường tròn ngoại tiếp tam giác COH cắt (O) tại N . Chứng minh rằng A, M, N thẳng hàng
4. Tính OM theo a biết $ME \parallel AB$

Lời giải



$$1. \begin{cases} \triangle OAC \text{ cân tại } O \\ OD \perp AC \end{cases} \Rightarrow OD \text{ là phân giác của } \widehat{AOC} \Rightarrow \widehat{AOD} = \widehat{COD}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} \widehat{AMD} = \widehat{AOD} \\ \widehat{DAM} = \widehat{COD} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AMD} = \widehat{ADM} \Rightarrow \triangle AMD \text{ cân tại } D$$

2.

$$\text{Xét 2 tam giác } EOC \text{ và } AOE \text{ có : } \begin{cases} \text{chung } OE \\ OC = OA \\ \widehat{EOC} = \widehat{EOA} (cmt) \end{cases} \Rightarrow \triangle EOC \sim \triangle EOA (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \widehat{ECO} = \widehat{EAO}$$

Mà $\widehat{ECO} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EAO} = 90^\circ \Rightarrow AE$ là tiếp tuyến chung của (O) và (O')

3.

Giả sử AM cắt (O) tại N'

Vì $OC \perp AN' \equiv M$ nên M là trung điểm của $AN' \Rightarrow \triangle ACN'$ cân tại C

$$\Rightarrow \widehat{CN'A} = \widehat{CAN'}. \text{ Mà } \widehat{CAN'} = \widehat{DAM} = \widehat{DCM} = \widehat{HOC}$$

$$\Rightarrow \widehat{CN'A} = \widehat{CN'H} = \widehat{COH} \Rightarrow CHON' \text{ là tứ giác nội tiếp}$$

$\Rightarrow N'$ là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác COH với $(O) \Rightarrow N \equiv N'$

$\Rightarrow A, M, N$ thẳng hàng.

4.

$$\text{Vì } MN // AB(gt) \text{ nên } \begin{cases} \widehat{EMA} = \widehat{MAC} (\text{so le trong}) \\ EM \perp AE \Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{AMO} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle AME \sim \triangle OAM (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{OM} = \frac{ME}{AM} \Rightarrow OM \cdot ME = AE \cdot AM (*_1)$$

Lại có :

$$ME // AB \Rightarrow AE = \frac{2 \cdot S_{AMO}}{OA} = \frac{AM \cdot MO}{OA} \quad (*_2)$$

$$\begin{aligned} \widehat{MEO} = \widehat{EOA} = \widehat{MOE} &\Rightarrow \triangle MEO \text{ cân tại } M \\ &\Rightarrow OM = ME \quad (*_3) \end{aligned}$$

Thay $(*_2), (*_3)$ vào $(*_1)$ ta có :

$$OM^2 = \frac{AO \cdot MO \cdot AM}{OA} \Rightarrow OM = \frac{AM^2}{OA} = \frac{OA^2 - OM^2}{OA} = OA - \frac{OM^2}{OA}$$

$$\text{Mà } OA = a \text{ nên } : OM = a - \frac{OM^2}{a} \Leftrightarrow OM^2 + a \cdot OM - a^2 = 0 \Rightarrow OM = a \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$\text{Vậy } OM = a \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Bài 5 (3 điểm) ✓

1. Cho hình vuông $MNPQ$ và điểm A nằm trong $\triangle MNP$ sao cho $AM^2 = AP^2 + 2AN^2$. Tính $\widehat{PAN}$
2. Cho $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và $Q(x) = x^2 + 2016x + 2017$ thỏa mãn $P(x) = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt và $P[Q(x)] = 0$ vô nghiệm. Chứng minh rằng $P(2017) > 1008^6$

Lời giải

1.

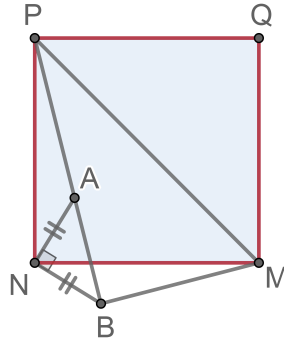
Trên nửa mặt phẳng bờ AN chứa M dựng tam giác ANB vuông cân tại N

$$\Rightarrow 2AN^2 = AN^2 + NB^2 = AB^2 \quad (*_1)$$

$$\text{Xét 2 tam giác } ANP \text{ và } BMN \text{ có : } \begin{cases} NP = NM (gt) \\ NA = NB (\text{cách dựng}) \\ \widehat{PNA} = \widehat{BNM} = 90^\circ - \widehat{ANM} \end{cases} \Rightarrow \triangle ANP = \triangle BNM (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AP = BM \quad (*_2) \\ \widehat{PAN} = \widehat{MBN} \quad (*_3) \end{cases}$$

$$\text{Từ } (*_1) \text{ và } (*_2) \Rightarrow AP^2 + 2AN^2 = BM^2 + AB^2.$$



Mà $AP^2 + 2AN^2 = AM^2(gt)$ nên suy ra $BM^2 + AB^2 = AM^2 \Rightarrow \triangle ABM$ vuông tại $B \Rightarrow \widehat{MBN} = 135^\circ$

Từ $(*)_3$ suy ra $\widehat{PAN} = 135^\circ$

2.

Gọi x_1, x_2, x_3 là 2 nghiệm thực phân biệt của $P(x) = 0$.

Khi đó $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$

Suy ra $P[Q(x)] = (Q(x) - x_1)(Q(x) - x_2)(Q(x) - x_3)$

Do $P[Q(x)] = 0$ vô nghiệm nên
$$\begin{cases} Q(x) \neq x_1 \\ Q(x) \neq x_2 \\ Q(x) \neq x_3 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Tức là :

$$\begin{cases} x^2 + 2016x + 2017 - x_1 \neq 0 \\ x^2 + 2016x + 2017 - x_2 \neq 0 \\ x^2 + 2016x + 2017 - x_3 \neq 0 \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_1 = 1008^2 - (2017 - x_1) < 0 \\ \Delta'_2 = 1008^2 - (2017 - x_2) < 0 \\ \Delta'_3 = 1008^2 - (2017 - x_3) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2017 - x_1 > 1008^2 \\ 2017 - x_2 > 1008^2 \\ 2017 - x_3 > 1008^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P(2017) = (2017 - x_1)(2017 - x_2)(2017 - x_3) > 1008^6$$

Bài 1 (3 điểm) ✓

Rút gọn :

$$P = \left(\frac{2(a+b)}{\sqrt{a^3} - 2\sqrt{2b^3}} - \frac{\sqrt{a}}{a + \sqrt{2ab} + 2b} \right) \left(\frac{\sqrt{a^3} + 2\sqrt{2b^3}}{2b + \sqrt{2ab}} - \sqrt{a} \right)$$

Với $a \geq 0, b \geq 0, a \neq 2b$
Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{2(a+b) - \sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{2b})}{\sqrt{a^3} - 2\sqrt{2b^3}} \cdot \left(\frac{a - \sqrt{2ab} + 2b}{\sqrt{2b}} - \sqrt{a} \right) \\ &= \frac{a + 2b + \sqrt{2ab}}{\sqrt{a^3} - 2\sqrt{2b^3}} \cdot \frac{a - 2\sqrt{2ab} + 2b}{\sqrt{2b}} \\ &= \frac{a + 2b + \sqrt{2ab}}{\sqrt{2b}} \cdot \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{2b})(a + \sqrt{2ab} + 2b)} \\ &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{2b}}{\sqrt{2b}} \end{aligned}$$

Bài 2 (4 điểm) ✓

- Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + 2015x + 1 = 0$
 x_3, x_4 là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + 2016x + 1 = 0$.
 Tính $M = (x_1 + x_3)(x_2 + x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4)$
- Trong hệ trục tọa độ oxy cho hình chữ nhật $ABCD$ với
 $A(6; 2), B(6; 17), C(42; 17), D(42; 2)$. Trên đường thẳng $3x + 5y = 68$ tìm các điểm $M(x; y) (x, y \in \mathbb{Z})$ thuộc hình chữ nhật $ABCD$. Các điểm này không thuộc các cạnh của hình chữ nhật $ABCD$

Lời giải

1.

Ta có :

$$M = [x_1x_2 + x_3(x_1 + x_2) + x_3^2] [x_1x_2 - (x_1 + x_2)x_4 + x_4^2]$$

$$\text{Theo Vi-et} \begin{cases} x_1x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -2015 \end{cases} \Rightarrow M = (1 - 2015x_3 + x_3^2)(1 + 2025x_4 + x_4^2)$$

Hơn nữa :

$$1 - 2015x_3 + x_3^2 = (x_3^2 + 2016x_3 + 1) - 4031x_3 = -4031x_3$$

$$1 + 2025x_4 + x_4^2 = (x_4^2 + 2016x_4 + 1) - x_4 = -x_4$$

$$\Rightarrow M = 4031x_3x_4$$

Mà theo Vi-et : $x_3x_4 = 1 \Rightarrow M = 4031$

2.

Những điểm $M(x, y)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán có tọa độ thỏa mãn hệ :

$$\begin{cases} 3x + 5y = 68 & (*_1) \\ 6 < x < 42 & (*_2) \\ 2 < y < 17 & (*_3) \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Từ $(*_1) \Rightarrow 5y = 68 - 3x$

Theo $(*_2) : x > 6 \Rightarrow 5y < 68 - 3 \cdot 6 = 50 \Rightarrow y < 10$

Kết hợp với $(*_3)$ suy ra $2 < y < 10$

Hơn nữa :

$$\begin{aligned} 68 &\equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow 5y \equiv 2 \pmod{3} \\ &\Rightarrow y \equiv 1 \pmod{3} \\ &\Rightarrow y \in \{4; 7\} \end{aligned}$$

- Nếu $y = 4$. Thay vào $(*_1) \Rightarrow x = 16$ (thỏa mãn)
- Nếu $y = 7$. Thay vào $(*_1) \Rightarrow x = 11$ (thỏa mãn)

Vậy $M_1(16; 4)$ và $M_2(11; 7)$ là những điểm cần tìm.

Bài 3 (4 điểm) ✓

1. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $2a^2 + b^2 \leq 3c^2$. Chứng minh rằng $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{3}{c}$
2. Với bộ số $(6, 5, 2)$ ta có đẳng thức $\frac{65}{26} = \frac{5}{2}$. Tìm tất cả các bộ (a, b, c) gồm các chữ số trong hệ thập phân biết rằng a, b, c đôi một khác nhau và khác 0 thỏa mãn $\frac{\overline{ab}}{\overline{ca}} = \frac{b}{c}$

Lời giải

1.

Áp dụng BĐT quen thuộc $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$ ta có :

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{9}{a + a + b} = \frac{9}{2a + b} \quad (*)$$

Mặt khác theo BĐT Bunhiacopski :

$$\begin{aligned} (2a + b)^2 &= (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}a + b)^2 \leq (2 + 1)(2a^2 + b^2) = 3(2a^2 + b^2) \leq 9c^2 \\ &\Rightarrow 2a + b \leq 3c \quad (**) \end{aligned}$$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{9}{3c} = \frac{3}{c}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 2a^2 + b^2 = 3c^2 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$

2.

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{ca}} = \frac{b}{c} \Leftrightarrow (10a + b)c = (10c + a)b$$

$$\Leftrightarrow 10c(a-b) = b(a-c) \quad (***)$$

$$\Rightarrow b(a-c) : 10$$

$$\forall \begin{cases} 0 < |a-c| < 10 \\ 0 < b < 10 \end{cases} \quad \text{nên phải có } b = 5 \text{ hoặc } |a-c| = 5$$

Hơn nữa khi đó $|b(a-c)| \leq 9.5 = 45$ nên $|10c(a-b)| \leq 45 \Rightarrow c|a-b| \leq 4 \Rightarrow c \leq 4$

Do đó trong trường hợp $|a-c| = 5$ thì $a-c = 5$. Xét 2 trường hợp sau :

- $b = 5$. Từ (***) ta có :

$$\begin{aligned} 10c(a-5) &= 5(a-c) \\ \Leftrightarrow 2c(a-5) &= a-c \\ \Leftrightarrow a &= \frac{9c}{2c-1} \\ \Leftrightarrow 2a &= \frac{18c}{2c-1} = 9 + \frac{9}{2c-1} \\ \Leftrightarrow 2c-1 &\in \{1; 3; 9\} \end{aligned}$$

$$+ \text{ Nếu } 2c-1 = 1 \Leftrightarrow c = 1 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow (a, b, c) = (9, 5, 1)$$

$$+ \text{ Nếu } 2c-1 = 3 \Leftrightarrow c = 2 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow (a, b, c) = (6, 5, 2)$$

$$+ \text{ Nếu } 2c-1 = 9 \Leftrightarrow c = 5 \text{ (loại vì } c \neq b)$$

- $a-c = 5 \Leftrightarrow a = 5+c$. Từ (***) ta có :

$$\begin{aligned} 10c(c+5-b) &= 5b \\ \Leftrightarrow 2c(a-b) &= b \\ \Rightarrow b &: 2 \\ \Rightarrow b &\in \{2, 4, 6, 8\} \end{aligned}$$

$$+ \text{ Nếu } b = 2 \Rightarrow c(c+3) = 1 \text{ (vô nghiệm trên } \mathbb{Z})$$

$$+ \text{ Nếu } b = 4 \Rightarrow c(c+1) = 2 \Leftrightarrow c = 1 \Rightarrow (a, b, c) = (6, 4, 1)$$

$$+ \text{ Nếu } b = 6 \Rightarrow c(c-1) = 3 \text{ (vô nghiệm trên } \mathbb{Z})$$

$$+ \text{ Nếu } b = 8 \Rightarrow c(c-3) = 4 \Leftrightarrow c = 4 \Rightarrow (a, b, c) = (9, 8, 4)$$

Vậy $(a, b, c) \in \{(9, 5, 1); (6, 5, 2); (6, 4, 1); (9, 8, 4)\}$ là các bộ số cần tìm.

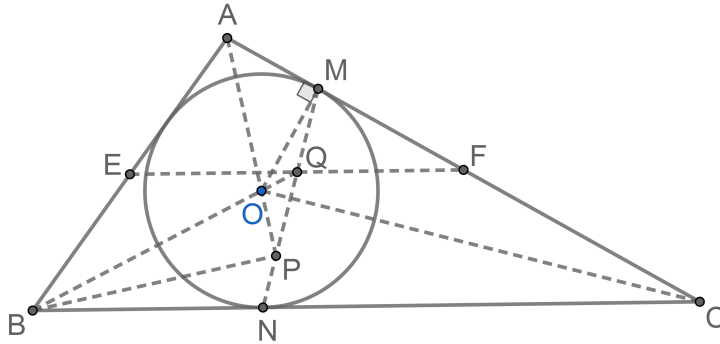
Bài 4 (6 điểm) ✓

Cho tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c (c < a, c < b)$. Gọi M, N lần lượt là các tiếp điểm của (O) nội tiếp tam giác ABC với các cạnh AC, BC . Đường thẳng MN cắt AO, BO tại P, Q . E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC .

1. Chứng minh rằng các tứ giác $AOQM, BOPN, AQP B$ nội tiếp

2. Chứng minh rằng Q, E, F thẳng hàng

3. Chứng minh rằng $\frac{MP + NQ + PQ}{a + b + c} = \frac{OM}{OC}$

Lời giải


1.

$$\triangle CMN \text{ cân tại } C \Rightarrow \widehat{NMC} = \widehat{MNC} = \frac{180^\circ - \widehat{ACB}}{2} \Rightarrow \widehat{AMQ} = 180^\circ - \widehat{NMC} = \frac{180^\circ + \widehat{ACB}}{2}$$

Xét $\triangle AOB$ có :

$$\begin{aligned} \angle AOB &= 180^\circ - (\widehat{BAO} + \widehat{ABO}) \\ &= 180^\circ - \left(\frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{ABC}}{2} \right) \\ &= \frac{180^\circ + \widehat{ACB}}{2} \end{aligned}$$

Như vậy $\widehat{AMQ} = \widehat{AOB} \Rightarrow \widehat{AMQ} + \widehat{AOQ} = 180^\circ \Rightarrow AOQM$ là tứ giác nội tiếp

$$\text{Ta có : } \begin{cases} \widehat{AMQ} = \widehat{BNP} \\ \widehat{AOQ} = \widehat{BOP} \end{cases} \Rightarrow \widehat{BNP} + \widehat{BOP} = \widehat{AMQ} + \widehat{AOQ} = 180^\circ$$

$\Rightarrow BOPN$ là tứ giác nội tiếp

$AOQM$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QAO} = \widehat{OMQ}$

$BOPN$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PBO} = \widehat{ONP}$

Mà $\triangle OMN$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OMQ} = \widehat{ONP}$

Suy ra $\widehat{QAO} = \widehat{PBO} \Rightarrow AQP B$ là tứ giác nội tiếp.

2.

Tứ giác $OMCN$ có $\widehat{OMC} + \widehat{ONC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
 $\Rightarrow OMCN$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OMN} = \widehat{OCN} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$ $(*)_1$

Mà $AOQM$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OMQ} = \widehat{OAQ}$ $(*)_2$

Từ $(*)_1$ và $(*)_2$ suy ra $\widehat{OAQ} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$

Xét $\triangle ABQ$ có $\begin{cases} \widehat{ABQ} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \\ \widehat{BAQ} = \widehat{BAO} + \widehat{OAQ} = \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{ACB}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{AQB} = 180^\circ - (\widehat{ABQ} + \widehat{BAQ}) = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABQ$ vuông tại Q

Mà E là trung điểm của $EB = EQ \Rightarrow \widehat{EQB} = \widehat{EBQ} = \widehat{QBN} \Rightarrow EQ \parallel BC$

Mà EF là đường trung bình của $\triangle ABC \Rightarrow EF \parallel BC$

Suy ra E, Q, F thẳng hàng.

3. Ta có :

$$\begin{aligned} \triangle OPQ \sim \triangle OBA &\Rightarrow \frac{PQ}{AB} = \frac{OQ}{OA} \Leftrightarrow \frac{PQ}{c} = \frac{OQ}{OA} \\ \triangle OQN \sim \triangle OAC &\Rightarrow \frac{QN}{AC} = \frac{OQ}{OA} \Leftrightarrow \frac{QN}{b} = \frac{OQ}{OA} \\ \triangle OPM \sim \triangle OBC &\Rightarrow \frac{PM}{BC} = \frac{OP}{OB} \\ \text{Mà } \triangle OPQ \sim \triangle OBA &\Rightarrow \frac{OP}{OB} = \frac{OQ}{OA} \\ \Rightarrow \frac{PM}{BC} = \frac{OQ}{OA} &\Leftrightarrow \frac{PM}{a} = \frac{OQ}{OA} \end{aligned}$$

Như vậy $\frac{PQ}{c} = \frac{PM}{a} = \frac{QN}{b} = \frac{OQ}{OA} = \sin \widehat{OAQ} = \sin \frac{\widehat{ACB}}{2}$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau suy ra $\frac{PQ + PM + QN}{a + b + c} = \sin \frac{\widehat{ACB}}{2}$ $(*)_3$

Xét tam giác OMC vuông tại M có $\sin \widehat{OCM} = \sin \frac{\widehat{ACB}}{2} = \frac{OM}{OC}$ $(*)_4$

Từ $(*)_3$ và $(*)_4$ suy ra $\frac{PQ + PM + QN}{a + b + c} = \frac{OM}{OC}$

Bài 5 (3 điểm) ✓

1. Trên cùng một mặt phẳng cho 4033 điểm. Biết rằng 3 điểm bất kỳ trong 4033 điểm trên luôn chọn được 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng có ít nhất 2016 điểm nằm trong đường tròn bán kính 1.
2. Cho tam giác OAB có $OA = 2a; OB > a$. Gọi (O) là đường tròn tâm O bán kính a . Tìm M thuộc (O) sao cho $MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

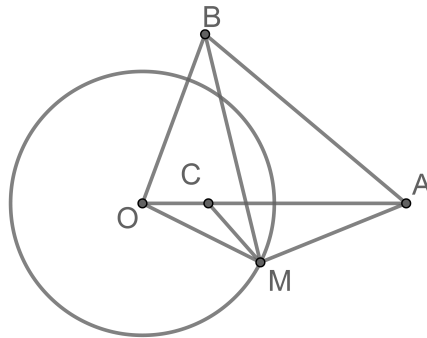
1.

Xét điểm A thuộc 4033 điểm đã cho.

- Nếu 4032 điểm còn lại đều cách A một khoảng nhỏ hơn 1 thì ta có điều phải chứng minh.
- Nếu tồn tại điểm B cách A 1 khoảng lớn hơn 1. Vì trong 3 điểm bất kỳ luôn tìm được 2 điểm có khoảng cách nhỏ hơn 1 nên 4031 điểm còn lại hoặc cách A 1 khoảng nhỏ hơn 1, hoặc cách B 1 khoảng nhỏ hơn 1. Nói cách khác 4031 điểm này hoặc nằm trong $(A, 1)$ hoặc nằm trong $(B, 1)$. Theo nguyên lý Dirichle tồn tại ít nhất 1 trong 2 đường tròn chứa ít nhất 2016 điểm.

Vậy có ít nhất 2016 điểm nằm trong đường tròn bán kính 1.

2. Gọi C là điểm thuộc OA sao cho $OC = \frac{a}{2}$



$$\text{Xét 2 tam giác } OCM \text{ và } OMA \text{ có: } \begin{cases} \widehat{MOC} = \widehat{MOA} \\ \frac{OC}{OM} = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \triangle MOC \sim \triangle AOM (c.g.c)$$

$$\Rightarrow \frac{MC}{MA} = \frac{MO}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow MA = 2MC. \text{ Từ đó:}$$

$$\begin{aligned} MA + 2MB &= 2MC + 2MB \\ &= 2(MB + MC) \\ &\geq 2BC \end{aligned}$$

$$MA + 2MB = 2BC \Leftrightarrow M \text{ là giao điểm của } BC \text{ và } (O)$$

Vậy để $MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất thì M là giao điểm của đoạn thẳng BC với (O) với C là điểm thuộc đoạn OA sao cho $OC = \frac{a}{2}$

Bài 1 (5 điểm) ✓

Cho phương trình $x^2 - x - 1 = 0$ có 2 nghiệm là x_1, x_2

1. Tính $Q = x_1^5 + x_2^5$

2. Cho $P(x) = \sqrt{x^8 + 12x + 12} - 3x$. CMR $P(x_1) = P(x_2)$

Lời giải

1. Theo Vi-et: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases}$. Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 3 \\ x_1^3 + x_2^3 &= (x_1^2 + x_2^2)(x_1 + x_2) - x_1 x_2(x_1 + x_2) = 4 \\ \Rightarrow Q &= (x_1^2 + x_2^2)(x_1^3 + x_2^3) - x_1^2 x_2^2(x_1 + x_2) = 11 \end{aligned}$$

Vậy $Q = 11$

2.

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_1 - 1 &= 0 \Rightarrow x_1^2 = x_1 + 1 \\ \Rightarrow x_1^4 &= (x_1 + 1)^2 = x_1^2 + 2x_1 + 1 = 3x_1 + 2 \\ \Rightarrow x_1^8 &= (3x_1 + 2)^2 = 9x_1^2 + 12x_1 + 4 = 21x_1 + 13 \\ \Rightarrow x_1^8 + 12x_1 + 12 &= 33x_1 + 25 = 9x_1^2 + 24x_1 + 16 = (3x_1 + 4)^2 \\ \Rightarrow P(x_1) &= |3x_1 + 4| - 3x_1 \end{aligned}$$

Mặt khác nếu đặt $f(x) = x^2 - x - 1$ thì $f(-1) = 1 > 0$.

Kết hợp với $x_1 + x_2 = 1 > 0 \Rightarrow -1 < x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 + 4 > 0 \Rightarrow P(x_1) = 4$

Tương tự ta cũng có $P(x_2) = 4$

Vậy $P(x_1) = P(x_2)$

Bài 2 (5 điểm) ✓

1. Gọi m và M lần lượt là GTNN, GTLN của x thỏa mãn:

$$|2x - 1| + |3x - 4| + |4x - 5| + |5x - 4| = 4$$

Chứng minh rằng $M.m = 1$

2. Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $x^6 + x^3 y = y^3 + 2y^2$

Lời giải

1. Sử dụng BĐT

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$

Ta có :

$$|2x-1| + |4x-5| = |2x-1| + |5-4x| \geq |2x-1+5-4x| = |4-2x| \quad (*_1)$$

$$|3x-4| + |5x-4| = |4-3x| + |5x-4| \geq |4-3x+5x-4| = |2x| \quad (*_2)$$

Từ $(*_1)$ và $(*_2)$ suy ra :

$$|2x-1| + |3x-4| + |4x-5| + |5x-4| \geq |4-2x| + |2x|$$

$$\text{Mà } |4-2x| + |2x| \geq |4-2x+2x| = 4 \quad (*_3)$$

$$\Rightarrow |2x-1| + |3x-4| + |4x-5| + |5x-4| \geq 4$$

Do đó :

$$|2x-1| + |3x-4| + |4x-5| + |5x-4| = 4$$

$\Leftrightarrow$ Đẳng thức ở $(*_1), (*_2), (*_3)$ cùng xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(5-4x) \geq 0 \\ (4-3x)(5x-4) \geq 0 \\ (4-2x)2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5} \leq x \leq \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{5} \\ M = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M.m = 1$$

Vậy $M.m = 1$

2.

$$x^6 + x^3y = y^3 + 2y^2$$

$$\Leftrightarrow (2x^3 + y)^2 = y^2(4y + 9) \quad (*)$$

Vì $(2x^3 + y)^2$ và y^2 đều là số chính phương nên $4y + 9$ cũng phải là số chính phương. Hơn nữa $4y + 9$ là số lẻ, do đó :

$$4y + 9 = (2a + 1)^2 \quad (a \in \mathbb{Z}^+, a \geq 2 \text{ vì } y \geq 1)$$

$$\Rightarrow y = a^2 + a - 2 = (a - 1)(a + 2)$$

Thay vào $(*)$ ta có :

$$(2x^3 + y)^2 = y^2(2a + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 = ay = a(a - 1)(a + 2) = a^3 + a^2 - 2a$$

Vì $a \geq 2 \Rightarrow a^3 \leq aa^3 + a^2 - 2a < (a + 1)^3$. Do đó phải có :

$$x^3 = a^3 + a^2 - 2a = a^3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ a^2 - 2a = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = a = 2 \quad \text{vì } a \geq 2)$$

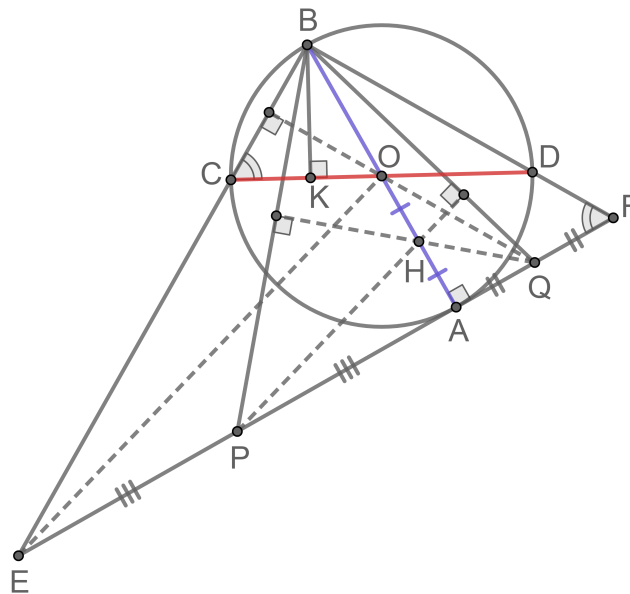
Khi $a = 2$ ta có $y = 4$. Thử lại thấy $(x, y) = (2, 4)$ thỏa mãn
 Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên dương duy nhất là $(x, y) = (2, 4)$

Bài 3 (5 điểm) ✓

Cho (O, R) và 2 đường kính AB, CD thay đổi. Tiếp tuyến tại A của (O) lần lượt cắt BC và BD tại E và F . Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AE, AF

1. Chứng minh rằng trung điểm H của AO là trực tâm của tam giác BPQ
2. Tìm điều kiện của AB, CD để S_{BPQ} nhỏ nhất
3. Chứng minh rằng $CE \cdot DF \cdot EF = CD^3$ và $\left(\frac{BE}{BF}\right)^3 = \frac{CE}{DF}$

Lời giải



1.

OQ là đường trung bình của $\triangle ABF \Rightarrow OQ \parallel BF$

Mà $BF \perp BC \Rightarrow OQ \perp BC \Rightarrow O$ là trực tâm của $\triangle BEQ \Rightarrow OE \perp BQ$

PH là đường trung bình của $\triangle AOE \Rightarrow PH \parallel OE$

Mà $OE \perp BQ$ (cmt) $\Rightarrow PH \perp BQ \Rightarrow H$ là trực tâm của $\triangle BPQ$

2.

$$S_{BPQ} = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot AB = R \cdot PQ = R \cdot \frac{EF}{2} \quad (*)$$

$$\widehat{BCD} = \widehat{BFE} \Rightarrow \triangle BCD \sim \triangle BFE$$

$$\text{Gọi } BK \text{ là đường cao của tam giác } BCD \Rightarrow \frac{EF}{CD} = \frac{AB}{BK} \Rightarrow EF = \frac{AB \cdot CD}{BK} = \frac{4R^2}{BK} \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ suy ra : } S_{BPQ} = R \cdot \frac{4R^2}{2 \cdot BK} = \frac{2R^3}{BK}$$

Như vậy

$$\begin{aligned} S_{BPQ} \text{ Min} &\Leftrightarrow BK \text{ Max} \\ &\Leftrightarrow AB \perp CD \end{aligned}$$

Vậy S_{BPQ} nhỏ nhất khi $AB \perp CD$

3.

$$\begin{aligned} \triangle ACE &\sim \triangle FDA (g.g) \\ \Rightarrow \frac{CE}{AD} &= \frac{AC}{FD} \\ \Rightarrow CE \cdot DF &= AC \cdot AD = 2 \cdot S_{ACD} = 2 \cdot S_{BCD} = BK \cdot CD \end{aligned}$$

$$\text{Theo câu b. } EF = \frac{4R^2}{BK} \Rightarrow CE \cdot DF \cdot EF = BK \cdot CD \cdot \frac{4R^2}{BK} = CD \cdot 4R^2 = CD^3 \quad (CD = 2R)$$

Xét $\triangle ABE$ vuông tại A có AC là đường cao $\Rightarrow CE \cdot BE = AE^2$

Xét $\triangle ABF$ vuông tại A có AD là đường cao $\Rightarrow DF \cdot BF = AF^2$

Suy ra :

$$\frac{CE \cdot BE}{DF \cdot BF} = \frac{AE^2}{AF^2} \Rightarrow \frac{CE}{DF} = \left(\frac{AE}{AF} \right)^2 \cdot \frac{BF}{BE} \quad (*_3)$$

Mặt khác :

$$\begin{aligned} \triangle ABE &\sim \triangle AFB (g.g) \\ \Rightarrow \frac{AE}{AB} &= \frac{AB}{AF} = \frac{BE}{BF} \\ \Rightarrow \left(\frac{BE}{BF} \right)^2 &= \frac{AE}{AB} \cdot \frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AF} \quad (*_4) \end{aligned}$$

$$\text{Từ } (*_3) \text{ và } (*_4) \text{ suy ra : } \frac{CE}{DF} = \left(\frac{BE}{BF} \right)^4 \cdot \frac{BF}{BE} = \left(\frac{BE}{BF} \right)^3$$

$$\text{Vậy } \frac{CE}{DF} = \left(\frac{BE}{BF} \right)^3$$

Bài 4 (5 điểm) ✓

1. Gọi m, n lần lượt là số chữ số của 2^{2015} và 5^{2015} . Tính $m + n$
2. Cho đường tròn $(O, 1)$ và 3 điểm A, B, C tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại điểm M nằm trên (O) sao cho $MA + MB + MC \geq 3$

Lời giải

1.

Ta có :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 10^{m-1} < 2^{2015} < 10^m \\ 10^{n-1} < 5^{2015} < 10^n \end{cases} &\Rightarrow 10^{m-1} \cdot 10^{n-1} < 2^{2015} \cdot 5^{2015} < 10^m \cdot 10^n \\ &\Leftrightarrow 10^{m+n-2} < 10^{2015} < 10^{m+n} \\ &\Rightarrow m+n-1 = 2015 \\ &\Leftrightarrow m+n = 2016 \end{aligned}$$

Vậy $m + n = 2016$

2.

Vẽ đường kính DE bất kỳ của (O) . Khi đó ta có :

$$\begin{aligned} DA + EA &\geq DE = 2 \\ DB + EB &\geq DE = 2 \\ DC + EC &\geq DE = 2 \\ \Rightarrow (DA + DB + DC) + (EA + EB + EC) &\geq 6 \\ \Rightarrow \begin{cases} DA + DB + DC \geq 3 \\ EA + EB + EC \geq 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Như vậy luôn tồn tại điểm M thỏa mãn $MA + MB + MC \geq 3$

Bài 1 (4 điểm) ✓

Cho $P = \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1} - \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}-1} \quad (x > 0, x \neq 1)$

1. Rút gọn P
2. Tìm x để $P = 3$

Lời giải

1.

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} + \frac{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \\ &= \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) - (2\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}+1) \\ &= x - \sqrt{x} + 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P = 3 &\Leftrightarrow x - \sqrt{x} + 1 = 3 \\ &\Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \end{aligned}$$

Vậy để $P = 3$ thì $x = 4$

Bài 2 (4 điểm) ✓

Cho phương trình $x^2 + (4m+1)x + 2(m-4) = 0 \quad (1)$

1. Chứng minh phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt
2. Gọi $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của (1). Tìm m để $|x_1 - x_2| = 17$

Lời giải

1.

Xét phương trình (1) có $\Delta = (4m+1)^2 - 8(m-4) = 16m^2 + 33 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow$ phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

2.

Theo Vi-et ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -(4m+1) \\ x_1 x_2 = 2(m-4) \end{cases}$. Từ đó :

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| = 17 &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 17^2 \\ &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 289 \\ &\Leftrightarrow (4m+1)^2 - 8(m-4) = 289 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow m = 4 \text{ hoặc } m = -4$$

Vậy $m = 4$ và $m = -4$ là các giá trị cần tìm của m

Bài 3 (4 điểm) ✓

1. Giải hệ
$$\begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 2xy = 1 \end{cases}$$

2. Cho $m, n, p \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $n^2 + np + p^2 = 1 - \frac{3m^2}{2}$. Tìm GTLN của $S = m + n + p$

Lời giải

1.

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 \\ 2x^2 + y^2 - 2xy = 1 \end{cases} \quad (I) \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 4x^2 + y^4 - 4xy^3 = 1 & (*_1) \\ 4x^2 + 2y^2 - 4xy = 2 & (*_2) \end{cases} \end{aligned}$$

Trừ vế với vế của $(*_1)$ và $(*_2)$ ta được :

$$\begin{aligned} & y^4 - 2y^2 + 1 - 4xy^3 + 4xy = 0 \\ \Leftrightarrow & (y^2 - 1)(y^2 - 4xy - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y^2 - 1 = 0 \\ y^2 - 4xy - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \\ y^2 - 4xy - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

• Nếu $y = 1$, thay vào (I) ta được :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 4x^2 - 4x = 0 \\ 2x^2 - 2x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

• Nếu $y = -1$, thay vào (I) ta được :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 4x^2 + 4x = 0 \\ 2x^2 + 2x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

- Nếu $y^2 - 4xy - 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 4xy + 1$. Thay vào $(*)_2$ ta có :

$$\begin{aligned} & 4x^2 + 2(4xy + 1) - 4xy = 2 \\ \Leftrightarrow & 4x^2 + 4xy = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

+ Với $x = 0$, thay vào (I) ta được $y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

+ Với $x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y$. Thay vào (I) ta được :

$$\begin{cases} 5y^4 + 4y^2 = 1 \\ 5y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ y = -\frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm là :

$$\begin{aligned} (x, y) &= (0, 1) \\ (x, y) &= (0, -1) \\ (x, y) &= (1, 1) \\ (x, y) &= (-1, -1) \\ (x, y) &= \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-\sqrt{5}}{5} \right) \\ (x, y) &= \left(\frac{-\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5} \right) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} n^2 + np + p^2 &= 1 - \frac{3m^2}{2} \\ \Leftrightarrow 2n^2 + 2np + 2p^2 + 3m^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow (m + n + p)^2 + (n - m)^2 + (p - m)^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow S^2 = 2 - [(n - m)^2 + (p - m)^2] &\leq 2 \\ \Rightarrow S &\leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

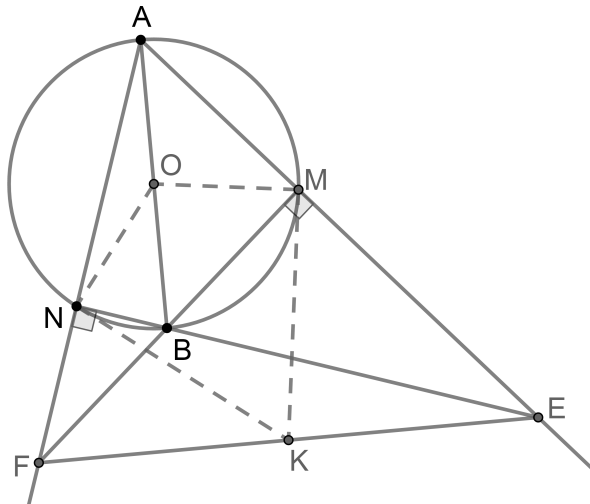
$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} n^2 + np + p^2 = 1 - \frac{3m^2}{2} \\ m = n = p \\ m + n + p = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = n = p = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Vậy $\text{Max} S = \sqrt{2}$ khi $m = n = p = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Bài 4 (5 điểm) ✓

Cho (O) đường kính AB cố định. Ax, Ay là 2 tia thay đổi luôn tạo với nhau góc 60° nằm về 2 phía của AB , cắt (O) lần lượt tại M và N . Đường thẳng BN cắt Ax tại E ; đường thẳng BM cắt Ay tại F . K là trung điểm của EF

1. Chứng minh rằng $\frac{EF}{AB} = \sqrt{3}$
2. Chứng minh rằng $OMKN$ là tứ giác nội tiếp
3. Khi tam giác AMN đều, gọi C là điểm di động trên cung nhỏ AN ($C \neq A, N$). Đường thẳng qua M và vuông góc với AC cắt NC tại D . Xác định vị trí của C để S_{MCD} lớn nhất.

Lời giải


1.

Xét tam giác AEF có $\begin{cases} FM \perp AE \\ NE \perp AF \end{cases} \Rightarrow B$ là trực tâm của $\triangle AEF \Rightarrow AB \perp EF$

$\Rightarrow \widehat{NAB} = \widehat{NEF}$ (2 góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \triangle ABN \sim \triangle EFN (g.g)$

$$\Rightarrow \frac{AB}{EF} = \frac{NA}{NE} = \cot \widehat{NAE} = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{AB} = \sqrt{3}$$

2.

Ta có $\widehat{MON} = 2\widehat{MAN} = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$ (1)

Tứ giác $MNFE$ nội tiếp đường tròn tâm K , đường kính $EF \Rightarrow \widehat{MKN} = 2\widehat{NFM}$

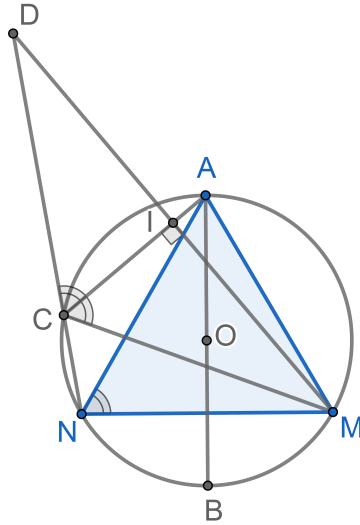
Mà $\widehat{NFM} = 90^\circ - \widehat{FAM} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{MKN} = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{MON} + \widehat{MKN} = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow MONK$ là tứ giác nội tiếp.

3. Gọi I là giao điểm của AC và DM



Ta có

$$\widehat{ACM} = \widehat{ANM} = 60^\circ$$

$$\widehat{ACD} = \widehat{AMN} = 60^\circ$$

$\Rightarrow \triangle MCD$ có CI vừa là đường cao, vừa là đường phân giác

$\Rightarrow \triangle MCD$ cân tại C

$$\Rightarrow S_{MCD} = 2.S_{MCI} = CI.MI$$

Trong đó :

$$CI = MC.\cos\widehat{MCI} = MC.\cos 60^\circ = \frac{MC}{2}$$

$$MI = MC.\sin\widehat{MCI} = MC.\sin 60^\circ = \frac{MC\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Suy ra } S_{MCD} = MC^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Do đó $S_{MCD} \text{ Max} \Leftrightarrow MC \text{ Max} \Leftrightarrow MC$ là đường kính của (O)

Bài 5 (3 điểm) ✓

1. Cho 2014 số nguyên dương không lớn hơn 2014 và có tổng bằng 4028. Chứng minh rằng từ 2014 số đó luôn chọn được các số mà tổng của chúng bằng 2014.
2. Cho tam giác ABC có các điểm D, E, F lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CA . Gọi giao điểm của AE với BF và CD lần lượt là Q, R ; giao điểm của CD và BF là P . Chứng minh rằng các tứ giác $AFPR; BDRQ; CEQP$ có diện tích bằng nhau biết $S_{ADR} = S_{BEQ} = S_{CFP} = S_{PQR} = 1$

Lời giải

1.

Gọi 2014 số đã cho là : $a_1, a_2, \dots, a_{2014}$

- Nếu 2014 số đó bằng nhau thì mỗi số bằng 2, do đó tổng của 1007 số bất kỳ bằng 2014 nên ta có ĐPCM.

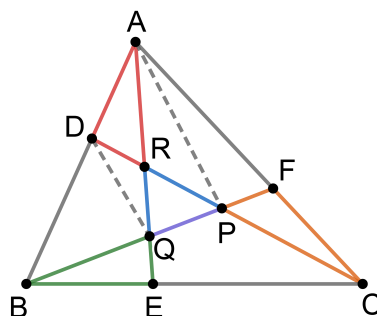
- Nếu trong 2014 số đã cho tồn tại 2 số khác nhau. Không mất tính tổng quát giả sử $a_1 \neq a_2$ và giả sử luôn $a_1 < a_2$
 Xét dãy gồm 2014 số : $S_1, S_2, \dots, S_{2013}$ và a_2
 Trong đó $S_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ với $1 \leq i \leq 2013$
 Như thế ta có $0 < S_1 < a_2 < S_2 < S_3 < \dots < S_{2013} < 4028$

- Nếu trong 2014 số này tồn tại 1 số chia hết cho 2014 thì nó phải bằng 2014, ta có ĐPCM
- Ngược lại, nếu không tồn tại số nào chia hết cho 2014 thì theo nguyên lý Dirichle, tồn tại 2 số có cùng số dư khi chia cho 2014. Xét các khả năng sau :
 - + Nếu $S_i, S_j (i < j)$ có cùng số dư khi chia cho 2014 thì $S_j - S_i : 2014$
 $\Rightarrow S_j - S_i = 2014 \Rightarrow$ ta có ĐPCM
 - + Nếu $a_2, S_j (j \geq 2)$ có cùng số dư khi chia cho 2014 thì $S_j - a_2 : 2014$
 $\Rightarrow S_j - a_2 = 2014 \Rightarrow$ ta có ĐPCM
 - + Nếu a_2, S_1 có cùng số dư khi chia cho 2014 thì $a_2 - S_1 = a_2 - a_1 : 2014$.
 Vì $a_1 < a_2$ nên $a_2 - a_1 \geq 2014 \Rightarrow a_2 > 2014$ (mâu thuẫn với giả thiết)

Vậy luôn chọn được các số mà tổng của chúng bằng 2014 từ 2014 số đã cho.

2.

Vì $S_{ADR} = S_{PQR}$ nên $S_{ADP} = S_{AQP} \Rightarrow$ khoảng cách từ D và Q đến AP bằng nhau



$$\Rightarrow DQ \parallel AP$$

$$\Rightarrow \frac{BP}{BQ} = \frac{AB}{BD} = \frac{AP}{DQ} = 1 + \frac{QP}{BQ} \quad (*)_1$$

$$\text{Từ } \triangle ARP \sim \triangle QRD (g.g) \Rightarrow \frac{AR}{QR} = \frac{RP}{RD} = \frac{AP}{DQ} \quad (*)_2$$

$$\text{Đặt } \frac{AR}{QR} = a; \frac{BQ}{QP} = b; \frac{CP}{PR} = c$$

$$\text{Từ } (*)_1 \text{ và } (*)_2 \text{ suy ra : } a = 1 + \frac{1}{b}$$

$$\text{Chúng minh tương tự ta cũng có : } b = 1 + \frac{1}{c}; c = 1 + \frac{1}{a} \Rightarrow a = b = c = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

$$\text{Từ } (*)_2 \text{ ta có } \frac{RP}{RD} = a = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \Rightarrow \frac{DP}{RP} = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \quad (*)_3$$

$$\text{Mặt khác } \frac{CP}{RP} = c = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \quad (*)_4$$

$$\text{Từ } (*)_3 \text{ và } (*)_4 \text{ suy ra } \frac{CP}{RP} = \frac{DP}{RP} \Rightarrow CP = DP$$

$$\Rightarrow S_{BCP} = S_{BDP}$$

$$\Rightarrow S_{BCP} - S_{BEQ} = S_{BDP} - S_{PQR}$$

$$\Rightarrow S_{QECP} = S_{BDRQ}$$

Chứng minh tương tự ta cũng có $S_{AFPR} = S_{BDRQ}$

Vậy các tứ giác $AFPR; BDRQ; CEQP$ có diện tích bằng nhau.

Bài 1 (4 điểm) ✓

Cho $P = \frac{a^2 - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a} + 1} - \frac{3a - 2\sqrt{a}}{\sqrt{a}} + \frac{a - 4}{\sqrt{a} - 2} \quad (a > 0; a \neq 4)$

1. Rút gọn P
2. Tìm GTNN của P

Lời giải

1.

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)(a + \sqrt{a} + 1)}{a + \sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a}(3\sqrt{a} - 2)}{\sqrt{a}} + \frac{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 2)}{\sqrt{a} - 2} \\ &= a - \sqrt{a} - (3\sqrt{a} - 2) + \sqrt{a} + 2 \\ &= a - 3\sqrt{a} + 4 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P &= a - 3\sqrt{a} + 4 = \left(\sqrt{a} - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} \\ P &= \frac{7}{4} \Leftrightarrow \sqrt{a} - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Vậy $\min P = \frac{7}{4}$ khi $a = \frac{9}{4}$

Bài 2 (4 điểm) ✓

1. Trong mặt phẳng tọa độ oxy cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = kx + 1$. Tìm k để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt M và N sao cho $MN = 2\sqrt{10}$

2. Giải hệ
$$\begin{cases} (x+y)(z+x) = 12 \\ (x+y)(y+z) = 15 \\ (y+z)(z+x) = 20 \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{Z}^+)$$

Lời giải

1.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$x^2 = kx + 1 \Leftrightarrow x^2 - kx - 1 = 0 \quad (*)$$

Giả sử $M(x_1, kx_1 + 1)$ và $N(x_2, kx_2 + 1) \Rightarrow MN^2 = (k^2 + 1)(x_1 - x_2)^2$

Từ đó :

$$\begin{aligned} (d) \text{ cắt } (P) \text{ tại 2 điểm phân biệt } M, N \text{ thỏa mãn } MN &= 2\sqrt{10} \\ \Leftrightarrow (*) \text{ có 2 nghiệm } x_1; x_2 \text{ phân biệt thỏa mãn } (k^2 + 1)(x_1 - x_2)^2 &= 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ (k^2 + 1) [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = 40 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k^2 + 4 > 0 \\ (k^2 + 1)(k^2 + 4) = 40 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (k^2 + 9)(k^2 - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow k^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $k = 2, k = -2$ là các giá trị cần tìm.

2.

$$(I) \begin{cases} (x+y)(z+x) = 12 \\ (x+y)(y+z) = 15 \\ (y+z)(z+x) = 20 \end{cases} \quad (x, y, z \in \mathbb{Z}^+)$$

Nhân vế với vế của 3 phương trình ta được : $[(x+y)(y+z)(z+x)]^2 = 3600$

Mà $x, y, z \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow (x+y)(y+z)(z+x) = 60$

Từ đó :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ y+z=5 \\ z+x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

Vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất là $(x, y, z) = (1, 2, 3)$

Bài 3 (3 điểm) ✓

1. Giải phương trình nghiệm nguyên $x^4 - 2y^4 - x^2y^2 - 4x^2 - 7y^2 - 5 = 0$

2. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn : $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=1 \\ a^3+b^3+c^3=1 \end{cases}$.

Chứng minh rằng $a^{2013} + b^{2013} + c^{2013} = 1$

Lời giải

1.

$$x^4 - 2y^4 - x^2y^2 - 4x^2 - 7y^2 - 5 = 0 \quad (*)$$

Đặt $x^2 = a; y^2 = b$ ($a, b \geq 0$) thì phương trình (*) trở thành :

$$\begin{aligned} &a^2 - 2b^2 - ab - 4a - 7b - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a - 2b - 5)(a + b + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a - 2b - 5) = 0 \quad (\text{vì } a, b \geq 0) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a = 2b + 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 2y^2 + 5$$

Một số chính phương chia cho 8 có thể dư 0, 1 hoặc 4
 $\Rightarrow 2y^2$ chia 8 có thể dư 0 hoặc 2
 $\Rightarrow 2y^2 + 5$ chia 8 có thể dư 5 hoặc 7
 Nhưng x^2 chia 8 dư 0, 1 hoặc 4 nên $x^2 = 2y^2 + 5$ vô nghiệm
 Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.
2.

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 1 \end{cases} \quad (**)$$

Ta có :

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b)(b + c)(c + a)$$

$$= (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ca) + 3abc$$

Suy ra : $(**) \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \\ abc = 0 \end{cases} \Rightarrow a, b, c \text{ là 3 nghiệm của phương trình bậc 3 :}$

$$t^3 - t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \end{cases}$$

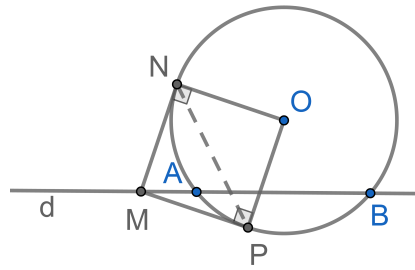
Vậy trong 3 số a, b, c có 2 số bằng 0 và 1 số bằng 1. Do đó $a^{2013} + b^{2013} + c^{2013} = 1$ (ĐPCM)

Bài 4 (6 điểm) ✓

Cho (O, R) và đường thẳng (d) không đi qua O cắt (O) tại A và B . Từ 1 điểm M tùy ý trên (d) và nằm ngoài (O) vẽ 2 tiếp tuyến MN, MP của (O) .

1. Đặt M trên (d) sao cho $MNOP$ là hình vuông
2. Chứng minh rằng tâm đường tròn đi qua 3 điểm M, N, P luôn thuộc đường thẳng cố định khi M di động trên (d)

Lời giải



1.

- Phân tích :
 $OPMN$ là hình vuông $\Rightarrow OM = \sqrt{2}.ON = R\sqrt{2}$
- Cách dựng :
Dựng M là giao điểm của $(O, R\sqrt{2})$ với (d)
- Chứng minh :
Tam giác OMN vuông tại N có $OM = R\sqrt{2} \Rightarrow ON = MN = R \Rightarrow OPMN$ là hình vuông

2.

Khi M di động trên (d) thì $OPMN$ là hình chữ nhật $\Rightarrow$ tâm I của đường tròn đi qua 3 điểm M, N, P là trung điểm của OM

Gọi h là khoảng cách từ O đến (d) , h' là khoảng cách từ I đến (d)

Khi đó : $h' = \frac{h}{2} = const$

Vậy khi M di động trên (d) thì tâm I của đường tròn đi qua 3 điểm M, N, P luôn nằm trên đường thẳng $(d') // (d)$, nằm giữa O và (d) , cách đều điểm O và (d)

Bài 5 (3 điểm) ✓

1. Tìm 2 số nguyên dương a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = [a, b] + 7(a, b)$ với $[a, b]$ và (a, b) lần lượt là bội chung nhỏ nhất và ước chung lớn nhất của a, b
2. Cho tam giác ABC thay đổi có $AB = 6; AC = 2BC$. Tìm $Max(S_{ABC})$

Lời giải

1.

1.
 Gọi $(a, b) = d \Rightarrow [a, b] = \frac{ab}{d}$

Đặt $\begin{cases} a = d.m \\ b = d.n \end{cases} \quad (m, n) = 1; m, n \in \mathbb{Z}^+.$ Từ giả thiết ta có :

$$\begin{aligned}(d.m)^2 + (d.n)^2 &= \frac{d.m.d.n}{d} + 7d \\ \Leftrightarrow d(m^2 + n^2) &= m.n + 7 \quad (*) \\ \Rightarrow (mn + 7) &: (m^2 + n^2) \\ \Rightarrow mn + 7 &> m^2 + n^2 > 2mn \quad (**)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow mn \leq 7$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $m \geq n$. Từ $mn \leq 7 \Rightarrow 1 \leq n \leq 2$

- Nếu $n = 1$. Thay vào (**) ta có :

$$\begin{aligned} m + 7 &\geq m^2 + 1 \\ \Leftrightarrow m^2 - m - 6 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq m \leq 3 \\ \Rightarrow m &\in \{1, 2, 3\} \quad \text{vì } m \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

$$+ \text{ Với } m = 1. \text{ Từ } (*) \Rightarrow d = 4 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$+ \text{ Với } m = 2. \text{ Từ } (*) \Rightarrow 5d = 9 \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ Với } m = 3. \text{ Từ } (*) \Rightarrow d = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \end{cases}$$

- Nếu $n = 2$. Thay vào (**) ta có :

$$\begin{aligned} 2m + 7 &\geq m^2 + 4 \\ \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow -1 &\leq m \leq 3 \\ \Rightarrow m &\in \{1, 2, 3\} \quad \text{vì } m \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

$$+ \text{ Với } m = 1. \text{ Từ } (*) \Rightarrow 5d = 9 \text{ (loại)}$$

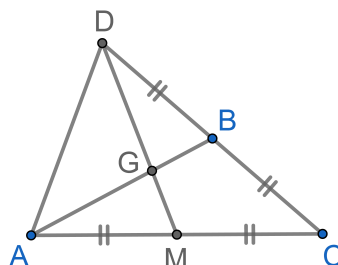
$$+ \text{ Với } m = 2. \text{ Từ } (*) \Rightarrow 8d = 11 \text{ (loại)}$$

$$+ \text{ Với } m = 3. \text{ Từ } (*) \Rightarrow d = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy những cặp số nguyên dương thỏa mãn là $(a, b) \in \{(4, 4); (3, 1); (1, 3); (3, 2); (2, 3)\}$

2.

Gọi M là trung điểm của AC . Trên tia đối của tia BC lấy điểm D sao cho $BD = DC$



$$\Rightarrow AC = CD = 2BC$$

$$\Rightarrow \triangle CAD \text{ cân tại } C$$

$$\Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle DAM (c.g.c) \Rightarrow DM = AB = 6$$

Gọi G là giao điểm của AB và DM

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của $\triangle ACD$

$$\Rightarrow \begin{cases} GB = \frac{1}{3}AB = 2 \\ GD = \frac{2}{3}DM = 4 \end{cases}$$

Từ đó $S_{ABC} = S_{ABD} = 3S_{BDG}$.

$$\text{Mà } S_{BDG} \leq \frac{GB \cdot GD}{2} = 4 \Rightarrow S_{ABC} \leq 12$$

$$S_{ABC} = 12 \Leftrightarrow S_{BDG} = 4 \Leftrightarrow GB \perp GD \Leftrightarrow \tan \widehat{BAC} = \frac{GM}{GA} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } \text{Max}(S_{ABC}) = 12 \text{ khi } \tan \widehat{BAC} = \frac{1}{2}$$

BÀI 1 (4 điểm) ✓

1. Rút gọn $M = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$

2. Cho $a, b \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $a + b = 5$. Tìm GTNN của $P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Lời giải

1.

$$2 + \sqrt{3} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right)^2; 2 - \sqrt{3} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right)^2$$

Từ đó :

$$\begin{aligned} M &= \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})}{3 + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}(2 - \sqrt{3})}{3 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(2 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) + \sqrt{2}(2 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} \\ &= \frac{\sqrt{2}(3 + \sqrt{3}) + \sqrt{2}(3 - \sqrt{3})}{6} \\ &= \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{6} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

2. Theo AM-GM ta có :

$$\begin{aligned} a + b &\geq 2\sqrt{ab} \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &\geq \frac{2}{\sqrt{ab}} \\ \Rightarrow (a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) &\geq 4 \\ \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} &\geq \frac{4}{5} \quad (\text{vì } a + b = 5) \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy } \min P = \frac{4}{5} \text{ khi } a = b = \frac{5}{2}$$

Bài 2 (5 điểm) ✓1. Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt[4]{20-x} = 4$ 2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x-4)\sqrt{y-3} + (y-1)\sqrt{x+2} = 7\sqrt{6} \\ 12x\sqrt{y-4} + 4\sqrt{2}y\sqrt{x-2} = 5xy \end{cases}$$
Lời giải

1.

$$\sqrt{x} + \sqrt[4]{20-x} = 4 \quad (*) \quad (0 \leq x \leq 20)$$

Đặt $t = \sqrt[4]{20-x} \quad (t \geq 0) \Rightarrow x = 20 - t^4$. Phương trình (*) trở thành :

$$\begin{aligned} \sqrt{20-t^4} + t &= 4 \\ \Leftrightarrow \sqrt{20-t^4} &= 4-t \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4-t \geq 0 \\ 20-t^4 = (4-t)^2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 4 \\ (t-2)(t^3+2t^2+5t+2) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow t &= 2 \quad (\text{vì } t \geq 0) \end{aligned}$$

Với $t = 2$ ta có $\sqrt[4]{20-x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$ Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất là $x = 4$

2.

$$\begin{cases} (x-4)\sqrt{y-3} + (y-1)\sqrt{x+2} = 7\sqrt{6} \\ 12x\sqrt{y-4} + 4\sqrt{2}y\sqrt{x-2} = 5xy \end{cases} \quad (**), \quad (x \geq 2; y \geq 4)$$

Theo AM-GM ta có :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{4} \cdot \sqrt{y-4} &\leq 4 + y - 4 = y \\ \Rightarrow 12x\sqrt{y-4} &\leq 3xy \quad (*)_1 \\ 2\sqrt{2}\sqrt{x-2} &\leq 2 + x - 2 = x \\ \Rightarrow 4\sqrt{2}y\sqrt{x-2} &\leq 2xy \quad (*)_2 \end{aligned}$$

Từ $(*)_1$ và $(*)_2$ suy ra $12x\sqrt{y-4} + 4\sqrt{2}y\sqrt{x-2} \leq 5xy$

Do đó :

$$\begin{aligned} (**) &\Leftrightarrow \text{Đẳng thức ở } (*)_1 \text{ và } (*)_2 \text{ xảy ra} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y-4} = 2 \\ \sqrt{x-2} = \sqrt{2} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 8 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại thấy $x = 4$ và $y = 8$ thỏa mãn hệ đã cho.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (4, 8)$

Bài 3 (3 điểm) ✓

Tìm tất cả các số nguyên n sao cho $A = (n - 2010)(n - 2011)(n - 2012)$ là 1 số chính phương.

Lời giải

Đặt $a = n - 2011 \Rightarrow A = a(a - 1)(a + 1) = a(a^2 - 1)$.

Bài toán trở thành tìm nghiệm nguyên của phương trình $a(a^2 - 1) = b^2$ (*) ($a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}^*$)

- Nếu $a = 0 \Rightarrow A = 0$ thỏa mãn và $n = 2011$ là 1 giá trị cần tìm.
- Nếu $a^2 - 1 = 0 \Rightarrow A = 0$ thỏa mãn và $n = 2012, n = 2010$ là 2 giá trị cần tìm.

- Nếu $\begin{cases} a \neq 0 \\ a^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow a^2 - 1 > 0$ và từ (*) suy ra $a > 0$

Vì $(a, a^2 - 1) = 1$ nên từ (*) suy ra: $\begin{cases} a = m^2 \\ a^2 - 1 = n^2 \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{Z}^+; mn = b)$

$$\Rightarrow m^4 - 1 = n^2.$$

Mà

$$\begin{aligned} (m^2)^2 &= m^4 < m^4 - 1 < m^4 + 2m^2 + 1 = (m^2 + 1)^2 \\ \Rightarrow (m^2)^2 &< n^2 < (m^2 + 1)^2 \\ \Rightarrow m^2 &< n < m^2 + 1 \quad (\text{không tồn tại } m, n \text{ thỏa mãn}) \end{aligned}$$

Vậy những giá trị cần tìm của n là $n \in \{2010, 2011, 2012\}$

Bài 4 (6 điểm) ✓

Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 60^\circ; BC = a; AB = c$. Hình chữ nhật $MNPQ$ có M nằm trên cạnh AB ; N nằm trên cạnh AC ; P, Q nằm trên cạnh BC được gọi là hình chữ nhật nội tiếp tam giác ABC .

1. Tìm vị trí của M trên AB để hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất. Tính diện tích đó.
2. Dựng hình vuông $EFGH$ ($E \in AB; F \in AG; G, H \in BC$) nội tiếp tam giác ABC bằng thước và compa. Tính diện tích của hình vuông đó.

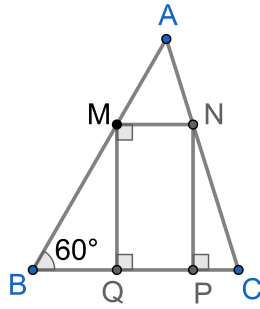
Lời giải

1.

Đặt $AM = x$ ($0 < x < c$)

Vì $MN \parallel BC$ nên $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow MN = AM \cdot \frac{BC}{AB} = x \cdot \frac{a}{c}$

Lại có $MQ = MB \cdot \sin 60^\circ = (c - x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$



Suy ra $S_{MNPQ} = MN \cdot MQ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{xa}{c} \cdot (c-x) = \frac{\sqrt{3}a}{2c} \cdot x(c-x)$

Theo AM-GM :

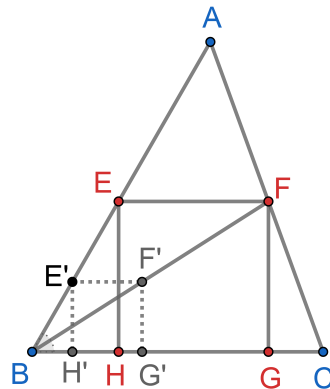
$$x(c-x) \leq \left(\frac{x+c-x}{2} \right)^2 = \frac{c^2}{4}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} \leq \frac{\sqrt{3}a}{2c} \cdot \frac{c^2}{4} = \frac{\sqrt{3}ac}{8}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = c-x \Leftrightarrow x = \frac{c}{2}$ hay M là trung điểm của AB

Vậy $\text{Max} S_{MNPQ} = \frac{\sqrt{3}ac}{8}$ khi M là trung điểm của AB

2.



- Phân tích :

Giả sử dựng được hình vuông $EFGH$ thỏa mãn yêu cầu.

Lấy F' bất kỳ thuộc đoạn BF

Dựng hình chữ nhật $E'F'G'H'$ có $E' \in AB; G', H' \in BC$

$$E'F' \parallel EF \Rightarrow \frac{E'F'}{EF} = \frac{BF'}{BF}$$

$$F'G' \parallel FG \Rightarrow \frac{F'G'}{FG} = \frac{BF'}{BF}$$

$$\Rightarrow \frac{E'F'}{EF} = \frac{F'G'}{FG} \Rightarrow EF = FG \quad (\text{vì } EF = FG)$$

$$\Rightarrow E'F'G'H' \text{ là hình vuông}$$

- Cách dựng :

- + Lấy điểm E' bất kỳ thuộc cạnh AB
- + Dựng hình vuông $E'F'G'H'$ với $H', G' \in BC$
- + Kéo dài BF' cắt AC tại F
- + Dựng hình chữ nhật $EFGH$ nội tiếp $\triangle ABC$

Khi đó $EFGH$ là hình vuông

- Chứng minh :

$$\begin{aligned}\frac{E'F'}{EF} &= \frac{F'G'}{FG} = \frac{BF'}{BF} \\ \Rightarrow EF &= FG \quad (\text{vì } E'F' = F'G') \\ \Rightarrow EFGH &\text{ là hình vuông}\end{aligned}$$

Đặt $AE = x$. Sử dụng kết quả câu 1. ta có $EF = \frac{xa}{c}$; $EH = \frac{\sqrt{3}}{2}(c-x)$

$$\text{Mà } EF = EH \Rightarrow \frac{xa}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}(c-x) \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}c^2}{2a + \sqrt{3}c}$$

$$\text{Từ đó } S_{EFGH} = EF^2 = \left(\frac{\sqrt{3}c^2}{2a + \sqrt{3}c} \cdot \frac{a}{c} \right)^2 = \frac{3a^2c^2}{(2a + \sqrt{3}c)^2}$$

Bài 5 (2 điểm) ✓

Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương tận cùng là 2012 chia hết cho 2011

Lời giải

Xét dãy gồm 2011 số nguyên dương sau :

$$\begin{aligned}a_1 &= 2012 \\ a_2 &= 2012 \quad 2012 \\ a_3 &= 2012 \quad 2012 \quad 2012 \\ &\dots \\ a_{2011} &= \underbrace{2012 \quad 2012 \dots 2012}_{2011 \text{ số } 2012}\end{aligned}$$

- Nếu trong dãy trên tồn tại số chia hết cho 2011 thì bài toán được chứng minh
- Ngược lại, nếu không có số nào chia hết cho 2011 thì theo nguyên lý Dirichle, tồn tại 2 số a_k và a_{k+i} có cùng số dư khi chia cho 2011.
Trong đó $k, k+i \in \mathbb{N}$ và $1 \leq k < k+i \leq 2011$

$$\Rightarrow (a_{k+i} - a_k) : 2011$$

$$\Leftrightarrow a_i \cdot 10^k : 2011$$
Mà $(10^k, 2011) = 1 \Rightarrow a_i : 2011 \rightarrow$ mâu thuẫn.

Vậy trong 2011 số thuộc dãy trên luôn tồn tại ít nhất 1 số chia hết cho 2011. Từ đó ta có ĐPCM.

Bài 1 (6 điểm) ✓

1. Giải phương trình $x^2 - 3x + 6 - 3\sqrt{x^2 - 3x + 4} = 0$

2. Giải phương trình $\frac{4}{x} + \sqrt{x - \frac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \frac{5}{x}}$

Lời giải

1.

$$x^2 - 3x + 6 - 3\sqrt{x^2 - 3x + 4} = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$ ($t \geq 0$) thì (*) trở thành :

$$\begin{aligned} t^2 - 3t + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

• Với $t=1$, ta có : $\sqrt{x^2 - 3x + 4} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 3 = 0$ (vô nghiệm)

• Với $t=2$, ta có : $\sqrt{x^2 - 3x + 4} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Vậy phương trình (*) có các nghiệm là $x = 0$ và $x = 3$

2.

$$\frac{4}{x} + \sqrt{x - \frac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \frac{5}{x}} \quad (**)$$

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} x - \frac{1}{x} \geq 0 \\ 2x - \frac{5}{x} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ -1 \leq x < 0 \\ x \geq \sqrt{\frac{5}{2}} \\ -\sqrt{\frac{5}{2}} \leq x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{\frac{5}{2}} \\ -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

Với điều kiện trên, ta có :

$$(**) \Leftrightarrow \sqrt{2x - \frac{5}{x}} - \sqrt{x - \frac{1}{x}} + x - \frac{4}{x} = 0$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{2x - \frac{5}{x}}; b = \sqrt{x - \frac{1}{x}} \quad (a, b \geq 0) \Rightarrow x - \frac{4}{x} = a^2 - b^2. \text{ Từ đó :}$$

$$\begin{aligned} a - b + a^2 - b^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - b)(a + b + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow a - b &= 0 \quad (\text{vì } a, b \geq 0) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \sqrt{2x - \frac{5}{x}} &= \sqrt{x - \frac{1}{x}} \\ \Leftrightarrow 2x - \frac{5}{x} &= x - \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow x - \frac{4}{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 & (\text{thỏa mãn đk}) \\ x = -2 & (\text{không thỏa mãn đk}) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình (**) có nghiệm duy nhất là $x = 2$

Bài 2 (3 điểm) ✓

Cho $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ và $y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$
 Tính giá trị của $P = x^3 + y^3 - 3(x+y) + 2011$

Lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned} x^3 &= 3 + 2\sqrt{2} + 3 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} \cdot \left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \right) \\ &= 6 + 3x \\ y^3 &= 17 + 12\sqrt{2} + 17 - 12\sqrt{2} + 3\sqrt{(17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})} \cdot \left(\sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}} \right) \\ &= 34 + 3y \end{aligned}$$

Từ đó suy ra :

$$\begin{aligned} P &= x^3 + y^3 - 3(x+y) + 2011 \\ &= (x^3 - 3x) + (y^3 - 3y) + 2011 \\ &= 6 + 34 + 2011 \\ &= 2051 \end{aligned}$$

Vậy $P = 2051$

Bài 3 (3 điểm) ✓

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) sao cho $x(x+1) = y^2 + 1$

Lời giải

Cách 1 :

$$\begin{aligned} x(x+1) &= y^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x^2 + x - (y^2 + 1) &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Coi (*) là phương trình bậc hai (ẩn x). Ta có :

$$\Delta = 1 + 4(y^2 + 1) = 4y^2 + 5$$

Để $x \in \mathbb{Z}$ thì điều kiện cần là Δ phải là số chính phương. Tức là :

$$\begin{aligned} 4y^2 + 5 &= k^2 \quad (k \in \mathbb{N}) \\ \Leftrightarrow (k-2y)(k+2y) &= 5 \end{aligned}$$

Vì $(k-2y) + (k+2y) = 2k \geq 0$ nên có 2 khả năng sau đây :

$$\bullet \begin{cases} k-2y = 1 \\ k+2y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ y = 1 \end{cases} \text{ . Thay } y = 1 \text{ vào phương trình ban đầu ta được}$$

$$\begin{aligned} x(x+1) &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\bullet \begin{cases} k-2y = 5 \\ k+2y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 3 \\ y = -1 \end{cases} \text{ . Thay } y = -1 \text{ vào phương trình ban đầu ta được}$$

$$\begin{aligned} x(x+1) &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2 + x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

Cách 2 :

- Xét $x = 0$ và $x = -1$ không thỏa mãn
- Xét $x > 0$

$$x(x+1) = y^2 + 1 \Leftrightarrow y^2 = x^2 + x - 1$$

$$\text{Vì } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow x^2 \leq x^2 + x - 1 < (x+1)^2$$

$$\text{Suy ra } x^2 \leq y^2 < (x+1)^2 \Rightarrow y^2 = x^2 + x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \text{ hoặc } y = -1 \end{cases}$$

- Xét $x < 0$ và $x \neq -1 \Rightarrow x \leq -2$. Khi đó :

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &\leq x^2 + x - 1 < x^2 \\ \Rightarrow (x+1)^2 &\leq y^2 < x^2 \\ \Rightarrow y^2 &= x^2 + x - 1 = (x+1)^2 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \text{ hoặc } y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy các cặp số (x, y) thỏa mãn yêu cầu bài toán là :

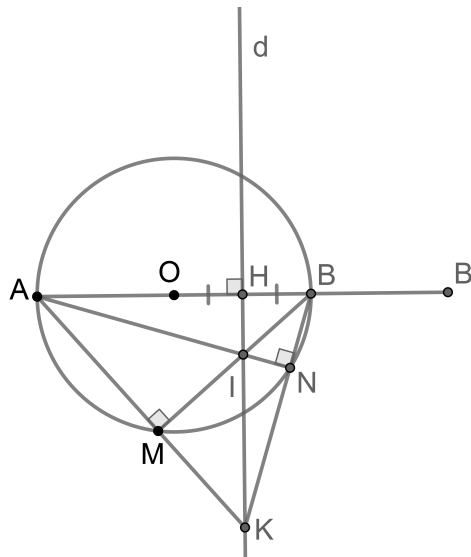
$$(x, y) \in \{(1, 1); (-2, 1); (1, -1); (-2, -1)\}$$

Bài 4 (6 điểm) ✓

Cho (O, R) có đường kính AB . Qua trung điểm H của OB kẻ đường thẳng (d) vuông góc với AB . M là điểm bất kỳ khác A, B trên (O) . AM và BM cắt (d) tại K và I . BK cắt (O) tại $N \neq B$.

1. Tính $BN \cdot BK$ theo R
2. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp $\triangle KIB$ luôn đi qua 1 điểm cố định khác B khi M di động trên (O) (M khác giao điểm của (d) và (O)).
3. Khi AK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle KIB$, tính $\frac{MA}{MB}$

Lời giải



1.

Ta có $\triangle ABN \sim \triangle KBH (g.g) \Rightarrow \frac{BN}{BH} = \frac{AB}{BK} \Rightarrow BN \cdot BK = AB \cdot BH$

Mà $AB = 2R; BH = \frac{R}{2} \Rightarrow BN \cdot BK = R^2$

2.

Lấy B' sao cho B là trung điểm của OB'

$\Rightarrow H$ là trung điểm của AB'

$\Rightarrow \triangle AKB'$ cân tại K

$\Rightarrow \widehat{AB'K} = \widehat{KAB'}$

Mặt khác :

$$\begin{aligned} \widehat{KAB'} &= \widehat{HIB} (= 180^\circ - \widehat{HIM}) \\ \Rightarrow \widehat{AB'K} &= \widehat{HIB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{AB'K} + \widehat{BIK} &= \widehat{HIB} + \widehat{BIK} = 180^\circ \\ \Rightarrow BIKB' &\text{ là tứ giác nội tiếp} \end{aligned}$$

Vậy đường tròn ngoại tiếp $\triangle BIK$ luôn đi qua điểm B' cố định.

3.

Khi AK là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle KIB$ thì $\widehat{AKB} = \widehat{BB'K}$

Mà $\widehat{BB'K} = \widehat{BAK} \Rightarrow \widehat{AKB} = \widehat{BAK} \Rightarrow \triangle ABK$ cân tại B .

$\Rightarrow M$ là trung điểm của AK (vì $BM \perp AK$)

$$\Rightarrow AK = 2AM = 2MK$$

$$\text{Mặt khác: } \triangle AKN \sim \triangle BKM (g.g) \Rightarrow \frac{AK}{BK} = \frac{NK}{MK} \Rightarrow AK.MK = BK.NK \text{ hay } 2MA^2 = BK.NK$$

$$\text{Hơn nữa: } BK.NK = BK.(BK - BN) = BK^2 - BK.BN = 4R^2 - R^2 = 3R^2 \text{ (vì } BK = AB = 2R)$$

$$\text{Suy ra: } 2MA^2 = 3R^2 \Rightarrow MA = R\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$MB^2 = AB^2 - MA^2 = 4R^2 - \frac{3R^2}{2} = \frac{5R^2}{2} \Rightarrow MB = R\sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$\text{Từ đó: } \frac{MA}{MB} = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Bài 5 (2 điểm) ✓

Cho $a, b \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $a^2 + b^2 \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2$

Lời giải

$$\begin{aligned} Q &= a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} + 4 \\ &= \left(a^2 + \frac{1}{4a^2}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{4b^2}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + 4 \\ &\geq 2\sqrt{a^2 \cdot \frac{1}{4a^2}} + 2\sqrt{b^2 \cdot \frac{1}{4b^2}} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + 4 \quad (AM - GM) \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + 6 \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác cũng theo AM-GM thì } \left(a^2 + b^2\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) \geq 2ab \cdot \frac{2}{ab} = 4$$

$$\text{Mà } a^2 + b^2 \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 4 \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $Q \geq 9$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Vậy $\min(Q) = 9$

Bài 1 (3,5 điểm) ✓

1. Rút gọn $P = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}}$

2. Cho hàm số $f(x) = (x^3 + 6x - 5)^{2010}$. Tính $f(a)$ với $a = \sqrt[3]{3 + \sqrt{17}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{17}}$

Lời giải

1. Ta có $4 + 2\sqrt{3} = (1 + \sqrt{3})^2$; $4 - 2\sqrt{3} = (1 - \sqrt{3})^2$
 Từ đó :

$$\begin{aligned} P &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + (1 + \sqrt{3})} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - (\sqrt{3} - 1)} \\ &= \frac{2 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{(2 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})} \\ &= \frac{6}{6} = 1 \end{aligned}$$

2. Ta có :

$$\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{3 + \sqrt{17}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt{17}} \\ \Rightarrow a^3 &= 3 + \sqrt{17} + 3 - \sqrt{17} + 3a \cdot \sqrt[3]{(3 + \sqrt{17})(3 - \sqrt{17})} \\ \Leftrightarrow a^3 &= 6 - 6a \\ \Leftrightarrow a^3 + 6a - 6 &= 0 \\ \Rightarrow f(a) &= 1^{2010} = 1 \end{aligned}$$

Bài 2 (4,5 điểm) ✓

1. Giải hệ $\begin{cases} x^2 - 2x\sqrt{y} + 2y = x \\ y^2 - 2y\sqrt{z} + 2z = y \\ z^2 - 2z\sqrt{x} + 2x = z \end{cases}$

2. Giải phương trình $x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3}$

Lời giải

1.

$$\begin{cases} x^2 - 2x\sqrt{y} + 2y = x \\ y^2 - 2y\sqrt{z} + 2z = y \\ z^2 - 2z\sqrt{x} + 2x = z \end{cases} \quad (I) \quad (x, y, z \geq 0)$$

Cộng vế với vế của 3 phương trình ta được :

$$\begin{aligned} & x^2 - 2x\sqrt{y} + 2y + y^2 - 2y\sqrt{z} + 2z + z^2 - 2z\sqrt{x} + 2x = x + y + z \\ \Leftrightarrow & (x^2 - 2x\sqrt{y} + y) + (y^2 - 2y\sqrt{z} + z) + (z^2 - 2z\sqrt{x} + x) = 0 \\ \Leftrightarrow & (x - \sqrt{y})^2 + (y - \sqrt{z})^2 + (z - \sqrt{x})^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & x - \sqrt{y} = y - \sqrt{z} = z - \sqrt{x} = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = y = z = 0 \\ x = y = z = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại thấy $x = y = z = 0$ và $x = y = z = 1$ đều thỏa mãn hệ (I).

Vậy hệ (I) có các nghiệm là : $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ và $(x, y, z) = (0, 0, 0)$

2.

Ta có :

$$\begin{aligned} & x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow & 3x^3 - 3x^2 - 3x = 1 \\ \Leftrightarrow & 4x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ \Leftrightarrow & 4x^3 = (x + 1)^3 \\ \Leftrightarrow & \sqrt[3]{4}x = x + 1 \\ \Leftrightarrow & x = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1} \end{aligned}$$

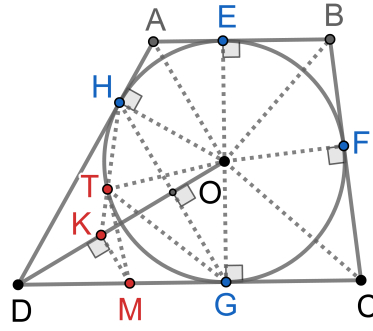
Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1}$

Bài 3 (4 điểm) ✓

Cho (O, R) nội tiếp hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) với E, F, G, H theo thứ tự là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, BC, CD, DA .

1. Chứng minh rằng $\frac{EB}{EA} = \frac{GD}{GC}$. Từ đó tính $\frac{EB}{EA}$ biết $AB = \frac{4R}{3}$ và $BC = 3R$
2. Trên cạnh CD lấy điểm M nằm giữa D và G sao cho chân đường vuông góc kẻ từ M đến DO là điểm K nằm ngoài (O) . Đường thẳng HK cắt (O, R) tại $T \neq H$. Chứng minh rằng $MT = MG$

Lời giải



1.

OA, OD lần lượt là phân giác của $\widehat{DAB}, \widehat{ADC}$ nên :

$$\begin{aligned}\widehat{DAO} + \widehat{ADO} &= \frac{1}{2}(\widehat{DAB} + \widehat{ADC}) = 90^\circ \\ \Rightarrow \widehat{AOD} &= 90^\circ \\ \Rightarrow \triangle AOD &\text{ vuông tại } O\end{aligned}$$

Mà $OH \perp AD \Rightarrow R^2 = OH^2 = HA.HD$

Chứng minh tương tự ta cũng có $R^2 = FB.FC$

Suy ra $HA.HD = FB.FC$

Mặt khác theo tính chất của tiếp tuyến thì $\begin{cases} HA = EA; HD = GD \\ FB = EB; FC = GC \end{cases}$

Do đó $EA.GD = EB.GC \Rightarrow \frac{EB}{EA} = \frac{GD}{GC}$ (ĐPCM)

Đặt $\frac{EB}{EA} = k (k > 0)$. Ta có :

$$\begin{aligned}BC^2 &= EG^2 + (GC - EB)^2 \\ \Rightarrow (GC - EB)^2 &= BC^2 - EG^2 = 5R^2 \quad (*)\end{aligned}$$

$$\frac{EB}{EA} = k \Rightarrow \frac{EB}{AB} = \frac{EB}{EB + EA} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow EB = \frac{k}{k+1}.AB = \frac{4Rk}{3(k+1)} \quad (**)$$

Lại có :

$$\begin{aligned}FC &= BC - BF = BC - EB = 3R - \frac{4Rk}{3(k+1)} = \frac{R(5k+9)}{3(k+1)} \\ \Rightarrow GC &= FC = \frac{R(5k+9)}{3(k+1)} \quad (***)\end{aligned}$$

Thay (**) và (***) vào (*) ta được :

$$\begin{aligned}\left(\frac{R(5k+9)}{3(k+1)} - \frac{4Rk}{3(k+1)} \right)^2 &= 5R^2 \\ \Leftrightarrow (k+9)^2 &= 45(k+1)^2 \\ \Leftrightarrow k &= \frac{9-3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-1} = \frac{6\sqrt{5}-9}{11}\end{aligned}$$

Vậy $\frac{EB}{EA} = \frac{6\sqrt{5}-9}{11}$

2.

Vì $\begin{cases} KM \perp OD \\ HG \perp OD \end{cases} \Rightarrow KM \parallel HG \Rightarrow \widehat{KMD} = \widehat{HGD}$

Mà $\widehat{HGD} = \widehat{KTG}$ (cùng bằng nửa số đo cung HTG) $\Rightarrow \widehat{KMD} = \widehat{KTG}$

Suy ra :

$$\widehat{KTG} + \widehat{KMG} = \widehat{KMD} + \widehat{KMG} = 180^\circ \Rightarrow KTGM \text{ là tứ giác nội tiếp}$$

Lại có : $OKMG$ nội tiếp đường tròn đường kính OM

$\Rightarrow 5$ điểm O, T, K, G, M cùng thuộc đường tròn đường kính OM

$\Rightarrow \widehat{OTM} = 90^\circ$

$\Rightarrow MT$ là tiếp tuyến của (O, R)

$\Rightarrow MT = MG$ (ĐPCM)

Bài 4 (4 điểm) ✓

1. Cho $\triangle ABC$ có $BC = a, CA = b, AB = c$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác thỏa mãn $R(b+c) = a\sqrt{bc}$. Xác định dạng của tam giác ABC
2. Giả sử $\triangle ABC$ không có góc tù và có 2 đường cao là AH, BK . Biết $AH \geq BC$ và $BK \geq CA$. Tính các góc của tam giác ABC

Lời giải

1.

$$R(b+c) = a\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{R}{a} = \frac{\sqrt{bc}}{b+c}$$

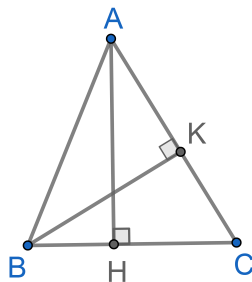
Theo AM-GM :

$$\sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2} \Rightarrow \frac{R}{a} = \frac{\sqrt{bc}}{b+c} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow a \geq 2R$$

Nhưng R là bán kính đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC nên $a \leq 2R$

Do vậy phải có $\begin{cases} a = 2R \\ b = c \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông cân tại A}$

2.



$$\begin{cases} AC \geq AH \\ AH \geq BC \text{ (GT)} \end{cases} \Rightarrow AC \geq BC \quad (*)$$

$$\begin{cases} BC \geq BK \\ BK \geq AC(GT) \end{cases} \Rightarrow BC \geq AC \quad (*_2)$$

Từ $(*_1)$ và $(*_2)$ suy ra $\begin{cases} AC = BC \\ AC = AH \\ BC = BK \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông cân tại } C$

Vậy $\triangle ABC$ có $\widehat{A} = \widehat{B} = 45^\circ$ và $\widehat{C} = 90^\circ$

Bài 5 (4 điểm) ✓

1. Tìm tất cả các cặp số tự nhiên n và k để $n^4 + 4^{2k+1}$ là số nguyên tố.
2. cho $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của $a + b$

Lời giải

1.

Ta có :

$$\begin{aligned} n^4 + 4^{2k+1} &= (n^2 + 2^{2k+1})^2 - (n \cdot 2^{k+1})^2 \\ &= (n^2 + 2^{2k+1} + n \cdot 2^{k+1}) \cdot (n^2 + 2^{2k+1} - n \cdot 2^{k+1}) \end{aligned}$$

Với $n, k \in \mathbb{N}$ thì $1 < n^2 + 2^{2k+1} + n \cdot 2^{k+1} \in \mathbb{N}$, do đó để $n^4 + 4^{2k+1}$ là số nguyên tố thì điều kiện cần là :

$$\begin{aligned} n^2 + 2^{2k+1} - n \cdot 2^{k+1} &= 1 \\ \Leftrightarrow n^2 - 2n \cdot 2^k + 2^{2k} &= 1 - 2^{2k} \\ \Leftrightarrow (n - 2^k)^2 &= 1 - 2^{2k} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ n = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại với $k = 0, n = 1$ thì $n^4 + 4^{2k+1} = 5$ là số nguyên tố. Vậy $n = 1, k = 0$ là cặp số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

2.

$$2 = a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Mà $a^2 - ab + b^2 \geq 0 \Rightarrow a + b > 0 \quad (*)$

Đặt $\begin{cases} x = a - 1 \\ y = b - 1 \end{cases}$. Khi đó :

$$\begin{aligned} (x + 1)^3 + (y + 1)^3 &= 2 \\ \Leftrightarrow x^3 + y^3 + 3(x^2 + y^2) + 3(x + y) &= 0 \\ \Rightarrow x^3 + y^3 + 3(x + y) &\leq 0 \quad (\text{vì } x^2 + y^2 \geq 0) \\ \Leftrightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2 + 3) &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x + y \leq 0 \quad (\text{vì } x^2 - xy + y^2 + 3 > 0) \\ &\Leftrightarrow a + b \leq 2 \quad (**) \end{aligned}$$

Từ (*) và (**) suy ra $0 < a + b \leq 2$

$\Rightarrow$ nếu $a + b$ nguyên thì $a + b = 1$ hoặc $a + b = 2$

- Tại $a = b = 1$ thì $a + b = a^3 + b^3 = 2$

- Để $a + b = 1$ thì $\begin{cases} a^3 + b^3 = 2 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = \frac{-1}{3} \\ a + b = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow a, b$ là 2 nghiệm của phương trình $t^2 - t - \frac{1}{3} = 0$

Phương trình này có nghiệm vì $\Delta = \frac{7}{3} > 0$

Vậy $a + b$ có thể nhận các giá trị nguyên là 1 và 2.

Bài 1 (4 điểm) ✓

Rút gọn :

1. $A = \sqrt{\sqrt{5} - \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}}}$

2. $B = \frac{x^8 + 3x^4 + 4}{x^4 + x^2 + 2}$

Lời giải

1.

$$\begin{aligned} 29 - 12\sqrt{5} &= 29 - 2\sqrt{120} = (2\sqrt{5} - 3)^2 \\ \Rightarrow \sqrt{3 - \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}} &= \sqrt{3 - (2\sqrt{5} - 3)} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1 \\ \Rightarrow A &= \sqrt{\sqrt{5} - (\sqrt{5} - 1)} = 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x^8 + 3x^4 + 4 &= (x^4 + 2)^2 - x^4 = (x^4 - x^2 + 2)(x^4 + x^2 + 2) \\ \Rightarrow B &= \frac{(x^4 - x^2 + 2)(x^4 + x^2 + 2)}{x^4 + x^2 + 2} = x^4 - x^2 + 2 \end{aligned}$$

Bài 2 (4 điểm) ✓

1. Cho $a > c, b > c, c > 0$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

2. Cho $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x+yz} + \sqrt{y+zx} + \sqrt{z+xy} \geq 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$$

Lời giải

1.

$$\begin{aligned} \sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)} &\leq \sqrt{ab} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{c(b-c)}}{\sqrt{ab}} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{c}{b} \left(1 - \frac{c}{a}\right)} + \sqrt{\frac{c}{a} \left(1 - \frac{c}{b}\right)} &\leq 1 \quad (*_1) \end{aligned}$$

Theo AM-GM :

$$\sqrt{\frac{c}{b} \left(1 - \frac{c}{a}\right)} \leq \frac{\frac{c}{b} + 1 - \frac{c}{a}}{2}$$

$$\sqrt{\frac{c}{a} \left(1 - \frac{c}{b}\right)} \leq \frac{\frac{c}{a} + 1 - \frac{c}{b}}{2}$$

Suy ra :

$$\sqrt{\frac{c}{b} \left(1 - \frac{c}{a}\right)} + \sqrt{\frac{c}{a} \left(1 - \frac{c}{b}\right)} \leq \frac{\frac{c}{a} + 1 - \frac{c}{b} + \frac{c}{b} + 1 - \frac{c}{a}}{2} = 1$$

Vậy $(*)_1$ đúng và từ đó ta có ĐPCM.

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c}{b} = 1 - \frac{c}{a} \\ \frac{c}{a} = 1 - \frac{c}{b} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{c}{a} + \frac{c}{b} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{ab}{a+b}$$

2.

Ta chứng minh :

$$\sqrt{x+yz} \geq x + \sqrt{yz} \quad (*_2)$$

Thật vậy :

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+yz} \geq x + \sqrt{yz} \quad (*_2) \\ \Leftrightarrow & x+yz \geq (x + \sqrt{yz})^2 \\ \Leftrightarrow & x+yz \geq x^2 + yz + 2x\sqrt{yz} \\ \Leftrightarrow & x \geq x^2 + 2x\sqrt{yz} \\ \Leftrightarrow & 1 \geq x + 2\sqrt{yz} \quad (\text{vì } x > 0) \\ \Leftrightarrow & 1-x \geq 2\sqrt{yz} \\ \Leftrightarrow & y+z \geq 2\sqrt{yz} \quad (\text{vì } x+y+z=1) \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{y}-\sqrt{z})^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}) \end{aligned}$$

Vậy $(*)_2$ đúng và chứng minh tương tự ta cũng có :

$$\sqrt{y+zx} \geq y + \sqrt{zx} \quad (*_3)$$

$$\sqrt{z+xy} \geq z + \sqrt{xy} \quad (*_4)$$

Từ $(*)_2, (*_3), (*_4)$ suy ra :

$$\sqrt{x+yz} + \sqrt{y+zx} + \sqrt{z+xy} \geq x+y+z + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$$

Hay

$$\sqrt{x+yz} + \sqrt{y+zx} + \sqrt{z+xy} \geq 1 + \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=z \\ x+y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{1}{3}$$

Bài 3 (4 điểm) ✓

1. Giải phương trình : $x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2+1} \quad (*)$

2. Giải hệ :
$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ xy+yz-zx=-1 \\ x^2+y^2+z^2=14 \end{cases} \quad (**)$$

Lời giải

1.

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 1}$ ($t \geq 1$) $\Rightarrow x^2 + 1 = t^2$

Phương trình (*) trở thành :

$$\begin{aligned} t^2 + 3x &= (x + 3)t \\ \Leftrightarrow t^2 - (x + 3)t + 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - x)(t - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow (t - x)(t - 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t = x \\ t = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

- Với $t = 3$ thì $\sqrt{x^2 + 1} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2} \end{cases}$

- Với $t = x$ thì $\sqrt{x^2 + 1} = x$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình (*) có 2 nghiệm là $x = 2\sqrt{2}$ và $x = -2\sqrt{2}$

2.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ xy + yz - zx = -1 & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 & (3) \end{cases} \quad (**)$$

Từ (1) và (3) suy ra :

$$\begin{aligned} 2(xy + yz + zx) &= (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 22 \\ \Rightarrow xy + yz + zx &= 11 \end{aligned}$$

Kết hợp với (2) suy ra : $\begin{cases} zx = 6 \\ xy + yz = 5 \end{cases} \quad (4)$

Ta có (4) $\Leftrightarrow y(z + x) = 5$. Kết hợp với (1): $y + (x + z) = 6$ suy ra y và $z + x$ là 2 nghiệm của phương trình :

$$t^2 - 6t + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 5 \end{cases}$$

- Nếu $\begin{cases} y = 1 \\ z + x = 5 \end{cases}$

Kết hợp $z + x = 5$ và $xz = 6$ suy ra x và z là 2 nghiệm của phương trình :

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 3 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} x = 2 \\ z = 3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 3 \\ z = 2 \end{cases}$

- Nếu $\begin{cases} y = 5 \\ z + x = 1 \end{cases}$

Kết hợp $z + x = 1$ và $xz = 6$ suy ra x và z là 2 nghiệm của phương trình :

$$t^2 - t + 6 = 0 \quad (\text{vô nghiệm})$$

Vậy hệ (*) có các nghiệm là :

$$(x, y, z) = (2, 1, 3)$$

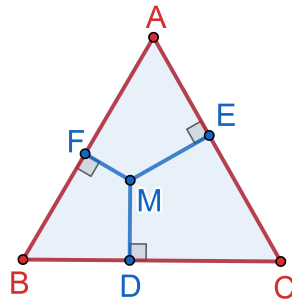
$$(x, y, z) = (3, 1, 2)$$

Bài 4 (4 điểm) ✓

Cho tam giác ABC đều cạnh a . Gọi chân đường vuông góc hạ từ điểm M nằm trong $\triangle ABC$ đến các cạnh BC, CA, AB lần lượt là D, E, F . Xác định vị trí của M để :

1. $\frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF}$ đạt GTNN. Tìm GTNN đó.
2. $\frac{1}{MD + ME} + \frac{1}{ME + MF} + \frac{1}{MF + MD}$ đạt GTNN. Tìm GTNN đó.

Lời giải



1.

Ta có :

$$\begin{aligned} & MD \cdot BC + ME \cdot CA + MF \cdot AB \\ &= 2S_{MBC} + 2S_{MCA} + 2S_{MAB} \\ &= 2S_{ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } BC = CA = AB = a \Rightarrow MD + ME + MF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Ta có BĐT quen thuộc :

$$\begin{aligned} & (MD + ME + MF) \left(\frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF} \right) \geq 9 \\ \Rightarrow \frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF} & \geq \frac{9}{MD + ME + MF} = \frac{6\sqrt{3}}{a} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow MD = ME = MF \Leftrightarrow M$ là trọng tâm $\triangle ABC$

Vậy $\text{Min} \left(\frac{1}{MD} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MF} \right) = \frac{6\sqrt{3}}{a}$ khi M là trọng tâm của $\triangle ABC$

2.

Vấn sử dụng BĐT quen thuộc nêu trên, ta có :

$$\begin{aligned} & [(MD + ME) + (ME + MF) + (MF + MD)] \left(\frac{1}{MD + ME} + \frac{1}{ME + MF} + \frac{1}{MF + MD} \right) \geq 9 \\ \Rightarrow & \frac{1}{MD + ME} + \frac{1}{ME + MF} + \frac{1}{MF + MD} \geq \frac{9}{2(MD + ME + MF)} = \frac{3\sqrt{3}}{a} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow MD = ME = MF \Leftrightarrow M$ là trọng tâm của $\triangle ABC$

Vậy $\text{Min} \left(\frac{1}{MD + ME} + \frac{1}{ME + MF} + \frac{1}{MF + MD} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{a}$ khi M là trọng tâm của $\triangle ABC$

Bài 5 (4 điểm) ✓

1. Chứng minh rằng $2^{2p} + 2^{2q}$ không thể là số chính phương với $\forall p, q$ là các số nguyên không âm.
2. Có hay không 2009 điểm trên mặt phẳng mà bất kỳ 3 điểm nào trong chúng đều tạo thành 1 tam giác tù.

1.

Đặt $M = 2^{2p} + 2^{2q}$

Ta có $M = 4^p + 4^q$. Mà $\begin{cases} 4^p \equiv 1 \pmod{3} \\ 4^q \equiv 1 \pmod{3} \end{cases} \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}; p, q \geq 0 \Rightarrow M \equiv 2 \pmod{3}$

Nhưng 1 số chính phương hoặc chia hết cho 3, hoặc chia 3 dư 1 nên M không thể là số chính phương. Từ đó ta có ĐPCM.

2.

Dựng nửa đường tròn đường kính AB . Trên nửa đường tròn này lấy 2009 điểm phân biệt là $A_1; A_2; \dots; A_{2009}$. Khi đó, 3 điểm bất kỳ trong 2009 điểm này luôn tạo thành 1 tam giác tù.

Vậy luôn tồn tại 2009 điểm thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

HỌC SINH GIỎI HUYỆN 9

DANH SÁCH ĐỀ THI

1	Thành phố Bắc Ninh 2019-2020	.69
2	Từ Sơn 2019-2020	.74
3	Yên Phong 2018-2019	.80

1 (3 điểm) ✓

1. Cho biểu thức $P = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$

a) Rút gọn P

b) Tìm m để có x thỏa mãn $P.(\sqrt{x}+3) = m$

2. So sánh $\frac{2019}{\sqrt{2020}} + \frac{2020}{\sqrt{2019}}$ và $\sqrt{2019} + \sqrt{2020}$

Lời giải

1.

a) Điều kiện xác định : $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+2\sqrt{x}-3 \neq 0 \\ 1-\sqrt{x} \neq 0 \\ \sqrt{x}+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad (*)$

Với điều kiện (*) ta có :

$$\begin{aligned} P &= \frac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} - \frac{(3\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{15\sqrt{x}-11 - (3x+7\sqrt{x}-6) - (2x+\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{-5x+7\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(2-5\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{2-5\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

b) Ta có :

$$\begin{aligned} P.(\sqrt{x}+3) &= m \\ \Leftrightarrow 2-5\sqrt{x} &= m \quad (**) \end{aligned}$$

Với điều kiện (*) thì $2 \geq 2-5\sqrt{x} \neq -3$. Do đó từ (**) $\Rightarrow 2 \geq m \neq -3$

Vậy những giá trị cần tìm của m là $m \leq 2$ và $m \neq -3$

2.

Với $a > b > 0$ ta có :

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) > ab(a+b) \Rightarrow \frac{a^3 + b^3}{ab} > a + b \text{ hay } : \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} > a + b$$

Áp dụng với $a = \sqrt{2020}$ và $b = \sqrt{2019}$ ta có : $\frac{2019}{\sqrt{2020}} + \frac{2020}{\sqrt{2019}} > \sqrt{2019} + \sqrt{2020}$

2 (3 điểm) ✓

Cho hệ phương trình : (I) $\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m + 1 \end{cases}$ (m là tham số)

- 1) Giải hệ phương trình (I) khi $m = 2$
- 2) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $2x + y \leq 3$

Lời giải

Ta có :

$$\begin{aligned} (I) &\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x = m - 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ y = -m^2 + 2m + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

1)

Khi $m = 2$ ta có $\begin{cases} x = m - 1 = 1 \\ y = -m^2 + 2m + 1 = 1 \end{cases}$

Vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x, y) = (1, 1)$ khi $m = 2$

2)

Với mọi m , hệ (I) có nghiệm duy nhất $(x, y) = (m - 1, -m^2 + 2m + 1)$ và :

$$2x + y = 2(m - 1) - m^2 + 2m + 1 = -m^2 + 4m - 1 = -(m^2 - 4m + 4) + 3 = -(m - 2)^2 + 3 \leq 3$$

Vậy với mọi giá trị của m thì hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $2x + y \leq 3$ $\square$

3 (5 điểm) ✓

- 1) Giải phương trình nghiệm nguyên : $4x^2 + 9y^2 + 8xy + 16x + 6y - 99 = 0$
- 2) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2\sqrt{2xy - y} + 2x + y = 10 \\ \sqrt{3y + 4} - \sqrt{2y + 1} + 2\sqrt{2x - 1} = 3 \end{cases}$
- 3) Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng nếu $x + y + z > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ thì trong 3 số x, y, z có duy nhất 1 số lớn hơn 1

Lời giải

1)

Với $x, y \in \mathbb{Z}$, ta có :

$$4x^2 + 9y^2 + 8xy + 16x + 6y - 99 = 0$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (4x^2 + 4y^2 + 8xy + 16x + 16y + 16) + (5y^2 - 10y + 5) = 120 \\ &\Leftrightarrow (2x + 2y + 4)^2 + 5(y - 1)^2 = 120 \\ &\Leftrightarrow (2x + 2y + 4)^2 = 120 - 5(y - 1)^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Từ (*) suy ra $\begin{cases} (2x + 2y + 4)^2 \leq 120 \\ (2x + 2y + 4) : 5 \end{cases}$. Hơn nữa $2x + 2y + 4$ là số chẵn và $2x + 2y + 4 = 0$ không thỏa mãn nên xảy ra các khả năng sau :

$$\begin{aligned} &\bullet \begin{cases} 2x + 2y + 4 = 10 \\ y - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases} \\ &\bullet \begin{cases} 2x + 2y + 4 = 10 \\ y - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \\ &\bullet \begin{cases} 2x + 2y + 4 = -10 \\ y - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -10 \\ y = 3 \end{cases} \\ &\bullet \begin{cases} 2x + 2y + 4 = -10 \\ y - 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy các cặp (x, y) thỏa mãn là $(x, y) \in \{(0, 3); (4, -1); (-10, 3); (-6, -1)\}$
2)

Xét hệ : (I) $\begin{cases} 2\sqrt{2xy - y} + 2x + y = 10 & (1) \\ \sqrt{3y + 4} - \sqrt{2y + 1} + 2\sqrt{2x - 1} = 3 & (2) \end{cases}$. Điều kiện $\begin{cases} x \geq \frac{1}{2} \\ y \geq 0 \end{cases}$

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt{2x - 1} + \sqrt{y})^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{2x - 1} + \sqrt{y} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2x - 1} = 3 - \sqrt{y}$$

Thay vào (2) ta có :

$$\begin{aligned} &\sqrt{3y + 4} - \sqrt{2y + 1} + 2(3 - \sqrt{y}) = 3 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{3y + 4} - \sqrt{2y + 1} - 2\sqrt{y} + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{3y + 4} - 4) - (\sqrt{2y + 1} - 3) - (2\sqrt{y} - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3(y - 4)}{\sqrt{3y + 4} + 4} - \frac{2(y - 4)}{\sqrt{2y + 1} + 3} - \frac{4(y - 4)}{2\sqrt{y} + 4} = 0 \\ &\Leftrightarrow (y - 4) \left(\frac{3}{\sqrt{3y + 4} + 4} - \frac{2}{\sqrt{2y + 1} + 3} - \frac{4}{2\sqrt{y} + 4} \right) = 0 \quad (**) \end{aligned}$$

Nhận xét :

$$\begin{aligned} &\frac{3}{\sqrt{3y + 4} + 4} - \frac{2}{\sqrt{2y + 1} + 3} - \frac{4}{2\sqrt{y} + 4} \\ &= \frac{3}{\sqrt{3y + 4} + 4} - \frac{2}{\sqrt{2y + 1} + 3} - \frac{2}{\sqrt{y} + 2} \\ &< \frac{3}{\sqrt{3y + 4} + 4} - \frac{2}{\sqrt{3y + 4} + 4} - \frac{2}{\sqrt{y} + 2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3y+4}+4} - \frac{2}{\sqrt{y}+2} < 0$$

Do đó : $(**) \Leftrightarrow y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 \Rightarrow x = 1$

Vậy hệ (I) có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (1, 4)$

3)

Vì $xyz = 1$ nên $x + y + z > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Leftrightarrow x + y + z > xy + yz + zx$

Từ đó suy ra :

$$(x-1)(y-1)(z-1) = xyz - 1 + x + y + z - (xy + yz + zx) > 0$$

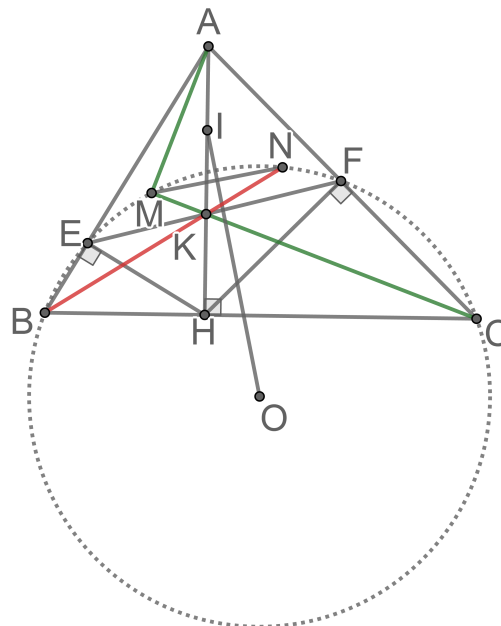
Suy ra trong 3 số $x-1; y-1; z-1$ có duy nhất 1 số lớn hơn 0 hoặc cả 3 số đều lớn hơn 0. Nhưng $xyz = 1$ nên không thể xảy ra trường hợp cả 3 số đều lớn hơn 0. Như vậy, trong 3 số x, y, z có duy nhất 1 số lớn hơn 1 $\square$

4 (6 điểm) ✓

Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB < AC$), đường cao AH . Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H lên AB, AC .

- 1) Chứng minh rằng $AFHE, BEFC$ là các tứ giác nội tiếp
- 2) Gọi K là giao điểm của EF và AH , M là giao điểm thứ hai của CK với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BEFC$. Chứng minh $AM \perp CK$
- 3) Gọi I là trung điểm của AK và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BEFC$. Lấy N đối xứng với M qua IO . Chứng minh B, K, N thẳng hàng.

Lời giải



- 1)
Để dàng chứng minh
- 2)

$AEHF$ là tứ giác nội tiếp nên : $KA.KH = KE.KF$

$MECF$ là tứ giác nội tiếp nên : $KM.KC = KE.KF$

Suy ra :

$KA.KH = KM.KC \Rightarrow AMHC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{AHC} = 90^\circ \Rightarrow AM \perp KC \quad \square$.

3)

$\triangle AMK$ vuông tại M có MI là trung tuyến nên $MI = IA = IK$

Vì N đối xứng với M qua IO nên $IM = IN$

Suy ra : $IN = IA = IK \Rightarrow \triangle AKN$ vuông tại N

Từ đó dễ thấy $AMKN$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MNK} = \widehat{MAK}$

Hơn nữa $AMHC$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{MAK} = \widehat{MCB}$

Suy ra : $\widehat{MNK} = \widehat{MCB} \Rightarrow N, B, K$ thẳng hàng $\square$

5 (3 điểm) ✓

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a \geq c, b \geq c$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{c.(a-c)} + \sqrt{c.(b-c)} \leq \sqrt{ab}$$

2. Chứng minh rằng trong 1011 số tự nhiên khác nhau từ 0 đến 2020 luôn tồn tại ít nhất 2 số mà số này là bội của số kia.

Lời giải

1.

Áp dụng Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{c.(a-c)} + \sqrt{c.(b-c)} \leq \sqrt{ab} \right)^2 &= \left(\sqrt{c}.\sqrt{a-c} + \sqrt{b-c}.\sqrt{c} \right)^2 \\ &\leq \left[(\sqrt{c})^2 + (\sqrt{b-c})^2 \right] \cdot \left[(\sqrt{a-c})^2 + (\sqrt{c})^2 \right] \\ &= ab \\ \Rightarrow \sqrt{c.(a-c)} + \sqrt{c.(b-c)} &\leq \sqrt{ab} \quad \square \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 2c$

2.

Nhận xét : mọi số tự nhiên đều biểu diễn được dưới dạng $2^k.b$ với $k, b \in \mathbb{N}$ và b là số lẻ hoặc bằng 0. Từ đó gọi 1011 số tự nhiên đó là :

$$a_1 = 2^{k_1}.b_1; a_2 = 2^{k_2}.b_2; \dots; a_{1011} = 2^{k_{1011}}.b_{1011}$$

- Nếu tồn tại $b_i = 0$ thì ta có điều phải chứng minh
- Nếu mọi b_i đều khác 0 thì từ giả thiết suy ra $1 \leq b_i \leq 2019$ với mọi $i = \overline{1, 1011}$
 Từ 1 đến 2019 có 1010 số lẻ nên tồn tại $b_m = b_n$ với $m, n \in \{1, 2, \dots, 1011\}$
 Khi đó (a_m, a_n) là 2 số thỏa mãn điều kiện số này là bội của số kia.

Vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

1 (5 điểm) ✓

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a. Rút gọn P

b. Tìm x để $P = \frac{2}{7}$

c. So sánh P^2 và $2P$

Lời giải

a.

Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có :

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\
 &= \left[\frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \right] \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} \\
 &= \frac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} \\
 &= \frac{2(x-2\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2(x+\sqrt{x}+1)} \\
 &= \frac{2(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)^2(x+\sqrt{x}+1)} \\
 &= \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}
 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
 P = \frac{2}{7} &\Leftrightarrow \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{2}{7} \\
 &\Leftrightarrow x+\sqrt{x}+1 = 7 \\
 &\Leftrightarrow x+\sqrt{x}-6 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+3) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{x}-2 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}
 \end{aligned}$$

Vậy $x = 4$ là giá trị cần tìm của x

c.

Ta có :

$$x \geq 0 \Rightarrow x+\sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow P = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} \leq 2 \Rightarrow P^2 \leq 2P$$

2 (4 điểm) ✓

- a.** Tìm số tự nhiên n sao cho $n^2 + 3n + 7$ là số chính phương
b. Giải phương trình : $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} = 3\sqrt{x}$

Lời giải

a.

Ta có : $n^2 + 3n + 7$ là số chính phương khi và chỉ khi :

$$\begin{aligned} n^2 + 3n + 7 &= k^2 \quad (k \in \mathbb{N}) \\ \Leftrightarrow 4k^2 - (4n^2 + 12n + 9) &= 19 \\ \Leftrightarrow (2k)^2 - (2n + 3)^2 &= 19 \\ \Leftrightarrow (2k + 2n + 3)(2k - 2n - 3) &= 19 \end{aligned}$$

Vì $n, k \in \mathbb{N}$ nên $2k + 2n + 3 > 2k - 2n - 3$. Do đó chỉ xảy ra khả năng sau :

$$\begin{cases} 2n + 2k + 3 = 19 \\ 2k - 2n - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 3 \\ k = 5 \end{cases}$$

Vậy số tự nhiên n cần tìm là $n = 3$

b.

Xét phương trình : $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} = 3\sqrt{x}$ (2). Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 4x + 1 \geq 0 \end{cases}$

Có 2 phương án xử lý bài toán như sau :

Cách 1 : Ta có :

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow (2x + 2 - 5\sqrt{x}) + (2\sqrt{x^2 - 4x + 1} - \sqrt{x}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(2x + 2 - 5\sqrt{x})(2x + 2 + 5\sqrt{x})}{2x + 2 + 5\sqrt{x}} - \frac{(2\sqrt{x^2 - 4x + 1} - \sqrt{x})(2\sqrt{x^2 - 4x + 1} + \sqrt{x})}{2\sqrt{x^2 - 4x + 1} + \sqrt{x}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4x^2 - 17x + 4}{2x + 2 + 5\sqrt{x}} = \frac{4x^2 - 17x + 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 1} + \sqrt{x}} = 0 \\ &\Leftrightarrow (4x^2 - 17x + 4) \cdot \left(\frac{1}{2x + 2 + 5\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x + 1} + \sqrt{x}} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^2 - 17x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \end{aligned}$$

Vậy phương trình (2) có 2 nghiệm là $x = 4$ và $x = \frac{1}{4}$

Cách 2 : Nhận xét $x = 0$ không là 1 nghiệm của (2). Do đó, chia cả 2 vế của (2) cho $\sqrt{x}$ ta được :

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x - 4 + \frac{1}{x}} = 3 \quad (3)$$

Đặt $t = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ thì phương trình (3) trở thành :

$$\begin{aligned} t + \sqrt{t^2 - 6} &= 3 \\ \Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 6} &= 3 - t \\ \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 6 = (3 - t)^2 \\ t \leq 3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow t &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Từ đó giải ra được $x = 4$ hoặc $x = \frac{1}{4}$

3 (4 điểm) ✓

a. Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a + b + c = 2, a^2 + b^2 + c^2 = 18$ và $abc = -1$.

Tính giá trị của $M = \frac{1}{ab + c - 1} + \frac{1}{bc + a - 1} + \frac{1}{ca + b - 1}$

b. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$

Lời giải

a.

Từ giả thiết $a + b + c = 2$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 18$ ta có :

$$ab + bc + ca = \frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} = -7$$

Đồng thời :

$$ab + c - 1 = ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$$

$$bc + a - 1 = bc + b + c + 1 = (b + 1)(c + 1)$$

$$ca + b - 1 = ca + c + a + 1 = (c + 1)(a + 1)$$

Suy ra :

$$\begin{aligned} M &= \frac{a + 1 + b + 1 + c + 1}{(a + 1)(b + 1)(c + 1)} \\ &= \frac{a + b + c + 3}{abc + ab + bc + ca + a + b + c + 1} \\ &= \frac{2 + 3}{-1 - 7 + 2 + 1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = 3(x + y) \\ x^3 - y^3 = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 3) = 0 \quad (1) \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Xảy ra 4 khả năng sau :

- Khả năng 1 :

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0$$

- Khả năng 2 :

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm\sqrt{3}$$

- Khả năng 3 :

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

- Khả năng 4 :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 \\ x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 - 3 = 0 \\ 2xy + 2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} xy = -1 \\ (x+y)^2 - 3xy - 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} xy = -1 \\ x+y=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có các nghiệm là $(x, y) \in \{(0, 0); (\sqrt{3}, \sqrt{3}); (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}); (1, -1); (-1, 1)\}$

4 (6 điểm) ✓

Cho đoạn thẳng $OA = R$, vẽ đường tròn (O, R) . Trên đường tròn lấy điểm H bất kỳ sao cho $AH < R$. Qua H vẽ đường thẳng a tiếp xúc với (O, R) . Trên đường thẳng a lấy 2 điểm B, C sao cho H nằm giữa B, C và $AB = AC = R$. Vẽ HM vuông góc với OB ($M \in OB$), HN vuông góc với OC ($N \in OC$)

- Chứng minh $OM \cdot OB = ON \cdot OC$ và MN luôn đi qua 1 điểm cố định.
- Chứng minh $OB \cdot OC = 2R^2$
- Tìm giá trị lớn nhất của S_{OMN} khi H thay đổi.

Lời giải



b.

C.

f DUC PV

5 (1 điểm) ✓

Cho $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ thỏa mãn $2ab + 6bc + 2ca = 7abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$C = \frac{4ab}{a+2b} + \frac{4bc}{b+c} + \frac{9ca}{4c+a}$$

Lời giải

Ta có :

$$2ab + 6bc + 2ca = 7abc \Leftrightarrow \frac{2}{c} + \frac{6}{a} + \frac{2}{b} = 7$$

Đặt $\frac{6}{a} = x; \frac{2}{b} = y; \frac{2}{c} = z$ thì $x + y + z = 7$ và :

$$\begin{aligned} C &= \frac{24}{3y+2x} + \frac{8}{y+z} + \frac{54}{4x+3z} \\ &= \frac{12^2}{18y+12x} + \frac{12^2}{18y+18z} + \frac{18^2}{24x+18z} \\ &\geq \frac{(12+12+18)^2}{18y+12x+18y+18z+24x+18z} \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \\ &= \frac{42^2}{36(x+y+z)} \\ &= \frac{42^2}{36 \cdot 7} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \frac{12}{18y+12x} = \frac{12}{18y+18z} = \frac{18}{24x+18z} \\ x+y+z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=3y=3z \\ x+y+z=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=c=1 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là 7, đạt được tại $a=2; b=c=1$

1 (2 điểm) ✓

Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right)$

1. Tìm điều kiện xác định và rút gọn P
2. So sánh P với 6

Lời giải

1. Điều kiện xác định của P :

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - \sqrt{x} \neq 0 \\ \sqrt{x} - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad (*)$$

Với điều kiện (*) ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} + \frac{x-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \frac{x-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{2x+2}{x-1} = 2 + \frac{2x+2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

2. Xét hiệu:

$$\begin{aligned} P - 6 &= 2 + \frac{2x+2}{\sqrt{x}} - 6 \\ &= \frac{2x+2}{\sqrt{x}} - 4 \\ &= 2 \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} > 0 \text{ (vì } x \neq 1) \\ \Rightarrow P &> 6 \end{aligned}$$

2 (2 điểm) ✓

1. Tính giá trị biểu thức $P = x^3 + y^3 - 3(x+y) + 1979$, biết rằng:

$$x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \text{ và } y = \sqrt[3]{17+12\sqrt{2}} + \sqrt[3]{17-12\sqrt{2}}$$

2. Tìm phần nguyên của số $\sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \dots + \sqrt{5 + \sqrt{5}}}}}$ (2020 dấu căn)

Lời giải

1. Ta có :

$$\begin{aligned} x^3 &= \left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \right)^3 \\ &= 6 + 3\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \left(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}} \right) \\ &= 6 + 3x \end{aligned}$$

Tương tự :

$$y^3 = 34 + 3y$$

Từ đó suy ra : $P = x^3 + y^3 - 3(x+y) + 1979 = 2019$

2. Đặt $S_n = \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{5 + \dots + \sqrt{5 + \sqrt{5}}}}}$ (n dấu căn). Khi đó ta có :

$$S_n = \sqrt{5 + S_{n-1}}$$

Từ đó, theo nguyên lý quy nạp toán học dễ dàng chứng minh được $2 < S_n < 3$.
Vậy phần nguyên của số đã cho là 2

3 (2 điểm) ✓

1. Cho hệ phương trình ẩn x, y sau : $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng điểm $M(x, y)$ luôn nằm trên 1 đường thẳng cố định với (x, y) là nghiệm duy nhất của hệ phương trình đã cho.

2. Giải phương trình : $\frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{x}}} + \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{x}}} = \sqrt{2}$

Lời giải

1. Xét hệ $\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + my = m + 1 \end{cases}$ có :

$$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1; D_x = \begin{vmatrix} 2m & 1 \\ m+1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - m - 1; D_y = \begin{vmatrix} m & 2m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = m^2 - m$$

Với $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất là :

$$\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} = \frac{2m^2 - m - 1}{m^2 - 1} = \frac{2m + 1}{m + 1} \\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{m^2 - m}{m^2 - 1} = \frac{m}{m + 1} \end{cases}$$

Dễ thấy $x - y = 1$ hay $y = x - 1$. Do đó, điểm $M(x, y)$ với (x, y) là nghiệm duy nhất của hệ đã cho luôn nằm trên đường thẳng $y = x - 1$ cố định.

2. Xét phương trình : $\frac{2 + \sqrt{x}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{x}}} + \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{x}}} = \sqrt{2}$ (2)

Điều kiện : $\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{x}} \neq 0 \\ 2 - \sqrt{x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 4 (*)$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2 + \sqrt{x}} \\ b = \sqrt{2 - \sqrt{x}} \end{cases} (a, b > 0)$. Khi đó $a^2 + b^2 = 4$ và phương trình (2) trở thành :

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{\sqrt{2} + a} + \frac{b^2}{\sqrt{2} - a} &= \sqrt{2} \Leftrightarrow a^2(\sqrt{2} - b) + b^2(\sqrt{2} + a) = \sqrt{2}(\sqrt{2} + a)(\sqrt{2} - b) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2}(a^2 + b^2) - ab(a - b) = 2\sqrt{2} + 2(a - b) - \sqrt{2}ab \\ &\Leftrightarrow 4\sqrt{2} - ab(a - b) - 2\sqrt{2} - 2(a - b) + \sqrt{2}ab = 0 \quad (a^2 + b^2 = 4) \\ &\Leftrightarrow [2\sqrt{2} - 2(a - b)] + [\sqrt{2}ab - ab(a - b)] = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(\sqrt{2} - a + b) + ab(\sqrt{2} - a + b) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{2} - a + b)(2 + ab) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{2} - a + b = 0 \quad (a, b > 0) \\ &\Leftrightarrow a = \sqrt{2} + b \end{aligned}$$

Thay vào $a^2 + b^2 = 4$ ta được :

$$(\sqrt{2} + b)^2 + b^2 = 4 \Leftrightarrow 2b^2 + 2\sqrt{2}b - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \\ b = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

Với $b = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$ ta có :

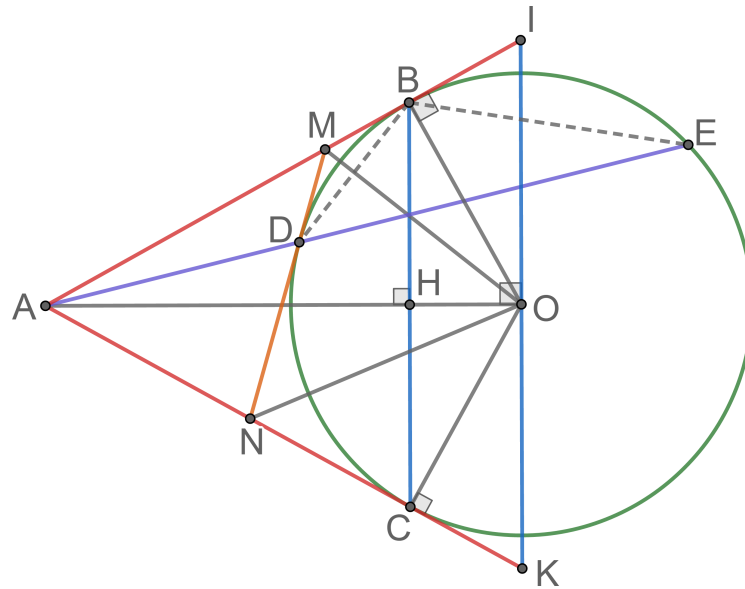
$$\begin{aligned} \sqrt{2 - \sqrt{x}} &= \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow 4(2 - \sqrt{x}) = (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 \\ &\Leftrightarrow 8 - 4\sqrt{x} = 8 - 4\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} = \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn (*))} \end{aligned}$$

Vậy phương trình (2) có nghiệm duy nhất là $x = 3$

4 (3 điểm) ✓

Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O, R) . Kẻ 2 tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE với đường tròn (A, B là 2 tiếp điểm, D nằm giữa A và E). Gọi H là giao điểm của AO và BC .

1. Chứng minh 4 điểm A, B, O, C cùng thuộc 1 đường tròn và $AH \cdot AO = AD \cdot AE$
2. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt AB, AC lần lượt tại M, N . Biết $OA = 2R$. Tính chu vi tam giác AMN theo R
3. Qua O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt AB, AC lần lượt tại I và K . Chứng minh $MI + NK \geq IK$



Lời giải

1.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $ABOC$ có : $\widehat{ABO} + \widehat{ACO} = 180^\circ \Rightarrow ABOC$ là tứ giác nội tiếp hay 4 điểm A, O, B, C cùng thuộc 1 đường tròn. $\square$

Xét $\triangle ABO$ vuông tại B ta có :

$$AH \cdot AO = AB^2 \quad (*) \text{ (hệ thức lượng trong tam giác vuông)}$$

Mặt khác, dễ dàng chứng minh được :

$$\triangle ABD \sim \triangle AEB (g.g) \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow AD \cdot AE = AB^2 \quad (**)$$

Từ $(*)$, $(**)$ suy ra : $AH \cdot AO = AD \cdot AE \quad \square$

2.

Theo tính chất của tiếp tuyến ta có :

$$\begin{cases} MD = MB \\ ND = NC \end{cases} \Rightarrow P_{AMN} = AM + AN + MN = AM + AN + MD + ND = AB + AC = 2AB$$

Xét $\triangle ABO$ vuông tại B ta có :

$$AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{(2R)^2 + R^2} = R\sqrt{5} \text{ (Pytago)}$$

Từ đó, ta có chu vi của tam giác AMN là $P_{AMN} = 2R\sqrt{5}$

3.

Dễ thấy : $\widehat{MON} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{AOB} = \widehat{AIO} = \widehat{AKO}$

Từ đó, ta dễ dàng chứng minh được :

$$\triangle IOM \sim \triangle KNO (g.g) \Rightarrow \frac{IM}{OK} = \frac{IO}{KN} \Rightarrow IM \cdot KN = IO \cdot OK = \frac{IK^2}{4}$$

Do đó theo AM-GM :

$$IM + KN \geq 2\sqrt{IM \cdot KN} = IK \quad \square$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow IM = KN \Leftrightarrow D$ là giao điểm của AO với (O, R)

5 (1 điểm) ✓

1. Tìm tất cả các số có 4 chữ số $\overline{abcd}$ thỏa mãn : $\begin{cases} \overline{abcd} : 3 \\ \overline{abc} - \overline{bda} = 650 \end{cases}$

2. Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + y + z = xyz$. Chứng minh rằng :

$$S = \frac{4 + \sqrt{1 + x^2}}{x} + \frac{4 + \sqrt{1 + y^2}}{y} + \frac{4 + \sqrt{1 + z^2}}{z} \leq 2xyz$$

Lời giải

1.

Xét : (*) $\begin{cases} \overline{abcd} : 3 & (1) \\ \overline{abc} - \overline{bda} = 650 & (2) \end{cases}$. Từ (2) $\Rightarrow a = c$ và $b - d = 5$ hoặc $d - b = 5$

Xét các khả năng trên :

• Nếu $b - d = 5$. Khi đó :

$$(2) \Rightarrow (100a + 10b + c) - (100b + 10d + a) = 100a + 50 = 650 \Rightarrow a = 6$$

$$(1) \Rightarrow a + b + c + d = 2a + 2b - 5 = 2b + 7 : 3 \Rightarrow b \text{ chia 3 dư 1}$$

Mà $b - d = 5$ nên $b \geq 5$. Do đó $b = 7$ và ta có $\overline{abcd} = 6765$

• Nếu $d - b = 5$. Khi đó : Khi đó :

$$(2) \Rightarrow (100a + 10b + c) - (100b + 10d + a) = 100a - 50 = 650 \Rightarrow a = 7$$

$$(1) \Rightarrow a + b + c + d = 2a + 2b + 5 = 2b + 19 : 3 \Rightarrow b \text{ chia 3 dư 1}$$

Mà $d - b = 5$ nên $b \leq 4$. Do đó $b = 1$ và ta có $\overline{abcd} = 7176$

Vậy các số cần tìm là 6765 và 7176.

2.

Ta có :

$$x + y + z = xyz \Rightarrow x(x + y + z) = xyz \cdot x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + xy + xz = x^2yz$$

$$\Leftrightarrow x^2 + xy + xz + yz = x^2yz + yz$$

$$\Leftrightarrow (x + y)(x + z) = yz(x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = \frac{(x + y)(x + z)}{yz}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\frac{x + y}{y} \cdot \frac{x + z}{z}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{x + y}{y} + \frac{x + z}{z} \right) (AM - GM)$$

Tương tự và suy ra :

$$S \leq 6 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{6(xy + yz + zx)}{xyz} \leq \frac{2(x + y + z)^2}{xyz} = 2xyz \square$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{3}$

HỌC SINH GIỎI HUYỆN 8

DANH SÁCH ĐỀ THI

1	Quế Võ 2005-2006	87
2	Quế võ 2006-2007	91
3	Quế võ 2007-2008	96
4	Quế võ 2008-2009	100
5	Quế võ 2010-2011	104
6	Quế võ 2011-2012	108
7	Quế võ 2013-2014	113
8	Quế võ 2014-2015	119
9	Quế võ 2015-2016	123
10	Quế võ 2016-2017	129
11	Quế võ 2017-2018	134
12	Quế võ 2018-2019	139
13	Tiên Du 2018-2019 (BẢNG A)	143
14	Thành phố Bắc Ninh 2019-2020	148
15	Từ Sơn 2017-2018	153
16	Từ Sơn 2018-2019	158
17	Từ Sơn 2019-2020	163
18	Yên Phong 2013-2014	168
19	Yên Phong 2015-2016	173
20	Yên Phong 2016-2017	177
21	Yên Phong 2017-2018	182
22	Yên Phong 2018-2019	187

1 Quế Võ 2005-2006

Bài 1 (2 điểm) ✓

1. Thực hiện phép tính $\frac{2001^2 + 16008 + 16}{2005}$ ta được kết quả là :

a. 2004

b. 2005

c. $\frac{2004}{2005}$

d. 1

2. Rút gọn A, B biết :

$$A = (x - 4)(x^2 + 4x + 16) + x(x + 3)(3 - x)$$

$$B = (x + 1)^3 - (x - 1)^3 - 6(x - 1)^2$$

1.

$$\frac{2001^2 + 16008 + 16}{2005} = \frac{2001^2 + 2 \cdot 4 \cdot 2001 + 4^2}{2005} = \frac{(2001 + 4)^2}{2005} = 2005$$

Vậy chọn đáp án **b**.

2.

$$\begin{aligned} A &= (x - 4)(x^2 + 4x + 16) + x(x + 3)(3 - x) \\ &= x^3 + 4x^2 + 16x - 4x^2 - 16x - 64 + x(9 - x^2) \\ &= 9x - 64 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (x + 1)^3 - (x - 1)^3 - 6(x - 1)^2 \\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - 6(x^2 - 2x + 1) \\ &= 12x - 4 \end{aligned}$$

Vậy $A = 9x - 64$ và $B = 12x - 4$

Bài 2 (2 điểm) ✓

Cho biểu thức $M = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right)$

1. Tính giá trị của M khi $|x| = \frac{1}{2}$

2. Với giá trị nào của x thì $M < 0$

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left(x - 2 + \frac{10 - x^2}{x + 2} \right) \quad (x \neq 0, x \neq \pm 2) \\ &= \left(\frac{x}{x^2 - 4} - \frac{2}{x - 2} + \frac{1}{x + 2} \right) : \left[\frac{(x - 2)(x + 2) + 10 - x^2}{x + 2} \right] \\ &= \frac{x - 2(x + 2) + (x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} : \frac{6}{x + 2} \end{aligned}$$

$$= \frac{-6}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{6}$$

$$= \frac{1}{2-x} \quad (*)$$

1.

Ta có $|x| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = -\frac{1}{2}$

- Tại $x = \frac{1}{2}$, thay vào (*) ta được $M = \frac{2}{3}$
- Tại $x = -\frac{1}{2}$, thay vào (*) ta được $M = \frac{2}{5}$

2.

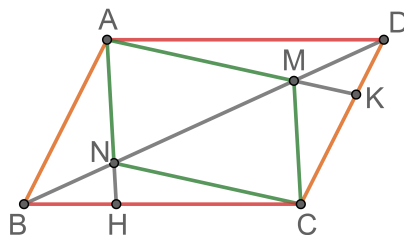
$$M < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2-x} < 0 \Leftrightarrow x > 2 \text{ (thỏa mãn điều kiện } x \neq 0, x \neq \pm 2 \text{)}$$

Vậy $x > 2$ là những giá trị cần tìm của x

Bài 3 (3 điểm) ✓

Cho hình bình hành $ABCD$. K là điểm thuộc cạnh CD sao cho $DK = \frac{1}{2}KC$; H là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BH = \frac{1}{3}BC$. Các đoạn thẳng AK và AH theo thứ tự cắt BD tại M và N

1. Tính $\frac{DM}{MB}$ và $\frac{BN}{ND}$
2. Chứng minh $AMCN$ là hình bình hành
3. Tính diện tích của tứ giác $AMCN$ biết diện tích hình bình hành $ABCD$ là 100cm^2



1.

Vì $DK \parallel AB$ nên: $\frac{DK}{AB} = \frac{DM}{MB}$ (Talet)

Mà $ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow AB = CD \Rightarrow \frac{DK}{AB} = \frac{DK}{CD} = \frac{1}{3}$ (vì $DK = \frac{1}{2}KC$)

Suy ra $\frac{DM}{MB} = \frac{1}{3}$

Tương tự từ $BH \parallel AD$ ta suy ra $\frac{BN}{ND} = \frac{1}{3}$

Vậy $\frac{DM}{MB} = \frac{BN}{ND} = \frac{1}{3}$

2.

$$\text{Từ } \frac{DM}{MB} = \frac{BN}{ND} = \frac{1}{3} \Rightarrow DM = BN = \frac{BD}{4} \Rightarrow MN = \frac{BD}{2}. \text{ Suy ra } \frac{DM}{MN} = \frac{BN}{MN} = \frac{1}{2}$$

Xét tam giác DNC có $\frac{DM}{MN} = \frac{DK}{KC} = \frac{1}{2} \Rightarrow MK \parallel NC$ hay $AM \parallel NC$ (*) (Talet đảo)

Tương tự xét tam giác BMC ta có $NH \parallel MC$ hay $AN \parallel MC$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $AMCN$ là hình bình hành.

3.

Hai tam giác AMN và ABD có chung chiều cao hạ từ A nên: $\frac{S_{AMN}}{S_{ABD}} = \frac{MN}{BD} = \frac{1}{2}$ (*₁)

Tương tự ta cũng có: $\frac{S_{CMN}}{S_{CBD}} = \frac{1}{2}$ (*₂)

Từ (*₁), (*₂) và theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{S_{AMN}}{S_{ABD}} = \frac{S_{CMN}}{S_{CBD}} = \frac{S_{AMN} + S_{CMN}}{S_{ABD} + S_{CBD}} = \frac{S_{AMCN}}{S_{ABCD}} \\ \Rightarrow S_{AMCN} &= \frac{S_{ABCD}}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Vậy diện tích của hình bình hành $AMCN$ là 50 cm^2

Bài 4 (2 điểm) ✓

1. Cho $A = (x+y)(y+z)(z+x) + xyz$. Hãy phân tích A thành nhân tử.
2. Cho $B = (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2$. Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác thì $B < 0$

1.

$$\begin{aligned} A &= (x+y)(y+z)(z+x) + xyz \\ &= (x+y) [xy + z(x+y) + z^2] + xyz \\ &= [(x+y)xy + xyz] + (x+y) [z(x+y) + z^2] \\ &= xy(x+y+z) + (x+y)z(x+y+z) \\ &= (xy + yz + zx)(x+y+z) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} B &= (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab) \\ &= [(a-b)^2 - c^2] \cdot [(a+b)^2 - c^2] \end{aligned}$$

Khi a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác thì

$$\begin{cases} 0 \leq |a-b| < c \\ a+b > c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-b)^2 < c^2 \\ (a+b)^2 > c^2 \end{cases} \Rightarrow B < 0$$

Bài 5 (1 điểm) ✓

Xác định số dư khi chia đa thức $P(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{99} + x^{100}$ cho đa thức $Q(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ biết rằng nếu $x = 0$ thì số dư là -26

Giả sử $P(x)$ chia cho $Q(x)$ được thương là $A(x)$ và dư $R(x)$. Tức là :

$$P(x) = A(x).Q(x) + R(x) \quad (*)$$

Để ý rằng $Q(x) = (x+1)(x-1)^2 \Rightarrow Q(1) = Q(-1) = 0$. Do đó, từ $(*)$ suy ra :

$$R(1) = P(1) = 101 \text{ và } R(-1) = P(-1) = 1 \quad (**)$$

Vì bậc của $R(x)$ nhỏ hơn bậc của $Q(x)$ nên $R(x) = ax^2 + bx + c \quad (***)$

Từ $(**), (***)$ và kết hợp với giả thiết $R(0) = -26$ ta có hệ :

$$\begin{cases} a + b + c = 101 \\ a - b + c = 1 \\ c = -26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 77 \\ b = 50 \\ c = -26 \end{cases} \Rightarrow R(x) = 77x^2 + 50x - 26$$

Vậy số dư trong phép chia $P(x)$ cho $Q(x)$ là $77x^2 + 50x - 26$

Bài 1 (2.5 điểm) ✓

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a. $x^2 + 6x + 5$

b. $x^4 + 2007x^2 + 2006x + 2007$

c. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1$

2. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Hỏi tam giác ABC là tam giác gì ?

1.

a.

$$x^2 + 6x + 5 = (x^2 + x) + (5x + 5) = x(x+1) + 5(x+1) = (x+5)(x+1)$$

b.

$$\begin{aligned} x^4 + 2007x^2 + 2006x + 2007 &= (x^4 - x) + 2007(x^2 + x + 1) \\ &= x(x-1)(x^2 + x + 1) + 2007(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2007) \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1 &= [(x+1)(x+4)] \cdot [(x+2)(x+3)] + 1 \\ &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1 \\ &= t(t+2) + 1 \quad (t = x^2 + 5x + 4) \\ &= (t+1)^2 \\ &= (x^2 + 5x + 5)^2 \\ &= \left(x - \frac{-5 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 \cdot \left(x + \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

2.

Ta có đẳng thức quen thuộc :

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c) \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right] \end{aligned}$$

Theo giả thiết $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Rightarrow (a+b+c) \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right] = 0$

Mà $a+b+c > 0$ nên $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$

Vậy tam giác ABC đều.

Bài 2 (2 điểm) ✓

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2}{3x} + \frac{2}{x+1} - 3 \right) : \frac{2-4x}{x+1} - \frac{3x+1-x^2}{3x} \left(x \neq 0; x \neq -1; x \neq \frac{1}{2} \right)$

1. Rút gọn biểu thức A
2. Tính giá trị của A biết $x = 6022$
3. Tìm x để $A < 0$
4. Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên

1.

$$\begin{aligned}
 A &= \left(\frac{x+2}{3x} + \frac{2}{x+1} - 3 \right) : \frac{2-4x}{x+1} - \frac{3x+1-x^2}{3x} \left(x \neq 0; x \neq -1; x \neq \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{(x+2)(x+1) + 6x - 9x(x+1)}{3x(x+1)} : \frac{2-4x}{x+1} - \frac{3x+1-x^2}{3x} \\
 &= \frac{-8x^2 + 2x + 1}{3x(x+1)} \cdot \frac{x+1}{2(1-2x)} - \frac{3x+1-x^2}{3x} \\
 &= \frac{2(1-2x)(1+2x)}{3x \cdot 2(1-2x)} - \frac{3x+1-x^2}{3x} \\
 &= \frac{1+2x}{3x} - \frac{3x+1-x^2}{3x} \\
 &= \frac{x^2 - x}{3x} \\
 &= \frac{x-1}{3}
 \end{aligned}$$

2. Tại $x = 6022$ ta có $A = \frac{6022-1}{3} = 2007$

3.

$$A < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

4. Với $x \in \mathbb{Z}$ ta có :

$$A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 3k + 1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 3 (2 điểm) ✓

Giải các phương trình :

$$1. \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18}$$

$$2. \frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10$$

1.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{x^2+9x+20} + \frac{1}{x^2+11x+30} + \frac{1}{x^2+13x+42} = \frac{1}{18} \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{(x+4)(x+5)} + \frac{1}{(x+5)(x+6)} + \frac{1}{(x+6)(x+7)} = \frac{1}{18} \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \\
 \Leftrightarrow & \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+7} = \frac{1}{18} \\
 \Leftrightarrow & \frac{3}{(x+4)(x+7)} = \frac{1}{18} \\
 \Leftrightarrow & (x+4)(x+7) = 54 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + 11x - 26 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x-2)(x+13) = 0 \\
 \Leftrightarrow & x = 2 \text{ hoặc } x = -13
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 2$ và $x = -13$

2.

$$\begin{aligned}
 & \frac{148-x}{25} + \frac{169-x}{23} + \frac{186-x}{21} + \frac{199-x}{19} = 10 \\
 \Leftrightarrow & \left(\frac{148-x}{25} - 1 \right) + \left(\frac{169-x}{23} - 2 \right) + \left(\frac{186-x}{21} - 3 \right) + \left(\frac{199-x}{19} - 4 \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{123-x}{25} + \frac{123-x}{23} + \frac{123-x}{21} + \frac{123-x}{19} = 0 \\
 \Leftrightarrow & (123-x) \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19} \right) = 0 \\
 \Leftrightarrow & 123-x = 0 \quad \left(\text{vì } \frac{1}{25} + \frac{1}{23} + \frac{1}{21} + \frac{1}{19} > 0 \right) \\
 \Leftrightarrow & x = 123
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 123$

Bài 4 (2 điểm) ✓

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AC > AB$), đường cao AH . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HA$. Đường vuông góc với BC tại D cắt AC tại E

1. Chứng minh $AE = AB$

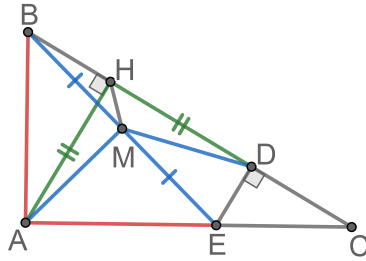
2. Gọi M là trung điểm của BE . Tính $\widehat{AHM}$

1.

Xét tam giác AHC có :

$$\begin{aligned}
 & AH \parallel ED \quad (\text{cùng vuông góc với } BC) \\
 \Rightarrow & \frac{AE}{AC} = \frac{HD}{HC} \quad (\text{Talet}) \\
 \Rightarrow & \frac{AE}{AC} = \frac{AH}{HC} \quad (*) (\text{vì } AH = HD)
 \end{aligned}$$

Mặt khác, xét 2 tam giác ABH và ACH có $\begin{cases} \widehat{AHB} = \widehat{AHC} = 90^\circ \\ \widehat{ABH} = \widehat{HAC} \end{cases}$ (2 góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)



$$\Rightarrow \triangle ABH \sim \triangle CAH (g.g) \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AH}{HC} \quad (**)$$

$$\text{Từ (*) và (**) suy ra } \frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE = AB$$

2.

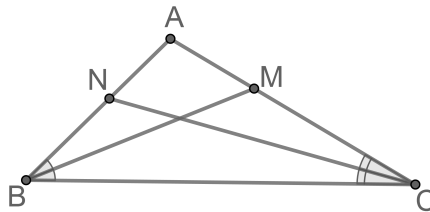
$\triangle ABE$ và $\triangle DBE$ là 2 tam giác vuông có AM và DM là 2 đường trung tuyến ứng với cạnh huyền, do đó $AM = DM = \frac{BE}{2}$

$$\text{Xét 2 tam giác } AHM \text{ và } DHM \text{ có } \begin{cases} \text{chung } HM \\ AH = HD (gt) \\ AM = DM (cmt) \end{cases} \Rightarrow \triangle AHM = \triangle DHM (c.c.c)$$

$$\text{Suy ra } \widehat{AHM} = \widehat{DHM} = \frac{\widehat{AHD}}{2} = 45^\circ$$

Bài 5 (1.5 điểm) ✓

Cho tam giác ABC có chu vi bằng 18, trong đó cạnh BC là cạnh lớn nhất. Đường phân giác của góc B cắt AC tại M sao cho $\frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$. Đường phân giác của góc C cắt AB tại N sao cho $\frac{NA}{NB} = \frac{3}{4}$. Tính các cạnh của tam giác ABC



Vì BM và CN là 2 đường phân giác của $\triangle ABC$ nên :

$$\begin{aligned} \frac{AB}{BC} &= \frac{AM}{MC} = \frac{1}{2} \quad (\text{ĐL}) \\ \frac{AC}{BC} &= \frac{NA}{NB} = \frac{3}{4} \quad (\text{ĐL}) \\ \Rightarrow \frac{AB}{2} &= \frac{AC}{3} = \frac{BC}{4} \end{aligned}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{AB}{2} = \frac{AC}{3} = \frac{BC}{4} = \frac{AB+AC+BC}{2+3+4} = \frac{18}{9} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = 2.2 = 4 \\ AC = 2.3 = 6 \\ BC = 2.4 = 8 \end{cases}$$

Vậy các cạnh của tam giác ABC là $AB = 4$; $AC = 6$ và $BC = 8$

Bài 1 (4 điểm) ✓

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử : $x^3 + 3x^2 + 6x + 4$
2. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$4a^2b^2 > (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

1.

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 6x + 4 &= (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) + (3x + 3) \\ &= (x + 1)^3 + 3(x + 1) \\ &= (x + 1) \left[(x + 1)^2 + 3 \right] \\ &= (x + 1)(x^2 + 2x + 4) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 4a^2b^2 &> (a^2 + b^2 - c^2)^2 \\ \Leftrightarrow 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow \left[c^2 - (a - b)^2 \right] \cdot \left[(a + b)^2 - c^2 \right] &> 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Mà a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên $\begin{cases} 0 \leq |a - b| < c \\ a + b > c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a - b)^2 < c^2 \\ (a + b)^2 > c^2 \end{cases}$
 $\Rightarrow (*)$ đúng, từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 2 (3 điểm) ✓

Chứng minh rằng nếu : $x + y = 1$ và $xy \neq 0$ thì :

$$\frac{y}{x^3 - 1} - \frac{x}{y^3 - 1} = \frac{2(x - y)}{x^2y^2 + 3}$$

Với $x + y = 1$ và $xy \neq 0$, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{y}{x^3 - 1} - \frac{x}{y^3 - 1} &= \frac{y}{x^3 - (x + y)^3} - \frac{x}{y^3 - (x + y)^3} \\ &= \frac{y}{-3xy(x + y) - y^3} - \frac{x}{-3xy(x + y) - x^3} \\ &= \frac{1}{-3x - y^2} - \frac{1}{-3y - x^2} \\ &= \frac{1}{3y + x^2} - \frac{1}{3x + y^2} \\ &= \frac{3x + y^2 - (3y + x^2)}{(3y + x^2)(3x + y^2)} \\ &= \frac{3(x - y) - (x - y)(x + y)}{x^2y^2 + 9xy + 3(x^3 + y^3)} \\ &= \frac{(x - y)[3 - (x + y)]}{x^2y^2 + 9xy + 3[(x + y)^3 - 3xy(x + y)]} \end{aligned}$$

$$= \frac{2(x-y)}{x^2y^2+3} \quad (\text{vì } x+y=1)$$

Bài 3 (5 điểm) ✓

Giải các phương trình :

1. $\frac{x^2-24}{2001} + \frac{x^2-22}{2003} = \frac{x^2-20}{2005} + \frac{x^2-18}{2007}$

2. $(2x-1)^3 + (x+2)^3 = (3x+1)^3$

1.

$$\begin{aligned} \frac{x^2-24}{2001} + \frac{x^2-22}{2003} &= \frac{x^2-20}{2005} + \frac{x^2-18}{2007} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x^2-24}{2001} - 1 \right) + \left(\frac{x^2-22}{2003} - 1 \right) &= \left(\frac{x^2-20}{2005} - 1 \right) + \left(\frac{x^2-18}{2007} - 1 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{x^2-2025}{2001} + \frac{x^2-2025}{2003} &= \frac{x^2-2025}{2005} + \frac{x^2-2025}{2007} \\ \Leftrightarrow (x^2-2025) \left(\frac{1}{2001} + \frac{1}{2003} - \frac{1}{2005} - \frac{1}{2007} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2-2025 = 0 \quad \left(\text{vì } \frac{1}{2001} > \frac{1}{2003} > \frac{1}{2005} > \frac{1}{2007} \right) \\ \Leftrightarrow x = \pm 45 \end{aligned}$$

2.

Đặt $\begin{cases} 2x-1=a \\ x+2=b \end{cases} \Rightarrow 3x+1=a+b$. Phương trình đã cho trở thành :

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)^3 \\ \Leftrightarrow a^3 + b^3 &= a^3 + b^3 + 3ab(a+b) \\ \Leftrightarrow 3ab(a+b) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ a+b=0 \end{cases} \end{aligned}$$

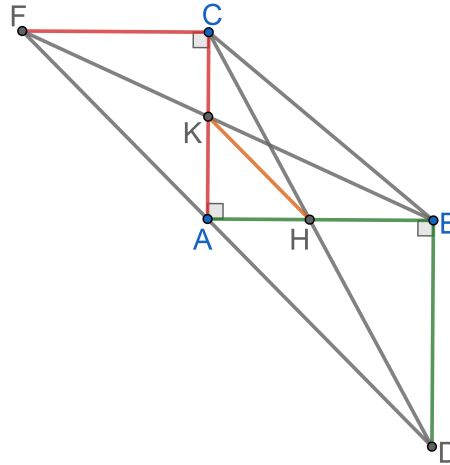
- Nếu $a=0$, ta có $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$
- Nếu $b=0$, ta có $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$
- Nếu $a+b=0$, ta có $3x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x=\frac{1}{2}; x=-2$ và $x=-\frac{1}{3}$

Bài 4 (6 điểm) ✓

Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ về phía ngoài tam giác đó các tam giác ABD vuông cân tại B , ACF vuông cân tại C . Gọi H là giao điểm của AB và CD , K là giao điểm của AC và BF . Chứng minh rằng :

1. $AH = AK$
2. $AH^2 = BH.CK$



Từ $AC \parallel BD$ và $FC \parallel AB$ theo Talet ta có :

$$\begin{cases} \frac{CH}{HD} = \frac{AC}{BD} = \frac{AH}{HB} & (1) \\ \frac{CK}{AK} = \frac{FC}{AB} & (2) \end{cases}$$

Mà theo giả thiết ta có $BD = AB, AC = FC$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra

$$\begin{cases} \frac{CH}{HD} = \frac{CK}{AK} & (*) \\ \frac{AH}{HB} = \frac{CK}{AK} & (**) \end{cases}$$

1.

Vì các tam giác ABD và ACF vuông cân tại B và C nên $\widehat{FAC} = \widehat{BAC} = 45^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{FAC} = \widehat{FAC} + \widehat{BAC} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow F, A, D$ thẳng hàng.

Từ (*) theo Talet đảo suy ra $HK \parallel FD \Rightarrow \begin{cases} \widehat{AKH} = \widehat{FAK} = 45^\circ \text{ (so le trong)} \\ \widehat{KHA} = \widehat{HAD} = 45^\circ \text{ (so le trong)} \end{cases}$

$\Rightarrow \widehat{AKH} = \widehat{KHA} \Rightarrow \triangle AHK$ cân tại $A \Rightarrow AH = AK$

2.

Từ (**) suy ra $AH.AK = BH.CK$

Mà $AH = AK$ (cmt) $\Rightarrow AH^2 = BH.CK$

Vậy $AH^2 = BH.CK$

Bài 5 (2 điểm) ✓

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = (x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$$

$$\begin{aligned} A &= (x-1)(x+2)(x+3)(x+6) \\ &= [(x-1)(x+6)] \cdot [(x+2)(x+3)] \\ &= (x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 5x$ thì $A = (t-6)(t+6) = t^2 - 36 \geq -36$ vì $t^2 \geq 0$

$$A = -36 \Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -5 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là -36 , đạt được khi $x = 0$ hoặc $x = -5$

4 Quế võ 2008-2009

Bài 1 (6 điểm) ✓

Cho $A = \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+1}{3-x}$

1. Rút gọn A

2. Tính giá trị của A biết $x - x^2 = \frac{1}{4}$

3. Tìm các giá trị của x để $A < 1$

4. Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

1.

$$\begin{aligned} A &= \frac{2x-9}{x^2-5x+6} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{2x+1}{3-x} \quad (x \neq 2, x \neq 3) \\ &= \frac{2x-9}{(x-2)(x-3)} - \frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)} + \frac{(2x+1)(x-2)}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{2x-9 - (x+3)(x-3) + (2x+1)(x-2)}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{x^2 - x - 2}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{x+1}{x-3} \end{aligned}$$

2.

$$x - x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Tại $x = \frac{1}{2}$ ta có $A = \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - 3} = -\frac{3}{5}$

Vậy khi $x - x^2 = \frac{1}{4}$ thì $A = -\frac{3}{5}$

3.

$$\begin{aligned} A < 1 &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-3} < 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-3} - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{x-3} < 0 \\ &\Leftrightarrow x-3 < 0 \\ &\Leftrightarrow x < 3 \end{aligned}$$

Vậy $x < 3$ là các giá trị cần tìm của x

4.

Ta có $A = \frac{x+1}{x-3} = 1 + \frac{4}{x-3}$. Do đó $A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{x-3} \in \mathbb{Z}$.

Mà $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-3 \in U(4) = \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$. Ta có bảng sau :

$x-3$	-4	-2	-1	1	2	4
x	-1	1	2	4	5	7

Vậy các giá trị cần tìm của x là $x \in \{-1; 1; 2; 4; 5; 7\}$

Bài 2 (3 điểm) ✓

Cho a, b, c là 3 số khác 0 thỏa mãn $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng :

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{ab} + \frac{2}{bc} + \frac{2}{ca} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2(a+b+c)}{abc} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \quad (\text{vì } a+b+c=0) \end{aligned}$$

Bài 3 (2 điểm) ✓

Giải phương trình :

$$\left(\frac{1}{1.101} + \frac{1}{2.102} + \dots + \frac{1}{10.110}\right) \cdot x = \frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \dots + \frac{1}{100.110}$$

Đặt $A = \left(\frac{1}{1.101} + \frac{1}{2.102} + \dots + \frac{1}{10.110}\right); B = \frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \dots + \frac{1}{100.110}$

Ta có :

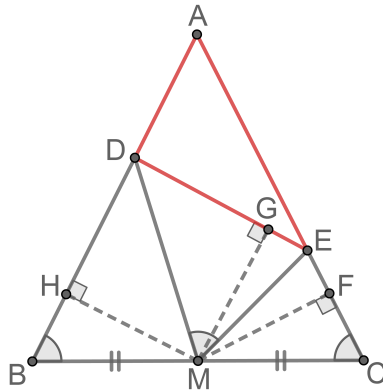
$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{1.11} + \frac{1}{2.12} + \dots + \frac{1}{100.110} \\ &= \frac{1}{10} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{11} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{110} \right) \\ &= \frac{1}{10} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{10} \right) - \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110} \right) \right] \\ &= 10 \cdot \left[\frac{1}{100} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{101} \right) + \frac{1}{100} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{102} \right) + \dots + \frac{1}{100} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{110} \right) \right] \\ &= 10 \cdot \left(\frac{1}{1.101} + \frac{1}{2.102} + \dots + \frac{1}{10.110} \right) \\ &= 10.A \end{aligned}$$

Suy ra $x = B : A = 10$

Bài 4 (7 điểm) ✓

Cho tam giác ABC cân tại A có $BC = 2a$. M là trung điểm của BC . Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{DME} = \widehat{B}$

1. Chứng minh rằng $\triangle BDM$ đồng dạng với $\triangle CME$, từ đó suy ra tích $BD \cdot CE$ không đổi.
2. Chứng minh rằng DM là tia phân giác của $\widehat{BDE}$
3. Tính chu vi tam giác AED nếu tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng $2a$



1.

Xét tam giác MEC có $\widehat{MEC} + \widehat{MCE} + \widehat{EMC} = 180^\circ$ (1) (ĐL)

Lại có $\widehat{EMC} + \widehat{EMD} + \widehat{DMB} = 180^\circ$ (2)

Mặt khác theo giả thiết thì $\widehat{DME} = \widehat{ECM}$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{MEC} = \widehat{DMB}$

Xét 2 tam giác BDM và CME có : $\begin{cases} \widehat{DMB} = \widehat{MEC} \text{ (cmt)} \\ \widehat{DBM} = \widehat{MCE} \text{ (gt)} \end{cases} \Rightarrow \triangle BDM \sim \triangle CME \text{ (g.g)}$

$$\Rightarrow \frac{BD}{CM} = \frac{BM}{CE} \Rightarrow BD \cdot CE = CM \cdot BM = a^2 = \text{const}$$

2.

Từ $\triangle BDM \sim \triangle CME$ (cmt) $\Rightarrow \frac{DM}{ME} = \frac{BM}{CE} \Rightarrow \frac{DM}{ME} = \frac{CM}{CE}$ (vì $BM = CM$)

Xét 2 tam giác DME và CME có $\begin{cases} \frac{DM}{ME} = \frac{CM}{CE} \text{ (cmt)} \\ \widehat{DME} = \widehat{MCE} \text{ (gt)} \end{cases} \Rightarrow \triangle DME \sim \triangle MCE \text{ (c.g.c)}$

$$\Rightarrow \widehat{MDE} = \widehat{CME}$$

Mà từ $\triangle BDM \sim \triangle CME \Rightarrow \widehat{CME} = \widehat{BDM}$

Suy ra $\widehat{MDE} = \widehat{BDM} \Rightarrow DM$ là phân giác của $\widehat{BDE}$

3.

Hạ MG, MH, MF lần lượt vuông góc với DE, AB, AC .

Vì DM là phân giác của $\widehat{BDE}$ (cmt) $\Rightarrow DG = DH$ (*)

Theo kết quả câu trên ta có $\triangle DME \sim \triangle MCE$

$\Rightarrow \widehat{DEM} = \widehat{CEM} \Rightarrow ME$ là phân giác của $\widehat{DEC} \Rightarrow EG = EF$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $DE = DG + GE = DH + EF$

Từ đó ta có chu vi tam giác ADE là :

$$P_{ADE} = AD + DE + EA = AD + DH + EF + EA = AH + AF = 2AH$$

Xét tam giác ABM vuông tại M có $BM^2 = BH \cdot BA \Rightarrow BH = \frac{BM^2}{BA} = \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$

$$\Rightarrow AH = AB - BH = 2a - \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$$

Từ đó $P_{ADE} = 3a$

Bài 5 (2 điểm) ✓

1. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $p^2 - 1$ chia hết cho 24
2. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

1.

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p chia 3 dư 1 hoặc dư 2 $\Rightarrow p^2$ chia 3 dư 1 hay $p^2 - 1 : 3$
(1)

Hơn nữa cũng do p nguyên tố nên p chia 4 dư 1 hoặc 3 $\Rightarrow p^2$ chia 8 dư 1 hay $p^2 - 1 : 8$
(2)

Từ (1) và (2) suy ra $p^2 - 1 : 24$

2.

Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác nên :

$$a < b + c \Rightarrow a^2 < a(b + c) = ab + ac \quad (3)$$

$$b < c + a \Rightarrow b^2 < b(c + a) = bc + ab \quad (4)$$

$$c < a + b \Rightarrow c^2 < c(a + b) = ca + bc \quad (5)$$

Từ (3), (4) và (5) suy ra $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

Bài 1 (3 điểm) ✓

1. Có bao nhiêu số tự nhiên nhỏ hơn 2011 chia hết cho 3 và chỉ viết bởi 3 chữ số 0;1 và 2?

2. Cho biểu thức $A = \left(\frac{6x+1}{x^2-6x} + \frac{6x-1}{x^2+6x} \right) \cdot \frac{x^2-36}{x^2+1}$

a. Tìm điều kiện xác định và rút gọn A

b. Tìm tất cả các số nguyên x để A có giá trị là số tự nhiên

1.

Xét số $\overline{abcd}$ là số thỏa mãn yêu cầu bài toán. Trong đó a, b, c, d là các chữ số được lấy từ tập $\{0; 1; 2\}$ với chú ý rằng a, b, c, d đều có thể bằng 0. Ví như 0121 thì ta coi là 121, 0011 thì ta coi là 11. Xét các khả năng sau :

- $a = 2$. Vì $\overline{abcd} < 2011$ và chia hết cho 3 nên chỉ có 2 khả năng là $\overline{abcd} = 2010$ hoặc $\overline{abcd} = 2001$
- $a < 2$. Khi đó :
 - + a có 2 cách chọn là 0 và 1
 - + b có 3 cách chọn là 0;1 và 2
 - + c có 3 cách chọn là 0;1 và 2
 - + d có 1 cách chọn duy nhất phụ thuộc vào cách chọn a, b, c như sau :
 - Nếu $a + b + c$ chia hết cho 3 thì chọn $d = 0$
 - Nếu $a + b + c$ chia 3 dư 1 thì chọn $d = 2$
 - Nếu $a + b + c$ chia 3 dư 2 thì chọn $d = 1$

Như vậy số cách chọn $\overline{abcd}$ trong trường hợp này là : $2.3.3.1 = 18$

Vậy số số thỏa mãn yêu cầu bài toán là $18 + 2 = 20$ số

2.

a. Điều kiện xác định : $x^2 - 6x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 6 \end{cases}$. Với điều kiện đó, ta có :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{6x+1}{x^2-6x} + \frac{6x-1}{x^2+6x} \right) \cdot \frac{x^2-36}{x^2+1} \\ &= \frac{(6x+1)(x+6) + (6x-1)(x-6)}{x(x-6)(x+6)} \cdot \frac{(x-6)(x+6)}{x^2+1} \\ &= \frac{12x^2+12}{x(x^2+1)} \\ &= \frac{12}{x} \end{aligned}$$

b. Với $x \in \mathbb{Z}$, ta có :

$$P \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{12}{x} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in U(12) = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

Kết hợp với điều kiện xác định, suy ra $x \in \{1; 2; 3; 4; 12\}$ là những giá trị cần tìm của x

Bài 2 (3 điểm) ✓

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a. $x^2 - 1 + y^2 - 2xy$

b. $10x^2 + y^2 - 11xy$

c. $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

2. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right)$ biết a, b, c là các số khác 0 và $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$

1.

a.

$$x^2 - 1 + y^2 - 2xy = (x^2 - 2xy + y^2) - 1 = (x - y)^2 - 1 = (x - y - 1)(x - y + 1)$$

b.

$$10x^2 + y^2 - 11xy = (10x^2 - 10xy) - (xy - y^2) = 10x(x - y) - y(x - y) = (x - y)(10x - y)$$

c.

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 &= x^3 + (x^3 + 3x^2 + 3x + 1) \\ &= x^3 + (x + 1)^3 \\ &= (x + x + 1) [x^2 - x(x + 1) + (x + 1)^2] \\ &= (2x + 1)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

2.

Xét 2 khả năng sau :

- Nếu $a + b + c = 0$. Khi đó $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = 2$.

Như vậy $a + b + c = 0$ thỏa mãn đẳng thức của bài toán và ta có :

$$\begin{aligned} P &= \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \\ &= \frac{a+b}{a} \cdot \frac{b+c}{b} \cdot \frac{c+a}{c} \\ &= \frac{-c}{a} \cdot \frac{-a}{b} \cdot \frac{-b}{c} \\ &= -1 \end{aligned}$$

- Nếu $a + b + c \neq 0$. Khi đó từ giả thiết ta có :

$$\begin{aligned} \frac{a+b-c}{c} + 2 &= \frac{b+c-a}{a} + 2 = \frac{c+a-b}{b} + 2 \\ \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{c} &= \frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a = b = c$$

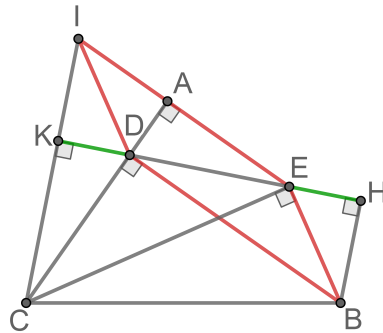
$$\text{Từ đó } P = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) = 8$$

Vậy $P = -1$ khi $a + b + c = 0$ và $P = 8$ khi $a + b + c \neq 0$

Bài 3 (2 điểm) ✓

Cho 2 tam giác vuông BDC và BEC lần lượt vuông tại D và E (D, E nằm về cùng 1 phía đối với đường thẳng BC). Gọi H, K theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ B và C đến đường thẳng DE . I là giao điểm của CK với đường vuông góc hạ từ E xuống CD .

1. Tứ giác $BEID$ là hình gì? Vì sao?
2. So sánh HE và DK



1.

Tam giác CIE có CA và KE là 2 đường cao, đồng thời $CA \cap KE \equiv D$ nên D là trực tâm của $\triangle CIE \Rightarrow ID \perp CE \Rightarrow ID \parallel BE$ (*)

$$\text{Lại có } \begin{cases} BD \perp CD \\ IE \perp CD \end{cases} \Rightarrow BD \parallel IE \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $BEID$ là hình bình hành.

2.

$$\text{Vì } BEID \text{ là hình bình hành nên } \begin{cases} IE = BD \\ \widehat{IED} = \widehat{BDE} \text{ hay } \widehat{IEK} = \widehat{BDH} \end{cases}$$

$$\text{Xét 2 tam giác vuông } IEK \text{ và } BDH \text{ có } \begin{cases} IE = BD \text{ (cmt)} \\ \widehat{IEK} = \widehat{BDH} \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \triangle IEK = \triangle BDH \text{ (ch - gn)}$$

$$\Rightarrow KE = DH \Rightarrow HE = DK$$

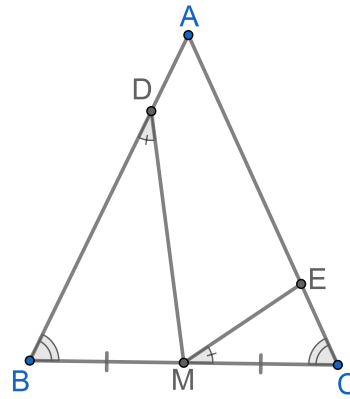
Bài 4 (2 điểm) ✓

Cho tam giác ABC cân tại A , M là trung điểm của BC . Trên 2 cạnh AC, AB theo thứ tự lấy các điểm E, D (E, D không trùng với A, B, C). sao cho $\widehat{CME} = \widehat{BDM}$

1. Chứng minh $BD \cdot CE = BM^2$
2. Xác định vị trí của D trên AB và E trên AC sao cho $BD + CE$ nhỏ nhất.

1.

$$\text{Xét 2 tam giác } BDM \text{ và } CME \text{ có } \begin{cases} \widehat{DBM} = \widehat{MCE} \text{ (vì } \triangle ABC \text{ cân tại } A) \\ \widehat{BDM} = \widehat{CME} \text{ (gt)} \end{cases}$$



$$\Rightarrow \triangle BDM \sim \triangle CME (g - g) \Rightarrow \frac{BD}{CM} = \frac{BM}{CE} \Rightarrow BD \cdot CE = BM \cdot CM = BM^2 \text{ (vì } BM = CM \text{)}$$

2.

Ta có :

$$\begin{aligned} (BD + CE)^2 - 4BD \cdot CE &= (BD - CE)^2 \geq 0 \\ \Rightarrow (BD + CE)^2 &\geq 4BD \cdot CE = 4 \cdot BM^2 \\ \Rightarrow BD + CE &\geq 2BM = BC \end{aligned}$$

$$BD + CE = 2BM \Leftrightarrow BD = CE = BM$$

Vậy $BD + CE$ nhỏ nhất bằng BC khi $BD = CE = BM$

Bài 1 (5 điểm) ✓

Phân tích thành nhân tử:

1. $x^2 - 2xy + y^2 + x^2y - xy^2$
2. $x^2 - 7xy + 12y^2$
3. $x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2)$

1.

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 + x^2y - xy^2 &= (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2y - xy^2) \\ &= (x - y)^2 + xy(x - y) \\ &= (x - y)(x - y + xy) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x^2 - 7xy + 12y^2 &= (x^2 - 3xy) - (4xy - 12y^2) \\ &= x(x - 3y) - 4y(x - 3y) \\ &= (x - 3y)(x - 4y) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2) &= xy^2 - xz^2 + yz^2 - yx^2 + z(x^2 - y^2) \\ &= (xy^2 - yx^2) - (xz^2 - yz^2) + z(x^2 - y^2) \\ &= xy(y - x) - z^2(x - y) + z(x - y)(x + y) \\ &= (x - y)(-xy - z^2 + zx + zy) \\ &= (x - y) \left[(zx - xy) - (z^2 - zy) \right] \\ &= (x - y) \left[x(z - y) - z(z - y) \right] \\ &= (x - y)(z - y)(x - z) \end{aligned}$$

Bài 2 (5 điểm) ✓

Cho biểu thức $A = \frac{4x^2 + (2x + 3)(x + 1) - 9}{9x^2 - 4}$

1. Rút gọn A
2. Tìm x để $A = \frac{1}{2}$
3. Tìm các số nguyên x để A có giá trị nguyên

1. Điều kiện $9x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm \frac{2}{3}$

$$A = \frac{4x^2 + (2x + 3)(x + 1) - 9}{9x^2 - 4}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(4x^2 - 9) + (2x + 3)(x + 1)}{9x^2 - 4} \\
 &= \frac{(2x + 3)(2x - 3) + (2x + 3)(x + 1)}{(3x - 2)(3x + 2)} \\
 &= \frac{(2x + 3)(2x - 3 + x + 1)}{(3x - 2)(3x + 2)} \\
 &= \frac{(2x + 3)(3x - 2)}{(3x - 2)(3x + 2)} \\
 &= \frac{2x + 3}{3x + 2}
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 A = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{2x + 3}{3x + 2} = \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow 2(2x + 3) = (3x + 2) \\
 &\Leftrightarrow x = -4 \quad (\text{thỏa mãn điều kiện})
 \end{aligned}$$

Vậy để $A = \frac{1}{2}$ thì $x = -4$

3.

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì :

$$\begin{aligned}
 A = \frac{2x + 3}{3x + 2} &\in \mathbb{Z} \\
 \Rightarrow \frac{6x + 9}{3x + 2} &\in \mathbb{Z} \\
 \Leftrightarrow 2 + \frac{5}{3x + 2} &\in \mathbb{Z} \\
 \Rightarrow 3x + 2 &\in U(5) = \{-5; -1; 1; 5\}
 \end{aligned}$$

Mặt khác $3x + 2$ chia 3 dư 2 nên $3x + 2 = 5 \Leftrightarrow x = 1$

Thử lại : khi $x = 1$ ta có $A = 1 \rightarrow$ thỏa mãn. Vậy $x = 1$ là giá trị cần tìm của x

Bài 3 (2 điểm) ✓

Cho a, b là 2 số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng :

$$ab - a - b + 1 \text{ chia hết cho } 192$$

Giả sử $a = (2m + 1)^2$ và $b = (2m + 3)^2$ ($m \in \mathbb{N}$). Khi đó :

$$\begin{aligned}
 ab - a - b + 1 &= (a - 1)(b - 1) \\
 &= [(2m + 1)^2 - 1] \cdot [(2m + 3)^2 - 1] \\
 &= 2m(2m + 2)(2m + 2)(2m + 4) \\
 &= 16.m(m + 1)^2(m + 2)
 \end{aligned}$$

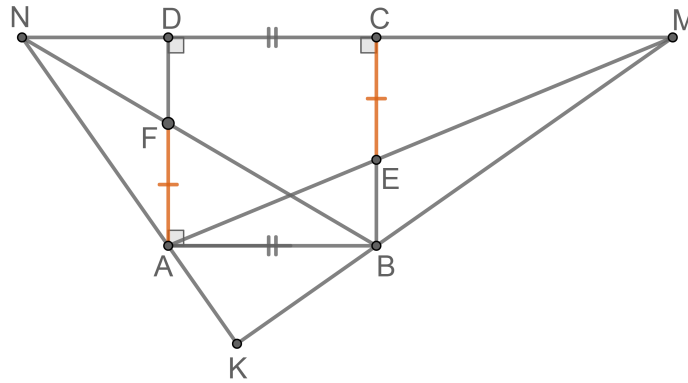
$m; (m + 1); (m + 2)$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên $m(m + 1)^2(m + 2) : 3$.

Hơn nữa nếu m chẵn thì $m(m + 2) : 4$, còn nếu m lẻ thì $(m + 1)^2 : 4$. Như vậy ta luôn có $m(m + 1)^2(m + 2) : 4$. Từ đó, vì 3 và 4 nguyên tố cùng nhau nên $m(m + 1)^2(m + 2) : 12$
 Vậy $ab - a - b + 1$ chia hết cho $16.12 = 192$

Bài 4 (6 điểm) ✓

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Điểm E thuộc cạnh BC , điểm F thuộc cạnh AD sao cho $CE = AF$. Các đường thẳng AE, BF cắt đường thẳng CD theo thứ tự tại M, N .

1. Chứng minh rằng $CM \cdot DN = a^2$
2. Gọi K là giao điểm của NA và MB . Chứng minh rằng $\widehat{MKN} = 90^\circ$
3. Các điểm E, F có vị trí như thế nào thì MN có độ dài nhỏ nhất.



1.

Vì $ND \parallel AB$ và $CM \parallel AB$ nên theo Talet ta có
$$\begin{cases} \frac{AB}{ND} = \frac{FA}{FN} \\ \frac{CM}{AB} = \frac{CE}{EB} \end{cases} \quad (*)$$

Mà $CE = AF \Rightarrow EB = DF \Rightarrow \frac{CE}{EB} = \frac{FA}{FN} \quad (**)$

Từ (*) và (**) suy ra $\frac{AB}{ND} = \frac{CM}{AB} \Rightarrow CM \cdot DN = AB^2 = a^2$

2.

Xét 2 tam giác vuông AND và CMB có
$$\begin{cases} \frac{ND}{CB} = \frac{AD}{CM} \text{ (vì } CM \cdot DN = a^2) \\ \widehat{ADN} = \widehat{CBM} = 90^\circ \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle ADN \sim \triangle CMB \Rightarrow \widehat{CMB} = \widehat{DAN} \Rightarrow \widehat{CMB} + \widehat{DNA} = 90^\circ$ hay $\widehat{NMK} + \widehat{MKN} = 90^\circ$

Từ đó xét tam giác MNK suy ra $\widehat{MKN} = 90^\circ$

3.

Ta có $MN = CM + BC + DN = a + CM + DN$. Do đó MN lớn nhất $\Leftrightarrow CM + DN$ lớn nhất
Mặt khác :

$$(CM + DN)^2 - 4CM \cdot DN = (CM - DN)^2 \geq 0 \Rightarrow (CM + DN)^2 \geq 4CM \cdot DN = 4a^2 \\ \Rightarrow CM + DN \geq 2a$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow CM = DN = a \Leftrightarrow E, F$ là trung điểm của BC và AD .
Vậy MN lớn nhất khi E, F là trung điểm của BC và AD

Bài 5 (2 điểm) ✓

1. Giải phương trình : $x^3 + \frac{x^3}{(x-1)^3} = 2 - \frac{3x^2}{x-1}$

2. Chứng minh rằng nếu $x = by + cz; y = ax + cz; z = ax + by$ và $x + y + z \neq 0$ thì :

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 2$$

1.

Điều kiện $x \neq 1$

Để ý rằng $x \cdot \frac{x}{x-1} = x + \frac{x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$, ta có :

$$\begin{aligned} x^3 + \frac{x^3}{(x-1)^3} &= 2 - \frac{3x^2}{x-1} \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{x}{x-1}\right)^3 - 3x \cdot \frac{x}{x-1} \cdot \left(x + \frac{x}{x-1}\right) &= 2 - \frac{3x^2}{x-1} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 &= 2 - \frac{3x^2}{x-1} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 + 3 \cdot \frac{x^2}{x-1} - 2 &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Đặt $t = \frac{x^2}{x-1}$ thì (1) trở thành :

$$\begin{aligned} t^3 - 3t^2 + 3t - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t-2)(t^2 - t + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow t-2 = 0 \quad \left(\text{vì } t^2 - t + 1 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \right) \\ \Leftrightarrow t &= 2 \end{aligned}$$

Như vậy ta có :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x-1} &= 2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2(x-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 &= 0 \quad (\text{vô nghiệm}) \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

2.

Từ $\begin{cases} x = by + cz \\ y = ax + cz \end{cases} \Rightarrow x + ax + cz = by + cz + y \Leftrightarrow x(a+1) = y(b+1)$

Tương tự và suy ra :

$$x(a+1) = y(b+1) = z(c+1) = \frac{x(a+1) + y(b+1) + z(c+1)}{3} = \frac{ax + by + cz + x + y + z}{3} \quad (*)$$

Từ giả thiết lại có $x + y + z = 2(ax + by + cz)$. Do đó từ (*) suy ra :

$$x(a+1) = y(b+1) = z(c+1) = \frac{x+y+z}{2}$$

Do đó nếu đặt
$$\begin{cases} \frac{1}{a+1} = m \\ \frac{1}{b+1} = n \\ \frac{1}{c+1} = p \end{cases} \quad \text{thì} \quad \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \frac{x+y+z}{2} \quad (**)$$

Ở (**), theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\begin{aligned} \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} = \frac{x+y+z}{2} &= \frac{x+y+z}{m+n+p} \\ \Rightarrow m+n+p &= 2 \text{ hay } \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 2 \end{aligned}$$

Vậy $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = 2$

7 Quế võ 2013-2014**I-PHẦN CHUNG** (dành cho tất cả các thí sinh)**Bài 1 (6 điểm) ✓****1.** Phân tích thành nhân tử :

a. $x^2 + 4x - 2xy - 4y + y^2$

b. $x^4 + 4$

2. Giải các phương trình sau :

a. $5 - (x - 6) = 4(3 - 2x)$

b. $\frac{x-15}{1999} + \frac{x-1998}{8} + \frac{x-4}{670} = 6$

1.**a.**

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4x - 2xy - 4y + y^2 &= (x^2 - 2xy + y^2) + (4x - 4y) \\
 &= (x - y)^2 + 4(x - y) \\
 &= (x - y)(x - y + 4)
 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
 x^4 + 4 &= (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 \\
 &= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \\
 &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)
 \end{aligned}$$

2.**a.**

$$\begin{aligned}
 5 - (x - 6) &= 4(3 - 2x) \\
 \Leftrightarrow 11 - x &= 12 - 8x \\
 \Leftrightarrow 7x &= 1 \\
 \Leftrightarrow x &= \frac{1}{7}
 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{7}$

b.

$$\begin{aligned}
 &\frac{x-15}{1999} + \frac{x-1998}{8} + \frac{x-4}{670} = 6 \\
 \Leftrightarrow &\left(\frac{x-15}{1999} - 1\right) + \left(\frac{x-1998}{8} - 2\right) + \left(\frac{x-4}{670} - 3\right) = 0 \\
 \Leftrightarrow &\frac{x-2014}{1999} + \frac{x-2014}{1998} + \frac{x-2014}{670} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (x-2014) \cdot \left(\frac{1}{1999} + \frac{1}{1998} + \frac{1}{670} \right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x-2014 = 0 \quad \left(\text{vì } \frac{1}{1999} + \frac{1}{1998} + \frac{1}{670} > 0 \right) \\ &\Leftrightarrow x = 2014 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 2014$

Bài 2 (3 điểm) ✓

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{x^2+x} - \frac{2-x}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right)$

1. Rút gọn A

2. Tìm x để $|P-1| + P = 1$

1. Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ x+1 \neq 0 \\ \frac{1}{x} + x - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \quad (*)$

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{x^2+x} - \frac{2-x}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right) \\ &= \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{x(2-x)}{x(x+1)} \right) : \frac{1+x(x-2)}{x} \\ &= \frac{1-x(2-x)}{x(x+1)} \cdot \frac{x}{1+x(x-2)} \\ &= \frac{x^2-2x+1}{(x+1)(x^2-2x+1)} \\ &= \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

2.

Vì $|P-1| \geq 0$ nên từ $|P-1| + P = 1 \Rightarrow P \leq 1$.

Ngược lại, khi $P \leq 1 \Rightarrow |P-1| + P = 1 - P + P = 1$.

Như vậy $|P-1| + P = 1 \Leftrightarrow P \leq 1$. Ta có :

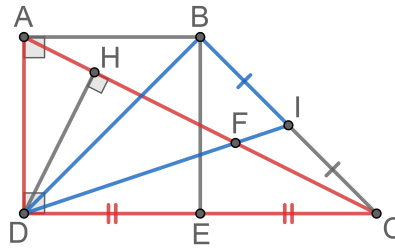
$$\begin{aligned} P \leq 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{x+1} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ hoặc } x < -1 \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (*) ở trên suy ra $x > 0$ hoặc $x < -1$ là những giá trị cần tìm của x

Bài 3 (5 điểm) ✓

Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Biết $CD = 2AB = 2AD$ và $BC = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của CD

1. Tứ giác $ABED$ là hình gì? Vì sao?
2. Tính diện tích hình thang $ABCD$ theo a
3. Gọi I là trung điểm của BC , H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC . Tính $\widehat{HDI}$



1.

Để thấy $ABED$ là hình vuông

2.

Từ $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = AD = a$ và $CD = 2a$. Từ đó :

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

3. Gọi $F = AC \cap DI$

$\triangle BEC$ và $\triangle BED$ là 2 tam giác vuông cân tại E nên $\widehat{DBI} = 90^\circ$.

Trong tam giác DBI vuông tại B có $\frac{IB}{BD} = \frac{IB}{BC} = \frac{1}{2}$

Trong tam giác ADC vuông tại D có $\frac{AD}{DC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

Từ đó suy ra $\triangle DBI \sim \triangle CDA (c - g - c) \Rightarrow \widehat{IDB} = \widehat{ACD}$

Theo tính chất góc ngoài suy ra :

$$\begin{aligned} \widehat{HFD} &= \widehat{FCD} + \widehat{FDC} \\ &= \widehat{ACD} + \widehat{IDC} \\ &= \widehat{IDB} + \widehat{IDC} \\ &= \widehat{BDC} = 45^\circ \\ &\Rightarrow \widehat{HDF} = 45^\circ \end{aligned}$$

Vậy $\widehat{HDI} = 45^\circ$

II-PHẦN RIÊNG

Bài 4 (6 điểm) (Dành cho thí sinh các trường THCS đại trà) ✓

1. Chứng minh rằng $(2n+5)^2 - 25$ chia hết cho 4 với mọi số nguyên n
2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 2018$
3. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác, p là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

1.

$$(2n+5)^2 - 25 = (2n+5)^2 - 5^2 = 2n(2n+10) = 4n(n+5) : 4 \forall n \in \mathbb{Z}$$

2.

$$\begin{aligned} A &= x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 2018 \\ &= (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 4y + 4) + 2014 \\ &= (x-y)^2 + (y-2)^2 + 2014 \geq 2014 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x-y = y-2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2014, đạt được tại $x = y = 2$

3.

Ta chứng minh bất đẳng thức phụ: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ (*) với $\forall x, y > 0$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} \\ &\Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \quad (\text{vì } x, y > 0) \\ &\Leftrightarrow (x+y)^2 - 4xy \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}) \end{aligned}$$

Vậy (*) đúng và đẳng thức ở (*) xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Áp dụng (*) ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{1}{p-a+p-b} = \frac{1}{c} \quad (1)$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{1}{p-b+p-c} = \frac{1}{a} \quad (2)$$

$$\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{1}{p-c+p-a} = \frac{1}{b} \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta được:

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right) &\geq \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} &\geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow p - a = p - b = p - c \Leftrightarrow a = b = c$

Bài 5 (6 điểm) (Dành cho thí sinh trường THCS Nguyễn Cao) ✓

- So sánh $A = \frac{2014 - 2013}{2014 + 2013}$ và $B = \frac{2014^2 - 2013^2}{2014^2 + 2013^2}$
- Tìm 2 số tự nhiên $\overline{ab}$ và c sao cho tổng của : tổng, hiệu, tích, thương của chúng bằng 200 và $a < b; a + b = c$
- Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh rằng $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} \geq \frac{a-d}{a+b}$
- Cho các số thực a, b, c khác nhau đôi một và thuộc đoạn $[0; 2]$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2}$

1.

$$\begin{aligned} B &= \frac{2014^2 - 2013^2}{2014^2 + 2013^2} = \frac{(2014 - 2013)(2014 + 2013)}{(2014 + 2013)^2 - 2 \cdot 2013 \cdot 2014} \\ &> \frac{(2014 - 2013)(2013 + 2014)}{(2014 + 2013)^2} \\ &= \frac{2014 - 2013}{2013 + 2014} = A \end{aligned}$$

Vậy $B > A$

2.

Vì $a + b = c$ nên $\overline{ab} = 10a + b > c$. Từ đó theo giả thiết ta có :

$$\overline{ab} + c + \overline{ab} - c + \overline{ab} \cdot c + \overline{ab} : c = 200 \Leftrightarrow \overline{ab} \cdot \left(2 + c + \frac{1}{c} \right) = 200 \quad (*)$$

$$\text{Vì } a < b \text{ nên } \begin{cases} \overline{ab} = 10a + b > 11a \\ c = a + b > 2a \Rightarrow 2 + c + \frac{1}{c} > 2 + 2a \end{cases}$$

Do đó, từ (*) suy ra $11a \cdot (2 + 2a) < 200 \Rightarrow a \leq 2 \Rightarrow a \in \{1; 2\}$ (vì $a \neq 0$)

- Nếu $a = 1$. Vì $\overline{ab} : c \Rightarrow 10a + b : c \Rightarrow 9a : c$ (vì $c = a + b$)

Như vậy $9 : c \Rightarrow c \in \{1; 3; 9\}$

+ Với $c = 1 \Rightarrow b = 0$ (loại vì $a < b$)

+ Với $c = 3 \Rightarrow b = 2$. Thay vào (*) thấy không thỏa mãn

+ Với $c = 9 \Rightarrow b = 8$. Thay vào (*) thấy thỏa mãn

- Nếu $a = 2$. Lập luận như trên suy ra $c \in \{3, 6, 9, 18\}$

+ Với $c = 3 \Rightarrow b = 1$ (loại vì $a < b$)

+ Với $c = 6 \Rightarrow b = 4$. Thay vào (*) thấy không thỏa mãn

+ Với $c = 9 \Rightarrow b = 7$. Thay vào (*) thấy không thỏa mãn

+ Với $c = 18 \Rightarrow b = 16$ (loại)

Vậy $\overline{ab} = 18$ và $c = 9$ là 2 số tự nhiên cần tìm.

3.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0$ (**)

Ta có :

$$\begin{aligned} & \frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \\ &= \frac{a+c}{b+c} - 1 + \frac{b+d}{c+d} - 1 + \frac{c+a}{d+a} - 1 + \frac{d+b}{a+b} - 1 \\ &= \left(\frac{a+c}{b+c} + \frac{c+a}{d+a} \right) + \left(\frac{b+d}{c+d} + \frac{d+b}{a+b} \right) - 4 \\ &= (a+c) \cdot \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a} \right) + (b+d) \cdot \left(\frac{1}{c+d} + \frac{1}{a+b} \right) - 4 \\ &\geq (a+c) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} + (b+d) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} - 4 \quad \left(\text{áp dụng } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vậy (**) được chứng minh, từ đó ta có điều phải chứng minh.

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c = a+d \\ c+d = a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=d \\ a=c \end{cases}$$

4.

Không mất tính tổng quát giả sử $a > b > c$

Chú ý rằng nếu $x+y+z=0$ thì $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2$

$$\text{Do đó } P = \frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = \left(\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right)^2 \quad (*)$$

$$\text{Đặt } Q = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$$

$$\text{Vì } a > b > c \text{ nên } \begin{cases} a-b > 0 \\ b-c > 0 \\ a-c > 0 \end{cases} \quad \text{Từ đó ta có :}$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \\ &= \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} - \frac{1}{a-c} \\ &\geq \frac{4}{(a-b) + (b-c)} - \frac{1}{a-c} \quad \left(\text{Áp dụng } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \forall x, y > 0 \right) \\ &= \frac{4}{a-c} - \frac{1}{a-c} = \frac{3}{a-c} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } a, c \in [0; 2] \Rightarrow 0 < a-c \leq 2 \Rightarrow Q \geq \frac{3}{2} \Rightarrow P = Q^2 \geq \frac{9}{4}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b = b-c \\ a-c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{9}{4}$, đạt được khi $(a, b, c) = (2, 1, 0)$ và các hoán vị.

Bài 1 (4 điểm) ✓

Phân tích thành nhân tử :

1. $3x^2 - 7x$

2. $x^2 + 2xy + 6y - 9$

3. $(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1) - 6$

1.

$$3x^2 - 7x = x(3x - 7)$$

2.

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + 6y - 9 &= (x^2 + 2xy + y^2) - (y^2 - 6y + 9) \\ &= (x + y)^2 - (y - 3)^2 \\ &= (x - 3)(x + 2y + 3) \end{aligned}$$

3. Đặt $t = x^2 - 2x$ thì :

$$\begin{aligned} (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 1) - 6 &= t(t - 1) - 6 \\ &= t^2 - t - 6 \\ &= (t^2 - 3t) + (2t - 6) \\ &= t(t - 3) + 2(t - 3) \\ &= (t - 3)(t + 2) \\ &= (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x + 3) \\ &= (x + 1)(x - 3)(x^2 - 2x + 3) \end{aligned}$$

Bài 2 (5 điểm) ✓

1. Giải phương trình :

a. $(x^2 - 3^2) + 2(x - 3) = 0$

b. $\frac{x}{x+11} + \frac{3}{x-12} = \frac{-12x+33}{(x+11)(x-12)}$

2. Cho x, y thỏa mãn $5x^2 + 5y^2 + 8xy - 2x + 2y + 2 = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $M = (x+y)^{2007} + (x-2)^{2008} + (y+1)^{2009}$

1.

a.

$$\begin{aligned} (x^2 - 3^2) + 2(x - 3) &= 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 3) + 2(x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)(x + 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 0 \\ x + 5 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 3$ và $x = -5$

b. Điều kiện $\begin{cases} x+11 \neq 0 \\ x-12 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -11 \\ x \neq 12 \end{cases}$. Với điều kiện đó, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+11} + \frac{3}{x-12} &= \frac{-12x+33}{(x+11)(x-12)} \\ \Leftrightarrow \frac{x(x-12)+3(x+11)}{(x+11)(x-12)} &= \frac{-12x+33}{(x+11)(x-12)} \\ \Leftrightarrow x^2-9x+33 &= -12x+33 \\ \Leftrightarrow x^2+3x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x+3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-3 \end{cases} & \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x=0$ và $x=-3$

2.

Ta có :

$$\begin{aligned} 5x^2+5y^2+8xy-2x+2y+2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(x^2+8xy+y^2)+(x^2-2x+1)+(y^2+2y+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(x+y)^2+(x-1)^2+(y+1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x+y=x-1=y+1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó ta có : $M = (x+y)^{2007} + (x-2)^{2008} + (y+1)^{2009} = 1$

Bài 3 (4 điểm) ✓

1. Cho $abc = 1$. Rút gọn $M = \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1}$

2. Cho $a+b+c \neq 0$ và $a^3+b^3+c^3 = 3abc$. Tính $N = \frac{a^{2015}+b^{2015}+c^{2015}}{(a+b+c)^{2015}}$

1.

Với $abc = 1$, ta có :

$$\begin{aligned} M &= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} \\ &= \frac{a}{\frac{1}{c}+a+1} + \frac{b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{ca}+1} + \frac{c}{ca+c+1} \\ &= \frac{ac}{ca+c+1} + \frac{abc}{ca+c+1} + \frac{c}{ca+c+1} \\ &= \frac{ac}{ca+c+1} + \frac{1}{ca+c+1} + \frac{c}{ca+c+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.

Ta có đẳng thức quen thuộc $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a+b+c) \left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right]$

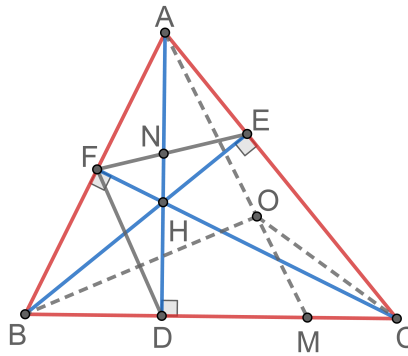
Do đó theo giả thiết suy ra $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$

$$\text{Vậy } N = \frac{a^{2015} + b^{2015} + c^{2015}}{(a+b+c)^{2015}} = \frac{3.a^{2015}}{(3a)^{2015}} = \frac{1}{3^{2014}}$$

Bài 4 (6 điểm) ✓

Cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau ở H . Gọi N là giao điểm của EF và AD . Chứng minh rằng :

1. $AH \cdot HD = BH \cdot HE$
2. $\triangle AEF \sim \triangle ABC$
3. FC là tia phân giác của $\widehat{DFE}$
4. Cho điểm O bất kỳ nằm trong tam giác ABC .
Xác định vị trí của O để $OA \cdot BC + OB \cdot AC + OC \cdot AB$ đạt giá trị nhỏ nhất.



1.

Dễ thấy $\triangle AHE \sim \triangle BHD (g - g) \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{HE}{HD} \Rightarrow AH \cdot HD = BH \cdot HE$

2.

Ta có :

$$\triangle AHE \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{AH}{AC} \quad (*)$$

$$\triangle AHF \sim \triangle ABD \Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AH}{AB} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra :

$$\begin{aligned} \frac{AE}{AD} : \frac{AF}{AD} &= \frac{AH}{AC} : \frac{AH}{AB} \\ \Leftrightarrow \frac{AE}{AF} &= \frac{AB}{AC} \end{aligned}$$

Từ đó, vì 2 tam giác AEF và ABC có chung góc A suy ra $\triangle AEF \sim \triangle ABC (c - g - c)$

3.

Từ $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ $(*)_1$

Chứng minh tương tự câu 2, ta có $\triangle FBD \sim \triangle CBA$ ($c - g - c$) $\Rightarrow \widehat{BFD} = \widehat{ACB}$ $(*)_2$

Từ $(*)_1$ và $(*)_2$ suy ra $\widehat{AFE} = \widehat{BFD} \Rightarrow \widehat{EFC} = \widehat{DFC} \Rightarrow FC$ là phân giác của $\widehat{DFE}$

4.

Gọi M là giao điểm của OA và BC . Khi đó ta có :

$$\begin{aligned} OA \cdot BC &= OA \cdot (BM + MC) = OA \cdot BM + OA \cdot MC \\ &\geq 2S_{AOB} + 2S_{AOC} \\ &= 2(S_{ABC} - S_{BOC}) \quad (1) \end{aligned}$$

Đẳng thức ở (1) xảy ra $\Leftrightarrow AM \perp BC$

Chứng minh tương tự ta có :

$$OB \cdot AC \geq 2(S_{ABC} - S_{AOC}) \quad (2)$$

$$OC \cdot AB \geq 2(S_{ABC} - S_{AOB}) \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra :

$$OA \cdot BC + OB \cdot AC + OC \cdot AB \geq 6S_{ABC} - (S_{BOC} + S_{AOC} + S_{AOB}) = 5S_{ABC}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow O$ là trực tâm của $\triangle ABC$.

Vậy $OA \cdot BC + OB \cdot AC + OC \cdot AB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi O là trực tâm của tam giác ABC

Bài 5 (1 điểm) ✓

Viết số 2007 thành tổng của k hợp số. Tìm giá trị lớn nhất của k

Tách 2007 thành tổng của 500 hợp số như sau : $2007 = \underbrace{4 + 4 + \dots + 4}_{498 \text{ số } 4} + 6 + 9$

Bây giờ ta đi chứng minh $k \leq 500$. Giả sử ngược lại $k > 500$.

Vì 2007 là số lẻ nên trong k hợp số phải tồn tại 1 hợp số là số lẻ. Hợp số lẻ nhỏ nhất là 9, do đó tổng của $k - 1$ hợp số còn lại phải nhỏ hơn hoặc bằng $2007 - 9 = 1998$. Mặt khác $k > 500 \Rightarrow k - 1 \geq 500 \Rightarrow$ trong $k - 1$ hợp số còn lại phải có số nhỏ hơn 4 vì nếu tất cả đều lớn hơn hoặc bằng 4 thì tổng của chúng sẽ lớn hơn hoặc bằng $500 \cdot 4 = 2000 > 1998$ (mâu thuẫn) $\Rightarrow$ điều giả sử là sai.

Vậy $k \leq 500$, kết hợp với cách chia 2007 thành 500 hợp số ở trên suy ra giá trị lớn nhất của k là 500.

Bài 1 (3 điểm) ✓

1. Phân tích đa thức thành nhân tử $x^2 + 4x - 2xy - 4y + y^2$
2. Tính nhanh giá trị của đa thức $x^2 - y^2 - 2y - 1$ tại $x = 93$ và $y = 6$
3. Chứng minh rằng $(5n + 2)^2 - 4$ chia hết cho 5 với mọi số nguyên n

1.

$$x^2 + 4x - 2xy - 4y + y^2 = (x^2 - 2xy + y^2) + (4x - 4y) = (x - y)^2 + 4(x - y) = (x - y)(x - y + 4)$$

2.

Đặt $A = x^2 - y^2 - 2y - 1$, ta có :

$$A = x^2 - (y^2 + 2y + 1) = x^2 - (y + 1)^2 = (x - y - 1)(x + y + 1)$$

Tại $x = 93$ và $y = 6$ ta có $A = (93 - 6 - 1)(93 + 6 + 1) = 86.100 = 8600$

3.

$$(5n + 2)^2 - 4 = (5n + 2)^2 - 2^2 = 5n(5n + 4) : 5 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Bài 2 (6 điểm) ✓

1. Giải phương trình :

a. $2x^3 = x^2 + 2x - 1$

b. $\frac{x-2}{2014} - 1 = \frac{x-1}{2015} - \frac{x}{2016}$

2. Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ ($x, y, z \neq 0$). Tính $A = \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

3. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác. Chứng minh rằng $4a^2b^2 > (a^2 + b^2 - c^2)^2$

1.

a. Ta có :

$$\begin{aligned} 2x^3 &= x^2 + 2x - 1 \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x^3 - x^2) - (2x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2(2x - 1) - (2x - 1) \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 1)(2x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(2x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + 1 = 0 \\ 2x - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là $x = 1; x = -1$ và $x = \frac{1}{2}$

b.

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{2014} - 1 &= \frac{x-1}{2015} - \frac{x}{2016} \\ \Leftrightarrow \frac{x-2}{2014} - 1 &= \left(\frac{x-1}{2015} - 1 \right) - \left(\frac{x}{2016} - 1 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{x-2016}{2014} &= \frac{x-2016}{2015} - \frac{x-2016}{2016} \\ \Leftrightarrow (x-2016) \left(\frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow x-2016 = 0 &\quad \left(\text{vì } \frac{1}{2014} - \frac{1}{2015} + \frac{1}{2016} > 0 \right) \\ \Leftrightarrow x &= 2016 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 2016$

2.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = - \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \Rightarrow \frac{yz}{x^2} = - \frac{yz}{x} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = - \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{x} \right)$$

Tương tự ta có :

$$\begin{aligned} \frac{zx}{y^2} &= - \left(\frac{z}{y} + \frac{x}{y} \right) \\ \frac{xy}{z^2} &= - \left(\frac{x}{z} + \frac{y}{z} \right) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra :

$$\begin{aligned} A &= \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} \\ &= - \left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z} \right) - \left(\frac{y}{x} + \frac{y}{z} \right) - \left(\frac{z}{x} + \frac{z}{y} \right) \\ &= -x \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - y \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) - z \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \\ &= -x \cdot \frac{-1}{x} - y \cdot \frac{-1}{y} - z \cdot \frac{-1}{z} \quad \left(\text{vì } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \right) \\ &= 1 + 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

Có thể sử dụng đẳng thức quen thuộc $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ khi $a + b + c = 0$ để có :

$$\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = 3 \cdot \frac{1}{xyz}$$

$$\Rightarrow xyz \cdot \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = 3$$

Vậy $A = 3$

3.

$$\begin{aligned} \text{Xét } B &= (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + b^2 - c^2 - 2ab)(a^2 + b^2 - c^2 + 2ab) \\ &= [(a-b)^2 - c^2] \cdot [(a+b)^2 - c^2] \end{aligned}$$

Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác nên :

$$\begin{cases} 0 \leq |a-b| < c \\ a+b > c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a-b)^2 < c^2 \\ (a+b)^2 > c^2 \end{cases} \Rightarrow B < 0 \Rightarrow 4a^2b^2 > (a^2 + b^2 - c^2)^2$$

Vậy $4a^2b^2 > (a^2 + b^2 - c^2)^2$

Bài 3 (3 điểm) ✓

Cho biểu thức $M = \left(\frac{2}{x+2} - \frac{4}{x^2+4x+4} \right) : \left(\frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{2-x} \right)$

1. Rút gọn M

2. Tìm x để $M > -2$

1. Điều kiện $\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x^2+4x+4 \neq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \\ 2-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \pm 2$. Với điều kiện đó, ta có :

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{2}{x+2} - \frac{4}{x^2+4x+4} \right) : \left(\frac{2}{x^2-4} + \frac{1}{2-x} \right) \\ &= \frac{2(x+2) - 4}{(x+2)^2} : \frac{2 - (x+2)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{2x}{(x+2)^2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{-x} \\ &= \frac{2(2-x)}{x+2} \end{aligned}$$

2.

Ta có :

$$\begin{aligned} M > -2 &\Leftrightarrow \frac{2(2-x)}{x+2} > -2 \\ &\Leftrightarrow \frac{2-x}{x+2} + 1 > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4}{x+2} > 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x + 2 > 0$$

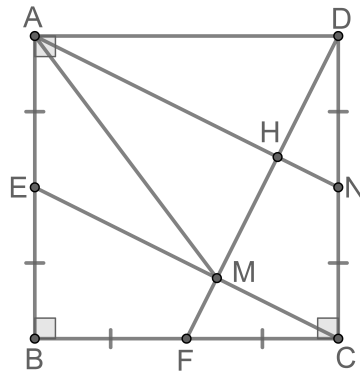
$$\Leftrightarrow x > -2$$

Kết hợp với điều kiện ở trên suy ra $x > -2$ và $x \neq 2$ là các giá trị cần tìm của x

Bài 4 (5 điểm) ✓

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, BC . M là giao điểm của CE và DF .

1. Chứng minh rằng $CE \perp DF$
2. Chứng minh rằng $\triangle MAD$ cân
3. Tính diện tích $\triangle MDC$ theo a



1.

Dễ dàng chứng minh được $\triangle BEC = \triangle CFD$

$$\Rightarrow \widehat{ECB} = \widehat{FDC} \Rightarrow \widehat{FDC} + \widehat{ECD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DMC} = 90^\circ \Rightarrow CE \perp DF$$

2.

Gọi N là trung điểm của CD . Khi đó $AECN$ là hình bình hành $\Rightarrow AN \parallel EC$.

Gọi H là giao điểm của AN và DF thì $HN \parallel MC \Rightarrow H$ là trung điểm của MD . Như vậy AH là trung tuyến của $\triangle MAD$

Mặt khác vì $CE \perp DF$ (cmt) nên $AH \perp DM \Rightarrow AH$ là trục tâm của $\triangle MAD$

Tam giác MAD có AH vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến $\Rightarrow \triangle MAD$ cân tại A .

3.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông CDF ta có :

$$\frac{1}{MC^2} = \frac{1}{CD^2} + \frac{1}{CF^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow MC = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Theo Pytago : } DM = \sqrt{CD^2 - MC^2} = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$$

$$\text{Từ đó } S_{MDC} = \frac{1}{2} MC \cdot DM = \frac{a^2}{5}$$

Bài 5 (3 điểm) ✓

1. Tìm tất cả các tam giác vuông có chiều dài các cạnh là những số nguyên có số đo diện tích bằng số đo chu vi
2. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ là 1 số nguyên tố
3. Cho x, y là những số thực không âm thỏa mãn $x^2 - 2xy + x - 2y \leq 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^2 - 5y^2 + 3x$

1.

Gọi a, b, c là độ dài 3 cạnh của tam giác vuông thỏa mãn yêu cầu bài toán, trong đó c là độ dài cạnh huyền. Khi đó, theo giả thiết ta có :

$$\begin{cases} a, b, c \in \mathbb{Z}^+ \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases} \quad (*)$$

$$\frac{ab}{2} = (a + b + c) \Leftrightarrow ab = 2(a + b + c) \quad (**)$$

Xét (**), ta có :

$$\begin{aligned} (**) &\Leftrightarrow ab - 2a - 2b = 2c \\ &\Rightarrow (ab - 2a - 2b)^2 = (2c)^2 \\ &\Leftrightarrow a^2 b^2 + 4(a^2 + b^2) + 8ab - 4ab(a + b) = 4c^2 \\ &\Leftrightarrow ab - 4(a + b) + 8 = 0 \quad (\text{vì } a^2 + b^2 = c^2; a, b > 0) \\ &\Leftrightarrow (a - 4)(b - 4) = 8 \end{aligned}$$

Vì $a, b > 0 \Rightarrow a - 4, b - 4 > -4$. Từ đó ta có bảng sau :

$a - 4$	2	4	1	8
$b - 4$	4	2	8	1
a	6	8	5	12
b	8	6	12	5
c	10	10	13	13

Vậy những tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán là tam giác có độ dài 3 cạnh là : 6;8;10 hoặc 5;12;13

2.

Đặt $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = p$, trong đó p là số nguyên tố. Ta có :

$$\begin{aligned} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} &= p \\ \Leftrightarrow x^2 y^2 &= p(x^2 + y^2) \\ \Leftrightarrow x^2(y^2 - p) &= py^2 \\ \Rightarrow py^2 &\vdots x^2 \end{aligned}$$

Vì p là số nguyên tố nên $y^2 \vdots x^2 \Rightarrow y \geq x$

Tương tự ta cũng chứng minh được $x \geq y$. Như vậy $\begin{cases} x \geq y \\ y \geq x \end{cases} \Rightarrow x = y$

Từ đó ta có $p = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{2}$. Do p là số nguyên tố nên phải có :

$$\begin{cases} x = 2k (k \in \mathbb{Z}^+) \\ p = 2k^2 \text{ là số nguyên tố} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy $(x, y) = (2, 2)$

3.

Ta có $x^2 - 2xy + x - 2y \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2y)(x + 1) \leq 0$. Mà $x, y \geq 0$ suy ra $0 \leq x \leq 2y$

Từ đó, ta có :

$$\begin{aligned} P &= x^2 - 5y^2 + 3x \Rightarrow 2P = 2x^2 - 10y^2 + 6x \\ &= 2(x^2 - 4y^2) + (6x - 12y) - (2y^2 - 12y) \\ &\leq -(2y^2 - 12y) \quad (\text{vì } 0 \leq x \leq 2y) \\ &= -2(y^2 - 6y + 9) + 18 \\ &= -(y - 3)^2 + 18 \\ &\leq 18 \\ &\Rightarrow P \leq 9 \end{aligned}$$

$$P = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x = 2y \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 9, đạt được tại $x = 6, y = 3$

Bài 1 (4 điểm) ✓

1. Phân tích đa thức thành nhân tử :

a. $x^2 - 9 - 2xy + y^2$

b. $a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1)$

2. Chứng minh rằng $(5n + 2)^2 - 4$ chia hết cho 5 với mọi số nguyên n

1.

a.

$$x^2 - 9 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 - 3^2 = (x - y - 3)(x - y + 3)$$

b.

$$a(x^2 + 1) - x(a^2 + 1) = (ax^2 - xa^2) + (a - x) = ax(x - a) - (x - a) = (ax - 1)(x - a)$$

2. Ta có :

$$(5n + 2)^2 - 4 = (5n + 2)^2 - 2^2 = 5n(5n + 4) : 5 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Bài 2 (4 điểm) ✓

1. Giải phương trình :

a. $\frac{2}{|x - 2| + 2} = \frac{3}{|6 - 3x| + 1}$

b. $9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0$

2. Tìm hình chữ nhật có kích thước các cạnh là số nguyên sao cho số đo diện tích bằng số đo chu vi

1.

a. Đặt $t = |x - 2| (t \geq 0)$. Khi đó, phương trình đã cho trở thành :

$$\frac{2}{t + 2} = \frac{3}{3t + 1}$$

$$\Leftrightarrow 2(3t + 1) = 3(t + 2)$$

$$\Leftrightarrow 3t = 4$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{4}{3}$$

$$\text{Với } t = \frac{4}{3} \text{ ta có } |x - 2| = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = \frac{4}{3} \\ x - 2 = -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = \frac{10}{3}$ và $x = \frac{2}{3}$

b.

$$\begin{aligned} & 9x^2 + y^2 + 2z^2 - 18x + 4z - 6y + 20 = 0 \\ \Leftrightarrow & (9x^2 - 18x + 9) + (y^2 - 6y + 9) + (2z^2 + 4z + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & 9(x-1)^2 + (y-3)^2 + 2(z+1)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x-1=0 \\ y-3=0 \\ z+1=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y, z) = (1, 3, -1)$

2.

Gọi a, b lần lượt là chiều dài và chiều rộng của hình chữ nhật thỏa mãn yêu cầu bài toán ($a, b \in \mathbb{Z}^+; a \geq b$).

Khi đó, từ giả thiết ta có :

$$ab = 2(a+b) \Leftrightarrow (a-2)(b-2) = 4$$

Vì $a, b \in \mathbb{Z}^+$ và $a \geq b$ nên $a-2 \geq b-2 \geq -1$. Từ đó có 2 khả năng sau :

$$\begin{aligned} & \bullet \begin{cases} a-2=4 \\ b-2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=3 \end{cases} \\ & \bullet \begin{cases} a-2=2 \\ b-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=4 \end{aligned}$$

Vậy có 2 hình chữ nhật thỏa mãn yêu cầu bài toán là 2 hình chữ nhật có kích thước 3×6 và 4×4 .

Bài 3 (5 điểm) ✓

Cho biểu thức $A = \left(\frac{9}{x^3 - 9x} + \frac{1}{x+3} \right) : \left(\frac{x-3}{x^2 + 3x} - \frac{x}{3x+9} \right)$

1. Rút gọn A

2. Tìm giá trị của A biết x thỏa mãn $x^2 - 4x + 3 = 0$

3. Tìm x để $A > 1$

1. Điều kiện $\begin{cases} x^3 - 9x \neq 0 \\ x+3 \neq 0 \\ x^2 + 3x \neq 0 \\ 3x+9 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 3 \end{cases}$. Với điều kiện đó ta có :

$$A = \left(\frac{9}{x^3 - 9x} + \frac{1}{x+3} \right) : \left(\frac{x-3}{x^2 + 3x} - \frac{x}{3x+9} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{9}{x(x-3)(x+3)} + \frac{x(x-3)}{x(x-3)(x+3)} \right] : \left[\frac{3(x-3)}{3x(x+3)} - \frac{x^2}{3x(x+3)} \right] \\
 &= \frac{9+x(x-3)}{x(x-3)(x+3)} \cdot \frac{3x(x+3)}{3(x-3)-x^2} \\
 &= \frac{3(x^2-3x+9)}{(x-3)(-x^2+3x-9)} \\
 &= \frac{3}{3-x}
 \end{aligned}$$

2.

Ta có $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$

Kết hợp với điều kiện xác định ở trên suy ra $x=1$. Khi đó $A = \frac{3}{3-1} = \frac{3}{2}$

3.

$$\begin{aligned}
 A > 1 &\Leftrightarrow \frac{3}{3-x} > 1 \\
 &\Leftrightarrow \frac{3}{3-x} - 1 > 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x}{3-x} > 0 \\
 &\Leftrightarrow 0 < x < 3 \quad (\text{thỏa mãn điều kiện xác định})
 \end{aligned}$$

Vậy $0 < x < 3$ là các giá trị cần tìm của x

Bài 4 (2 điểm) ✓

1. Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn :

$$(x-y)^3 + (y-z)^2 + 2015|x-z| = 2017$$

2. Cho đa thức $F(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Biết đa thức $F(x)$ chia đa thức $x-2$ thì dư 5, chia cho đa thức $x+1$ thì dư -4 . Hãy tính giá trị của $P = (a^3 + b^3)(b^5 + c^5)(c^7 + a^7)$

1.

Đặt $\begin{cases} a = x-y \\ b = y-z \end{cases} \Rightarrow x-z = a+b$. Khi đó :

$$a^3 + b^2 + 2015|a+b| = 2017 \quad (*)$$

- Nếu a, b cùng tính chẵn lẻ $\Rightarrow \begin{cases} a^3 + b^2 \text{ chẵn} \\ a+b \text{ chẵn} \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^2 + 2015|a+b| \text{ chẵn}$
- Nếu a, b khác tính chẵn lẻ $\Rightarrow \begin{cases} a^3 + b^2 \text{ lẻ} \\ a+b \text{ lẻ} \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^2 + 2015|a+b| \text{ chẵn}$

Như vậy, ta luôn có $a^3 + b^2 + 2015|a+b|$ chẵn. Điều này mâu thuẫn với $(*)$ nên không tồn tại x, y, z nguyên dương thỏa mãn yêu cầu.

2.

Thực hiện phép chia đa thức cho đa thức ta có :

$$F(x) = (x-2) \cdot [x^2 + (a+2)x + b + 2a + 4] + c + 2b + 4a + 8$$

$$F(x) = (x+1) \cdot [x^2 + (a-1)x + b + 1 - a] + c + a - b - 1$$

Từ đó, theo giả thiết suy ra : $\begin{cases} c + 2b + 4a + 8 = 5 \\ c + a - b - 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c + 2b + 4a = -3 \\ c + a - b = -3 \end{cases}$

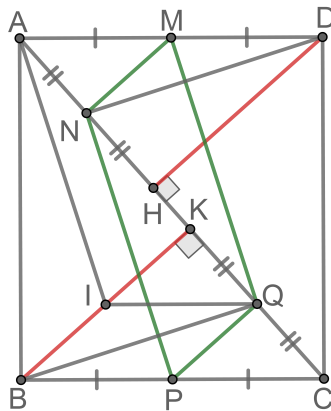
Suy ra $(c + 2b + 4a) - (c + a - b) = 0 \Leftrightarrow 3a + 3b = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 = 0$

Từ đó ta có $P = (a^3 + b^3)(b^5 + c^5)(c^7 + a^7) = 0$

Bài 5 (5 điểm) ✓

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của D và B trên AC và M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AD, AH, BC, CK .

1. Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành
2. Chứng minh $BQ \perp NP$
3. Giả sử $AB = 2BC$ và điểm E là điểm trên cạnh BC . Tia AE cắt đường thẳng CD tại F . Chứng minh rằng $\frac{1}{AB^2} = \frac{1}{AE^2} + \frac{1}{4AF^2}$



1.

MN và PQ lần lượt là đường trung bình của 2 tam giác AHD và BKC nên :

$$\begin{cases} MN \parallel HD \text{ và } MN = \frac{1}{2}HD \\ PQ \parallel BK \text{ và } PQ = \frac{1}{2}BK \end{cases} \quad (*)$$

Hơn nữa $HD \parallel BK (\perp AC)$ và dễ dàng chứng minh được $HD = BK$ $(**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $\begin{cases} MN \parallel PQ \\ MN = PQ \end{cases} \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

2.

Gọi I là trung điểm của BK . Để chứng minh được $AMQI$ là hình bình hành $\Rightarrow AI \parallel MQ \parallel NP$ $(***)$. Mặt khác xét tam giác ABQ có $BK \perp AQ$ và $IQ \perp AB$ (cùng $\parallel BC$)

Bài 1 (6 điểm) ✓

1. Phân tích đa thức thành nhân tử :

a. $2x^2 - 5x + 2$

b. $x^4 + x^2 + 1$

2. Giải các phương trình sau :

a. $\frac{2-x}{2016} - 1 = \frac{1-x}{2017} - \frac{x}{2018}$

b. $\frac{x}{2(x-3)} + \frac{x}{2x+2} = \frac{2x}{(x+1)(x-3)}$

3. Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x+1}{x^2+2x} - \frac{4}{x^3-4x} \right) : \frac{4036}{x}$ với $x \neq 0; x \neq \pm 2$

1.

a.

$$2x^2 - 5x + 2 = (2x^2 - 4x) - (x - 2) = 2x(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(2x - 1)$$

b.

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

2.

a.

$$\begin{aligned} \frac{2-x}{2016} - 1 &= \frac{1-x}{2017} - \frac{x}{2018} \\ \Leftrightarrow \frac{2-x}{2016} + 1 &= \left(\frac{1-x}{2017} + 1 \right) + \left(\frac{-x}{2018} + 1 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{2018-x}{2016} &= \frac{2018-x}{2017} + \frac{2018-x}{2018} \\ \Leftrightarrow (2018-x) \left(\frac{1}{2016} - \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2018-x &= 0 \quad \left(\frac{1}{2016} - \frac{1}{2017} - \frac{1}{2018} = \frac{1}{2016 \cdot 2017} - \frac{1}{2018} < 0 \right) \\ \Leftrightarrow x &= 2018 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 2018$

b. Điều kiện $\begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq -1 \end{cases}$. Với điều kiện đó, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{x}{2(x-3)} + \frac{x}{2x+2} &= \frac{2x}{(x+1)(x-3)} \\ \Leftrightarrow \frac{x(x+1) + x(x-3)}{2(x-3)(x+1)} &= \frac{4x}{2(x-3)(x+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 2x^2 - 2x = 4x \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(x - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 (\text{thỏa mãn điều kiện}) \\ x = 3 (\text{không thỏa mãn điều kiện}) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 0$

3.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x-1}{x^2-2x} + \frac{x+1}{x^2+2x} - \frac{4}{x^3-4x} \right) : \frac{4036}{x} \\ &= \frac{(x-1)(x+2) + (x+1)(x-2) - 4}{x(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x}{4036} \\ &= \frac{2x^2 - 8}{x(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x}{4036} \\ &= \frac{2(x^2 - 4)}{4036(x^2 - 4)} \\ &= \frac{1}{2018} \end{aligned}$$

Bài 2 (5 điểm) ✓

1. Cho x, y nguyên thỏa mãn $|x - 3y + 1| + x^2 - 4x + 4 \leq 0$. Tính giá trị của biểu thức $A = (x - 1)^{2018} + y^{2019}$
2. Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh rằng $n^3 - n$ chia hết cho 24
3. Cho 2 số chính phương liên tiếp. Chứng minh rằng tổng của 2 số đó cộng với tích của chúng là 1 số chính phương lẻ.

1.

$$\begin{aligned} &|x - 3y + 1| + x^2 - 4x + 4 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow |x - 3y + 1| + (x - 2)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow |x - 3y + 1| = (x - 2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Suy ra $A = (x - 1)^{2018} + y^{2019} = 2$

2.

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1).n.(n + 1)$$

Vì $(n - 1).n.(n + 1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp nên $(n - 1).n.(n + 1) : 3$

Hơn nữa, vì n lẻ nên $(n - 1)(n + 1)$ là tích 2 số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (n - 1)(n + 1) : 8$

Từ đó, do 3 và 8 nguyên tố cùng nhau, suy ra $(n - 1).n.(n + 1) : 24$

Vậy nếu n là số tự nhiên lẻ thì $n^3 - n$ chia hết cho 24

3.

Xét 2 số chính phương liên tiếp a^2 và $(a+1)^2$ ($a \in \mathbb{N}$).

Ta có :

$$\begin{aligned} & a^2 + (a+1)^2 + a^2 \cdot (a+1)^2 \\ &= (a+1)^2 + [a^2 + a^2 \cdot (a+1)^2] \\ &= (a+1)^2 + a^2 [a^2 + 2(a+1)] \\ &= (a+1)^2 + 2(a+1)a^2 + a^4 \\ &= (a+1+a^2)^2 \end{aligned}$$

Lại có $a+1+a^2 = a(a+1)+1$ là 1 số lẻ.

Vậy tổng của 2 số chính phương liên tiếp với tích của chúng là 1 số chính phương lẻ

Bài 3 (6 điểm) ✓

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$). Các đường cao AE, BF cắt nhau tại H . Gọi M là trung điểm của BC , qua H vẽ đường thẳng a vuông góc với HM , đường thẳng a cắt AB, AC lần lượt tại I, K

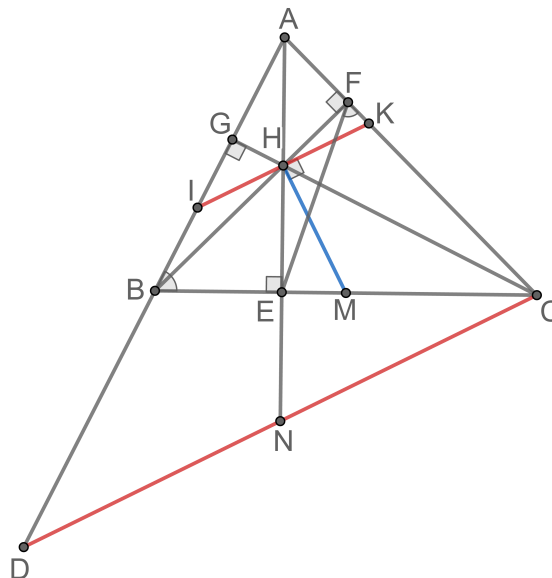
1. Chứng minh rằng :

a. Hai tam giác AEC và BFC đồng dạng

b. $\widehat{ABC} = \widehat{CFE}$

2. Qua C kẻ đường thẳng b song song với IK , b cắt AH, AB theo thứ tự tại N và D . Chứng minh $NC = ND$ và $HI = HK$

3. Gọi G là giao điểm của CH và AB . Chứng minh $\frac{AH}{HE} + \frac{BH}{HF} + \frac{CH}{HG} > 6$



1.

a.

Để thấy $\triangle AEC \sim \triangle BFC$ (g - g)

b.

Từ $\triangle AEC \sim \triangle BFC \Rightarrow \frac{EC}{FC} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \triangle CEF \sim \triangle CAB (c - g - c) \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{CFE}$

2.

Xét 2 tam giác AHK và BHM có $\begin{cases} \widehat{HAK} = \widehat{HBE} \\ \widehat{AHK} = \widehat{HMB} \end{cases}$ (2 góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \triangle AHK \sim \triangle BMH (g - g) \Rightarrow \frac{AH}{BM} = \frac{HK}{MH} \quad (*)$

Tương tự ta có $\triangle AHI \sim \triangle CMH \Rightarrow \frac{AH}{CM} = \frac{HI}{HM} \quad (**)$

Từ (*) và (**) và do $BM = CM \Rightarrow HK = HI$

Từ đây do $IK // CD$ dễ dàng chứng minh được $NC = ND$

3.

Ta có :

$$\begin{aligned} \frac{AH}{HE} + \frac{BH}{HF} + \frac{CH}{HG} &> 6 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{AH}{HE} + 1 \right) + \left(\frac{BH}{HF} + 1 \right) + \left(\frac{CH}{HG} + 1 \right) &> 9 \\ \Leftrightarrow \frac{AE}{HE} + \frac{BF}{HF} + \frac{CG}{HG} &> 9 \end{aligned}$$

Đặt $x = \frac{AE}{HE}; y = \frac{BF}{HF}; z = \frac{CG}{HG}$ thì ta cần chứng minh $x + y + z > 9$.

Thật vậy :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{HE}{AE} + \frac{HF}{BF} + \frac{HG}{CG} \\ &= \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} \\ &= \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Từ đó, áp dụng bất đẳng thức quen thuộc $(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$ suy ra : $x + y + z \geq 9$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow \triangle ABC$ đều. Nhưng theo giả thiết thì $AB < AC$ nên tam giác ABC không đều, do đó đẳng thức không xảy ra hay $x + y + z > 9$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 4 (3 điểm) ✓

1. Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn :

$$x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz \text{ và } x^2 = 2(y + z)$$

2. Cho dãy số gồm 5 số tự nhiên bất kỳ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Chứng minh rằng tồn tại 1 số chia hết cho 5 hoặc tổng của 1 số số liên tiếp trong dãy đã cho chia hết cho 5

1. Ta có :

$$x^3 - y^3 - z^3 = 3xyz$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow x^3 - y^3 - z^3 - 3xyz = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-y)^3 + 3xy(x-y) - z^3 - 3xyz = 0 \\
 &\Leftrightarrow [(x-y)^3 - z^3] + [3xy(x-y) - 3xyz] = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-y-z) \left[(x-y)^2 + z(x-y) + z^2 \right] + 3xy(x-y-z) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-y-z) \left[(x-y)^2 + z(x-y) + z^2 + 3xy \right] = 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-y-z)(x^2 + y^2 + z^2 + xy + zx - zy) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-y-z) \left[(x+y)^2 + (z+x)^2 + (y-z)^2 \right] = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-y-z=0 \\ (x+y)^2 + (z+x)^2 + (y-z)^2 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

- Nếu $x-y-z=0 \Leftrightarrow x=y+z$. Thay vào giả thiết $x^2=2(y+z)$ ta có :

$$x^2 = 2x \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 & (\text{loại vì } x > 0) \\ x=2 \end{cases}$$

Với $x=2$ ta có $y+z=2$ và vì y, z nguyên dương $\Rightarrow y=z=1$

- Nếu $(x+y)^2 + (z+x)^2 + (y-z)^2 = 0 \Leftrightarrow y=z=-x \Rightarrow y+z=-2x$. Thay vào giả thiết $x^2=2(y+z)$ ta có :

$$x^2 = -2x \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases} \quad (\text{loại vì } x > 0)$$

Vậy $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ là bộ số nguyên dương cần tìm.

2.

Xét dãy gồm 5 số hạng sau :

$$\begin{aligned}
 S_1 &= a_1 \\
 S_2 &= a_1 + a_2 \\
 S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
 S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
 S_5 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5
 \end{aligned}$$

- Nếu tồn tại $S_i (i = \overline{1, 5})$ chia hết cho 5 thì bài toán được chứng minh.
- Nếu S_i không chia hết cho 5 với mọi $i = \overline{1, 5}$ thì theo nguyên lý Dirichle, tồn tại 2 số S_m, S_n với $m < n; m, n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ có cùng số dư khi chia cho 5. Suy ra $S_n - S_m$ chia hết cho 5. Mặt khác $S_n - S_m$ cho ta tổng của $n-m$ số liên tiếp của dãy a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 .

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 1 (5 điểm) ✓

Phân tích đa thức thành nhân tử:

1. $x^3 - x + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - y$

2. $x^2 - 2xy - 8y^2$

3. $x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019$

1.

$$\begin{aligned} x^3 - x + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - y &= (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) - (x + y) \\ &= (x + y)^3 - (x + y) \\ &= (x + y) \left[(x + y)^2 - 1 \right] \\ &= (x + y)(x + y - 1)(x + y + 1) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy - 8y^2 &= (x^2 - 2xy + y^2) - 9y^2 \\ &= (x - y)^2 - (3y)^2 \\ &= (x - 4y)(x + 2y) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} x^4 + 2019x^2 + 2018x + 2019 &= (x^4 - x) + 2019(x^2 + x + 1) \\ &= x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2019(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2019) \end{aligned}$$

Bài 2 (3 điểm) ✓

Cho $A = \left(\frac{x}{y^2 + xy} - \frac{x - y}{x^2 + xy} \right) : \left(\frac{y^2}{x^3 - xy^2} + \frac{1}{x + y} \right) : \frac{x}{y}$

1. Rút gọn A

2. Tính giá trị của A biết $2x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 2y + 5 = 0$

1.

Điều kiện $\begin{cases} xy \neq 0 \\ x + y \neq 0 \\ x - y \neq 0 \end{cases}$. Với điều kiện đó, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x}{y^2 + xy} - \frac{x - y}{x^2 + xy} \right) : \left(\frac{y^2}{x^3 - xy^2} + \frac{1}{x + y} \right) : \frac{x}{y} \\ &= \left(\frac{x^2}{xy(x + y)} - \frac{y(x - y)}{xy(x + y)} \right) : \left(\frac{y^2}{x(x - y)(x + y)} + \frac{x(x - y)}{x(x - y)(x + y)} \right) : \frac{x}{y} \end{aligned}$$

$$= \frac{x^2 - xy + y^2}{xy(x+y)} \cdot \frac{x(x-y)(x+y)}{y^2 + x^2 - xy} \cdot \frac{y}{x}$$

$$= \frac{x-y}{x}$$

2.

$$2x^2 + y^2 + 2xy - 6x - 2y + 5 = 0 \Leftrightarrow (x+y-1)^2 + (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$$

Khi đó $A = \frac{2 - (-1)}{2} = \frac{3}{2}$

Bài 3 (4 điểm) ✓

1. Cho đa thức $P(x) = (x+5)(x+10)(x+15)(x+20) + 2016$. Tìm số dư trong phép chia $P(x)$ cho đa thức $x^2 + 25x + 120$
2. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $18x^2 - 3xy - 5y = 25$

1.

Ta có :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+5)(x+10)(x+15)(x+20) + 2016 \\ &= [(x+5)(x+20)] \cdot [(x+10)(x+15)] \\ &= (x^2 + 25x + 100)(x^2 + 25x + 150) \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 25x + 120$ thì $P(x) = (t-20)(t+30) = t^2 - 10t - 600$ chia t dư -600 .
 Vậy số dư trong phép chia $P(x)$ cho $x^2 + 25x + 120$ là -600

2.

Ta có :

$$\begin{aligned} 18x^2 - 3xy - 5y &= 25 \Leftrightarrow 18x^2 - 25 = y(3x+5) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{18x^2 - 25}{3x+5} \text{ (vì } x \in \mathbb{Z} \text{ nên } 3x+5 \neq 0) \\ \Leftrightarrow y &= 6x - 10 + \frac{25}{3x+5} \\ \Rightarrow 3x+5 &\in U(25) = \{-25; -5; -1; 1; 5; 25\} \end{aligned}$$

Mà $3x+5$ chia 3 dư 2 nên $3x+5 \in \{-25; -1; 5\}$

- Với $3x+5 = -25 \Leftrightarrow x = -10 \Rightarrow y = -71$
- Với $3x+5 = -1 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = -47$
- Với $3x+5 = 5 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -5$

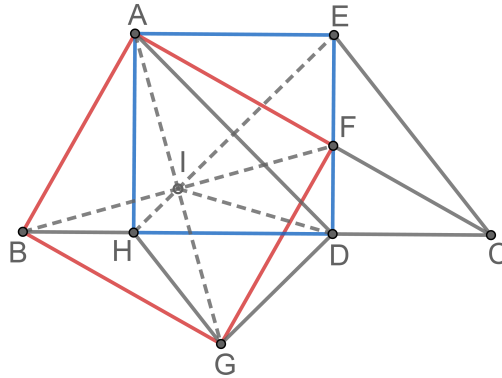
Vậy các cặp (x, y) thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x, y) \in \{(-10, -71); (-2, -47); (0, -5)\}$

Bài 4 (7 điểm) ✓

1. Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB < AC$. Kẻ đường cao AH . Trong nửa mặt phẳng có chứa đỉnh A , bờ là đường thẳng BC vẽ hình vuông $AHDE$ (D thuộc đoạn HC). Gọi F là giao điểm của DE và AC . Đường thẳng qua F song song với AB cắt đường thẳng qua B song song với AC tại G .
 - a. Chứng minh tứ giác $ABGF$ là hình vuông
 - b. Chứng minh tứ giác $DEHG$ là hình thang
 - c. Chứng minh 3 đường thẳng AG, BF, HE đồng quy
2. Cho tam giác ABC vuông tại A . Từ điểm M thuộc miền trong tam giác kẻ MI, MK, MH lần lượt vuông góc với AB, AC, BC ($I \in AB, K \in AC, H \in BC$). Tìm vị trí của M thuộc miền trong tam giác để tổng $MI^2 + MK^2 + MH^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

1.

a.



$$\text{Vì } \widehat{BAF} = \widehat{HAE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{EAF}$$

$$\text{Xét 2 tam giác vuông } BAH \text{ và } EAF \text{ có } \begin{cases} \widehat{BAH} = \widehat{EAF} (\text{cmt}) \\ AH = AE \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle BAH = \triangle FAE (\text{góc nhọn-cạnh góc vuông}) \Rightarrow AB = AF$$

$$\text{Xét tứ giác } ABGF \text{ có } \begin{cases} AB \parallel FG (\text{gt}) \\ AF \parallel BG (\text{gt}) \\ AF \perp AB (\text{gt}) \\ AF = AB (\text{cmt}) \end{cases} \Rightarrow ABGF \text{ là hình vuông.}$$

b.

Gọi I là giao điểm của 2 đường chéo AG, BF của hình vuông $ABGF$. Khi đó $IA = IG = IB = IF$.

Xét tam giác BDF vuông tại D ta có $ID = IB = IF$.

Suy ra $ID = IA = IG \Rightarrow \triangle DAG$ vuông tại $D \Rightarrow AD \perp DG$

Mà $AD \perp EH$ (vì $AHDE$ là hình vuông) $\Rightarrow DG \parallel HE \Rightarrow DEHG$ là hình thang.

c.

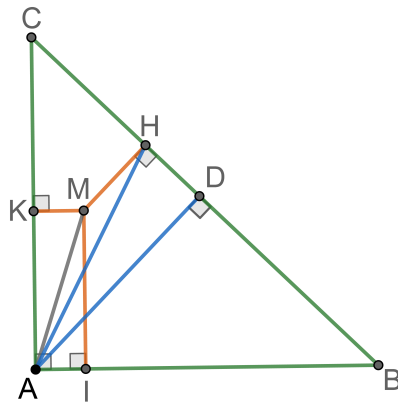
Từ $IA = ID$ (cmt) $\Rightarrow I$ nằm trên đường trung trực của AD .

Mà EH là đường trung trực của $AD \Rightarrow I \in EH$.

Vậy 3 đường thẳng AG, BF, HE đồng quy tại I

2.

Gọi AD là đường cao của tam giác $ABC \Rightarrow AD$ cố định.



Ta có :

$$\begin{aligned} MI^2 + MK^2 + MH^2 &= MI^2 + AI^2 + MH^2 \quad (MK = AI) \\ &= MA^2 + MH^2 \quad (\text{Pytago}) \\ &\geq \frac{(MA + MH)^2}{2} \quad \left(a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}, \forall a, b \geq 0 \right) \end{aligned}$$

$$\text{Mà : } MA + MH \geq AH \geq AD \Rightarrow MI^2 + MK^2 + MH^2 \geq \frac{AD^2}{2} = \text{const}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} MA + MH = AD \\ MA = MH \end{cases} \Leftrightarrow M \text{ là trung điểm của } AD.$$

Vậy $MI^2 + MK^2 + MH^2$ nhỏ nhất khi M là trung điểm của AD với AD là đường cao của tam giác ABC

Bài 5 (1 điểm) ✓

Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh rằng $a + b + c + d$ chia hết cho 3.

Ta có :

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= 2(c^3 - 8d^3) \\ \Leftrightarrow a^3 + b^3 &= -(c^3 + d^3) + 3c^3 - 15d^3 \\ \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 &= 3c^3 - 15d^3 \\ \Leftrightarrow (a+b)^3 - 3ab(a+b) + (c+d)^3 - 3cd(c+d) &= 3c^3 - 15d^3 \\ \Leftrightarrow (a+b)^3 + (c+d)^3 &= 3ab(a+b) + 3cd(c+d) + 3c^3 - 15d^3 \\ \Leftrightarrow (a+b+c+d)^3 - 3(a+b)(c+d)(a+b+c+d) &= 3ab(a+b) + 3cd(c+d) + 3c^3 - 15d^3 \\ \Leftrightarrow (a+b+c+d)^3 &= 3(a+b)(c+d)(a+b+c+d) + 3ab(a+b) + 3cd(c+d) + 3c^3 - 15d^3 \end{aligned}$$

Vì $3(a+b)(c+d)(a+b+c+d) + 3ab(a+b) + 3cd(c+d) + 3c^3 - 15d^3$ chia hết cho 3 nên

$$(a+b+c+d) : 3 \Rightarrow a+b+c+d : 3$$

Vậy $a+b+c+d$ chia hết cho 3.

Bài 1 (5 điểm) ✓

Cho biểu thức $A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \frac{x^2-3x}{2x^2-x^3}$

1. Tìm điều kiện xác định rồi rút gọn A
2. Tìm giá trị của x để $A < 0$
3. Tìm giá trị của A trong trường hợp $|x-29| = 26$
4. Tìm các giá trị nguyên của x để A có giá trị nguyên

1.

$$\text{Điều kiện xác định} \begin{cases} 2+x \neq 0 \\ 2-x \neq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \\ x^2-3x \neq 0 \\ 2x^2-x^3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} . \text{ Với điều kiện đó, ta có :}$$

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \frac{x^2-3x}{2x^2-x^3} \\ &= \left[\frac{(2+x)^2}{(2-x)(2+x)} + \frac{4x^2}{(2-x)(2+x)} - \frac{(2-x)^2}{(2-x)(2+x)} \right] : \frac{x-3}{x(2-x)} \\ &= \frac{8x+4x^2}{(2-x)(2+x)} \cdot \frac{x(2-x)}{x-3} \\ &= \frac{4x^2}{x-3} \end{aligned}$$

2.

$$\text{Vì } x \neq 0 \text{ nên } A < 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x-3} < 0 \Leftrightarrow x < 3.$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện xác định suy ra} \begin{cases} x < 3 \\ x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \text{ là các giá trị cần tìm của } x$$

3.

$$|x-29| = 26 \Leftrightarrow \begin{cases} x-29 = 26 \\ x-29 = -26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 54 \\ x = 3(\text{loại}) \end{cases}$$

$$\text{Với } x = 54 \text{ ta có } A = \frac{4 \cdot 54^2}{4-3} = 11664$$

4.

Với $x \in \mathbb{Z}$ ta có :

$$A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4x^2}{x-3} \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 4(x+3) + \frac{36}{x-3} \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{36}{x-3} \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x-3 \in U(36) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 9; \pm 12; \pm 18; \pm 36\} \end{aligned}$$

Ta có bảng sau :

$x-3$	-1	-2	-3	-4	-6	-9	-12	-18	-36	1	2	3	4	6	9	12	18	36
x	2(loại)	1	0(loại)	-1	-3	-6	-9	-15	-33	4	5	6	7	9	12	15	21	39

Vậy $x \in \{-33; -15; -9; -6; -3; -1; 1; 4; 5; 6; 7; 9; 12; 15; 21; 39\}$ là các giá trị cần tìm của x

Bài 2 (4.5 điểm) ✓

Giải các phương trình sau :

1. $x^2 - 3x + 2 + |x-1| = 0$

2. $\frac{1}{3y^2 - 10y + 3} = \frac{6y}{9y^2 - 1} + \frac{2}{1 - 3y}$

3. $x - \frac{\frac{x}{2} - \frac{3+x}{4}}{2} = 3 - \frac{\left(1 - \frac{6-x}{3}\right) \cdot \frac{1}{2}}{2}$

1.

- Nếu $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ thì phương trình đã cho trở thành :

$$x^2 - 3x + 2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn } x \geq 1)$$

- Nếu $x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$ thì phương trình đã cho trở thành :

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 + 1 - x &= 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn } x < 1) \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 1$

2.

Với điều kiện $y \neq 3, y \neq \pm \frac{1}{3}$, ta có :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3y^2 - 10y + 3} = \frac{6y}{9y^2 - 1} + \frac{2}{1 - 3y} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{(3y-1)(y-3)} = \frac{6y}{(3y-1)(3y+1)} - \frac{2}{3y-1} \\ &\Leftrightarrow \frac{3y+1}{(3y-1)(y-3)(3y+1)} = \frac{6y(y-3)}{(3y-1)(y-3)(3y+1)} - \frac{2(y-3)(3y+1)}{(3y-1)(y-3)(3y+1)} \\ &\Leftrightarrow 3y+1 = 6y(y-3) - 2(y-3)(3y+1) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3y + 1 = 6 - 2y$$

$$\Leftrightarrow 5y = 5$$

$$\Leftrightarrow y = 1 (\text{thỏa mãn điều kiện})$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $y = 1$

3.

$$\begin{aligned} x - \frac{\frac{x}{2} - \frac{3+x}{4}}{2} &= 3 - \frac{\left(1 - \frac{6-x}{3}\right) \cdot \frac{1}{2}}{2} \\ \Leftrightarrow x - \frac{\frac{x-3}{4}}{2} &= 3 - \frac{\frac{x-3}{6}}{2} \\ \Leftrightarrow x - \frac{x-3}{8} &= 3 - \frac{x-3}{12} \\ \Leftrightarrow \frac{7x+3}{8} &= \frac{39-x}{12} \\ \Leftrightarrow 12(7x+3) &= 8(39-x) \\ \Leftrightarrow 3(7x+3) &= 2(39-x) \\ \Leftrightarrow 23x &= 69 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 3$

Bài 3 (3 điểm) ✓

1. Tìm phần dư trong phép chia đa thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2018$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$

2. Cho $x + y = 1$ và $xy \neq 0$. Hãy tính :

$$B = \frac{x}{y^3 - 1} - \frac{y}{x^3 - 1} + \frac{2(x-y)}{x^2y^2 + 3} + 2019$$

1.

$$\begin{aligned} P &= (x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2018 \\ &= [(x+2)(x+8)] \cdot [(x+4)(x+6)] + 2018 \\ &= (x^2 + 10x + 16)(x^2 + 10x + 24) + 2018 \end{aligned}$$

Đặt $t = x^2 + 10x + 21$ thì $P = (t-5)(t+3) + 2018 = t^2 - 2t + 2003 \Rightarrow$ số dư trong phép chia P cho t là 2003.

Vậy phần dư trong phép chia đa thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2018$ cho đa thức $x^2 + 10x + 21$ là 2003

2.

Với $x + y = 1$ và $xy \neq 0$, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{y}{x^3 - 1} - \frac{x}{y^3 - 1} &= \frac{y}{x^3 - (x+y)^3} - \frac{x}{y^3 - (x+y)^3} \\ &= \frac{y}{-3xy(x+y) - y^3} - \frac{x}{-3xy(x+y) - x^3} \\ &= \frac{1}{-3x - y^2} - \frac{1}{-3y - x^2} \end{aligned}$$

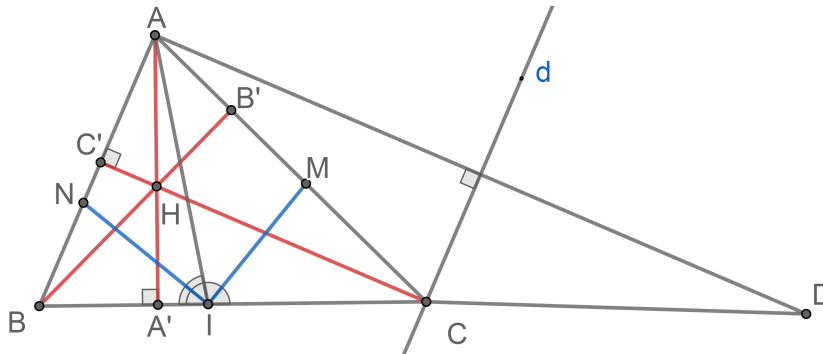
$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{3y+x^2} - \frac{1}{3x+y^2} \\
 &= \frac{3x+y^2 - (3y+x^2)}{(3y+x^2)(3x+y^2)} \\
 &= \frac{3(x-y) - (x-y)(x+y)}{x^2y^2 + 9xy + 3(x^3+y^3)} \\
 &= \frac{(x-y)[3 - (x+y)]}{x^2y^2 + 9xy + 3[(x+y)^3 - 3xy(x+y)]} \\
 &= \frac{2(x-y)}{x^2y^2 + 3} \quad (\text{vì } x+y=1)
 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra $B = 2019$

Bài 4 (6 điểm) ✓

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC' và H là trực tâm

1. Tính tổng $\frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'}$
2. Gọi AI là phân giác của tam giác ABC ; IM, IN theo thứ tự là phân giác của $\widehat{AIC}$ và $\widehat{AIB}$. Chứng minh rằng $AN \cdot BI \cdot CM = BN \cdot IC \cdot AM$
3. Tam giác ABC như thế nào thì $\frac{(AB+BC+CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.



1.

Ta có :

$$\begin{aligned}
 \frac{HA'}{AA'} + \frac{HB'}{BB'} + \frac{HC'}{CC'} &= \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HCA}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} \\
 &= \frac{S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}}{S_{ABC}} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

2.

Theo tính chất đường phân giác cho các tam giác ABC, AIB, AIC ta có :

$$\begin{aligned}
 \frac{IB}{IC} &= \frac{AB}{AC}; \quad \frac{AN}{NB} = \frac{AI}{IB}; \quad \frac{CM}{MA} = \frac{IC}{AI} \\
 \Rightarrow \frac{IB}{IC} \cdot \frac{AN}{NB} \cdot \frac{CM}{MA} &= \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AI}{IB} \cdot \frac{IC}{AI} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{IC}{IB} = 1
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AN.BI.CM = BN.IC.AM$$

3.

Dựng đường thẳng d đi qua C và vuông góc với CC' . Gọi D là điểm đối xứng với A qua $d \Rightarrow CA = CD$ và $AD = 2CC'$.

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác BAD vuông tại A , ta có :

$$\begin{aligned} BD^2 &= AB^2 + AD^2 \\ \Leftrightarrow BD^2 &= AB^2 + 4CC'^2 \\ \Rightarrow AB^2 + 4CC'^2 &\leq (BC + CD)^2 \quad (BC + CD \geq BD) \\ \Leftrightarrow AB^2 + 4CC'^2 &\leq (BC + CA)^2 \quad (CA = CD) \\ \Leftrightarrow 4CC'^2 &\leq (BC + CA)^2 - AB^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra ở $(*)$ khi và chỉ khi :

$$BC + CD = BD \Leftrightarrow 2\widehat{BAC} + \widehat{ACB} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{BAC} = \widehat{ABC} \Leftrightarrow CA = CB$$

Tương tự ta có :

$$\begin{aligned} 4AA'^2 &\leq (AB + CA)^2 - BC^2 \quad (**) \\ 4BB'^2 &\leq (BC + AB)^2 - CA^2 \quad (***) \end{aligned}$$

Từ $(*)$, $(**)$ và $(***)$ suy ra :

$$\begin{aligned} 4(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2) &\leq (AB + BC + CA)^2 \\ \Rightarrow \frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} &\geq 4 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \triangle ABC$ đều.

Vậy $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất là 4 khi tam giác ABC đều.

Bài 5 (1.5 điểm) ✓

Cho các số x, y thỏa mãn $5x^2 + 5y^2 + 8xy - 2x + 2y + 2 = 0$. Tính giá trị của biểu thức :

$$M = (x + y)^{2017} + (x - 2)^{2018} + (y + 1)^{2019}$$

$$\begin{aligned} 5x^2 + 5y^2 + 8xy - 2x + 2y + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4(x + y)^2 + (x - 1)^2 + (y + 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x + y = x - 1 = y + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó $M = (x + y)^{2017} + (x - 2)^{2018} + (y + 1)^{2019} = 1$

Bài 1 (3 điểm) ✓

- 1) Chứng minh $(x+y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) = x^4 - y^4$
- 2) Phân tích đa thức thành nhân tử $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12) - 24$
- 3) Giải phương trình: $\frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30} = \frac{1}{8}$

Lời giải

1) Ta có :

$$\begin{aligned}
 (x+y)(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) &= (x+y) \left[(x^3 - x^2y) + (xy^2 - y^3) \right] \\
 &= (x+y) \left[x^2(x-y) + y^2(x-y) \right] \\
 &= (x+y)(x-y)(x^2 + y^2) \\
 &= (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) \\
 &= x^4 - y^4 \quad \square
 \end{aligned}$$

2) Ta có :

$$\begin{aligned}
 (x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12) - 24 &= (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - 24 \\
 &= [(x-1)(x-4)] [(x-2)(x-3)] - 24 \\
 &= (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) - 24 \\
 &= t(t+2) - 24 \quad (t = x^2 - 5x + 4) \\
 &= t^2 + 2t - 24 \\
 &= (t^2 + 6t) - (4t + 24) \\
 &= t(t+6) - 4(t+6) \\
 &= (t-4)(t+6) \\
 &= (x^2 - 5x)(x^2 - 5x + 10) \\
 &= x(x-5)(x^2 - 5x + 10)
 \end{aligned}$$

3) Ta có :

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x^2 - 7x + 12} + \frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30} = \frac{1}{8} \\
 \Leftrightarrow &\frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{1}{(x-3)(x-4)} + \frac{1}{(x-4)(x-5)} + \frac{1}{(x-5)(x-6)} = \frac{1}{8} \\
 \Leftrightarrow &\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-5} = \frac{1}{8} \\
 \Leftrightarrow &\frac{1}{x-6} - \frac{1}{x-2} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \frac{4}{(x-2)(x-6)} = \frac{1}{8} \\ &\Leftrightarrow (x-2)(x-6) = 32 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 8x - 20 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+2)(x-10) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 10 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = -2$ và $x = 10$

Bài 2 (3 điểm) ✓

Cho biểu thức $P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy + y^2} \right) \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2}$ với $x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$

1) Rút gọn P

2) Tính giá trị của P biết $x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$

Lời giải

1) Với $x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$, ta có :

$$\begin{aligned} P &= \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy + y^2} \right) \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2} \\ &= \frac{2}{x} - \left(\frac{x}{x+y} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y}{x+y} \right) \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2} \\ &= \frac{2}{x} - \left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{y^2 - x^2}{xy} \right) \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2} \\ &= \frac{2}{x} - \frac{xy(x-y) + (x+y)(y^2 - x^2)}{xy(x+y)} \cdot \frac{x+y}{x^2 + xy + y^2} \\ &= \frac{2}{x} - \frac{y^3 - x^3}{xy(x^2 + xy + y^2)} \\ &= \frac{2}{x} - \frac{y-x}{xy} \\ &= \frac{2y}{xy} - \frac{y-x}{xy} \\ &= \frac{x+y}{xy} \end{aligned}$$

2) Ta có :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 10 &= 2(x - 3y) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 10 - 2x + 6y = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+3)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x-1 = y+3 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases}$$

Tại $x = 1, y = -3$ ta có $P = \frac{1-3}{1 \cdot (-3)} = \frac{2}{3}$

Vậy $P = \frac{2}{3}$ với x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$

Bài 3 (5 điểm) ✓

- 1) Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 + x + 3 = y^2$
- 2) Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 2d^3$.
Chứng minh rằng $a + b + c + d$ chia hết cho 3
- 3) Tìm a, b, c biết $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ và $a^8 + b^8 + c^8 = 3$

Lời giải

1) Ta có :

$$\begin{aligned} x^2 + x + 3 = y^2 &\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 12 = 4y^2 \\ &\Leftrightarrow 4y^2 - (2x + 1)^2 = 11 \\ &\Leftrightarrow (2y - 2x - 1)(2y + 2x + 1) = 11 \end{aligned}$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên xảy ra các khả năng sau :

- $\begin{cases} 2y - 2x - 1 = 1 \\ 2y + 2x + 1 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2y - 2x - 1 = -1 \\ 2y + 2x + 1 = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2y - 2x - 1 = 11 \\ 2y + 2x + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 3 \end{cases}$
- $\begin{cases} 2y - 2x - 1 = -11 \\ 2y + 2x + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$

Vậy các cặp (x, y) thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x, y) \in \{(2, 3); (2, -3); (-3, 3); (-3, -3)\}$

2) Với $x, y \in \mathbb{Z}$, ta có $(x + y)^3 - (x^3 + y^3) = 3xy(x + y) : 3$

Áp dụng ta có :

$$\begin{aligned} &\left[(a + b)^3 + (c + d)^3 - (a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \right] : 3 \\ \Rightarrow &\left[(a + b)^3 + (c^3 + d^3) - 3d^3 \right] : 3 \quad (\text{Vì } a^3 + b^3 + c^3 = 2d^3) \\ \Rightarrow &\left[(a + b)^3 + (c + d)^3 \right] : 3 \\ \Rightarrow &(a + b + c + d)^3 : 3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a + b + c + d : 3 \quad \square$$

3) Ta có :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0 \\ &\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a-b = b-c = c-a = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b = c \end{aligned}$$

$$\text{Mà } a^8 + b^8 + c^8 = 3 \Rightarrow \begin{cases} a = b = c = 1 \\ a = b = c = -1 \end{cases}$$

Bài 4 (6 điểm) ✓

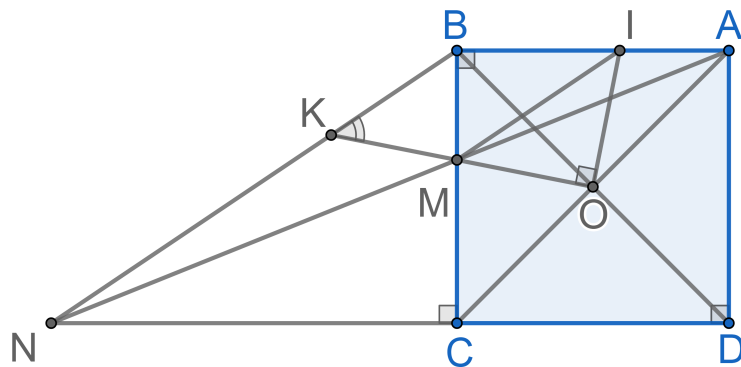
Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a , hai đường chéo cắt nhau tại O . Lấy điểm I thuộc cạnh AB , điểm M thuộc cạnh BC sao cho $\widehat{IOM} = 90^\circ$ (I, M không trùng với các đỉnh của hình vuông). Gọi N là giao điểm của AM và DC , K là giao điểm của OM và BN

- 1) Chứng minh rằng $\triangle BIO = \triangle CMO$ và tính S_{BIOM} theo a
- 2) Tính $\widehat{BKM}$
- 3) Chứng minh $\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$

Lời giải

$$1) \text{ Xét } \triangle BIO \text{ và } \triangle CMO \text{ có : } \begin{cases} OB = OC \\ \widehat{IBO} = \widehat{MCO} = 45^\circ \\ \widehat{IOB} = \widehat{MOC} = 90^\circ - \widehat{BOM} \end{cases} \Rightarrow \triangle BIO = \triangle CMO (g.c.g)$$

Vì $\triangle BIO = \triangle CMO (cmt) \Rightarrow S_{BIO} = S_{CMO}$. Từ đó :



$$S_{BIOM} = S_{BIO} + S_{BOM} = S_{CMO} + S_{BOM} = S_{BOC} = \frac{1}{4} S_{ABCD} = \frac{a^2}{4}$$

2) Vì $AB \parallel CN$ nên $\frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MC}$ (*₁)

Hơn nữa từ $\triangle BIO = \triangle CMO$ (cmt) $\Rightarrow BI = CM \Rightarrow IA = BM$. Từ đó suy ra :

$$\frac{BM}{MC} = \frac{IA}{IB} \quad (*_2)$$

Từ (*₁), (*₂) suy ra : $\frac{AM}{MN} = \frac{IA}{IB} \Rightarrow MI \parallel BN \Rightarrow \widehat{BKM} = \widehat{IMO}$ (*₃)

Mặt khác cũng từ $\triangle BIO = \triangle CMO$ (cmt) $\Rightarrow OM = OI \Rightarrow \triangle IMO$ vuông cân tại O
 $\Rightarrow \widehat{IMO} = 45^\circ$ (*₄)

Từ (*₃) và (*₄) suy ra : $\widehat{BKM} = 45^\circ$

3) Ta có : $\triangle ABM \sim \triangle NDA$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{ND} \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{ND}{AN}$

Từ đó : $\frac{AB^2}{AM^2} + \frac{CD^2}{AN^2} = \frac{ND^2}{AN^2} + \frac{CD^2}{AN^2} = \frac{ND^2 + AD^2}{AN^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{CD^2}{AM^2} + \frac{CD^2}{AN^2} = 1$ (vì $AB = CD$)

hay : $\frac{1}{CD^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2}$ $\square$

Bài 5 (3 điểm) ✓

1) Cho các số thực $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 3$ thỏa mãn $x + y + z = 6$. Chứng minh rằng
 $xyz \leq \frac{27}{4}$

2) Cho 1010 số nguyên dương phân biệt, mỗi số không vượt quá 2018. Chứng minh rằng trong các số đó luôn tồn tại 2 số có tổng bằng 2019

Lời giải

1) Từ giả thiết ta có : $2x + 2y + z = 12 - z \leq 9$
 Mà theo AM – GM :

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &\geq 3\sqrt[3]{4xyz} \\ \Rightarrow 9 &\geq 3\sqrt[3]{4xyz} \\ \Rightarrow xyz &\leq \frac{27}{4} \quad \square \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = \frac{3}{2}$ và $z = 3$

2) Gọi 1010 số nguyên dương đó là $a_1; a_2; \dots; a_{1010}$
 Xét dãy : $b_1; b_2; \dots; b_{1010}$ với $b_i = 2019 - a_i \quad \forall i = 1, 1010$

Vì a_i nguyên dương khác nhau và không vượt quá 2018 nên b_i cũng nguyên dương khác nhau và không vượt quá 2018. Theo nguyên lý Dirichle, tồn tại ít nhất 2 số a_m và b_n bằng nhau. Tức là ta có :

$$a_m = 2019 - a_n \Rightarrow a_m + a_n = 2019$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 1 (4 điểm) ✓

Cho $P = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right)$

1. Rút gọn P
2. Tìm x để $P < 1$
3. Tìm giá trị nhỏ nhất của P khi $x > 1$

1. Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$. Với điều kiện đó, ta có :

$$\begin{aligned} P &= \frac{x^2 + x}{x^2 - 2x + 1} : \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{2-x^2}{x^2-x} \right) \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{(x+1)(x-1) + x + 2 - x^2}{x(x-1)} \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} : \frac{x+1}{x(x-1)} \\ &= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} \\ &= \frac{x^2}{x-1} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P < 1 &\Leftrightarrow P - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{x-1} - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x-1} < 0 \\ &\Leftrightarrow x - 1 < 0 \text{ (vì } x^2 - x + 1 > 0) \\ &\Leftrightarrow x < 1 \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện xác định suy ra $\begin{cases} x < 1 \\ x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$ là các giá trị cần tìm của x .

3. Khi $x > 1$ ta có :

$$\begin{aligned} P - 4 &= \frac{x^2}{x-1} - 4 = \frac{(x-2)^2}{x-1} \geq 0 \Rightarrow P \geq 4 \\ P &= 4 \Leftrightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Vậy khi $x > 1$ thì P đạt giá trị nhỏ nhất là 4 tại $x = 2$

Bài 2 (4 điểm) ✓

1. Cho các số x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 5$ và $\frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} = 25$.

Tính giá trị của biểu thức $A = (x + 5y + z)^{2018}$

2. Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 + 3x = x^2y + 2y + 5$

1. Đặt $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z}$. Khi đó ta có (*) $\begin{cases} a + b + c = 5 & (1) \\ 2ab - c^2 = 25 & (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow a + b = 5 - c \Rightarrow (a + b)^2 = (5 - c)^2$

Từ (2) $\Rightarrow 2ab = c^2 + 25$

Do đó :

$$\begin{aligned} (a + b)^2 - 4ab &= (5 - c)^2 - 2(c^2 + 25) \\ \Leftrightarrow (a - b)^2 &= -(c + 5)^2 \\ \Leftrightarrow (a - b)^2 &= -(c + 5)^2 = 0 \\ \Leftrightarrow c &= -5 \text{ và } a = b \end{aligned}$$

Thay lại vào hệ (*) ta có $\begin{cases} c = -5 \\ a = b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{1}{5} \\ x = y = \frac{1}{5} \end{cases}$

Từ đó suy ra : $A = (x + 5y + z)^{2018} = 1$

2.

$$x^3 + 3x = x^2y + 2y + 5 \Leftrightarrow y = \frac{x^3 + 3x - 5}{x^2 + 2} = x + \frac{x - 5}{x^2 + 2}$$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì :

$$\begin{aligned} y \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \frac{x - 5}{x^2 + 2} \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x - 5 : x^2 + 2 \\ &\Rightarrow (x - 5)(x + 5) : x^2 + 2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 25 : x^2 + 2 \\ &\Rightarrow 27 : x^2 + 2 \\ &\Rightarrow x^2 + 2 \in \{3, 9, 27\} \quad \text{vì } x^2 + 2 \geq 2 \end{aligned}$$

- Nếu $x^2 + 2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

- + $x = 1 \Rightarrow y = 1 - \frac{4}{3} \rightarrow \text{loại}$

- + $x = -1 \Rightarrow y = -1 - \frac{6}{3} = -3 \rightarrow \text{thỏa mãn}$

- Nếu $x^2 + 2 = 9 \Rightarrow x^2 = 7 \rightarrow \text{loại}$

- Nếu $x^2 + 2 = 27 \Leftrightarrow x^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$

$$+ x = 5 \Rightarrow y = 5 \rightarrow \text{thỏa mãn}$$

$$+ x = -5 \Rightarrow y = -5 - \frac{10}{27} \rightarrow \text{loại}$$

Vậy các cặp (x, y) thỏa mãn là $(x, y) = (-1, -3)$ và $(x, y) = (5, 5)$

Bài 3 (5 điểm) ✓

- Cho a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 0$.
Chứng minh $N = 1 - (ab + 2c^2)(bc + 2a^2)(ca + 2b^2)$ là số dương
- Tìm đa thức $f(x)$ biết rằng $f(x)$ chia cho $x + 3$ dư 1, chia cho $x - 2$ dư 6, chia cho $x^2 + x - 6$ được thương là $2x$ và còn dư.

1.

$$\begin{aligned} ab + 2c^2 &= ab + c^2 - c(a + b) = (a - c)(b - c) \\ bc + 2a^2 &= bc + a^2 - a(b + c) = (b - a)(c - a) \\ ca + 2b^2 &= ca + b^2 - b(a + c) = (c - b)(a - b) \\ \Rightarrow N &= 1 + (a - b)^2 \cdot (b - c)^2 \cdot (c - a)^2 \geq 1 \end{aligned}$$

2. Gọi $r(x)$ là đa thức dư trong phép chia $f(x)$ cho $x^2 + x - 6$.

$$\text{Khi đó, theo giả thiết ta có: } \begin{cases} f(x) = 2x(x^2 + x - 6) + r(x) = 2x(x - 2)(x + 3) + r(x) \\ r(x) = ax + b \end{cases}$$

Mà $f(x)$ chia cho $x + 3$ dư 1, chia cho $x - 2$ dư 6 nên:

$$\begin{cases} r(x) \text{ chia cho } x + 3 \text{ dư } 1 \\ r(x) \text{ chia cho } x - 2 \text{ dư } 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + b = a(x + 3) + 1 \\ ax + b = a(x - 2) + 6 \end{cases} \Leftrightarrow b = 3a + 1 = 6 - 2a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\text{Như vậy } r(x) = x + 4 \Rightarrow f(x) = 2x(x^2 + x - 6) + x + 4 = 2x^3 + 2x^2 - 11x + 4$$

$$\text{Vậy } f(x) = 2x(x^2 + x - 6) + x + 4 = 2x^3 + 2x^2 - 11x + 4$$

Bài 4 (6 điểm) ✓

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Kẻ đường cao AH . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của H trên AB, AC . Gọi O là giao của AH và DE .

- Chứng minh $\triangle ABC \sim \triangle AED$
- Chứng minh $\frac{BD}{CE} = \frac{AB^3}{AC^3}$
- Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BH, CH . Chứng minh trực tâm của $\triangle APQ$ là trung điểm của đoạn OH
- Cho BC cố định. Tìm điều kiện của tam giác ABC để S_{ADHE} lớn nhất

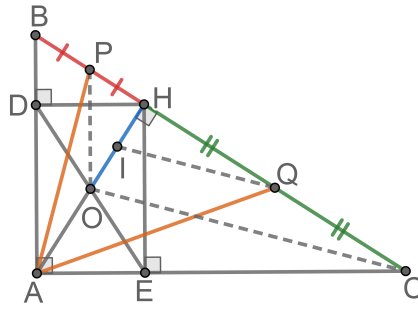
1.

$$\text{Để thấy } ADHE \text{ là hình chữ nhật} \Rightarrow \widehat{DEA} = \widehat{HAE}$$

$$\text{Mà } \widehat{HAE} = \widehat{ABC} \text{ (2 góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{DEA}$$

$$\text{Từ đó ta có } \triangle ABC \sim \triangle AED (g - g)$$

2.



Để dàng chứng minh được (theo cách cm hệ thức lượng trong tam giác vuông) ta có :

$$\begin{cases} BD \cdot AB = BH^2 \\ CE \cdot AC = CH^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{BD}{CE} \cdot \frac{AB}{AC} = \left(\frac{BH}{CH} \right)^2 (*)$$

$$\begin{cases} BH \cdot BC = AB^2 \\ CH \cdot BC = AC^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{BH}{CH} = \frac{AB^2}{AC^2} (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $\frac{BD}{CE} = \frac{AB^3}{AC^3}$

3.

Gọi I là trung điểm của OH .

Vì PO là đường trung bình của tam giác $ABH \Rightarrow PO \parallel AB \Rightarrow PO \perp AC \Rightarrow O$ là trực tâm của tam giác $APC \Rightarrow OC \perp AP (*)$.

Lại có IQ là đường trung bình của tam giác $OCH \Rightarrow IQ \parallel OC (*)$

Từ (*) và (**) suy ra $IQ \perp AP \Rightarrow I$ là trực tâm của tam giác APQ

Vậy trực tâm của tam giác APQ là trung điểm của OH .

4.

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \geq \frac{4}{AB^2 + AC^2} = \frac{4}{BC^2} \Rightarrow AH \leq \frac{BC}{2}$$

$$\Rightarrow S_{ADHE} \leq AH^2 \leq \frac{BC^2}{4} = \text{const}$$

$$S_{ADHE} = \frac{BC^2}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ ADHE \text{ là hình vuông} \end{cases} \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ vuông cân tại } A$$

Vậy S_{ADHE} lớn nhất bằng $\frac{BC^2}{4}$ khi tam giác ABC vuông cân tại A .

Bài 5 (2 điểm) ✓

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng :

$$M = \frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{3}{4}$$

Áp dụng BĐT quen thuộc $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ với $x, y > 0$, ta có :

$$\frac{1}{ab+a+2} = \frac{1}{(ab+1)+(a+1)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{ab+1} + \frac{1}{a+1} \right)$$

$$\frac{1}{bc+b+2} = \frac{1}{(bc+1)+(b+1)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{bc+1} + \frac{1}{b+1} \right)$$

$$\frac{1}{ca+c+2} = \frac{1}{(ca+1)+(c+1)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{ca+1} + \frac{1}{c+1} \right)$$

Suy ra :

$$\begin{aligned} M &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{abc}{ab+abc} + \frac{abc}{bc+abc} + \frac{abc}{ca+abc} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{c}{c+1} + \frac{a}{a+1} + \frac{b}{b+1} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[\left(\frac{a}{a+1} + \frac{1}{a+1} \right) + \left(\frac{b}{b+1} + \frac{1}{b+1} \right) + \left(\frac{c}{c+1} + \frac{1}{c+1} \right) \right] \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

Cách 2 :

Để ý đến đẳng thức $\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} = 1$ khi $abc = 1$ và sử dụng BĐT

Cauchy-Schwarz dạng $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$ ta có :

$$\frac{1}{ab+a+2} = \frac{1}{(ab+a+1)+1} \leq \frac{\frac{9}{16}}{ab+a+1} + \frac{\frac{1}{16}}{1} = \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{16}$$

Tương tự và suy ra :

$$M \leq \frac{9}{16} \left(\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} \right) + \frac{3}{16} = \frac{3}{4}$$

Bài 1 (5 điểm) ✓

1. Cho $A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \frac{x^2-3x}{2x^2-x^3}$

a. Rút gọn A

b. Tìm x để $A > 0$

c. Tính giá trị của A trong trường hợp $|x-7| = 4$

2. Chứng minh rằng $B = n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2$ trong đó $n \in \mathbb{N}$ và $n > 1$ không phải là số chính phương.

1.

a. Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$. Với điều kiện đó, ta có :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \frac{x^2-3x}{2x^2-x^3} \\ &= \frac{(2+x)^2 + 4x^2 - (2-x)^2}{(2+x)(2-x)} : \frac{x-3}{x(2-x)} \\ &= \frac{8x+4x^2}{(2+x)(2-x)} \cdot \frac{x(2-x)}{x-3} \\ &= \frac{4x(2+x)}{(2+x)(2-x)} \cdot \frac{x(2-x)}{x-3} \\ &= \frac{4x^2}{x-3} \end{aligned}$$

b. Trong điều kiện $x \neq 0$ thì $A > 0 \Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$

c. Ta có $|x-7| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ (loại vì không thỏa mãn điều kiện xác định)} \\ x = 11 \end{cases}$

Tại $x = 11$ ta có $A = \frac{4 \cdot 11^2}{11-3} = \frac{121}{2}$

2.

$$\begin{aligned} B &= n^6 - n^4 + 2n^3 + 2n^2 \\ &= n^4(n^2 - 1) + 2n^2(n+1) \\ &= n^2(n+1) [n^2(n-1) + 2] \\ &= n^2(n+1) [(n^3 + 1) - (n^2 - 1)] \\ &= n^2(n+1)^2(n^2 - 2n + 2) \end{aligned}$$

Mà với $n > 1$ thì $n^2 > n^2 - 2n + 2 > (n-1)^2 \Rightarrow n^2 - 2n + 2$ không phải là số chính phương.
Do đó, B không phải là số chính phương

Bài 2 (4 điểm) ✓

1. Cho x, y, z thỏa mãn $3(x^2 + y^2 + z^2) = (x + y + z)^2$ và $x^{2018} + y^{2018} + z^{2018} = 27^{673}$.

Tính $A = \left(\frac{x + 2y - 4z}{3} \right)^{2018} + 2019$

2. Cho $a + b + c = 0$. Tính giá trị của :

$$Q = \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - a^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2}$$

1.

$$\begin{aligned} 3(x^2 + y^2 + z^2) &= (x + y + z)^2 \Leftrightarrow 3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = y = z \end{aligned}$$

Suy ra $3 \cdot x^{2018} = 27^{673} = 3 \cdot 3^{2018} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$

- Với $x = 3$ ta có $x = y = z = 3 \Rightarrow A = 2020$
- Với $x = -3$ ta có $x = y = z = -3 \Rightarrow A = 2020$

Vậy $A = 2020$

2.

Với $a + b + c = 0$, ta có :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{a^2}{a^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{b^2 - a^2 - c^2} + \frac{c^2}{c^2 - a^2 - b^2} \\ &= \frac{a^2}{(b+c)^2 - b^2 - c^2} + \frac{b^2}{(a+c)^2 - a^2 - c^2} + \frac{c^2}{(a+b)^2 - a^2 - b^2} \\ &= \frac{a^2}{2bc} + \frac{b^2}{2ca} + \frac{c^2}{2ab} \\ &= \frac{a^3 + b^3 + c^3}{2abc} \\ &= \frac{a^3 + b^3 - (a+b)^3}{2abc} \\ &= \frac{-3ab(a+b)}{2abc} \\ &= \frac{3abc}{2abc} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Vậy $Q = \frac{3}{2}$

Bài 3 (4 điểm) ✓

1. Tìm x, y nguyên thỏa mãn $x^2 - xy = 6x - 5y - 8$
2. Tìm các số nguyên x thỏa mãn $x^2 + x - p = 0$ với p là số nguyên tố.

1.

$$x^2 - xy = 6x - 5y - 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = y(x - 5) (*)$$

Nếu $x = 5$ thì từ $(*)$ suy ra $3 = 0 \cdot y$ (vô lý) $\Rightarrow x \neq 5$. Do đó :

$$(*) \Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 5} = x - 1 + \frac{3}{x - 5}$$

Với $x \in \mathbb{Z}$ thì $y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x - 5 \in U(3) = \{-3; -1; 1; 3\}$

$x - 5$	-3	-1	1	3
x	2	4	6	8
y	0	0	8	8

Vậy các cặp (x, y) thỏa mãn là $(x, y) \in \{(2, 0); (4, 0); (6, 8); (8, 8)\}$

2.

$$x^2 + x - p = 0 \Leftrightarrow p = x^2 + x = x(x + 1)$$

Khi $x \in \mathbb{Z}$ thì $x(x + 1)$ là số chẵn $\Rightarrow p$ chẵn. Mà p là số nguyên tố nên $p = 2$, tức là :

$$x^2 + x = 2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy các giá trị cần tìm của x là $x \in \{1; -2\}$

Bài 4 (6 điểm) ✓

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi M là điểm bất kỳ trên cạnh BC

($M \neq B, M \neq C$). D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB, AC .

1. Chứng minh $AM = DE$ và tìm vị trí của M trên BC để $ADME$ là hình vuông.
2. Chứng minh $\widehat{DHE} = 90^\circ$
3. Vẽ $DK \perp BC \equiv K, EN \perp BC \equiv N$. Chứng minh $MK = HN$
4. Chứng minh $S_{DKNE} = S_{DME} + S_{DHE}$

1.

Để thấy $ADME$ là hình chữ nhật nên $AM = DE$.

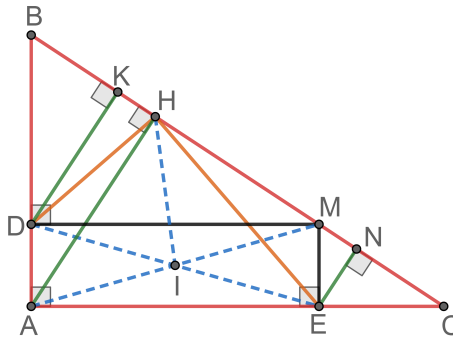
$ADME$ là hình vuông $\Leftrightarrow \widehat{DAM} = \widehat{MAE}$ hay AM là đường phân giác của tam giác ABC .

2.

Gọi I là giao điểm của AM và DE .

Vì $ADME$ là hình chữ nhật nên I là trung điểm của AM và DE .

Xét $\triangle HAM$ vuông tại H ta có : $IH = IA = IM = \frac{AM}{2}$



Mà $AM = DE \Rightarrow IH = \frac{DE}{2} \Rightarrow IH = ID = IE \Rightarrow \triangle DHE$ vuông tại H hay $\widehat{DHE} = 90^\circ$

3.

Vì $\widehat{DHE} = \widehat{AHM} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DHA} = \widehat{MHE}$

Từ đó dễ thấy $\triangle DHA \sim \triangle EHC (g - g) \Rightarrow \frac{DH}{HE} = \frac{AH}{EC} (*)_1$

Lại có $\triangle DKM \sim \triangle AHC (g - g) \Rightarrow \frac{AH}{HC} = \frac{DK}{KM} (*)_2$

Từ $(*)_1$ và $(*)_2$ suy ra $\frac{DK}{KM} = \frac{DH}{HE} (*)_3$

Mặt khác $\triangle KDH \sim \triangle NHE \Rightarrow \frac{DH}{HE} = \frac{DK}{NH} (*)_4$

Từ $(*)_3$ và $(*)_4$ suy ra $\frac{DK}{KM} = \frac{DK}{NH} \Rightarrow KM = NH$

4.

Điều cần chứng minh tương đương với $S_{DME} = S_{KDH} + S_{HEN} (*)$

Dễ thấy $\begin{cases} \triangle DME \sim \triangle DKH \text{ theo tỉ số đồng dạng } \frac{ME}{KH} \Rightarrow \frac{S_{DME}}{S_{KDH}} = \frac{ME^2}{KH^2} \\ \triangle DME \sim \triangle HNE \text{ theo tỉ số đồng dạng } \frac{ME}{NE} \Rightarrow \frac{S_{DME}}{S_{HNE}} = \frac{ME^2}{NE^2} \end{cases}$

Suy ra $S_{KDH} + S_{HEN} = \frac{KH^2 + NE^2}{ME^2} \cdot S_{DME}$

Mà $KH = MN$ (vì $KM = HN$) $\Rightarrow KH^2 + NE^2 = MN^2 + NE^2 = ME^2$

Như vậy $S_{KDH} + S_{HEN} = S_{DME} \Rightarrow (*)$ đúng

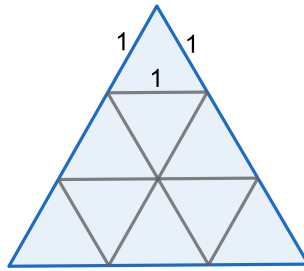
Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 5 (1 điểm) ✓

Cho 19 điểm phân biệt nằm trong 1 tam giác đều cạnh bằng 3, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng luôn tìm được 1 tam giác có 3 đỉnh là 3 trong số 19 điểm đã cho mà diện tích không lớn hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$

Chia tam giác đều cạnh 3 thành 9 tam giác đều cạnh 1 như hình vẽ, mỗi tam giác đều cạnh 1 có diện tích là $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Theo nguyên lý Dirichle, luôn tìm được 3 điểm trong 19 điểm đã cho nằm trong cùng 1 tam giác nhỏ. Từ đó ta có điều phải chứng minh.



Bài 1 (4 điểm) ✓

Cho biểu thức $Q = \left(\frac{x^2}{x^3 - 4x} - \frac{10}{5x + 10} + \frac{1}{x - 2} \right) : \left(x + 2 + \frac{6 - x^2}{x - 2} \right)$

- Rút gọn Q
- Tìm x để $Q > 0$
- Tìm x nguyên để Q nhận giá trị nguyên

a)

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} x^3 - 4x \neq 0 \\ 5x + 10 \neq 0 \\ x - 2 \neq 0 \\ x + 2 + \frac{6 - x^2}{x - 2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \end{cases} \quad (*)$$

Với điều kiện (*) ta có :

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{x}{x^2 - 4} - \frac{2}{x + 2} + \frac{1}{x - 2} \right) : \left(\frac{x^2 - 4}{x - 2} + \frac{6 - x^2}{x - 2} \right) \\ &= \left[\frac{x}{(x - 2)(x + 2)} - \frac{2(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} + \frac{x + 2}{(x - 2)(x + 2)} \right] : \frac{2}{x - 2} \\ &= \frac{6}{(x - 2)(x + 2)} \cdot \frac{x - 2}{2} \\ &= \frac{3}{x + 2} \end{aligned}$$

b)

$$Q > 0 \Leftrightarrow \frac{3}{x + 2} > 0 \Leftrightarrow x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$$

Vậy $x > -2$ là những giá trị cần tìm của x .

c) Với x nguyên ta có :

$$Q \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{x + 2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x + 2 \in U(3) = \{-1; -3; 1; 3\}$$

Ta có bảng sau :

$x + 2$	-3	-1	1	3
x	-5	-3	-1	1

Vậy những giá trị cần tìm của x là $x \in \{-5; -3; -1; 1\}$

Bài 2 (5 điểm) ✓

- a.** Tìm tất cả các số tự nhiên n thỏa mãn $2n + 1$ và $3n + 1$ là các số chính phương và $2n + 9$ là số nguyên tố
- b.** Cho n là số tự nhiên lẻ. Chứng minh rằng $n^3 - n$ chia hết cho 24
- c.** Tìm số dư khi chia đa thức $(x+2)(x+4)(x+6)(x+8) + 2019$ cho $x^2 + 10x + 21$

a.

Đặt $\begin{cases} 2n+1=p^2 \\ 3n+1=q^2 \end{cases} \quad (p, q \in \mathbb{N})(*)$. Khi đó, ta có :

$$2n+9=25p^2-16q^2=(5p-4q)(5p+4q)$$

Vì $2n+9$ là số nguyên tố nên phải có $5p-4q=1 \Rightarrow 16q^2=(5p-1)^2 \quad (1)$.

Mặt khác từ $(*)$ suy ra : $3p^2-2q^2=1 \Rightarrow 24p^2-16q^2=8 \quad (2)$

Thay (1) vào (2) ta được :

$$24p^2-(5p-1)^2=8 \Leftrightarrow p^2-10p+9=0 \Leftrightarrow (p-1)(p-9)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} p=1 \\ p=9 \end{cases}$$

- Nếu $p=1 \Rightarrow n=0 \Rightarrow 2n+9=9$ không phải là số nguyên tố
- Nếu $p=9 \Rightarrow n=40 \Rightarrow 3n+1=121=11^2$ và $2n+9=89$ là số nguyên tố

Vậy $n=40$ là giá trị cần tìm của n

b.

Ta có :

$$n^3-n=(n-1).n.(n+1)$$

Vì n là số tự nhiên lẻ nên $n-1$ và $n+1$ là 2 số tự nhiên chẵn liên tiếp. Do đó $(n-1).n \div 8$.

Mặt khác $n-1; n; n+1$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên $(n-1).n.(n+1) \div 3$.

Từ đó suy ra $(n-1).n.(n+1) \div 24$. Vậy n^3-n chia hết cho 24 $\square$

c.

Đặt $\begin{cases} P=(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2019 \\ Q=x^2+10x+21 \end{cases}$. Khi đó, ta có :

$$\begin{aligned} P &= (x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+2019 = [(x+2)(x+8)] \cdot [(x+4)(x+6)] \\ &= (x^2+10x+16) \cdot (x^2+10x+24) \\ &= (Q-5) \cdot (Q+3) \\ &= Q^2-2Q-15 \end{aligned}$$

Suy ra P chia cho Q có số dư bằng -15

Bài 3 (4 điểm) ✓

1. Phân tích đa thức sau thành nhân tử $A = x^4 + 2020x^2 + 2019x + 2020$

2. Cho $a, b, c \neq 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Tính giá trị của biểu thức :

$$P = \left(\frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} - 4 \right)^{2020}$$

1.

$$\begin{aligned} A &= x^4 + 2020x^2 + 2019x + 2020 \\ &= (x^4 - x) + (2020x^2 + 2020x + 2020) \\ &= x(x-1)(x^2+x+1) + 2020(x^2+x+1) \\ &= (x^2+x+1)(x^2-x+2020) \end{aligned}$$

2.

Ta chứng minh đẳng thức (*) : $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ với $x + y + z = 0$.
Thật vậy, ta có :

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) - (x+y)^3 \\ &= -3xy(x+y) \\ &= -3xy(-z) \\ &= 3xyz \end{aligned}$$

Áp dụng đẳng thức (*) cho $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$ ta có :

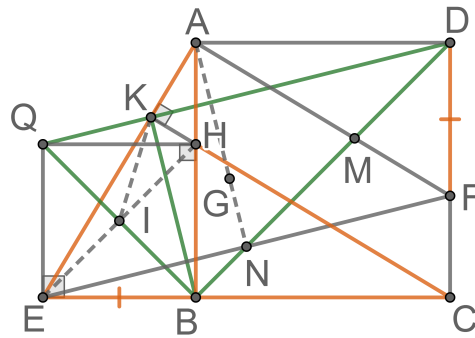
$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} &= \frac{3}{abc} \\ \Rightarrow abc \cdot \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) &= 3 \\ \Leftrightarrow \frac{ab}{c^2} + \frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} &= 3 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra : $P = (3 - 4)^{2020} = 1$

Bài 4 (6 điểm) ✓

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a . Trên tia đối của tia BC lấy điểm E sao cho $BE < BC$. Kẻ CK vuông góc với AE tại K . Gọi H là giao điểm của AB và CK . Qua H kẻ đường thẳng song song với CE và qua E kẻ đường thẳng song song với AB , chúng cắt nhau tại Q .

- Chứng minh rằng $\triangle BCH = \triangle BAE$ và tứ giác $BEQH$ là hình vuông
- Chứng minh $BD.BQ = BK.DQ$
- Lấy F trên cạnh CD sao cho $DF = BE$. Gọi G là trọng tâm $\triangle AEF$. Chứng minh rằng khi E di động trên tia đối của tia BC nhưng độ dài BE luôn nhỏ hơn a thì $\triangle GDB$ có diện tích không đổi



a.

Xét 2 tam giác vuông BCH và BAE có :

$$\begin{cases} BC = AB (\text{ABCD là hình vuông}) \\ \widehat{BCH} = \widehat{BAE} (\text{2 góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle BCH = \triangle BAE (\text{góc nhọn-cạnh góc vuông}) \quad \square$$

$$\Rightarrow BH = BE$$

$$\Rightarrow BEQH \text{ là hình vuông} \quad \square$$

b.

Gọi I là giao điểm của BQ và EH thì I là trung điểm của BQ và EH .

Xét $\triangle KEH$ vuông tại K có KI là trung tuyến $\Rightarrow KI = \frac{EH}{2}$

Mà $EH = BQ \Rightarrow KI = BI = QI \Rightarrow \triangle BQK$ vuông tại $K \Rightarrow BK \perp DQ$

Để dàng chứng minh được : $BQ \perp BD$

Từ đó ta có : $BD.BQ = BK.DQ = 2.S_{BDQ} \quad \square$

c.

Để dàng chứng minh được $\triangle ABE = \triangle ADF$ từ đó suy ra $\triangle AEF$ vuông cân tại $A \quad (*_1)$.

Gọi M là giao điểm của BD và AF , N là giao điểm của BD và EF . Khi đó :

$$\triangle AMD \sim \triangle NMF (g.g) \Rightarrow \frac{AM}{MN} = \frac{DM}{MF} \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle DMF (c.g.c) \Rightarrow \widehat{NAM} = \widehat{MDF} = 45^\circ \quad (*_2)$$

Từ $(*_1)$ và $(*_2)$ suy ra AN là đường phân giác của $\triangle AEF$ và do $\triangle AEF$ cân tại A nên AN

cũng là đường trung tuyến $\Rightarrow G \in AN$ và $NG = \frac{AN}{3} \Rightarrow S_{GBD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABD} = \frac{a^2}{6}$

Vậy S_{GBD} luôn không đổi $\square$

Bài 5 (1 điểm) ✓

Trên 1 đường tròn ta lấy 1000 điểm phân biệt rồi đánh số theo thứ tự cùng một chiều từ 1 đến 1000. Bắt đầu từ 1, cứ 15 số ta đánh dấu một số, tức là đánh dấu các số 1;16;31;46;...Tiếp tục quá trình này qua 1 số vòng cho đến khi số 1 bị đánh dấu lần thứ hai. Hỏi trước lúc đó còn lại bao nhiêu số không bị đánh dấu.

Mỗi lần đánh dấu bắt đầu từ 1 số $1 \leq a \leq 15$ đến số cuối cùng $986 \leq b \leq 1000$ của vòng tròn là ta tiến hành đánh dấu các số có cùng số dư khi chia cho 15. Nếu lần thứ i ta đánh dấu các số có cùng số dư là r_i thì lần thứ $i + 1$ ta đánh dấu những số có cùng số

dư là
$$\begin{cases} r_i + 5 & \text{nếu } r_i < 10 \\ r_i - 10 & \text{nếu } r_i \geq 10 \end{cases}$$

Với nhận xét đó, ta có :

- Lần thứ nhất ta đánh dấu các số :1; 16;31;...;991 có cùng số dư khi chia cho 15 là 1
- Lần thứ 2 ta đánh dấu các số :6;21;36;...;996 có cùng số dư khi chia cho 15 là 6
- Lần thứ 3 ta đánh dấu các số :11;26;41;...;986 có cùng số dư khi chia cho 15 là 11

Bắt đầu lần thứ 4 thì số 1 bị đánh dấu lần thứ 2. Như vậy trước khi số 1 bị đánh dấu lần thứ hai thì số các số đã bị đánh dấu là :

$$\frac{991 - 1}{15} + 1 + \frac{996 - 6}{15} + 1 + \frac{986 - 11}{15} + 1 = 200$$

Vậy số các số không bị đánh dấu trước khi số 1 bị đánh dấu lần thứ hai là : $1000 - 200 = 800$ (số)

Bài 1 (5 điểm) ✓

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1}$

1. Rút gọn A
2. Tìm các giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên
3. Tìm x để $|A| = A$

1. Điều kiện $\begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$. Với điều kiện đó ta có :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x} - \frac{5-x}{1-x^2} \right) : \frac{1-2x}{x^2-1} \\ &= \frac{x+1+2(1-x)-(5-x)}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} \\ &= \frac{-2}{1-x^2} \cdot \frac{x^2-1}{1-2x} \\ &= \frac{2}{2x-1} \end{aligned}$$

2. Với $x \in \mathbb{Z}$ ta có :

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \frac{2}{2x-1} \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = -2 \\ 2x-1 = 2 \\ 2x-1 = -1 \\ 2x-1 = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} & (\text{thỏa mãn đk}) \\ x = \frac{3}{2} & (\text{thỏa mãn đk}) \\ x = 0 & (\text{thỏa mãn đk}) \\ x = 1 & (\text{không thỏa mãn đk}) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x \in \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0 \right\}$ là các giá trị cần tìm của x .

3.

$$|A| = A \Leftrightarrow A \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{2x-1} \geq 0 \Leftrightarrow 2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

Kết hợp với điều kiện xác định suy ra $\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases}$ là các giá trị cần tìm của x

Bài 2 (4 điểm) ✓

Giải các phương trình sau :

1. $x^3 - x^2 - 12x = 0$

2. $\frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} = 6$

1.

$$\begin{aligned} x^3 - x^2 - 12x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x^2 - x - 12) &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x+3)(x-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x + 3 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \\ x = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = 0, x = -3$ và $x = 4$.

2.

$$\begin{aligned} \frac{x-214}{86} + \frac{x-132}{84} + \frac{x-54}{82} &= 6 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x-214}{86} - 1 \right) + \left(\frac{x-132}{84} - 2 \right) + \left(\frac{x-54}{82} - 3 \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x-300}{86} + \frac{x-300}{84} + \frac{x-300}{82} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-300) \cdot \frac{1}{86} + \frac{1}{84} + \frac{1}{82} &= 0 \\ \Leftrightarrow x-300 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 300 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 300$

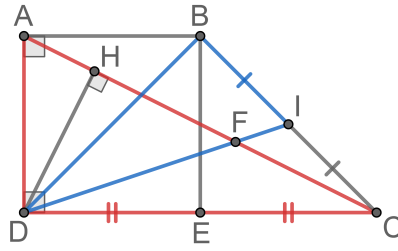
Bài 3 (5 điểm) ✓

Cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và D . Biết $CD = 2AB = 2AD$ và $BC = a\sqrt{2}$. Gọi E là trung điểm của CD

1. Tứ giác $ABED$ là hình gì ? Vì sao ?
2. Tính diện tích hình thang $ABCD$ theo a
3. Gọi I là trung điểm của BC , H là chân đường vuông góc kẻ từ D xuống AC .
Tính $\widehat{HDI}$

1.

Để thấy $ABED$ là hình vuông



2.

Từ $BC = a\sqrt{2} \Rightarrow AB = AD = a$ và $CD = 2a$. Từ đó :

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \cdot AD}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

3. Gọi $F = AC \cap DI$

$\triangle BEC$ và $\triangle BED$ là 2 tam giác vuông cân tại E nên $\widehat{DBI} = 90^\circ$.

Trong tam giác DBI vuông tại B có $\frac{IB}{BD} = \frac{IB}{BC} = \frac{1}{2}$

Trong tam giác ADC vuông tại D có $\frac{AD}{DC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$

Từ đó suy ra $\triangle DBI \sim \triangle CDA (c - g - c) \Rightarrow \widehat{IDB} = \widehat{ACD}$

Theo tính chất góc ngoài suy ra :

$$\begin{aligned} \widehat{HFD} &= \widehat{FCD} + \widehat{FDC} \\ &= \widehat{ACD} + \widehat{IDC} \\ &= \widehat{IDB} + \widehat{IDC} \\ &= \widehat{BDC} = 45^\circ \\ &\Rightarrow \widehat{HDF} = 45^\circ \end{aligned}$$

Vậy $\widehat{HDI} = 45^\circ$

Bài 4 (4 điểm) ✓

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5$

2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1}$

1.

$$A = x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y + 5 = (x - y)^2 + (y - 2)^2 + 1 \geq 1$$

$$A = 1 \Leftrightarrow x - y = y - 2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 2$$

Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất là 1 khi $x = y = 2$

2. Điều kiện $x \neq -1$

$$B = \frac{3(x+1)}{x^3 + x^2 + x + 1} = \frac{3(x+1)}{(x^2 + 1)(x+1)} = \frac{3}{x^2 + 1} \leq 3$$

$$B = 3 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy B đạt giá trị lớn nhất là 3 khi $x = 0$

Bài 5 (2 điểm) ✓

1. - Dành cho thí sinh đại trà

Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của 1 tam giác, p là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

2. - Dành cho thí sinh THCS Yên Phong

Cho a, b, c, d là các số dương. Chứng minh rằng $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} \geq \frac{a-d}{a+b}$

1.3.

Ta chứng minh bất đẳng thức phụ: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ (*) với $\forall x, y > 0$

Thật vậy, ta có:

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} \geq \frac{4}{x+y} \\ &\Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \quad (\text{vì } x, y > 0) \\ &\Leftrightarrow (x+y)^2 - 4xy \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}) \end{aligned}$$

Vậy (*) đúng và đẳng thức ở (*) xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Áp dụng (*) ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{1}{p-a+p-b} = \frac{1}{c} \quad (1)$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{1}{p-b+p-c} = \frac{1}{a} \quad (2)$$

$$\frac{1}{p-c} + \frac{1}{p-a} \geq \frac{1}{p-c+p-a} = \frac{1}{b} \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta được:

$$\begin{aligned} 2 \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \right) &\geq \frac{4}{a} + \frac{4}{b} + \frac{4}{c} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} &\geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow p-a = p-b = p-c \Leftrightarrow a = b = c$

2.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với $\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0$ (**)

Ta có:

$$\begin{aligned} &\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \\ &= \frac{a+c}{b+c} - 1 + \frac{b+d}{c+d} - 1 + \frac{c+a}{d+a} - 1 + \frac{d+b}{a+b} - 1 \\ &= \left(\frac{a+c}{b+c} + \frac{c+a}{d+a} \right) + \left(\frac{b+d}{c+d} + \frac{d+b}{a+b} \right) - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (a+c) \cdot \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{d+a} \right) + (b+d) \cdot \left(\frac{1}{c+d} + \frac{1}{a+b} \right) - 4 \\ &\geq (a+c) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} + (b+d) \cdot \frac{4}{a+b+c+d} - 4 \quad \left(\text{áp dụng } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Vậy (**) được chứng minh, từ đó ta có điều phải chứng minh.

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c = a+d \\ c+d = a+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = d \\ a = c \end{cases}$$

Bài 1 (2 điểm) ✓

Cho biểu thức $A = \left(\frac{y}{x^2 - xy} - \frac{x}{xy - y^2} \right) \cdot \frac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}$ với $xy \neq 0, x + y \neq 0, x \neq y$

1. Rút gọn A

2. Tính giá trị của A khi $x > y > 0$ và $2x^2 + 2y^2 = 5xy$

1.

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{y}{x^2 - xy} - \frac{x}{xy - y^2} \right) \cdot \frac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2} \\ &= \frac{y^2 - x^2}{xy(x - y)} \cdot \frac{xy(x + y)}{(x - y)(x + y)} \\ &= \frac{-(x + y)}{xy} \cdot \frac{xy}{x - y} \\ &= \frac{x + y}{y - x} \end{aligned}$$

2. Khi $x > y > 0$ thì :

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 = 5xy &\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 5xy = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x^2 - 4xy) - (xy - 2y^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x(x - 2y) - y(x - 2y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x - y)(x - 2y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2y \\ &\Rightarrow A = -3 \end{aligned}$$

Bài 2 (2 điểm) ✓

1. Cho a, b, c thỏa mãn $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Chứng minh rằng $M = (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$ viết được dưới dạng bình phương của 1 biểu thức

2. Cho a, b, c thỏa mãn $a(b + c)^2 + b(c + a)^2 + c(a + b)^2 = 4abc$ và $a^{2013} + b^{2013} + c^{2013} = 1$. Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{1}{a^{2015}} + \frac{1}{b^{2015}} + \frac{1}{c^{2015}}$

1.

Theo giả thiết ta có $2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 2 \Rightarrow ab + bc + ca = 1$.
Từ đó suy ra :

$$\begin{aligned} M &= (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \\ &= (a^2 + ab + bc + ca)(b^2 + ab + bc + ca)(c^2 + ab + bc + ca) \\ &= (a + b)(a + c) \cdot (b + c)(a + b) \cdot (c + a)(b + c) \\ &= [(a + b)(b + c)(c + a)]^2 \end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

2.

$$\begin{aligned}
 & a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 = 4abc \\
 \Leftrightarrow & a(b^2 + 2bc + c^2) + b(c^2 + 2ca + a^2) + c(a^2 + 2ab + b^2) - 4abc = 0 \\
 \Leftrightarrow & ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 + 2abc = 0 \\
 \Leftrightarrow & (ab^2 + ba^2) + (ac^2 + bc^2) + (ca^2 + abc) + (cb^2 + abc) = 0 \\
 \Leftrightarrow & ab(a+b) + c^2(a+b) + ca(a+b) + cb(a+b) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (a+b)(ab + c^2 + ca + cb) = 0 \\
 \Leftrightarrow & (a+b)(b+c)(c+a) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $a^{2013} + b^{2013} + c^{2013} = 1$, suy ra trong 3 số a, b, c có 2 số đối nhau và số còn lại bằng 1. Từ đó ta có $M = 1$

Bài 3 (2.5 điểm) ✓

1. Phân tích $a^3 + b^3 + c^3 - (a+b+c)^3$ thành nhân tử.
2. Tìm x biết $(x^2 + x + 2)^3 - (x+1)^3 = x^6 + 1$
3. Chứng minh biểu thức $N = 2x^2 + 7y^2 - 6xy + 10x - 30y + 45$ luôn nhận giá trị dương với mọi x, y

1.

$$\begin{aligned}
 & a^3 + b^3 + c^3 - (a+b+c)^3 \\
 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) - (a+b) \left[(a+b+c)^2 + c(a+b+c) + c^2 \right] \\
 &= (a+b) \left[a^2 - ab + b^2 - (a+b+c)^2 - c(a+b+c) - c^2 \right] \\
 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2bc - 2ca - ca - cb - c^2 - c^2) \\
 &= (a+b)(-3ab - 3bc - 3ca - 3c^2) \\
 &= -3(a+b)(ab + bc + ca + c^2) \\
 &= -3(a+b)(b+c)(c+a)
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 & (x^2 + x + 2)^3 - (x+1)^3 = x^6 + 1 \\
 \Leftrightarrow & (x^2 + x + 2)^3 - 1 = (x^2)^3 + (x+1)^3 \\
 \Leftrightarrow & (x^2 + x + 1) \left[(x^2 + x + 2)^2 + (x^2 + x + 2) + 1 \right] = (x^2 + x + 1) \left[x^4 - x^2(x+1) + (x+1)^2 \right] \\
 \Leftrightarrow & (x^2 + x + 2)^2 + (x^2 + x + 2) + 1 = x^4 - x^2(x+1) + (x+1)^2 \quad (\text{vì } x^2 + x + 1 > 0) \\
 \Leftrightarrow & (x^2 + x + 2)^2 - x^4 + x^2(x+1) - x + 2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & 6x^2 + 3x^3 + 3x + 6 = 0 \\
 \Leftrightarrow & (x^2 + 1)(3x + 6) = 0
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = -2$

3.

$$\begin{aligned} N &= 2x^2 + 7y^2 - 6xy + 10x - 30y + 45 \\ &= (x^2 - 2xy + y^2) + (x^2 + 4y^2 - 4xy + 10x - 20y + 25) + (2y^2 - 10y + 20) \\ &= (x - y)^2 + (x - 2y + 5)^2 + 2\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{2} \geq \frac{15}{2} > 0 \end{aligned}$$

Tuy nhiên vì $n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow n^3 \geq n^2 \geq 1 \Rightarrow |n^2 - 1| = n^2 - 1 \leq n^3 - 1 < n^3 + 1 = |n^3 + 1|$.

Như vậy (*) không xảy ra, do đó phải có $n^2 - 1 = 0 \Rightarrow n = 1$

Vậy $n = 1$ là giá trị cần tìm.

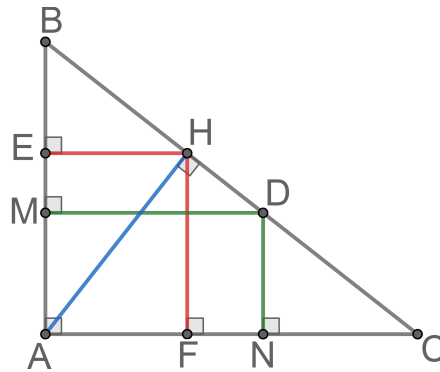
Bài 4 (3 điểm) ✓

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của H lên AB, AC . D là 1 điểm trên cạnh BC . Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của D lên AB, AC . Chứng minh :

$$1. AC^2 = CH \cdot BC \text{ và } \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{HC}{HB}$$

$$2. \frac{CF}{BE} = \frac{AC^3}{AB^3}$$

$$3. DB \cdot DC = MA \cdot MB + NA \cdot NC$$



1.

$$\text{Để thấy } \triangle ACH \sim \triangle BCA (g - g) \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow AC^2 = CH \cdot BC$$

Hoàn toàn tương tự ta cũng có : $AB^2 = BH \cdot BC$

$$\text{Do đó } \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{CH}{BH}$$

2.

Để dàng chứng minh được (theo cách cm hệ thức lượng trong tam giác vuông) ta có :

$$\begin{cases} BE \cdot AB = BH^2 \\ CF \cdot AC = CH^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{BE}{CF} \cdot \frac{AB}{AC} = \left(\frac{BH}{CH} \right)^2 (*)$$

Mà $\frac{BH}{CH} = \frac{AB^2}{AC^2} (**)(\text{cmt})$

Từ (*) và (**) suy ra $\frac{BE}{CF} = \frac{AB^3}{AC^3}$

3.

Để thấy $\triangle BMD \triangle DNC \Rightarrow \frac{MB}{ND} = \frac{MD}{NC}$ hay $\frac{MB}{MA} = \frac{NA}{NC} (***)$

Từ (***) suy ra $\begin{cases} MA = \frac{MB \cdot NC}{NA} \Rightarrow MA \cdot MB = \frac{MB^2 \cdot NC}{NA} = MB^2 \frac{CD}{BD} \\ NC = \frac{NA \cdot MA}{MB} \Rightarrow NA \cdot NC = \frac{NA^2 \cdot MA}{MB} = NA^2 \cdot \frac{CD}{BD} \end{cases}$

$\Rightarrow MA \cdot MB + NA \cdot NC = (MB^2 + NA^2) \frac{CD}{BD} = BD^2 \cdot \frac{CD}{BD} = BD \cdot CD$

Bài 5 (1 điểm) ✓

Tìm x, y nguyên thỏa mãn $x^2(y^2 - 3) = y(y - x)$

Ta có $x^2(y^2 - 3) = y(y - x) \Leftrightarrow (y^2 - 3)x^2 + yx - y^2 = 0 \quad (1)$

Vì $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y^2 - 3 \neq 0$, do đó ta coi (1) là phương trình bậc 2 ẩn x có :

$$\Delta = y^2 + 4y^2(y^2 - 3) = 4y^4 - 11y^2 = y^2(4y^2 - 11)$$

Để x nguyên thì điều kiện cần là Δ phải là 1 số chính phương, tức là phải có $\begin{cases} y = 0 \\ 4y^2 - 11 = k^2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N})$

- Nếu $y = 0$, thay vào phương trình đã cho ta có $x = 0$
- Nếu $4y^2 - 11 = k^2$, ta có :

$$4y^2 - k^2 = 11 \Leftrightarrow (2y - k)(2y + k) = 11$$

Như thế $2y - k$ và $2y + k$ đều là ước của 11 và do đó ta luôn có :

$$\begin{cases} 2y - k + 2y + k = 1 + 11 = 12 \\ 2y - k + 2y + k = -1 - 11 = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -3 \end{cases}$$

+ Với $y = 3$, thay vào phương trình ban đầu ta có :

$$6x^2 = 3(3 - x) \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1$$

+ Với $y = -3$, thay vào phương trình ban đầu ta có :

$$6x^2 = 3(3 + x) \Leftrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Vậy $(x, y) \in \{(0, 0); (1, 3); (-1, -3)\}$ là các cặp số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 1 (1.5 điểm) ✓

1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử :

a. $3x^2 - 7x + 2$

b. $x^4 + 2017x^2 + 2016x + 2017$

2. Tính giá trị của $P = \frac{x-y}{x+y}$ biết $x^2 - 2y^2 = xy$ và $x + y \neq 0$

1.

a.

$$3x^2 - 7x + 2 = (3x^2 - 6x) - (x - 2) = 3x(x - 2) - (x - 2) = (x - 2)(3x - 1)$$

b.

$$\begin{aligned} x^4 + 2017x^2 + 2016x + 2017 &= (x^4 - x) + (2017x^2 + 2017x + 2017) \\ &= x(x - 1)(x^2 + x + 1) + 2017(x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 2017) \end{aligned}$$

2. Vì $x + y \neq 0$ nên :

$$\begin{aligned} P &= \frac{x-y}{x+y} = \frac{(x^2 - y^2)}{(x+y)^2} \\ &= \frac{(x^2 - 2y^2 + y^2)}{(x+y)^2} \\ &= \frac{xy + y^2}{(x+y)^2} \quad (\text{vì } x^2 - 2y^2 = xy) \\ &= \frac{y}{x+y} \\ &\Rightarrow x - y = y \Leftrightarrow x = 2y \Rightarrow P = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Có thể xử lý bài toán theo cách khác như sau :

$$\begin{aligned} x^2 - 2y^2 = xy &\Leftrightarrow x^2 - 2y^2 - xy = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2xy) + (xy - 2y^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x - 2y) + y(x - 2y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + y)(x - 2y) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - 2y = 0 \quad (\text{vì } x + y \neq 0) \\ &\Leftrightarrow x = 2y \Rightarrow P = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Hoặc } x^2 - 2y^2 = xy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = xy + y^2 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = y(x + y) \Leftrightarrow x - y = y \Leftrightarrow x = 2y$$

Bài 2 (2.5 điểm) ✓

1. Cho $A = \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \frac{x^2-3x}{2x^2-x^3}$

a. Tìm điều kiện của x để A có nghĩa rồi rút gọn A

b. Tìm x để $A > 0$

2. Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ ta có :

$$a(b-c)(b+c-a)^2 + c(a-b)(a+b-c)^2 = b(a-c)(a+c-b)^2$$

1.

a. A xác định khi và chỉ khi :
$$\begin{cases} 2-x \neq 0 \\ 2+x \neq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \\ x^2-3x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq \pm 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

Với điều kiện trên ta có :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2+x}{2-x} - \frac{4x^2}{x^2-4} - \frac{2-x}{2+x} \right) : \frac{x^2-3x}{2x^2-x^3} \\ &= \frac{(2+x)^2 + 4x^2 - (2-x)^2}{(2+x)(2-x)} : \frac{x-3}{x(2-x)} \\ &= \frac{8x+4x^2}{(2+x)(2-x)} \cdot \frac{x(2-x)}{x-3} \\ &= \frac{4x(2+x)}{(2+x)(2-x)} \cdot \frac{x(2-x)}{x-3} \\ &= \frac{4x^2}{x-3} \end{aligned}$$

b. Trong điều kiện xác định của A thì $A > 0 \Leftrightarrow x-3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$

2.

Đặt $b+c-a=x$; $a+b-c=y$; $c+a-b=z$.

Khi đó :
$$\begin{cases} a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+y}{2}; c = \frac{x+z}{2} \\ b-c = y-a = \frac{y-z}{2}; a-b = z-c = \frac{z-x}{2}; a-c = b-x = \frac{y-x}{2} \end{cases}$$

Từ đó, đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\begin{aligned} &\frac{y+z}{2} \cdot \frac{y-z}{2} \cdot x^2 + \frac{x+z}{2} \cdot \frac{z-x}{2} \cdot y^2 = \frac{x+y}{2} \cdot \frac{y-x}{2} \cdot z^2 \\ \Leftrightarrow &(y^2-z^2) \cdot x^2 + (z^2-x^2) \cdot y^2 = (y^2-x^2) \cdot z^2 \\ \Leftrightarrow &z^2 y^2 - z^2 x^2 = (y^2-x^2) \cdot z^2 \quad (\text{luôn đúng}) \end{aligned}$$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Bài 3 (3 điểm) ✓

1. Giải phương trình :

$$8\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (x+4)^2$$

2. Tìm các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$

3. Tìm các số nguyên dương n sao cho $n^5 + 1$ chia hết cho $n^3 + 1$

1. Điều kiện $x \neq 0$

Để ý rằng $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$. Khi đó nếu ta đặt $t = x + \frac{1}{x}$ thì phương trình đã cho trở thành :

$$\begin{aligned} 8t^2 + 4(t^2 - 2)^2 - 4(t^2 - 2)t^2 &= (x+4)^2 \\ \Leftrightarrow 16 &= (x+4)^2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 = 4 \\ x+4 = -4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (\text{loại}) \\ x = -8 & (\text{thỏa mãn điều kiện}) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = -8$

2.

Ta có : $x^2 - y^2 + 2x - 4y - 10 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - (y-2)^2 = 7 \Leftrightarrow (x+y-1)(x-y+3) = 7$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow x+y-1 > 0$, do đó có 2 khả năng sau :

$$\begin{aligned} \bullet \begin{cases} x+y-1 = 1 \\ x-y+3 = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \rightarrow \text{loại} \\ \bullet \begin{cases} x+y-1 = 7 \\ x-y+3 = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 5 \end{cases} \rightarrow \text{thỏa mãn} \end{aligned}$$

Vậy $(x, y) = (3, 5)$ là cặp số nguyên dương cần tìm.

3. Với $n \in \mathbb{Z}^+$ ta có :

$$\begin{aligned} n^5 + 1 : n^3 + 1 &\Leftrightarrow n^2(n^3 + 1) - (n^2 - 1) : n^3 + 1 \Rightarrow n^2 - 1 : n^3 + 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} n^2 - 1 = 0 \\ |n^2 - 1| \geq |n^3 + 1| (*) \end{cases} \end{aligned}$$

Tuy nhiên vì $n \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow n^3 \geq n^2 \geq 1 \Rightarrow |n^2 - 1| = n^2 - 1 \leq n^3 - 1 < n^3 + 1 = |n^3 + 1|$.

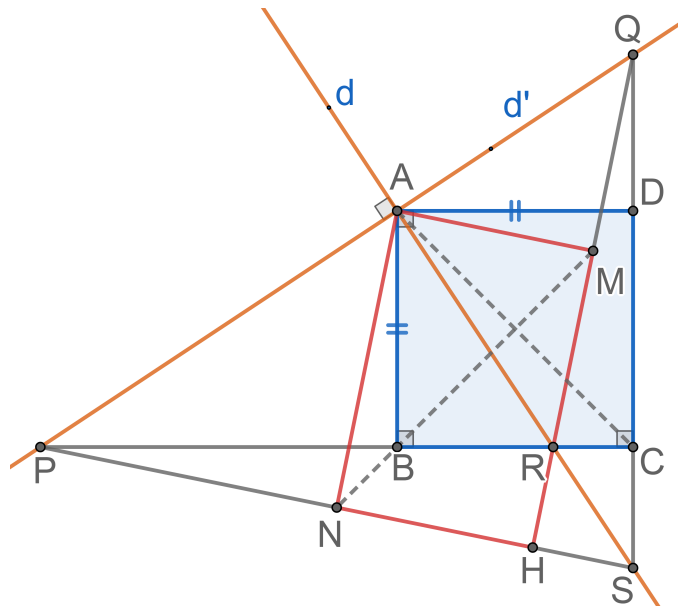
Như vậy (*) không xảy ra, do đó phải có $n^2 - 1 = 0 \Rightarrow n = 1$

Vậy $n = 1$ là giá trị cần tìm.

Bài 4 (3 điểm) ✓

Cho hình vuông $ABCD$. Qua A vẽ 2 đường thẳng d và d' vuông góc với nhau. Biết d cắt BC và CD lần lượt tại R và S . d' cắt BC và CD lần lượt tại P và Q .

1. Chứng minh rằng các tam giác AQR, APS vuông cân
2. QR cắt PS tại H . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của QR và PS . Chứng minh $AMHN$ là hình chữ nhật.
3. Chứng minh R là trực tâm của tam giác SQP
4. Chứng minh MN là đường trung trực của AC
5. Chứng minh M, B, N, D thẳng hàng.



1.

Xét 2 tam giác vuông ABR và ADQ có $\begin{cases} AB = AD \\ \widehat{BAR} = \widehat{DAQ} \end{cases}$ (2 góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow \triangle ABR = \triangle ADQ$ (góc nhọn-cạnh góc vuông)

$\Rightarrow AR = AQ \Rightarrow \triangle AQR$ vuông cân tại A

Chứng minh tương tự ta có $\triangle APS$ vuông cân tại A

2.

Trong tam giác PQH có $\widehat{HPQ} = \widehat{HQP} = 45^\circ$ (vì $\triangle AQR$ và $\triangle APS$ vuông cân tại A)

$\Rightarrow \widehat{PHQ} = 90^\circ \Rightarrow QH \perp PH$ (*)

Mặt khác vì 2 tam giác AQR và APS vuông cân tại A nên: $\begin{cases} AM \perp QR \text{ hay } AM \perp QH \\ AN \perp PS \text{ hay } AN \perp PH \end{cases}$ (*)

Từ (*) và (*) suy ra $AMHN$ là hình chữ nhật.

3.

Tam giác PQS có QH và PC là 2 đường cao. Mà $QH \cap PC \equiv R \Rightarrow R$ là trực tâm của $\triangle PQS$

4.

Xét 2 tam giác AQR và CQR ta có: $AM = MC = \frac{QR}{2} \Rightarrow M$ thuộc đường trung trực của AC (*)

Xét 2 tam giác APS và CPS có : $AN = CN = \frac{PS}{2} \Rightarrow N$ thuộc đường trung trực của AC (*)

Từ (*) và (**) suy ra MN là đường trung trực của AC

5.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên BD là đường trung trực của AC . Do đó, 2 đường thẳng MN và BD trùng nhau $\Rightarrow M, N, B, D$ thẳng hàng.

Bài 5 (1 điểm) ✓

Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1}$ với $x \in \mathbb{R}$

Ta có :

$$\begin{aligned} M + 335 &= \frac{2010x + 2680}{x^2 + 1} + 335 \\ &= \frac{335x^2 + 2010x + 3015}{x^2 + 1} \\ &= \frac{335(x^2 + 6x + 9)}{x^2 + 1} \\ &= \frac{335(x + 3)^2}{x^2 + 1} \geq 0 \\ \Rightarrow M &\geq -335 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$

Vậy M đạt giá trị nhỏ nhất bằng -335 tại $x = -3$

Bài 1 (2 điểm) ✓

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right)$

1. Rút gọn A

2. Tìm giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

1. Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \end{cases}$. Với điều kiện đó, ta có :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x^2 - 2x}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{8 - 4x + 2x^2 - x^3} \right) \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \right) \\ &= \frac{x^2 - 2x}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x^2 + 4)(2 - x)} \cdot \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \\ &= \frac{(x^2 - 2x)(x - 2) + 4x^2}{2(x^2 + 4)(x - 2)} \cdot \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} \\ &= \frac{x^3 + 4x}{2(x^2 + 4)(x - 2)} \cdot \frac{(x + 1)(x - 2)}{x^2} \\ &= \frac{x(x^2 + 4)(x + 1)}{2x^2(x^2 + 4)} \\ &= \frac{x + 1}{2x} \end{aligned}$$

2. Với $x \in \mathbb{Z}$, ta có :

$$\begin{aligned} A \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \frac{x + 1}{2x} \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \frac{2(x + 1)}{2x} \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Thử lại thấy $x = 1$ và $x = -1$ đều thỏa mãn.

Vậy những giá trị cần tìm của x là $x = 1$ và $x = -1$

Bài 2 (2 điểm) ✓

1. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $5x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 40 = 0$

2. Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.
Chứng minh $a + b + c + d$ là hợp số.

1.

$$5x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 40 = 0 \Leftrightarrow (x + y)^2 + (2x - 1)^2 = 41$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x+y)^2; (2x-1)^2$ là 2 số chính phương. Mà 41 chỉ phân tích được thành tổng của 2 số chính phương là 16 và 25. Hơn nữa $2x-1$ là số lẻ nên chỉ xảy ra khả năng sau :

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 16 \\ (2x-1)^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ x+y=-4 \\ 2x-1=5 \\ 2x-1=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \text{ \& } y=1 \\ x=3 \text{ \& } y=-7 \\ x=-2 \text{ \& } y=6 \\ x=-2 \text{ \& } y=-2 \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn là $(x, y) \in \{(3, 1); (3, -7); (-2, 6); (-2, -2)\}$

2. Ta có :

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 = b^2 + d^2 &\Leftrightarrow (a+c)^2 - 2ac = (b+d)^2 - 2bd \\ &\Leftrightarrow (a+c)^2 - (b+d)^2 = 2ac - 2bd \\ &\Leftrightarrow [(a+c) - (b+d)](a+b+c+d) = 2(ac - bd) \\ &\Rightarrow [(a+c) - (b+d)](a+b+c+d) : 2 \end{aligned}$$

Mà $(a+c) - (b+d)$ và $a+b+c+d$ cùng tính chẵn lẻ nên cả $(a+c) - (b+d)$ và $a+b+c+d$ đều chẵn. Mặt khác a, b, c, d nguyên dương $\Rightarrow a+b+c+d \geq 4$. Do đó, $a+b+c+d$ là hợp số

Bài 3 (2 điểm) ✓

1. Tìm a, b sao cho $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10x - 4$ chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 + x - 2$
2. Giải phương trình $(x^2 - 5x + 1)(x^2 - 4) = 6(x - 1)^2$

1.

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Như vậy, đa thức $g(x)$ chỉ có 2 nghiệm là $x=1$ và $x=-2$.

Từ đó, $f(x)$ chia hết cho $g(x)$ khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+6=0 \\ -8a+4b-24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$$

Vậy $a=4$ và $b=2$

2. Đặt $\begin{cases} a = x^2 - 5x + 1 \\ b = x^2 - 4 \end{cases} \Rightarrow b - a = 5x - 5 = 5(x-1)$. Phương trình đã cho trở thành :

$$\begin{aligned} ab &= \frac{6}{25}(b-a)^2 \\ &\Leftrightarrow 6(a-b)^2 - 25ab = 0 \\ &\Leftrightarrow 6a^2 - 37ab + 6b^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (6a^2 - 36ab) - (ab - 6b^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 6a(a - 6b) - b(a - 6b) = 0 \\ &\Leftrightarrow (6a - b)(a - 6b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 6b \\ b = 6a \end{cases} \end{aligned}$$

- Với $a = 6b$ ta có :

$$\begin{aligned} &x^2 - 5x + 1 = 6(x^2 - 4) \\ &\Leftrightarrow 5x^2 + 5x - 25 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + x - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{21}{4} \\ &\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} = \frac{\pm\sqrt{21}}{2} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{21} - 1}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{21} + 1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

- Với $b = 6a$ ta có :

$$\begin{aligned} &x^2 - 4 = 6(x^2 - 5x + 1) \\ &\Leftrightarrow 5x^2 - 30x + 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 = 7 \\ &\Leftrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{7} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + \sqrt{7} \\ x = 3 - \sqrt{7} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x \in \left\{ \frac{\sqrt{21} - 1}{2}; -\frac{\sqrt{21} + 1}{2}; 3 + \sqrt{7}; 3 - \sqrt{7} \right\}$

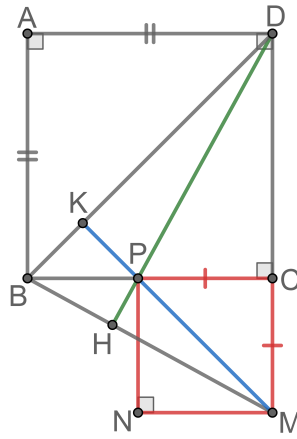
Bài 4 (3 điểm) ✓

Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm M bất kỳ ($CM < CD$). Vẽ hình vuông $CMNP$ (P nằm giữa B và C), DP cắt BM tại H , MP cắt BD tại K

1. Chứng minh rằng $DH \perp BM$
2. Tính $Q = \frac{PC}{BC} + \frac{PH}{DH} + \frac{KP}{MK}$
3. Chứng minh $MP \cdot MK + DK \cdot BD = DM^2$

1.

Xét 2 tam giác vuông DPC và BCM có $\begin{cases} CD = BC \\ PC = CM \end{cases}$



$\Rightarrow \triangle DPC = \triangle BMC$ (2 cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{PDC} = \widehat{CBM}$ hay $\widehat{PDC} = \widehat{PBH}$

Xét 2 tam giác PDC và PBH có $\begin{cases} \widehat{DPC} = \widehat{BPH} \text{ (đối đỉnh)} \\ \widehat{PDC} = \widehat{PBH} \text{ (cmt)} \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle PDC \sim \triangle PBH$ (g - g) $\Rightarrow \widehat{PHB} = \widehat{PCD} = 90^\circ \Rightarrow DH \perp BM$

2.

Vì DH và BC là 2 đường cao của tam giác DBM nên P là trực tâm của tam giác $DBM \Rightarrow MK$ cũng là đường cao của tam giác DBM . Từ đó, suy ra :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{PC}{BC} + \frac{PH}{DH} + \frac{KP}{MK} \\ &= \frac{S_{DPM}}{S_{DBM}} + \frac{S_{BPM}}{S_{DBM}} + \frac{S_{BDP}}{S_{DBM}} \\ &= \frac{S_{DPM} + S_{BPM} + S_{BDP}}{S_{DBM}} \\ &= \frac{S_{DBM}}{S_{DBM}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

3.

Dễ thấy :

$$\triangle PCM \sim \triangle DKM \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{MP}{DM} = \frac{CM}{MK} \Rightarrow MP \cdot MK = CM \cdot DM (*)$$

$$\triangle DKM \sim \triangle DCB \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{DK}{CD} = \frac{DM}{BD} \Rightarrow DK \cdot BD = DM \cdot CD (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra $MP \cdot MK + DK \cdot BD = CM \cdot DM + DM \cdot CD = DM(CM + CD) = DM^2$

Bài 5 (1 điểm) ✓

Cho 3 số x, y, z thỏa mãn $0 < x, y, z \leq 1$ và $x + y + z = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{(x-1)^2}{z} + \frac{(y-1)^2}{x} + \frac{(z-1)^2}{y}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có :

$$\frac{(x-1)^2}{z} + \frac{z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{(x-1)^2}{z} \cdot \frac{z}{4}} = 1-x \quad (1)$$

$$\frac{(y-1)^2}{x} + \frac{x}{4} \geq 2\sqrt{\frac{(y-1)^2}{x} \cdot \frac{x}{4}} = 1-y \quad (2)$$

$$\frac{(z-1)^2}{y} + \frac{y}{4} \geq 2\sqrt{\frac{(z-1)^2}{y} \cdot \frac{y}{4}} = 1-z \quad (3)$$

Từ đó suy ra :

$$\begin{aligned} & \frac{(x-1)^2}{z} + \frac{z}{4} + \frac{(y-1)^2}{x} + \frac{x}{4} + \frac{(z-1)^2}{y} + \frac{y}{4} \geq 1-x+1-y+1-z \\ \Leftrightarrow & \frac{(x-1)^2}{z} + \frac{(y-1)^2}{x} + \frac{(z-1)^2}{y} \geq 3 - \frac{5}{4}(x+y+z) \\ \Leftrightarrow & A \geq \frac{1}{2} \quad (\text{vì } x+y+z=2) \end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{đẳng thức ở (1), (2), (3) xảy ra} \\ x+y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=\frac{2}{3}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{1}{2}$, đạt được khi $x=y=z=\frac{2}{3}$

Chú ý:

Ta có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz như sau :

$$A = \frac{(x-1)^2}{z} + \frac{(y-1)^2}{x} + \frac{(z-1)^2}{y} \geq \frac{[(1-x) + (1-y) + (1-z)]^2}{x+y+z} = \frac{1}{2}$$

Bài 1 (2 điểm) ✓

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-3}{2-x} + \frac{x+2}{x+3} - \frac{9-x^2}{x^2+x-6} \right) : \left(1 - \frac{3x-9}{x^2-9} \right)$

1. Rút gọn P

2. Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên.

1. Điều kiện $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq \pm 3 \end{cases}$. Với điều kiện đó, ta có :

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x-3}{2-x} + \frac{x+2}{x+3} - \frac{3-x}{x-2} \right) : \left(1 - \frac{3}{x+3} \right) \\ &= \frac{x+2}{x+3} : \frac{x}{x+3} \\ &= \frac{x+2}{x} \end{aligned}$$

2. Với $x \in \mathbb{Z}$, ta có :

$$\begin{aligned} P \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \frac{x+2}{x} \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{2}{x} \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{x} \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện xác định suy ra những giá trị cần tìm của x là $x = \pm 1$ và $x = -2$

Bài 2 (2 điểm) ✓

1. Tìm 2 số a, b biết đa thức $f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + ax + b$ chia cho đa thức $x^2 - x - 2$ dư $2x - 3$

2. Cho x, y là 2 số khác 0 và $x + y \neq 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{(x+y)^3} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} \right) + \frac{3}{(x+y)^4} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{6}{(x+y)^5} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{x^3 y^3}$$

1.

$$f(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + ax + b = (x^2 - x - 2)(x^2 - 1) + (a-1)x + (b-2)$$

Do đó, theo giả thiết ta có $\begin{cases} a-1=2 \\ b-2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-1 \end{cases}$

Vậy $a = 3$ và $b = -1$

2.

Ta có :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(x+y)^3} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} \right) + \frac{3}{(x+y)^4} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) + \frac{6}{(x+y)^5} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \\
 &= \frac{x^3 + y^3}{x^3 y^3 (x+y)^3} + \frac{3(x^2 + y^2)}{x^2 y^2 (x+y)^4} + \frac{6(x+y)}{xy(x+y)^5} \\
 &= \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{x^3 y^3 (x+y)^3} + \frac{3(x^2 + y^2 + 2xy)}{x^2 y^2 (x+y)^4} \\
 &= \frac{x^2 - xy + y^2}{x^3 y^3 (x+y)^2} + \frac{3}{x^2 y^2 (x+y)^2} \\
 &= \frac{x^2 - xy + y^2 + 3xy}{x^3 y^3 (x+y)^2} \\
 &= \frac{(x+y)^2}{x^3 y^3 (x+y)^2} \\
 &= \frac{1}{x^3 y^3}
 \end{aligned}$$

Bài 3 (2 điểm) ✓

1. Tìm số nguyên dương n để $3n - 16; 4n - 21; 5n - 23$ đều là số nguyên tố.

2. Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(x - y)^3 = y^3 + y^2 + y + 1$

1.

Để ý rằng $(3n - 16) + (5n - 23) = 8n - 39$ là số lẻ nên trong 2 số $3n - 16$ và $5n - 23$ phải có 1 số là số chẵn. Hơn nữa, cả 2 số đó đều là số nguyên tố nên có 2 khả năng sau :

- $3n - 16 = 2 \Leftrightarrow n = 6$. Khi đó $4n - 21 = 5$ và $5n - 23 = 7$ đều là số nguyên tố $\Rightarrow n = 6$ là 1 giá trị cần tìm.
- $5n - 23 = 2 \Leftrightarrow n = 5$. Khi đó $4n - 21 = -1 \rightarrow$ loại

Vậy $n = 6$ là giá trị cần tìm của n

2.

Do $y \in \mathbb{Z}$ nên $y^2 \geq |y| \Rightarrow y^2 + y \geq 0$. Từ đó suy ra :

$$\begin{aligned}
 y^3 < y^3 + y^2 + y + 1 \leq (y+1)^3 &\Rightarrow (x-y)^3 = y^3 + y^2 + y + 1 = (y+1)^3 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^3 = (y+1)^3 \\ y^2 + y = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x-y = y+1 \\ y(y+1) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} y = -1 \\ x = -1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

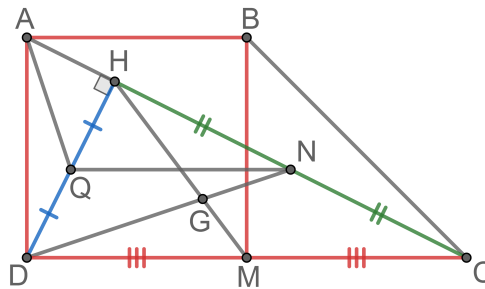
Vậy các cặp (x, y) cần tìm là $(x, y) \in \{(1, 0); (-1, -1)\}$

Bài 4 (3 điểm) ✓

Cho hình thang vuông $ABCD$ có $\widehat{A} = \widehat{D} = 90^\circ$ và $CD = 2AB = 2AD$. Kẻ $DH \perp AC$ ($H \in AC$). Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm của CD, HC và HD

1. Chứng minh rằng $\triangle BMC$ vuông cân
2. Chứng minh rằng $AQ \perp DN$
3. Gọi G là giao điểm của DN và HM . Chứng minh rằng :

$$4(HQ + HN)^2 = 9HG^2 + 8HQ \cdot HN$$



1.

Để dễ dàng chứng minh được $ABMD$ là hình vuông, từ đó suy ra $\triangle BMC$ vuông cân tại M

2.

NQ là đường trung bình của tam giác $CDH \Rightarrow NQ \parallel CD \Rightarrow NQ \perp AD$

$\Rightarrow Q$ là trực tâm của tam giác $ADN \Rightarrow AQ \perp DN$

3.

$$4(HQ + HN)^2 = 9HG^2 + 8HQ \cdot HN \Leftrightarrow 4(HQ^2 + HN^2) = 9HG^2 \quad (*)$$

Vì tam giác CDH vuông tại H và HM là đường trung tuyến nên $HM = \frac{CD}{2}$. Từ đó, vì G

là trọng tâm của $\triangle CDH \Rightarrow HG = \frac{2}{3}HM = \frac{CD}{3} \Rightarrow 9HG^2 = CD^2 \quad (**)$

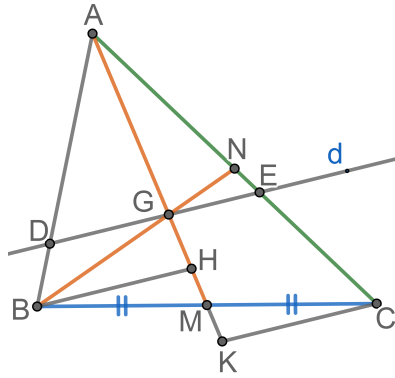
Theo Pytago ta có : $HD^2 + HC^2 = CD^2 \Rightarrow 4HQ^2 + 4HN^2 = CD^2 \quad (***)$

Từ $(**)$ và $(***)$ suy ra $(*)$ đúng.

Vậy $4(HQ + HN)^2 = 9HG^2 + 8HQ \cdot HN$

Bài 5 (1 điểm) ✓

1. Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Qua trọng tâm G của tam giác, kẻ đường thẳng d cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại D và E . Chứng minh rằng $\frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} = 3$
2. Cho 5 số nguyên dương đôi một khác nhau sao cho mỗi số không có ước số nguyên tố nào khác 2 và 3. Chứng minh rằng trong 5 số đó tồn tại 2 số mà tích của chúng là 1 số chính phương.



1.

Gọi AM và BN là 2 đường trung tuyến của tam giác ABC .

Kẻ BH, CK song song với DE ($H, K \in AM$). Theo Talet, ta có :

$$\frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} = \frac{AH}{AG} + \frac{AK}{AG} = \frac{AH + AK}{AG} \quad (*_1)$$

Mặt khác : $AH + AK = AM - MH + AM + MK = 2AM + MK - MH$

Để thấy $\triangle BMH = \triangle CMK$ (g.c.g) $\Rightarrow MH = MK \Rightarrow AH + AK = 2AM \quad (*_2)$

Từ $(*_1)$ và $(*_2)$ suy ra $\frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} = 2 \cdot \frac{AM}{AG} = 3$

2.

Gọi 5 số đã cho là x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 .

Từ giả thiết suy ra :

$$\begin{aligned} x_1 &= 2^{a_1} \cdot 3^{b_1} \\ x_2 &= 2^{a_2} \cdot 3^{b_2} \\ x_3 &= 2^{a_3} \cdot 3^{b_3} \\ x_4 &= 2^{a_4} \cdot 3^{b_4} \\ x_5 &= 2^{a_5} \cdot 3^{b_5} \quad (a_i, b_i \in \mathbb{N}, \forall i = \overline{1, 5}) \end{aligned}$$

Xét 5 số a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Theo nguyên lý Dirichle, tồn tại ít nhất 3 số cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Do đó, luôn chọn được 3 số mà tổng của 2 số bất kỳ trong 3 số là số chẵn. Không mất tính tổng quát, giả sử 3 số đó là a_1, a_2, a_3 .

Lại xét các số b_1, b_2, b_3 . Trong 3 số này, luôn tìm được 2 số có cùng tính chẵn lẻ, giả sử là b_1 và b_2 . Như thế ta có :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 \text{ chẵn} \\ b_1 + b_2 \text{ chẵn} \end{cases} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = 2^{a_1+a_2} \cdot 3^{b_1+b_2} \text{ là số chính phương}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

PHẦN
IV

HỌC SINH GIỎI HUYỆN 7

DANH SÁCH ĐỀ THI

1	Quế Võ 2014-2015	. 192
2	Quế Võ 2015-2016	. 196
3	Quế Võ 2017-2018	. 200
4	Thuận Thành 2011-2012	. 204
5	Thuận Thành 2012-2013	. 208
6	Thuận Thành 2013-2014	. 211
7	Thuận Thành 2015-2016	. 217
8	Thuận Thành 2016-2017	. 221

1 Quế Võ 2014-2015

Câu 1 (5 điểm) ✓

Tính hợp lý các biểu thức sau :

1. $27\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} - 13\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8}$

2. $2\left|\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right| + \sqrt{\frac{4}{9}}$

3. $\frac{2^2 \cdot 10 + 2^3 \cdot 6}{2^2 \cdot 15 - 2^4}$

1.

$$27\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} - 13\frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{8} \left(27\frac{1}{4} - 13\frac{1}{4} \right) = \frac{5}{8} \cdot 14 = \frac{35}{4}$$

2.

$$2\left|\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right| + \sqrt{\frac{4}{9}} = 2 \cdot \left|\frac{-1}{4}\right| + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

3.

$$\frac{2^2 \cdot 10 + 2^3 \cdot 6}{2^2 \cdot 15 - 2^4} = \frac{2^2 \cdot 10 + 2^2 \cdot 12}{2^2 \cdot 15 - 2^2 \cdot 4} = \frac{2^2 \cdot 22}{2^2 \cdot 11} = 2$$

Câu 2 (5 điểm) ✓

Tìm x biết :

1. $3(x-2) + \frac{2}{5} = 4$

2. $\left|x + \frac{1}{3}\right| - 5 = 7$

3. $(2x-1)^7 = (2x-1)^5$

1.

$$3(x-2) + \frac{2}{5} = 4 \Leftrightarrow 3x - 6 + \frac{2}{5} = 4 \Leftrightarrow 3x = 4 + 6 - \frac{2}{5} \Leftrightarrow 3x = \frac{48}{5} \Leftrightarrow x = \frac{16}{5}$$

Vậy $x = \frac{16}{5}$

2.

$$\left|x + \frac{1}{3}\right| - 5 = 7 \Leftrightarrow \left|x + \frac{1}{3}\right| = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{3} = 12 \\ x + \frac{1}{3} = -12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{35}{3} \\ x = -\frac{37}{3} \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{35}{3}$ hoặc $x = -\frac{37}{3}$

3.

$$(2x-1)^7 = (2x-1)^5 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \cdot [(2x-1)^2 - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ 2x-1=1 \\ 2x-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ x=1 \\ x=0 \end{cases}$$

Vậy $x = \frac{1}{2}$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = 0$

Câu 3 (3 điểm) ✓

- Cho a, b, c là 3 số thực khác 0 thỏa mãn điều kiện $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$
- Đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có a, b, c là các số nguyên và $a \neq 0$. Biết rằng với mọi giá trị nguyên của x thì $f(x)$ chia hết cho 7. Chứng minh rằng a, b, c chia hết cho 7.

1.

- Nếu $a+b+c=0$ thì $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = -2$, đồng thời ta có :

$$1 + \frac{b}{a} = 1 - \frac{c+a}{a} = -\frac{c}{a}; 1 + \frac{a}{c} = 1 - \frac{b+c}{c} = -\frac{b}{c}; 1 + \frac{c}{b} = 1 - \frac{a+b}{b} = -\frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow P = \left(-\frac{c}{a}\right) \cdot \left(-\frac{b}{c}\right) \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = -1$$

- Nếu $a+b+c \neq 0$ thì theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a+b-c=c \\ b+c-a=a \\ c+a-b=b \end{cases} \Rightarrow a=b=c \Rightarrow P=8$$

Vậy $P = -1$ khi $a+b+c=0$ và $P=8$ khi $a+b+c \neq 0$

2.

Vì $f(x)$ chia hết cho 7 với mọi giá trị nguyên của x nên :

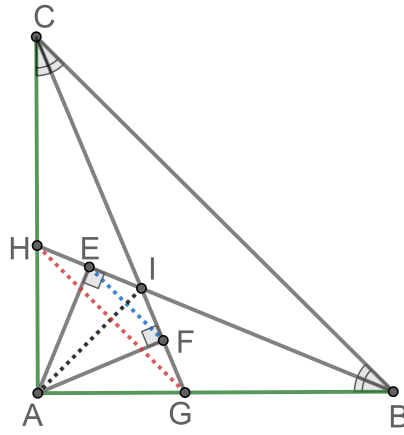
$$\begin{cases} f(0) \div 7 \\ f(1) \div 7 \\ f(-1) \div 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c \div 7 \\ a+b+c \div 7 \\ a-b+c \div 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c \div 7 \\ a+b \div 7 \\ a-b \div 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \div 7 \\ b \div 7 \\ c \div 7 \end{cases}$$

Vậy a, b, c đều chia hết cho 7

Câu 4 (6 điểm) ✓

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi I là giao điểm của đường phân giác trong góc B và góc C . E, F lần lượt là hình chiếu của A lên BI và CI .

- Chứng minh rằng $\triangle ABE = \triangle ACF$
- $\triangle EIF$ là tam giác gì ? Tại sao ?
- Chứng minh rằng $2EF^2 = AI^2$



1.

Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 45^\circ$

Mà BI và CI là 2 tia phân giác của $\triangle ABC \Rightarrow \widehat{ACI} = \widehat{ABI} = 22.5^\circ$ hay $\widehat{ABE} = \widehat{ACF}$

Xét 2 tam giác vuông ABE và ACF có $\begin{cases} AB = AC (gt) \\ \widehat{ABE} = \widehat{ACF} (cmt) \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle ACF$ (góc nhọn-cạnh góc vuông)

2.

Xét 2 tam giác vuông AIE và AIF có $\begin{cases} \text{Chung } AI \\ AE = AF (\triangle ABE = \triangle ACF) \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle AIE = \triangle AIF$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông)

$\Rightarrow IE = IF \Rightarrow \triangle EIF$ cân tại I

3.

Gọi $CI \cap AB \equiv G$ và $BI \cap AC \equiv H$

Vì BI và CI là các tia phân giác của $\triangle ABC \Rightarrow AI$ cũng là phân giác của $\triangle ABC \Rightarrow \widehat{IAB} = 45^\circ$

Mà $\widehat{FAB} = \widehat{ACI} = 22.5^\circ$ (2 góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)

$\Rightarrow FA$ là phân giác của $\widehat{IAB}$

Như vậy $\triangle AIG$ có AF vừa là đường cao, vừa là đường phân giác

$\Rightarrow \triangle AIG$ cân tại $A \Rightarrow \begin{cases} AI = AG \\ F \text{ là trung điểm của } IG \end{cases} \quad (*)$

Chứng minh tương tự ta cũng có $\begin{cases} AI = AH \\ E \text{ là trung điểm của } HI \end{cases} \quad (**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra EF là đường trung bình của $\triangle IHG \Rightarrow EF = \frac{HG}{2} \Rightarrow EF^2 = \frac{HG^2}{4} \quad (***)$

Xét tam giác HAG vuông tại A có $HG^2 = AG^2 + AH^2$.

Kết hợp $(*)$, $(**)$ suy ra $HG^2 = 2AI^2 \quad (***)$

Từ $(***)$ và $(***)$ suy ra $2EF^2 = AI^2$

Câu 5 (1 điểm) ✓

Viết số 2007 thành tổng của k hợp số. Tìm giá trị lớn nhất của k

Tách 2007 thành tổng của 500 hợp số như sau : $2007 = \underbrace{4 + 4 + \dots + 4}_{498 \text{ số } 4} + 6 + 9$

Bây giờ ta đi chứng minh $k \leq 500$. Giả sử ngược lại $k > 500$.

Vì 2007 là số lẻ nên trong k hợp số phải tồn tại 1 hợp số là số lẻ. Hợp số lẻ nhỏ nhất là 9,

do đó tổng của $k - 1$ hợp số còn lại phải nhỏ hơn hoặc bằng $2007 - 9 = 1998$. Mặt khác $k > 500 \Rightarrow k - 1 \geq 500 \Rightarrow$ trong $k - 1$ hợp số còn lại phải có số nhỏ hơn 4 vì nếu tất cả đều lớn hơn hoặc bằng 4 thì tổng của chúng sẽ lớn hơn hoặc bằng $500.4 = 2000 > 1998$ (mâu thuẫn) $\Rightarrow$ điều giả sử là sai.

Vậy $k \leq 500$, kết hợp với cách chia 2007 thành 500 hợp số ở trên suy ra giá trị lớn nhất của k là 500.

Câu 1 (4 điểm) ✓

Tính giá trị của các biểu thức sau :

$$1. A = \frac{3}{4} : \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9} \right) + \frac{9}{4}$$

$$2. B = \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20}$$

$$3. C = \left| \frac{4}{9} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right| + \left(0, (4) + \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{3}{7}}{\frac{2}{3} - \frac{4}{5} - \frac{6}{7}} \right)$$

1.

$$\begin{aligned} A &= \frac{3}{4} : \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{9} \right) + \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \left(\frac{6}{9} - \frac{5}{9} \right) + \frac{9}{4} \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} + \frac{9}{4} = \frac{1}{12} + \frac{27}{12} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{7}{3}$

2.

$$\begin{aligned} B &= \frac{4^5 \cdot 9^4 - 2 \cdot 6^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 6^8 \cdot 20} = \frac{2^{10} \cdot 3^8 - 2^{10} \cdot 3^9}{2^{10} \cdot 3^8 + 5 \cdot 3^8 \cdot 2^{10}} \\ &= \frac{2^{10} \cdot 3^8 (1 - 3)}{2^{10} \cdot 3^8 (1 + 5)} = \frac{1 - 3}{1 + 5} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vậy $B = -\frac{1}{3}$

3.

$$\begin{aligned} C &= \left| \frac{4}{9} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right| + \left(0, (4) + \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{3}{7}}{\frac{2}{3} - \frac{4}{5} - \frac{6}{7}} \right) = \left| \frac{4}{9} - \frac{1}{2} \right| + \left(\frac{4}{9} + \frac{\frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{3}{7}}{2 \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{5} - \frac{3}{7} \right)} \right) \\ &= \frac{1}{18} + \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{18} + \frac{17}{18} = 1 \end{aligned}$$

Vậy $C = 1$

Câu 2 (5 điểm) ✓

1. Tìm x biết :

$$a. 3\frac{1}{2} : |2x - 1| = \frac{21}{22}$$

$$b. 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} = 1080$$

2. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số hữu tỉ.

Chứng minh rằng $f(-2) \cdot f(3) \leq 0$ biết rằng $13a + b + 2c = 0$

1.

a.

$$3\frac{1}{2} : |2x - 1| = \frac{21}{22} \Leftrightarrow \frac{7}{2} : |2x - 1| = \frac{21}{22}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow |2x-1| &= \frac{7}{2} : \frac{21}{22} \\ \Leftrightarrow |2x-1| &= \frac{11}{3} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 = \frac{11}{3} \\ 2x-1 = -\frac{11}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $x = \frac{7}{3}$ hoặc $x = -\frac{4}{3}$

b.

$$\begin{aligned} 3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} &= 1080 \\ \Leftrightarrow 3^x(1 + 3 + 3^2 + 3^3) &= 1080 \\ \Leftrightarrow 3^x \cdot 40 &= 1080 \\ \Leftrightarrow 3^x &= 27 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \end{aligned}$$

Vậy $x = 3$

2.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} f(-2) = 4a - 2b + c \\ f(3) = 9a + 3b + c \end{cases}$$

Nhân thấy :

$$f(-2) + f(3) = 13a + b + 2c = 0$$

$$\Rightarrow f(-2) = -f(3)$$

$$\Rightarrow f(-2) \cdot f(3) = -[f(3)]^2 \leq 0$$

$$\text{Vậy } f(-2) \cdot f(3) \leq 0$$

Câu 3 (4 điểm) ✓

1. Cho $a + b + c = 2016$ và $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1}{2015}$.

Tính giá trị của biểu thức $S = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$

2. Cho 3 số a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{2014} = \frac{b}{2015} = \frac{c}{2016}$.

Chứng minh $(a-b)(b-c) = \frac{(c-a)^2}{4}$

1.

Từ giả thiết ta có :

$$\begin{aligned} (a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) &= \frac{2016}{2015} \\ \Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} &= \frac{2016}{2015} \\ \Leftrightarrow 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} &= \frac{2016}{2015} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 3 + S = \frac{2016}{2015}$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{2016}{2015} - 3 = -\frac{4029}{2015}$$

Vậy $S = -\frac{4029}{2015}$

2.

Đặt $\frac{a}{2014} = \frac{b}{2015} = \frac{c}{2016} = k$. Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$k = \frac{a}{2014} = \frac{b}{2015} = \frac{a-b}{2014-2015} \Rightarrow a-b = -k$$

$$k = \frac{b}{2015} = \frac{c}{2016} = \frac{b-c}{2015-2016} \Rightarrow b-c = -k$$

$$k = \frac{a}{2014} = \frac{c}{2016} = \frac{a-c}{2014-2016} \Rightarrow a-c = -2k$$

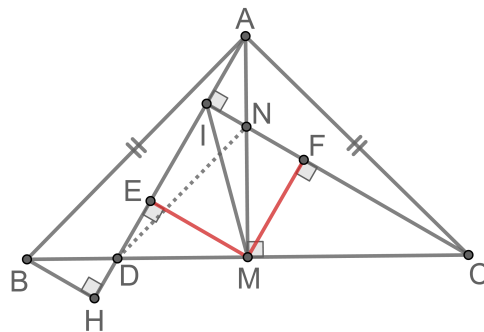
$$\text{Suy ra : } \begin{cases} (a-b)(b-c) = k^2 \\ (a-c)^2 = 4k^2 \end{cases} \Rightarrow (a-b)(b-c) = \frac{(c-a)^2}{4} = k^2$$

Vậy $(a-b)(b-c) = \frac{(c-a)^2}{4}$

Câu 4 (5 điểm) ✓

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . M là trung điểm của BC . Lấy điểm D thuộc đoạn MB . H và I theo thứ tự là hình chiếu của B và C xuống AD . Chứng minh rằng :

1. $BH = AI$
2. $BH^2 + CI^2$ có giá trị không thay đổi.
3. IM là phân giác của góc $\widehat{HIC}$



1.

Xét 2 tam giác ABH và CAI có : $\begin{cases} \widehat{BAH} = \widehat{ACI} (2 \text{ góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc}) \\ AB = AC (\text{vì } \triangle ABC \text{ cân tại } A) \end{cases}$

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle CAI (\text{cạnh huyền-góc nhọn}) \Rightarrow BH = AI$$

2.

Từ kết quả của câu 1., ta có : $BH^2 + CI^2 = AI^2 + CI^2 = AC^2 = \text{const}$

Vậy $BH^2 + CI^2$ có giá trị không thay đổi.

3.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $AM \perp BC$

Gọi $IC \cap AM \equiv N \Rightarrow N$ là trực tâm của $\triangle ADC \Rightarrow DN \perp AC \Rightarrow DN // AB \Rightarrow \widehat{NDB} = \widehat{ABC} = 45^\circ$

Tam giác MND vuông tại M và có $\widehat{NDB} = 45^\circ \Rightarrow \triangle MND$ vuông cân tại $M \Rightarrow MD = MN$

Dựng $ME \perp AD \equiv E$ và $MF \perp IC \equiv F$. Xét 2 tam giác vuông DEM và MNF có :

$$\begin{cases} MD = MN (\text{cmt}) \\ \widehat{MDE} = \widehat{MNF} (2 \text{ góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc}) \end{cases}$$

$\Rightarrow \triangle DEM = \triangle NFM$ (góc nhọn-cạnh góc vuông)

$\Rightarrow ME = MF$

$\Rightarrow MI$ là phân giác của $\widehat{HIC}$

Câu 5(2 điểm) ✓

1. Viết 2016 thành tổng của các số nguyên dương. Chứng minh rằng tổng các lập phương của các số nguyên đó chia hết cho 6.

2. Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ là số nguyên tố.

1.

Với $a \in \mathbb{Z}^+$ ta có : $a^3 - a = (a - 1).a.(a + 1)$

$a - 1, a, a + 1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên $(a - 1).a.(a + 1) : 6 \Rightarrow a^3 - a : 6$.

Giả sử tách 2016 thành tổng các số nguyên dương $2016 = a_1 + a_2 + \dots + a_k$. Khi đó :

$$\begin{aligned} & (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_k^3) - (a_1 + a_2 + \dots + a_k) \\ &= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + \dots + (a_k^3 - a_k) : 6 \end{aligned}$$

Mà $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 2016 : 6$ nên $a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_k^3 : 6$

Từ đó ta có điều phải chứng minh.

2.

Đặt $\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = p$, trong đó p là số nguyên tố. Ta có :

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = p \\ \Leftrightarrow & x^2 y^2 = p(x^2 + y^2) \\ \Leftrightarrow & x^2(y^2 - p) = py^2 \\ \Rightarrow & py^2 : x^2 \end{aligned}$$

Vì p là số nguyên tố nên $y^2 : x^2 \Rightarrow y \geq x$

Tương tự ta cũng chứng minh được $x \geq y$. Như vậy $\begin{cases} x \geq y \\ y \geq x \end{cases} \Rightarrow x = y$

Từ đó ta có $p = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{2}$. Do p là số nguyên tố nên phải có :

$$\begin{cases} x = 2k (k \in \mathbb{Z}^+) \\ p = 2k^2 \text{ là số nguyên tố} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy $(x, y) = (2, 2)$

Câu 1 (4 điểm) ✓

1. Tính hợp lý các biểu thức sau :

a. $\frac{7}{-25} + \frac{-18}{25} + \frac{4}{13} + \frac{5}{7} + \frac{9}{13}$ b. $\frac{7}{19} \cdot \frac{10}{35} + \frac{7}{35} \cdot \frac{9}{19} - \frac{2}{35}$ c. $\frac{2^4 \cdot 2^6}{(2^5)^2} - \frac{2^5 \cdot 15^3}{6^3 \cdot 10^2}$

2. Tính $\left(-\frac{2}{17}x^4y^5\right) \cdot \left(-\frac{34}{5}x^2y\right)$. Chứng tỏ biểu thức có giá trị không âm với mọi x, y

1.

a.

$$\frac{7}{-25} + \frac{-18}{25} + \frac{4}{13} + \frac{5}{7} + \frac{9}{13} = \left(\frac{-7}{25} + \frac{-18}{25}\right) + \left(\frac{4}{13} + \frac{9}{13}\right) + \frac{5}{7} = -1 + 1 + \frac{5}{7} = \frac{5}{7}$$

b.

$$\frac{7}{19} \cdot \frac{10}{35} + \frac{7}{35} \cdot \frac{9}{19} - \frac{2}{35} = \frac{7 \cdot 10 + 7 \cdot 9 - 2 \cdot 19}{35 \cdot 19} = \frac{7 \cdot 19 - 2 \cdot 19}{35 \cdot 19} = \frac{5 \cdot 19}{35 \cdot 19} = \frac{1}{7}$$

c.

$$\frac{2^4 \cdot 2^6}{(2^5)^2} - \frac{2^5 \cdot 15^3}{6^3 \cdot 10^2} = \frac{2^{10}}{2^{10}} - \frac{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^3}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = 1 - \frac{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^3}{2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

2.

$$\left(-\frac{2}{17}x^4y^5\right) \cdot \left(-\frac{34}{5}x^2y\right) = \left(-\frac{2}{17} \cdot -\frac{34}{5}\right)(x^4 \cdot x^2)(y^5 \cdot y) = \frac{4}{5}x^6y^6 \geq 0 \quad \forall x, y$$

Câu 2 (6 điểm) ✓

1. Tính hợp lý các biểu thức sau :

a. $\left|\frac{39}{2} - 3x^2\right| = \frac{15}{2}$ b. $3 + 2^{x-3} = 24 - [4^2 - (2^2 - 1)]$
c. $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$

2. Cho x, y là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{x+2y}{x+y} = \frac{2019}{2018}$. Tính giá trị nhỏ nhất của x

1.

a.

$$\left|\frac{39}{2} - 3x^2\right| = \frac{15}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{39}{2} - 3x^2 = \frac{15}{2} \\ \frac{39}{2} - 3x^2 = -\frac{15}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ x^2 = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

b.

$$3 + 2^{x-3} = 24 - [4^2 - (2^2 - 1)] \Leftrightarrow 3 + 2^{x-3} = 24 - (16 - 3)$$

$$\Leftrightarrow 3 + 2^{x-3} = 11$$

$$\Leftrightarrow 2^{x-3} = 8$$

$$\Leftrightarrow x - 3 = 3$$

$$\Leftrightarrow x = 6$$

c.

Đặt $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} = k$ thì ta cũng có $\frac{5+15y}{60} = \frac{4+20y}{20x} = \frac{5+35y}{20x} = k$
 Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau thì :

$$k = \frac{5+15y}{60} = \frac{4+20y}{20x} = \frac{5+35y}{20x} = \frac{5+15y+4+20y-(5+35y)}{60+20x-20x} = \frac{4}{60} = \frac{1}{15}$$

2.

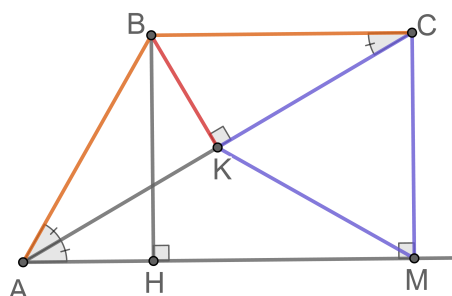
$$\frac{x+2y}{x+y} = \frac{2019}{2018} \Leftrightarrow 1 + \frac{y}{x+y} = 1 + \frac{1}{2018} \Leftrightarrow \frac{x+y}{y} = 2018 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = 2017 \Leftrightarrow x = 2017y$$

Vì y nguyên dương nên $y \geq 1$. Do đó, x nhỏ nhất bằng 2017 khi $y = 1$

Câu 3 (6 điểm) ✓

Cho $\widehat{xAy} = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H , kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay . Bt cắt Az tại C . Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại M .

1. Chứng minh tam giác ABC cân tại B và K là trung điểm của AC
2. Chứng minh tam giác KMC đều
3. Cho $BK = 2\text{cm}$. Tính các cạnh của tam giác AKM



1.

Vì $BC \parallel AM \Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{CAM}$

Mà $\widehat{CAM} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BCA} \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại B

BK là đường cao của tam giác $ABC \Rightarrow BK$ cũng là đường trung tuyến của $\triangle ABC$

$\Rightarrow K$ là trung điểm của AC

2.

Tam giác AMC vuông tại M có MK là đường trung tuyến nên $MK = KC$

$\Rightarrow \triangle KMC$ cân tại K (*).

Hơn nữa cũng trong tam giác vuông AMC có $\widehat{CAM} = \frac{\widehat{BAM}}{2} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ACM} = 60^\circ$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra tam giác KMC đều.

3.

$\triangle ABK$ vuông tại K có $\widehat{BAK} = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BK = 4cm$

Theo pitago $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \Rightarrow KM = AK = 2\sqrt{3}$

$\triangle BCM = \triangle MHB \Rightarrow HM = BC = AB = 4cm$

Tam giác ABH vuông tại H có $\widehat{ABH} = 30^\circ \Rightarrow AH = \frac{AB}{2} = 2cm$

Từ đó suy ra $AM = AH + HM = 2 + 4 = 6cm$

Vậy các cạnh của tam giác AKM là $AK = KM = 2\sqrt{3}cm$ và $AM = 6cm$

Câu 4 (4 điểm) ✓

1. Tìm số nguyên x để A có giá trị nguyên biết : $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} \quad (x \geq 0)$

2. Chứng minh rằng $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{121}} > 11$

3. Cho dãy gồm 5 số tự nhiên bất kỳ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 . Chứng minh rằng tồn tại 1 số chia hết cho 5 hoặc tổng của 1 số số liên tiếp trong dãy đã cho chia hết cho 5.

1.

Ta có

$$A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3} \quad (\text{ĐK } 0 \leq x \neq 9)$$

$$A \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z}$$

Chú ý rằng : căn bậc 2 của 1 số nguyên dương hoặc là 1 số nguyên hoặc là số vô tỉ.

Do đó $\frac{4}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x}-3 \in U(4) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Ta có bảng sau :

$\sqrt{x}-3$	-4	-2	-1	1	2	4
x	$\emptyset$	1	4	16	25	49

Vậy $x \in \{1, 4, 16, 25, 49\}$

2.

Ta có :

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{121}} > \frac{1}{\sqrt{121}} + \frac{1}{\sqrt{121}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{121}} = 121 \cdot \frac{1}{\sqrt{121}} = 11$$

3.

Xét dãy gồm 5 số hạng sau :

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

- Nếu tồn tại $S_i (i = \overline{1, 5})$ chia hết cho 5 thì bài toán được chứng minh.
- Nếu S_i không chia hết cho 5 với mọi $i = \overline{1, 5}$ thì theo nguyên lý Dirichle, tồn tại 2 số S_m, S_n với $m < n; m, n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ có cùng số dư khi chia cho 5. Suy ra $S_n - S_m$ chia hết cho 5. Mặt khác $S_n - S_m$ cho ta tổng của $n - m$ số liên tiếp của dãy a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 .

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 1 (3 điểm) ✓

Tìm x biết $\left[\frac{3,75 : \frac{1}{4} - 6\frac{2}{3} \cdot 0,3}{4\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{5}} - \frac{\left(\frac{3}{20} + 0,5 - \frac{1}{15}\right) \cdot 2\frac{1}{7}}{1,05 + 0,95} \right] \cdot x = 11\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{3,75 : \frac{1}{4} - 6\frac{2}{3} \cdot 0,3}{4\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{5}} - \frac{\left(\frac{3}{20} + 0,5 - \frac{1}{15}\right) \cdot 2\frac{1}{7}}{1,05 + 0,95} \right] \cdot x = \frac{47}{4} \\ \Leftrightarrow & \left[\frac{\frac{15}{4} : \frac{1}{4} - \frac{20}{3} \cdot 0,3}{\frac{21}{5} \cdot \frac{2}{7} + \frac{4}{5}} - \frac{\left(\frac{9}{60} + \frac{30}{60} - \frac{4}{60}\right) \cdot \frac{15}{7}}{2} \right] \cdot x = \frac{47}{4} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{15-2}{2} - \frac{\frac{5}{4}}{2} \right) \cdot x = \frac{47}{4} \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{13}{2} - \frac{5}{8} \right) \cdot x = \frac{47}{4} \\ \Leftrightarrow & \frac{47}{8} \cdot x = \frac{47}{4} \\ \Leftrightarrow & x = \frac{47}{4} : \frac{47}{8} \\ \Leftrightarrow & x = 2 \end{aligned}$$

Vậy $x = 2$

Câu 2 (3.5 điểm) ✓

Tìm x, y, z biết $\frac{12x-15y}{7} = \frac{20z-12x}{9} = \frac{15y-20z}{11}$ và $x+y+z=48$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\begin{aligned} & \frac{12x-15y}{7} = \frac{20z-12x}{9} = \frac{15y-20z}{11} = \frac{12x-15y+20z-12x+15y-20z}{7+9+11} = 0 \\ \Rightarrow & 12x-15y=20z-12x=15y-20z=0 \\ \Leftrightarrow & 12x=15y=20z \\ \Leftrightarrow & \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} \end{aligned}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta lại có :

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{5+4+3} = \frac{48}{12} = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 16 \\ z = 12 \end{cases}$$

Vậy $x = 20, y = 16$ và $z = 12$

Câu 3 (2.5 điểm) ✓

Tìm đa thức $f(x)$ rồi tìm nghiệm của $f(x)$ biết rằng :

$$x^3 + 2x^2(4y - 1) - 4xy^2 - 9y^3 - f(x) = -5x^3 + 8x^2y - 4xy^2 - 9y^3$$

Ta có :

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2(4y - 1) - 4xy^2 - 9y^3 - f(x) &= -5x^3 + 8x^2y - 4xy^2 - 9y^3 \\ \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - f(x) &= -5x^3 \\ \Leftrightarrow f(x) &= 6x^3 - 2x^2 \end{aligned}$$

Ta có :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow 6x^3 - 2x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2x^2(3x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x - 1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $f(x)$ có 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = \frac{1}{3}$

Câu 4 (5 điểm) ✓

Một người dùng $\frac{4}{11}$ số vốn của mình để kinh doanh và lãi được 12%. Dùng $\frac{5}{11}$ số vốn của mình để kinh doanh khác người ấy lãi được 10%. Số vốn còn lại, người ấy bị lỗ trong loại kinh doanh thứ 3 là 8%. Tính cả 3 loại kinh doanh, người ấy lãi 2 296 000 đồng. Hỏi số vốn của người ấy là bao nhiêu ?

Gọi số vốn của người đó là x (đồng). Theo giả thiết ta có :

- Dùng $\frac{4}{11}$ số vốn của mình để kinh doanh người đó lãi số tiền là : $\frac{4}{11} \cdot x \cdot 12\% = \frac{12}{275}x$
- Dùng $\frac{5}{11}$ số vốn của mình để kinh doanh người đó lãi số tiền là : $\frac{5}{11} \cdot x \cdot 10\% = \frac{1}{22}x$
- Dùng số vốn còn lại để kinh doanh người đó lỗ số tiền là : $\left(1 - \frac{4}{11} - \frac{5}{11}\right) \cdot x \cdot 8\% = \frac{4}{275}x$

Như vậy, tính cả 3 loại kinh doanh, người đó lãi số tiền là :

$$\frac{12}{275}x + \frac{1}{22}x - \frac{4}{275}x = \frac{41}{550}x$$

Theo bài ra ta có : $\frac{41}{550}x = 2296000 \Leftrightarrow x = 30800000$

Vậy số vốn của người đó là 30 800 000 (đồng)

Câu 5 (6 điểm) ✓

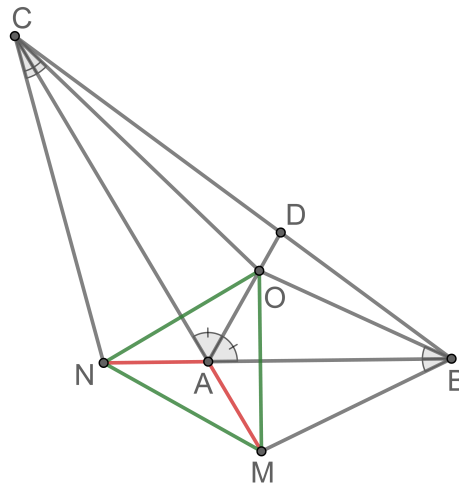
1. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ$, phân giác AD . Trên tia AD lấy điểm O . Trên tia đối của AC lấy điểm M sao cho $\widehat{ABM} = \widehat{ABO}$. Trên tia đối của AB lấy điểm N sao cho $\widehat{ACN} = \widehat{ACO}$. Chứng minh rằng :

- $AM = AN$
- $\triangle MON$ là tam giác đều

2. Cho tam giác ABC vuông cân ở A . Qua A vẽ đường thẳng d thay đổi. Vẽ BD và CE vuông góc với d ($D, E \in d$). Chứng minh rằng tổng $BD^2 + CE^2$ không thay đổi.

1.

a.



Xét tam giác ABC có $\widehat{B} + \widehat{C} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ$

Từ đó suy ra $\widehat{CAO} = \widehat{BAO} = \widehat{BAM} = \widehat{CAN} = 60^\circ$

Xét 2 tam giác ABO và ABM có $\begin{cases} \text{Chung } AB \\ \widehat{ABO} = \widehat{ABM} \text{ (gt)} \\ \widehat{BAO} = \widehat{BAM} = 60^\circ \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \triangle ABO = \triangle ABM \text{ (g.c.g)}$

$\Rightarrow AM = AO \quad (*)$

Chứng minh tương tự ta có $\triangle ACO = \triangle ACN \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AN = AO \quad (**)$

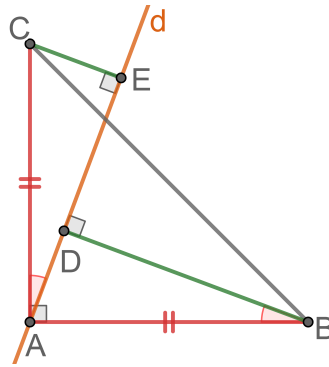
Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $AM = AN$

b.

Ta có $\triangle MAO = \triangle NAO = \triangle MAN \Rightarrow MO = NO = MN \Rightarrow \triangle MON$ đều.

2.

Xét 2 tam giác ABD và ACE có :



$$\begin{cases} AB = AC \text{ (gt)} \\ \widehat{ABD} = \widehat{CAE} \text{ (2 góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle CAE \text{ (cạnh huyền-góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow AD = CE$$
 Do đó $BD^2 + CE^2 = BD^2 + AD^2 = AB^2 = \text{const}$
 Vậy $BD^2 + CE^2$ không thay đổi.

Câu 1 (2 điểm) ✓

Tính giá trị các biểu thức sau :

1. $A = 3^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{1}{2}$

2. $B = (1 + 2 + \dots + 90) \cdot (12.34 - 6.68) : \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right)$

1.

$$\begin{aligned} A &= 3^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2 : \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \frac{1}{2} \\ &= 3^2 - \frac{9^2}{4^2} : \frac{3^3}{4^3} + \frac{1}{2} \\ &= 3^2 - \frac{3^4}{4^2} \cdot \frac{4^3}{3^3} + \frac{1}{2} \\ &= 9 - 3 \cdot 4 + \frac{1}{2} \\ &= -3 + \frac{1}{2} \\ &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

2. Vì $12.34 - 6.68 = 0$ nên $B = 0$

Câu 2 (2 điểm) ✓

1. Tìm x biết $|2x - 6| + 5 = 9$

2. Cho x, y, z là các số khác 0 và thỏa mãn $x^2 = yz, y^2 = zx, z^2 = xy$.
Chứng minh rằng $x = y = z$

1.

$$\begin{aligned} |2x - 6| + 5 &= 9 \\ \Leftrightarrow |2x - 6| &= 4 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 6 = 4 \\ 2x - 6 = -4 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

2.

$$\text{Từ } \begin{cases} x^2 = yz \\ y^2 = zx \end{cases} \Rightarrow z = \frac{x^2}{y} = \frac{y^2}{x} \Rightarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x = y$$

Tương tự và suy ra $x = y = z$

Câu 3 (2 điểm) ✓

Cho 2 đa thức :

$$P(x) = x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 6$$

$$Q(x) = 3x^4 + x^5 - 2(x^3 + 4) - 10x^2 + 9x$$

1. Tính $H(x) = P(x) - Q(x)$
2. Chứng tỏ rằng $H(x) \neq 2012$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$

1.

$$\begin{aligned} H(x) &= P(x) - Q(x) \\ &= (x^5 - 2x^3 + 3x^4 - 9x^2 + 11x - 6) - (3x^4 + x^5 - 2(x^3 + 4) - 10x^2 + 9x) \\ &= x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

2. Với $x \in \mathbb{Z}$, xảy ra 2 khả năng sau :

- Nếu x là số lẻ thì $H(x) = x^2 + 2x + 2$ là số lẻ $\Rightarrow H(x) \neq 2012$
- Nếu x là số chẵn thì $\begin{cases} x^2 : 4 \\ 2x : 4 \\ 2 \not: 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x + 2 \not: 4 \Rightarrow H(x) \neq 2012$

Vậy $H(x) \neq 2012$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$

Câu 4 (3 điểm) ✓

Cho tam giác ABC ($AB < AC$). M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $MA = ME$.

1. Chứng minh rằng $AC = BE$ và $AC \parallel BE$
2. Gọi I là điểm trên đoạn AC , K là điểm trên đoạn BE sao cho $AI = EK$. Chứng minh M, I, K thẳng hàng.
3. Từ E kẻ $EH \perp BC$ ($H \in BC$). Biết $\widehat{HBE} = 50^\circ$, $\widehat{MEB} = 25^\circ$. Tính $\widehat{HEM}$ và $\widehat{BME}$

1.

$$\begin{aligned} \text{Xét 2 tam giác } AMC \text{ và } EMB \text{ có } & \begin{cases} AM = ME \text{ (gt)} \\ CM = MB \text{ (gt)} \\ \widehat{AMC} = \widehat{EMB} \text{ (đối đỉnh)} \end{cases} \\ \Rightarrow \triangle AMC = \triangle EMB \text{ (c.g.c)} \Rightarrow & \begin{cases} AC = BE \\ \widehat{CAM} = \widehat{BEM} \Rightarrow AC \parallel BE \end{cases} \end{aligned}$$

2.

$$\text{Xét 2 tam giác } AIM \text{ và } KEM \text{ có } \begin{cases} AM = ME \text{ (gt)} \\ AI = KE \text{ (gt)} \\ \widehat{IAM} = \widehat{KEM} \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \widehat{AMI} = \widehat{EMK}$$

Mà 2 góc này ở vị trí đối đỉnh $\Rightarrow I, M, K$ thẳng hàng.


$$\widehat{MBE} + \widehat{MEB} + \widehat{BME} = 180^\circ$$
$$\Rightarrow \widehat{BME} = 180^\circ - \widehat{MBE} - \widehat{MEB} = 180^\circ - 50^\circ - 25^\circ = 105^\circ$$
$$\widehat{BME} = \widehat{EHM} + \widehat{HEM}$$

$$\Rightarrow \widehat{HEM} = \widehat{BME} - \widehat{EHM} = 105^\circ - 90^\circ = 15^\circ$$

Tìm $x, y \in \mathbb{N}$ biết $36 - y^2 = 8(x - 2010)^2$

$$\Leftrightarrow 9 - k^2 = 2(x - 2010)^2$$

+ Nếu $k = 1 \Rightarrow y = 2$, đồng thời $(x - 2010)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2010 = 2 \\ x - 2010 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2012 \\ x = 2008 \end{cases}$

$$\text{Vậy } (x, y) \in \{(2, 2012); (2, 2008); (6, 2010)\}$$

Câu 1 (5 điểm) ✓

Tính :

$$1. \left[3\frac{1}{2} - 0,5 : \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right] \left[\left(2 + 2\frac{1}{3} \right) . 0,75 \right]$$

$$2. \frac{8}{9} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} \right)$$

$$3. \left(\frac{5}{9.13} + \frac{7}{9.25} + \frac{13}{19.25} + \frac{31}{19.69} \right) : \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{69} \right)$$

1. Ta có :

$$\begin{aligned} & \left[3\frac{1}{2} - 0,5 : \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right] \left[\left(2 + 2\frac{1}{3} \right) . 0,75 \right] \\ &= \left(\frac{7}{2} - \frac{1}{2} : \frac{13}{30} \right) \left[\left(2 + \frac{7}{3} \right) . \frac{3}{4} \right] \\ &= \left(\frac{7}{2} - \frac{15}{13} \right) . \frac{13}{3} . \frac{3}{4} \\ &= \frac{61}{26} . \frac{13}{4} = \frac{61}{8} \end{aligned}$$

2. Ta có :

$$\begin{aligned} & \frac{8}{9} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42} + \frac{1}{56} + \frac{1}{72} \right) \\ &= \frac{8}{9} - \left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{8.9} \right) \\ &= \frac{8}{9} - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) \\ &= \frac{8}{9} - \left(1 - \frac{1}{9} \right) \\ &= \frac{8}{9} - \frac{8}{9} = 0 \end{aligned}$$

3. Ta có :

$$\begin{aligned} \frac{5}{9.13} + \frac{7}{9.25} + \frac{13}{19.25} + \frac{31}{19.69} &= \frac{9}{9.13} - \frac{4}{9.13} + \frac{16}{9.25} - \frac{9}{9.25} + \frac{19}{19.25} - \frac{6}{19.25} + \frac{50}{19.69} - \frac{19}{19.69} \\ &= \frac{1}{13} - \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \frac{1}{9} - \frac{1}{25} - \frac{1}{25} + \frac{1}{25} - \frac{1}{19} + \frac{1}{25} + \frac{1}{19} - \frac{1}{69} - \frac{1}{69} \\ &= 2 \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{69} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \left(\frac{5}{9.13} + \frac{7}{9.25} + \frac{13}{19.25} + \frac{31}{19.69} \right) : \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{69} \right) = 2$$

Câu 2 (4 điểm) ✓

1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10.
2. Tìm số tự nhiên n biết: $\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdots \frac{62}{126} \cdot \frac{63}{128}$

1.

Ta có:

$$\begin{aligned} 3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n &= 3^2(3^n - 2^n) + (3^n - 2^n) \\ &= 10(3^n - 2^n) : 10 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

Vậy $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ chia hết cho 10 với mọi số nguyên dương n **2.**

Ta có:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdots \frac{62}{126} \cdot \frac{63}{128} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2 \cdot 4} \cdots \frac{62}{2 \cdot 63} \cdot \frac{63}{2 \cdot 64} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{63} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{62}{63} \cdot \frac{63}{64} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{63} \cdot \frac{1}{64} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{63} \cdot \frac{1}{2^6} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{69} \\ \Leftrightarrow n &= 69 \end{aligned}$$

Vậy $n = 69$ **Câu 3 (5 điểm) ✓**

1. Tìm x, y, z biết $\begin{cases} x : y : z = 3 : 4 : 5 \\ 2x^2 + 2y^2 - 3z^2 = -100 \end{cases}$
2. Ba đồng khoai có tổng cộng 196 kg. Nếu lấy đi $\frac{1}{3}$ số khoai ở đồng thứ nhất, $\frac{1}{4}$ số khoai ở đồng thứ hai và $\frac{1}{5}$ số khoai ở đồng thứ ba thì số khoai còn lại của 3 đồng bằng nhau. Tính số khoai ở mỗi đồng lúc đầu.

1.

Ta có

$$x : y : z = 3 : 4 : 5 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = k \quad (*)$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} \frac{x^2}{9} = \frac{2x^2}{18} = k^2 \\ \frac{y^2}{16} = \frac{2y^2}{32} = k^2 \\ \frac{z^2}{25} = \frac{3z^2}{75} = k^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2x^2}{18} = \frac{2y^2}{32} = \frac{3z^2}{75} = k^2$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$k^2 = \frac{2x^2}{18} = \frac{2y^2}{32} = \frac{3z^2}{75} = \frac{2x^2 + 2y^2 - 3z^2}{18 + 32 - 75} = \frac{-100}{-25} = 4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -2 \end{cases}$$

• Nếu $k = 2$ thay vào (*) ta có $\begin{cases} x = 6 \\ y = 8 \\ z = 10 \end{cases}$

• Nếu $k = -2$ thay vào (*) ta có $\begin{cases} x = -6 \\ y = -8 \\ z = -10 \end{cases}$

Vậy $(x, y, z) = (6, 8, 10)$ hoặc $(x, y, z) = (-6, -8, -10)$

2.

Gọi số khoai của đồng khoai thứ nhất, thứ 2 và thứ 3 lần lượt là x, y, z (kg).

Theo giả thiết ta có $x + y + z = 196$ và :

$$\begin{aligned} x - \frac{x}{3} &= y - \frac{y}{4} = z - \frac{z}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{2x}{3} &= \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{18} &= \frac{y}{16} = \frac{z}{15} \end{aligned}$$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được :

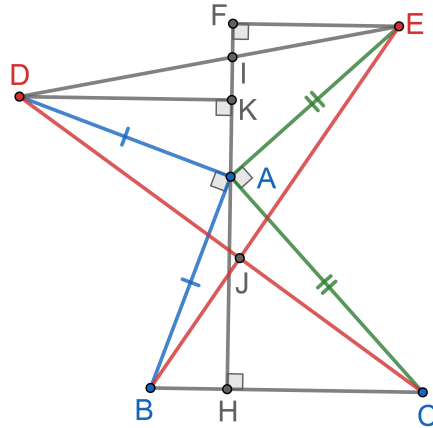
$$\begin{aligned} \frac{x}{18} &= \frac{y}{16} = \frac{z}{15} = \frac{x + y + z}{18 + 16 + 15} = \frac{196}{49} = 4 \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 4.18 = 72 \\ y = 4.16 = 64 \\ z = 4.15 = 60 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy số khoai ở 3 đồng thứ nhất, thứ 2 và thứ 3 lần lượt là 72 kg, 64 kg và 60 kg.

Câu 4 (4.5 điểm) ✓

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn. Vẽ đoạn thẳng $AD \perp AB$ và $AD = AB$ (D và C nằm khác phía đối với AB). Vẽ đoạn thẳng $AE \perp AC$ và $AE = AC$ (E và B nằm khác phía đối với AC). Kẻ $AH \perp BC$, $DK \perp AH$, $EF \perp AH$. Chứng minh rằng :

1. $DK = AH$ và $BE = DC$
2. $DC \perp BE$
3. DE đi qua trung điểm của KF



1.

Xét 2 tam giác vuông ABH và ADK có :

$$\begin{cases} AB = AD \text{ (GT)} \\ \widehat{ADK} = \widehat{ABH} \text{ (2 góc nhọn có cạnh tương ứng vuông góc)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle DAK \text{ (góc nhọn-cạnh góc vuông)}$$

$$\Rightarrow AH = DK$$

Xét 2 tam giác ABE và ADC có :

$$\begin{cases} AB = AD \text{ (GT)} \\ AE = AC \text{ (GT)} \\ \widehat{BAE} = \widehat{DAC} (= 90^\circ + \widehat{BAC}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle ADC \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BE = DC$$

2.

Gọi J là giao điểm của BE và DC . Xét 2 tam giác ABE và JBC ta có :

$$\begin{cases} \widehat{ABE} + \widehat{BAE} + \widehat{AEB} = 180^\circ & (*) \\ \widehat{JBC} + \widehat{BJC} + \widehat{BCJ} = 180^\circ & (**) \end{cases} \quad (\text{ĐL})$$

$$\text{Từ } (*) \text{ suy ra : } \widehat{ABE} + \widehat{BAC} + \widehat{AEB} = 90^\circ. \text{ Mà } \begin{cases} \widehat{BAC} = 180^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) \\ \widehat{AEB} = \widehat{ACD} \text{ (Vì } \triangle ABE = \triangle ADC) \end{cases}$$

Suy ra :

$$180^\circ + \widehat{ABE} + \widehat{ACD} - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 90^\circ$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (\widehat{ABC} - \widehat{ABE}) + (\widehat{ACB} - \widehat{ACD}) = 90^\circ \\ &\Leftrightarrow \widehat{JBC} + \widehat{JCB} = 90^\circ \quad (***) \end{aligned}$$

Thay (**) vào (**) suy ra $\widehat{BJC} = 90^\circ \Rightarrow BE \perp DC$

3.

Theo kết quả câu 1., ta có : $\triangle ABH = \triangle DAK \Rightarrow AH = DK (*)$

Chứng minh tương tự ta cũng có $\triangle ACH = \triangle EAF \Rightarrow AH = EF (*)$

Từ (*) và (*) suy ra $DK = EF$.

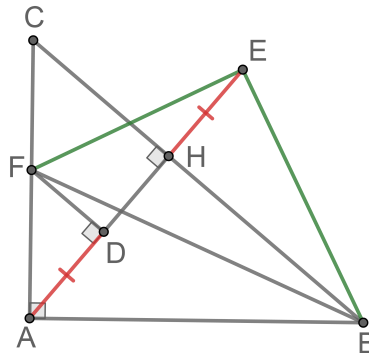
Gọi I là giao điểm của ED và FK . Xét 2 tam giác vuông DIK và EIF có :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} DK = EF (\text{cmt}) \\ \widehat{KDI} = \widehat{FEI} (\text{So le trong}) \end{cases} \\ &\Rightarrow \triangle DIK = \triangle EIF (\text{góc nhọn-cạnh góc vuông}) \\ &\Rightarrow KI = FI \\ &\Rightarrow I \text{ là trung điểm của } KF \end{aligned}$$

Vậy DE đi qua trung điểm của KF .

Câu 5 (1.5 điểm) ✓

Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH và điểm D nằm giữa A và H . Trên tia đối của HA lấy điểm E sao cho $HE = AD$. Đường thẳng vuông góc với AH tại D cắt AC tại F . Chứng minh rằng $EB \perp EF$



Áp dụng định lý Pytago cho các tam giác vuông EFD và EBH ta có :

$$\begin{aligned} EF^2 &= ED^2 + FD^2 \\ BE^2 &= BH^2 + HE^2 \\ \Rightarrow EF^2 + BE^2 &= ED^2 + FD^2 + BH^2 + HE^2 \quad (*) \end{aligned}$$

Mặt khác theo giả thiết $HE = AD \Rightarrow DE = AH$. Từ đó thay vào (*) ta có :

$$EF^2 + BE^2 = AH^2 + FD^2 + BH^2 + AD^2 = (AH^2 + BH^2) + (FD^2 + AD^2) \quad (**)$$

Lại áp dụng định lý Pytago cho 2 tam giác vuông ABH và AFD ta có :

$$\begin{aligned} AH^2 + BH^2 &= AB^2 \\ FD^2 + AD^2 &= AF^2 \end{aligned}$$

Thay vào (**), suy ra : $EF^2 + BE^2 = AB^2 + AF^2$

Mà tam giác FAB vuông tại A nên $AB^2 + AF^2 = FB^2$ (Pytago)

Suy ra : $EF^2 + BE^2 = FB^2 \Rightarrow \triangle EFB$ vuông tại E (Pytago đảo)

Vậy $EB \perp EF$

Câu 1 (6 điểm) ✓

1. Tìm x biết :

a. $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3$

b. $|3x - 5| = 4$

c. $5^x + 5^{x+2} = 650$

2. Tìm 3 số a, b, c biết $\frac{3a-2b}{5} = \frac{2c-5a}{3} = \frac{5b-3c}{2}$ và $a+b+c = -50$

1.

a.

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} : x = -3 \Leftrightarrow \frac{1}{4} : x = -3 - \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4} : x = -\frac{15}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} : \left(-\frac{15}{4}\right) \Leftrightarrow x = -\frac{1}{15}$$

Vậy $x = -\frac{1}{15}$

b.

$$|3x - 5| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5 = 4 \\ 3x - 5 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 9 \\ 3x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy $x = 3$ hoặc $x = \frac{1}{3}$

c.

$$5^x + 5^{x+2} = 650 \Leftrightarrow 5^x(1 + 5^2) = 650 \Leftrightarrow 5^x \cdot 26 = 650 \Leftrightarrow 5^x = 25 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy $x = 2$

2.

Đặt $k = \frac{3a-2b}{5} = \frac{2c-5a}{3} = \frac{5b-3c}{2}$. Khi đó ta có :

$$\begin{aligned} k &= \frac{5(3a-2b)}{25} = \frac{3(2c-5a)}{9} = \frac{2(5b-3c)}{4} \\ &= \frac{15a-10b}{25} = \frac{6c-15a}{9} = \frac{10b-6c}{4} \end{aligned}$$

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$k = \frac{15a-10b}{25} = \frac{6c-15a}{9} = \frac{10b-6c}{4} = \frac{15a-10b+6c-15a+10b-6c}{25+9+4} = \frac{0}{38} = 0$$

Từ đó suy ra $3a - 2b = 2c - 5a = 5b - 3c = 0 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$

Lại áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được :

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = \frac{a+b+c}{2+3+5} = \frac{-50}{5} = -5 \Rightarrow \begin{cases} a = -10 \\ b = -15 \\ c = -25 \end{cases}$$

Vậy $a = -10, b = -15, c = -25$

Câu 2 (6 điểm) ✓

1. Cho $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$ và $a + b + c \neq 0$. Tính $\frac{b^5 c^{2011}}{a^{2016}}$

2. Số A được chia thành 3 số tỉ lệ theo $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6}$. Biết rằng tổng các bình phương của 3 số đó bằng 24309. Tìm A

1.

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{b+c+a} = 1 \text{ (vì } a+b+c \neq 0) \\ \Rightarrow a = b = c$$

Từ đó $\frac{b^5 c^{2011}}{a^{2016}} = 1$

2.

Giả sử số A được chia làm 3 số x, y, z theo tỉ lệ đã cho. Tức là $A = x + y + z$ và :

$$x : y : z = \frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{1}{6} \Rightarrow x : \frac{2}{5} = y : \frac{3}{4} = z : \frac{1}{6} \\ \Rightarrow \frac{x}{24} = \frac{y}{45} = \frac{z}{10} = k$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$k^2 = \left(\frac{x}{24}\right)^2 = \left(\frac{y}{45}\right)^2 = \left(\frac{z}{10}\right)^2 \\ = \frac{x^2}{576} = \frac{y^2}{2025} = \frac{z^2}{100} \\ = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{576 + 2025 + 100} \\ = \frac{24309}{2701} = 9 \\ \Rightarrow k = 3 \text{ hoặc } k = -3$$

• Nếu $k = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 72 \\ y = 135 \\ z = 30 \end{cases} \Rightarrow A = 72 + 135 + 30 = 237$

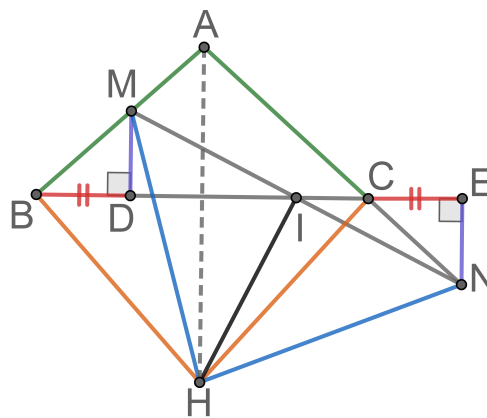
• Nếu $k = -3 \Rightarrow \begin{cases} x = -72 \\ y = -135 \\ z = -30 \end{cases} \Rightarrow A = -72 - 135 - 30 = -237$

Vậy $A = 237$ hoặc $A = -237$

Câu 3 (5 điểm) ✓

Cho tam giác ABC cân tại A . Trên cạnh BC lấy điểm D . Trên tia đối của tia CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB và AC lần lượt tại M và N .

1. So sánh DM và EN
2. Đường thẳng BC cắt MN tại I . Chứng minh I là trung điểm của MN
3. Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn đi qua 1 điểm cố định khi D di chuyển trên BC



1.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

Xét 2 tam giác vuông BMD và CNE có : $\begin{cases} BD = CE (gt) \\ \widehat{MBD} = \widehat{NCE} \text{ (vì } \widehat{NCE} = \widehat{ACB}) \end{cases}$
 $\Rightarrow \triangle BMD = \triangle CNE$ (góc nhọn-cạnh góc vuông) $\Rightarrow DM = EN$

2.

Xét 2 tam giác vuông DMI và ENI có : $\begin{cases} DM = EN (cmt) \\ \widehat{DIM} = \widehat{EIN} \text{ (đối đỉnh)} \end{cases}$
 $\Rightarrow \triangle DMI = \triangle ENI$ (góc nhọn-cạnh góc vuông) $\Rightarrow IM = IN \Rightarrow I$ là trung điểm của MN .

3.

Gọi H là giao điểm của đường thẳng vuông góc với AB tại B và đường thẳng vuông góc với AC tại C .

Xét 2 tam giác vuông ABH và ACH có : $\begin{cases} AB = AC \text{ (vì } \triangle ABC \text{ cân tại } A) \\ AH \text{ chung} \end{cases}$

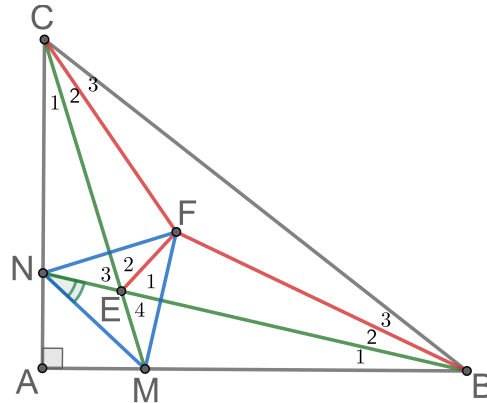
$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle ACH$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông) $\Rightarrow BH = CH$

Xét 2 tam giác vuông MBH và NCH có : $\begin{cases} BH = CH (cmt) \\ BM = CN \text{ (vì } \triangle BMD = \triangle CNE) \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle MBH = \triangle NCH$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông) $\Rightarrow MH = NH \Rightarrow H$ thuộc trung trực của MN . Vì I là trung điểm của MN nên đường thẳng vuông góc với MN tại I chính là đường trung trực của MN . Do đó, đường thẳng này luôn đi qua điểm H cố định.

Câu 4 (3 điểm) ✓

Cho tam giác ABC vuông tại A . Trên AB và AC theo thứ tự lấy 2 điểm M và N sao cho $\widehat{ABN} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$; $\widehat{ACM} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}$. Tính số đo góc $\widehat{MNB}$



Gọi E là giao điểm của BN và CM và F là giao điểm của 3 đường phân giác trong tam giác BEC . Khi đó ta có :

$$\begin{aligned}\widehat{B}_1 &= \widehat{B}_2 = \widehat{B}_3 = \frac{1}{3}\widehat{ABC} \\ \widehat{C}_1 &= \widehat{C}_2 = \widehat{C}_3 = \frac{1}{3}\widehat{ACB} \\ \Rightarrow \widehat{EBC} + \widehat{ECB} &= \frac{2}{3}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = 60^\circ \\ \Rightarrow \widehat{BEC} &= 120^\circ \\ \Rightarrow \widehat{E}_1 &= \widehat{E}_2 = \widehat{E}_3 = \widehat{E}_4 = 60^\circ\end{aligned}$$

Từ đó, dễ dàng chứng minh được :

$$\begin{aligned}\triangle EFB &= \triangle EMB (g.c.g) \Rightarrow EF = EM \\ \triangle EFC &= \triangle ENC (g.c.g) \Rightarrow EF = EN \\ \Rightarrow EM &= EN\end{aligned}$$

Suy ra $\triangle EMN$ cân tại E . Mà $\widehat{MEN} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{MNE} = \widehat{NME} = 30^\circ$
 Vậy $\widehat{MNB} = 30^\circ$

Câu 1 (6 điểm) ✓

Tìm x, y, z biết :

1. $\left|x + \frac{1}{5}\right| - 4 = -2$

2. $-\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} = \frac{6}{5}x - \frac{1}{2}$

3. $|2x - 27|^{2017} + (3y + 10)^{2018} = 0$

4. $3(x - 1) = 2(y - 2); 4(y - 2) = 3(z - 3)$ và $2x + 3y - z = 50$

1.

$$\begin{aligned} \left|x + \frac{1}{5}\right| - 4 = -2 &\Leftrightarrow \left|x + \frac{1}{5}\right| = 2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{5} = 2 \\ x + \frac{1}{5} = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{5} \\ x = -\frac{11}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} -\frac{15}{12}x + \frac{3}{7} &= \frac{6}{5}x - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{7} + \frac{1}{2} = \frac{15}{12}x + \frac{6}{5}x \\ &\Leftrightarrow \frac{13}{14} = \frac{49}{20}x \\ &\Leftrightarrow x = \frac{13}{14} : \frac{49}{20} = \frac{130}{343} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} |2x - 27|^{2017} + (3y + 10)^{2018} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x - 27 = 3y + 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{27}{2} \\ y = -\frac{10}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

4.

$$\text{Ta có } \begin{cases} 3(x - 1) = 2(y - 2) \\ 4(y - 2) = 3(z - 3) \end{cases} \Leftrightarrow 6(x - 1) = 4(y - 2) = 3(z - 3) \Leftrightarrow \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 3}{4} (*)$$

Từ (*), biến đổi và áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{2(x - 1)}{4} = \frac{3(y - 2)}{9} = \frac{z - 3}{4} = \frac{2(x - 1) + 3(y - 2) - (z - 3)}{4 + 9 - 4} = \frac{2x + 3y - z - 5}{9} = \frac{50 - 5}{9} = 5$$

Từ đó suy ra $x = 11, y = 17$ và $z = 23$

Câu 2 (4 điểm) ✓

1. Cho hàm số $f(x)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$. Biết rằng với mọi x ta đều có $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$. Tính $f(2)$
2. Cho x, y, z là các số nguyên dương và $x + y + z$ là số lẻ. Các số thực a, b, c thỏa mãn $\frac{a-b}{x} = \frac{b-c}{y} = \frac{c-a}{z}$. Chứng minh rằng $a = b = c$

1.

Lần lượt cho $x = 2$ và $x = \frac{1}{2}$ ta có :

$$\begin{cases} f(2) + 3f\left(\frac{1}{2}\right) = 4 & (1) \\ f\left(\frac{1}{2}\right) + 3f(2) = \frac{1}{4} & (2) \end{cases}$$

Nhân 2 vế của phương trình (2) với 3 rồi trừ đi (1) ta được :

$$8f(2) = \frac{3}{4} - 4 \Leftrightarrow 8f(2) = -\frac{13}{4} \Leftrightarrow f(2) = -\frac{13}{32}$$

Vậy $f(2) = -\frac{13}{32}$

2.

Vì $x + y + z$ lẻ nên $x + y + z \neq 0$. Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{x} = \frac{b-c}{y} = \frac{c-a}{z} &= \frac{a-b+b-c+c-a}{x+y+z} = 0 \\ \Rightarrow a &= b = c \end{aligned}$$

Vậy $a = b = c$

Nhận xét : Đề bài chỉ cần cho đủ kiện đủ để suy ra $x + y + z \neq 0$ là được.

Câu 3 (2 điểm) ✓

Ba lớp 7A, 7B, 7C có 94 học sinh tham gia trồng cây. Mỗi học sinh lớp 7A trồng được 3 cây. Mỗi học sinh lớp 7B trồng được 4 cây. Mỗi học sinh lớp 7C trồng được 5 cây. Hỏi mỗi lớp có bao nhiêu học sinh, biết rằng số cây mỗi lớp trồng được là như nhau.

Gọi số học sinh của 3 lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là a, b, c (học sinh)

Theo bài ra ta có
$$\begin{cases} a + b + c = 94 \\ 3a = 4b = 5c \end{cases} \quad (*)$$

Từ (*) suy ra $\frac{a}{20} = \frac{b}{15} = \frac{c}{12}$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

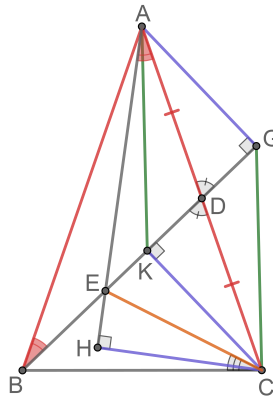
$$\begin{aligned} \frac{a}{20} = \frac{b}{15} = \frac{c}{12} &= \frac{a+b+c}{20+15+12} = \frac{94}{47} = 2 \\ \Rightarrow \begin{cases} a = 40 \\ b = 20 \\ c = 24 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy số học sinh của 3 lớp 7A, 7B, 7C lần lượt là 40, 20 và 24 học sinh.

Câu 4 (5 điểm) ✓

Cho tam giác ABC cân tại A ($\widehat{A} < 90^\circ$). D là trung điểm của AC . Trên đoạn thẳng BD lấy điểm E sao cho $\widehat{DAE} = \widehat{ABD}$. Từ A kẻ $AG \perp BD$ ($G \in BD$), kẻ $CK \perp BD$ ($K \in BD$)

1. Chứng minh rằng $AK = CG$
2. Từ C kẻ $CH \perp AE$ ($H \in AE$). Chứng minh EC là phân giác của $\widehat{HCK}$
3. Chứng minh $\widehat{DAE} = \widehat{ECB}$



1.

Xét 2 tam giác vuông CDK và ADG có $\begin{cases} CD = AD \text{ (gt)} \\ \widehat{KDC} = \widehat{ADG} \text{ (đối đỉnh)} \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle CDK = \triangle ADG$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow DK = DG$

Xét 2 tam giác ADK và CDG có $\begin{cases} AD = CD \text{ (gt)} \\ DK = DG \text{ (cmt)} \\ \widehat{ADK} = \widehat{CDG} \text{ (đối đỉnh)} \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle ADK = \triangle CDG$ (c.g.c)

$\Rightarrow AK = CG$

2.

Từ $\triangle CDK = \triangle ADG$ (cmt) $\Rightarrow CK = AG$ (*₁)

Xét 2 tam giác vuông ABG và ACH có $\begin{cases} AB = AC \text{ (gt)} \\ \widehat{ABG} = \widehat{CAH} \text{ (gt)} \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle ABG = \triangle CAH$ (cạnh huyền-góc nhọn)

$\Rightarrow AG = CH$ (*₂)

Từ (*₁) và (*₂) suy ra $CK = CH$

Xét 2 tam giác vuông ECK và ECH có $\begin{cases} CK = CH \text{ (gt)} \\ \text{chung } EC \end{cases}$

$\Rightarrow \triangle ECK = \triangle ECH$ (cạnh huyền-cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{ECK} = \widehat{ECH} \Rightarrow EC$ là phân giác của $\widehat{HCK}$

3.

Theo tính chất góc ngoài của tam giác ta có: $\widehat{AEK} = \widehat{ABE} + \widehat{BAE}$

Mà $\widehat{ABE} = \widehat{DAE} \Rightarrow \widehat{AEK} = \widehat{DAE} + \widehat{BAE} = \widehat{BAD}$

$$\text{Vì } \triangle ECK = \triangle ECH \text{ (cmt)} \Rightarrow \widehat{KEC} = \widehat{HEC} = \frac{180^\circ - \widehat{AEK}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{BAD}}{2} = \widehat{ABC} \quad (*_3)$$

$$\text{Mà theo tính chất góc ngoài ta lại có : } \widehat{KEC} = \widehat{EBC} + \widehat{ECB} \quad (*_4)$$

$$\text{Từ } (*_3) \text{ và } (*_4) \text{ suy ra } \widehat{EBC} + \widehat{ECB} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{ECB} = \widehat{ABE}$$

$$\text{Theo giả thiết } \widehat{ABE} = \widehat{DAE} \Rightarrow \widehat{DAE} = \widehat{ECB}$$

Câu 5 (3 điểm) ✓

1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = |x - 2015| + |2016 - x| + |x - 2017|$
2. Tìm x, y nguyên thỏa mãn $xy + x - y = 4$

1. Xét các khả năng sau :

- Nếu $x < 2015$ thì :
 $P = 2015 - x + 2016 - x + 2017 - x = 6048 - 3x > 6048 - 3 \cdot 2015 = 3$
- Nếu $2015 \leq x < 2016$ thì :
 $P = x - 2015 + 2016 - x + 2017 - x = 2018 - x > 2018 - 2016 = 2$
- Nếu $2016 \leq x < 2017$ thì :
 $P = x - 2015 + x - 2016 + 2017 - x = x - 2014 \geq 2016 - 2014 = 2$ và $P = 2 \Leftrightarrow x = 2016$
- Nếu $x \geq 2017$ thì :
 $P = x - 2015 + x - 2016 + x - 2017 = 3x - 6048 \geq 3 \cdot 2017 - 6048 = 3$

Như vậy trong các trường hợp trên, P nhỏ nhất là 2 khi $x = 2016$

Chú ý : có thể sử dụng bất đẳng thức $|a + b| \leq |a| + |b|$ nhưng phải chứng minh bất đẳng thức đó.

2. Ta có :

$$xy + x - y = 4 \Leftrightarrow (x - 1)(y + 1) = 3$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x - 1), (y + 1) \in \mathbb{Z}$. Ta có bảng sau:

$x-1$	1	-1
$y+1$	3	-3
x	2	0
y	2	-4

Vậy $(x, y) = (2, 2)$ hoặc $(x, y) = (0, -4)$

THI VÀO 10 KHÔNG CHUYÊN**DANH SÁCH ĐỀ THI**

1	năm học 2019-2020		226
2	năm học 2018-2019		230
3	năm học 2017-2018		235
4	năm học 2016-2017		240
5	năm học 2015-2016		244
6	năm học 2014-2015		248
7	năm học 2013-2014		252
8	năm học 2012-2013		256
9	năm học 2011-2012		259
10	năm học 2010-2011		263

1 năm học 2019-2020

PHẦN I-TRẮC NGHIỆM (3 điểm)

Câu 1

Khi $x = 7$ biểu thức $\frac{4}{\sqrt{x+2}-1}$ có giá trị là :

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{4}{\sqrt{8}}$

C. $\frac{4}{3}$

D. 2

Câu 2

Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = 1 - x$

B. $y = 2x - 3$

C. $y = (1 - \sqrt{2})x$

D. $y = -2x + 6$

Câu 3

Số nghiệm của phương trình $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ là :

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Câu 4

Cho hàm số $y = ax^2 (a \neq 0)$. Điểm $M(1; 2)$ thuộc đồ thị hàm số khi :

A. $a = 2$

B. $a = \frac{1}{2}$

C. $a = -2$

D. $a = \frac{1}{4}$

Câu 5

Từ một điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ 2 tiếp tuyến AB, AC tới đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Kẻ đường kính BK. Biết $\widehat{BAC} = 30^\circ$. Số đo của cung nhỏ CK là :

A. 30°

B. 60°

C. 120°

D. 150°

Câu 6

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A. Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh A đến cạnh BC. Biết $AH = \sqrt{12}cm, \frac{HB}{HC} = \frac{1}{3}$. Độ dài đoạn BC là :

A. 6cm

B. 8cm

C. $4\sqrt{3}cm$

D. 12cm

PHẦN II-TỰ LUẬN (7 điểm)

Bài 1 (2 điểm) ✓

Cho biểu thức $A = \frac{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x là số chính phương để 2019A là số nguyên

a) Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có :

$$\begin{aligned} A &= \frac{2x+2}{x-1} - \frac{3\sqrt{x}+1}{x-1} \\ &= \frac{2x-3\sqrt{x}+1}{x-1} \\ &= \frac{(2x-2\sqrt{x}) - (\sqrt{x}-1)}{x-1} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

b) Ta có :

$$\begin{aligned} 2019A &= 2019 \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right) = 2019 \left(2 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \right) = 4038 - \frac{6057}{\sqrt{x}+1} \\ 2019A \in \mathbb{Z} &\Leftrightarrow \frac{6057}{\sqrt{x}+1} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Mà x là số chính phương nên $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$. Do đó : $\sqrt{x}+1 \in U(6057) = \{1; 3; 9; 673; 2019; 6057\}$ (vì $\sqrt{x}+1 \geq 1$)

$\sqrt{x}+1$	1	3	9	673	2019	6057
x	0	4	64	672^2	2018^2	6056^2

Kết hợp với điều kiện ban đầu ta có những giá trị cần tìm của x là :

$$x \in \{0; 4; 64; 672^2; 2018^2; 6056^2\}$$

Bài 2 (1 điểm) ✓

An đếm số bài kiểm tra 1 tiết đạt điểm 9 và điểm 10 của mình thấy nhiều hơn 16 bài. Tổng số điểm của tất cả các bài kiểm tra đạt điểm 9 và 10 đó là 160. Hỏi An được bao nhiêu điểm 9 và bao nhiêu điểm 10 ?

Goi số bài kiểm tra đạt điểm 9 và điểm 10 của An lần lượt là x và y ($x, y \in \mathbb{N}^*$)

Theo giả thiết ta có :

$$\begin{cases} x+y > 16 & (1) \\ 9x+10y = 160 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $x:10$ và do $y > 0$ nên $9x < 160$. Suy ra $x = 10$.

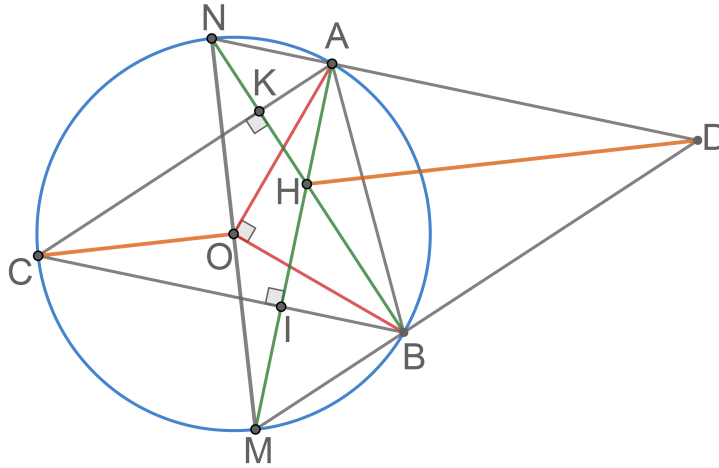
Thay vào (2) suy ra $y = 7$. Khi đó $x+y = 17$ thỏa mãn (1)

Vậy An có 10 bài kiểm tra được 9 điểm và 7 bài kiểm tra được 10 điểm.

Bài 3 (1,5 điểm) ✓

Cho đường tròn (O) , hai điểm A, B nằm trên (O) sao cho $\widehat{AOB} = 90^\circ$. Điểm C nằm trên cung lớn AB sao cho $AC \geq AB$ và $\triangle ABC$ có 3 góc đều nhọn. Các đường cao AI, BK của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H . BK cắt (O) tại N khác B , AI cắt (O) tại M khác A . NA cắt MB tại D . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $CIHK$ nội tiếp một đường tròn
- MN là đường kính của (O)
- OC song song với DH



a) Xét tứ giác $CIHK$ có $\widehat{CIH}, \widehat{CKH}$ là 2 góc đối và $\widehat{CIH} + \widehat{CKH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên $CIHK$ là tứ giác nội tiếp (ĐPCM)

b) Xét (O) có $\begin{cases} 90^\circ = \widehat{AOB} = \text{sd}\widehat{AB} \\ \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\text{sd}\widehat{AB} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB} = 45^\circ$

$\triangle AIC$ vuông tại I có $\widehat{ACI} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{CAI} = 45^\circ$

Lại có:

$$\begin{aligned} 90^\circ &= \widehat{NKC} = \frac{1}{2}(\text{sd}\widehat{AB} + \text{sd}\widehat{NC}) \\ \Rightarrow \text{sd}\widehat{NC} &= 90^\circ \\ \Rightarrow \widehat{NAC} &= \frac{1}{2}\text{sd}\widehat{NC} = 45^\circ \end{aligned}$$

Từ đó: $\widehat{NAM} = \widehat{NAC} + \widehat{CAM} = 90^\circ \Rightarrow MN$ là đường kính của (O)

c) Vì $\widehat{NAC} = \widehat{CAM}$ nên C là điểm chính giữa cung $MN \Rightarrow OC \perp MN$ (*)

Xét $\triangle MND$ có MA, NB là 2 đường cao và $MA \cap NB \equiv H \Rightarrow H$ là trực tâm $\triangle MND$

$\Rightarrow HD \perp MN$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $OC \parallel HD$

Bài 5 (1,5 điểm) ✓

- a) Cho phương trình $x^2 - 2mx - 2m - 1 = 0(1)$ với m là tham số. Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn :

$$\sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{3 + x_1 x_2} = 2m + 1$$

- b) Cho 2 số thực không âm a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \frac{a^3 + b^3 + 4}{ab + 1}$

- a) Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq -1$

Khi đó, theo Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = -(2m+1) \end{cases}$. Từ đó :

$$\begin{aligned} & \sqrt{x_1 + x_2} + \sqrt{3 + x_1 x_2} = 2m + 1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2m} + \sqrt{2 - 2m} = 2m + 1 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2 - 2m} - 1 = 2m - \sqrt{2m} \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{2 - 2m} - 1)(\sqrt{2 - 2m} + 1) = \sqrt{2m}(\sqrt{2m} - 1)(\sqrt{2 - 2m} + 1) \\ \Leftrightarrow & 1 - 2m = \sqrt{2m}(\sqrt{2m} - 1)(\sqrt{2 - 2m} + 1) \\ \Leftrightarrow & (\sqrt{2m} - 1) \left[\sqrt{2m}(\sqrt{2 - 2m} + 1) + (\sqrt{2m} + 1) \right] = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2m} - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & m = \frac{1}{2} \quad (\text{thỏa mãn đk}) \end{aligned}$$

Vậy $m = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm của m

- b) Từ $a^2 + b^2 = 2$ và a, b không âm dễ thấy $\sqrt{2} \leq a + b \leq 2$. Có 2 cách xử lý bài toán :

* **Cách 1:**

Đặt $t = a + b \Leftrightarrow M = f(t) = \frac{-t^3 + 6t + 8}{t^2}$ là hàm nghịch biến trên $[\sqrt{2}; 2]$. Do đó :

Min $M = f(2) = 3$ và Max $M = f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 4$

* **Cách 2:**

Theo AM-GM :

$$a^3 + b^3 + 1 \geq 3ab \Leftrightarrow a^3 + b^3 + 4 \geq 3ab + 3 \Leftrightarrow M \geq 3$$

$$\text{Lại có : } 0 \leq a, b \leq \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a^3 \leq \sqrt{2}a^2 \\ b^3 \leq \sqrt{2}b^2 \end{cases} \Rightarrow a^3 + b^3 \leq \sqrt{2}(a^2 + b^2) = 2\sqrt{2}$$

Mặt khác $ab + 1 \geq 1 \Rightarrow M \leq a^3 + b^3 + 4$

Từ đó suy ra : $M \leq 2\sqrt{2} + 4$

Vậy Min $M = 3$ và Max $M = 2\sqrt{2} + 4$

2 năm học 2018-2019

PHẦN I-TRẮC NGHIỆM (3 điểm)

Câu 1

Phương trình $x^2 - 3x - 6 = 0$ có 2 nghiệm là x_1, x_2 . Tổng $x_1 + x_2$ bằng :

- A.** 3 **B.** -3 **C.** 6 **D.** -6

Câu 2

Đường thẳng $y = x + m - 2$ đi qua điểm $E(1;0)$ khi :

- A.** $m = -1$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = 0$ **D.** $m = 1$

Câu 3

Cho tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{ACB} = 30^\circ$, $AB = 5\text{cm}$. Độ dài AC là :

- A.** 10cm **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}\text{cm}$ **C.** $5\sqrt{3}\text{cm}$ **D.** $\frac{5}{\sqrt{3}}\text{cm}$

Câu 4

Hình vuông cạnh bằng 1, bán kính đường tròn ngoại tiếp hình vuông là :

- A.** $\frac{1}{2}$ **B.** 1 **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 5

Phương trình $x^2 + x + a = 0$ với x là ẩn, a là tham số có nghiệm kép khi :

- A.** $-\frac{1}{4}$ **B.** $\frac{1}{4}$ **C.** 4 **D.** -4

Câu 6

Cho $a > 0$, rút gọn biểu thức $\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{a}}$ ta được kết quả là :

- A.** a^2 **B.** a **C.** $\pm a$ **D.** $-a$

PHẦN II-TỰ LUẬN (7 điểm)

Bài 1 (2,5 điểm) ✓

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

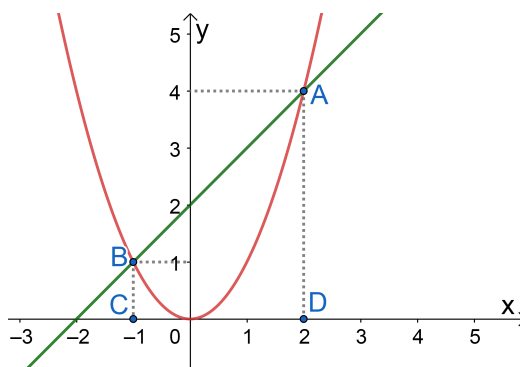
b) Tìm tọa độ giao điểm A, B của đồ thị 2 hàm số $y = x^2$ và $y = x + 2$. Gọi D, C là hình chiếu vuông góc của A, B trên trục hoành. Tính diện tích tứ giác $ABCD$

a) Ta có :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 6x - 2y = 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 7x = 7 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (1; 2)$

b)



Tọa độ của 2 điểm A, B là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(2; 4) \text{ và } B(-1; 1)$$

Ta có :

$$S_{ABCD} = \frac{(AD + BC) \cdot CD}{2} = \frac{(4 + 1) \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$$

Bài 2 (1 điểm) ✓

Nhân dịp tết thiếu nhi 1/6, một nhóm học sinh cần chia đều 1 số lượng quyển vở thành các phần quà để tặng các em nhỏ tại một mái ấm tình thương. Nếu mỗi phần quà giảm 2 quyển thì các em có thêm 2 phần quà nữa, còn nếu mỗi phần quà giảm 4 quyển thì các em có thêm 5 phần quà nữa. Hỏi có bao nhiêu phần quà và mỗi phần quà có bao nhiêu quyển vở.

Gọi số phần quà là x và số quyển vở của mỗi phần quà là y ($x, y \in \mathbb{N}^*; y > 4$)

Theo bài ra ta có :

$$(y - 2)(x + 2) = (y - 4)(x + 5) = xy$$

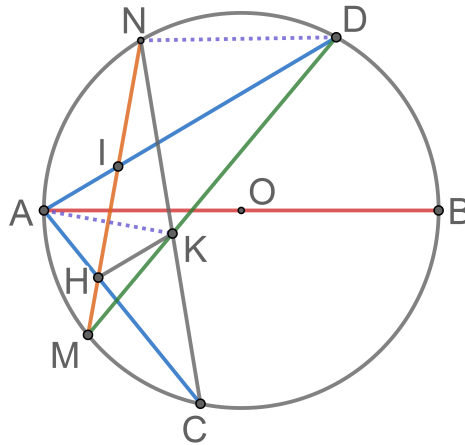
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow xy + 2y - 2x - 4 = xy + 5y - 4x - 20 = xy \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2x = 4 \\ 5y - 4x = 20 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 12 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện}) \end{aligned}$$

Vậy có tất cả 10 phần quà và mỗi phần quà có 12 quyển vở.

Bài 3 (2,5 điểm) ✓

Cho đường tròn đường kính AB . C, D nằm trên đường tròn sao cho C, D nằm khác phía đối với đường thẳng AB , đồng thời $AD > AC$. Gọi điểm chính giữa của các cung nhỏ AC, AD lần lượt là M, N . Giao điểm của MN với AC, AD lần lượt là H, I . Giao điểm của MD với CN là K .

- Chứng minh $\widehat{ACN} = \widehat{DMN}$, từ đó suy ra $MCKH$ nội tiếp
- Chứng minh KH song song với AD
- Tìm liên hệ giữa số đo 2 cung AC, AD để $AK // ND$



- Vì N là điểm chính giữa cung $\widehat{AD}$ nên $s\widehat{AN} = s\widehat{ND}$.
Mà $\widehat{ACN}$ và $\widehat{DMN}$ lần lượt là 2 góc nội tiếp chắn 2 cung $\widehat{AN}$ và $\widehat{ND}$ nên $\widehat{ACN} = \widehat{DMN}$ □
Xét tứ giác $MCKH$ có: $\widehat{HCK} = \widehat{HMK}$ (vì $\widehat{ACN} = \widehat{DMN}$ theo cmt)
 $\Rightarrow MCKH$ là tứ giác nội tiếp. □
- Vì $MCHK$ là tứ giác nội tiếp (cmt) nên $\widehat{HKM} = \widehat{HCM}$
Mà $\widehat{HCM} = \widehat{ADM}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AM}$)
Suy ra: $\widehat{HKM} = \widehat{ADM}$
Mà 2 góc này nằm ở vị trí đồng vị $\Rightarrow HK // AD$ □
- Xét tứ giác $NIKD$ có $\widehat{INK} = \widehat{IDK}$ (vì 2 cung $\widehat{AM}$ và $\widehat{MC}$ bằng nhau)
 $\Rightarrow NIKD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IKN} = \widehat{IDN}$
Mà $\widehat{IDN} = \widehat{ACN}$ (cùng bằng 1 nửa số đo cung $\widehat{AN}$)
Suy ra: $\widehat{IKN} = \widehat{ACN} \Rightarrow IK // AH$. Kết hợp với $HK // AI$ chứng minh ở trên ta có $AIKH$ là

hình bình hành (*₂)

Mặt khác nếu $AK \parallel ND$ thì ta có $\widehat{IAK} = \widehat{NDA} = \widehat{IMK} \Rightarrow IAMK$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IKA} = \widehat{IMA}$

Mà $\widehat{IMA} = \widehat{NDA} = \widehat{IAK}$

$\Rightarrow \widehat{IKA} = \widehat{IAK} \Rightarrow \triangle IAK$ cân tại $I \Rightarrow IA = IK$ (*₃)

Từ (*₂) và (*₃) suy ra $AIKH$ là hình thoi $\Rightarrow IH \perp AK$ hay $MN \perp ND \Rightarrow \widehat{MND} = 90^\circ$

Mà $\widehat{MND} = \frac{360^\circ - \widetilde{\text{sđAD}} - \frac{\widetilde{\text{sđAC}}}{2}}{2}$ nên :

$$\begin{aligned} \frac{360^\circ - \widetilde{\text{sđAD}} - \frac{\widetilde{\text{sđAC}}}{2}}{2} &= 90^\circ \\ \Rightarrow \widetilde{\text{sđAD}} + \frac{\widetilde{\text{sđAC}}}{2} &= 180^\circ \end{aligned}$$

Vậy để $AK \parallel ND$ thì $\widetilde{\text{sđAD}} + \frac{\widetilde{\text{sđAC}}}{2} = 180^\circ$

Bài 4 (1 điểm) ✓

- a) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = 4a^2 + 6b^2 + 3c^2$
- b) Tìm $a, b \in \mathbb{Z}^+$ biết phương trình $x^2 - 2ax - 3b = 0$ và $x^2 - 2bx - 3a = 0$ đều có nghiệm nguyên

a)

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schawrz, ta có :

$$\begin{aligned} 9 &= (a + b + c)^2 = \left(\frac{1}{2} \cdot 2a + \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{6}b + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}c \right)^2 \\ &\leq \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \cdot \left[(2a)^2 + (\sqrt{6}b)^2 + (\sqrt{3}c)^2 \right] \\ &= \frac{3}{4} \cdot (4a^2 + 6b^2 + 3c^2) \\ &\Rightarrow 4a^2 + 6b^2 + 3c^2 \geq 12(*) \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức ở } (*) \text{ xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 3 \\ 4a = 6b = 3c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{2}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy A đạt GTNN bằng 12 tại $a = 1; b = \frac{2}{3}$ và $c = \frac{4}{3}$

Chú ý: có thể dùng AM-GM như sau :

$$4a^2 + 4 \geq 8a; \quad 6b^2 + \frac{8}{3} \geq 8b; \quad 3c^2 + \frac{16}{3} \geq 8c$$

b)

Xét 2 phương trình : $x^2 - 2ax - 3b = 0$ (1) và $x^2 - 2bx - 3a = 0$ (2) có : $\begin{cases} \Delta'_1 = a^2 + 3b \\ \Delta'_2 = b^2 + 3a \end{cases}$

Vì $a, b \in \mathbb{Z}^+$ nên (1) và (2) đều có nghiệm thì điều kiện cần là Δ'_1 và Δ'_2 là số chính phương.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b$. Khi đó ta có :

$$\begin{aligned} a^2 &< a^2 + 3b = \Delta'_1 < a^2 + 4a + 4 = (a+2)^2 \\ \Rightarrow \Delta'_1 &= a^2 + 3b = (a+1)^2 \\ \Rightarrow 3b &= 2a + 1 \\ \Rightarrow 2a &= 3b - 1 \quad (*_1) \end{aligned}$$

Vì $\Delta'_2 = b^2 + 3a$ là số chính phương nên $4\Delta'_2 = 4b^2 + 12a$ cũng là số chính phương. Tức là :

$$\begin{aligned} 4b^2 + 12a &= k^2 \quad (k \in \mathbb{N}; k \geq 4 \text{ vì } a, b \in \mathbb{Z}^+) \\ \Leftrightarrow 4b^2 + 6(3b - 1) &= k^2 \quad (\text{vì } *_1) \\ \Leftrightarrow 4b^2 + 18b - 6 &= k^2 \\ \Leftrightarrow 16b^2 + 72b - 24 &= 4k^2 \\ \Leftrightarrow (4b + 9)^2 - 4k^2 &= 105 \\ \Leftrightarrow (4 + 9 - 2k)(4b + 9 + 2k) &= 105 = 3.5.7 \end{aligned}$$

Vì $4b + 9 + 2k \geq 21$ nên xảy ra các khả năng sau :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \begin{cases} 4b + 9 + 2k = 35 \\ 4b + 9 - 2k = 3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} k = 8 \\ 4b = 10 \text{ (loại)} \end{cases} \\ \bullet \quad \begin{cases} 4b + 9 + 2k = 105 \\ 4b + 9 - 2k = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} k = 26 \\ b = 11 \end{cases} \\ \bullet \quad \begin{cases} 4b + 9 + 2k = 21 \\ 4b + 9 - 2k = 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} k = 4 \\ b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

+ Với $b = 11$, thay vào $(*_1)$ suy ra $a = 16$. Thử lại thấy thỏa mãn

+ Với $b = 1$, thay vào $(*_1)$ suy ra $a = 1$. Thử lại thấy thỏa mãn

Vậy các cặp $(a; b)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán là : $(a; b) \in \{(1; 1), (11; 16), (16; 11)\}$

Bài 1 (2,5 điểm) ✓

1) Giải phương trình : $\begin{cases} 2x = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$

2) Rút gọn biểu thức $P = \frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0$

1)

Ta có :

$$\begin{cases} 2x = 4 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (2; 3)$

2)

Với $x > 0$, ta có :

$$\begin{aligned} P &= \frac{x-2}{x+2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{x-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x-2-\sqrt{x}-2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Bài 2 (2 điểm) ✓

Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ (1) với m là tham số

1) Giải phương trình (1) khi $m = 2$

2) Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .
Gọi $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của phương trình (1). Lập phương trình bậc hai nhận $x_1^3 - 2mx_1^2 + m^2x_1 - 2$ và $x_2^3 - 2mx_2^2 + m^2x_2 - 2$ là nghiệm.

1)

Khi $m = 2$, phương trình (1) trở thành :

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy với $m = 2$ phương trình (1) có 2 nghiệm là $x = 1$ và $x = 3$

2)

Xét phương trình (1) : $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ có : $\Delta' = m^2 - (m^2 - 1) = 1$

Suy ra phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m $\square$.

Theo Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - 1 \end{cases}$

Đặt $y_1 = x_1^3 - 2mx_1^2 + m^2x_1 - 2$ và $y_2 = x_2^3 - 2mx_2^2 + m^2x_2 - 2$

Chú ý biến đổi :

$$\begin{aligned} x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 = 1 \\ &\Rightarrow x^3 - 2mx^2 + m^2x = x \\ &\Rightarrow x^3 - 2mx^2 + m^2x - 2 = x - 2 \end{aligned}$$

Suy ra : $y_1 = x_1 - 2$ và $y_2 = x_2 - 2$. Do đó :

$$y_1 + y_2 = (x_1 - 2) + (x_2 - 2) = x_1 + x_2 - 4 = 2m - 4$$

$$y_1 \cdot y_2 = (x_1 - 2)(x_2 - 2) = x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = m^2 - 1 - 2 \cdot 2m + 4 = m^2 - 4m + 3$$

Từ đó ta có phương trình bậc hai nhận y_1 và y_2 làm nghiệm là :

$$y^2 - (2m - 4)y + m^2 - 4m + 3 = 0$$

Bài 3 (1 điểm) ✓

Một nhóm gồm 15 học sinh (cả nam và nữ) tham gia buổi lao động trồng cây. Các bạn nam trồng được 30 cây, các bạn nữ trồng được 36 cây. Mỗi bạn nam trồng được số cây như nhau và mỗi bạn nữ trồng được số cây như nhau. Tính số học sinh nam và số học sinh nữ của nhóm biết mỗi bạn nam trồng được nhiều hơn mỗi bạn nữ 1 cây.

Gọi số học sinh nam và số học sinh nữ của nhóm lần lượt là x, y ($x, y \in \mathbb{N}^*; x, y < 15$)

Khi đó :

+ Số cây mỗi bạn nam trồng được là : $\frac{30}{x}$ (cây)

+ Số cây mỗi bạn nữ trồng được là : $\frac{36}{y}$ (cây)

Theo bài ra ta có : $\begin{cases} x + y = 15 & (1) \\ \frac{30}{x} - \frac{36}{y} = 1 & (2) \end{cases}$ Từ (1) $\Rightarrow y = 15 - x$. Thay vào (2) ta được :

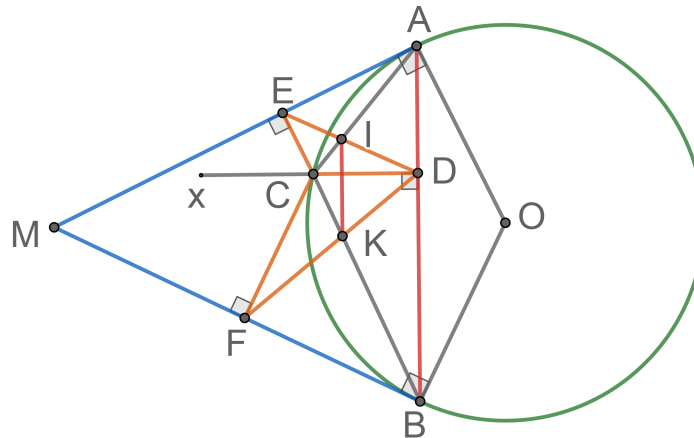
$$\begin{aligned} &\frac{30}{x} - \frac{36}{15 - x} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{30(15 - x) - 36x}{x(15 - x)} = 1 \\ &\Leftrightarrow 450 - 66x = x(15 - x) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 81x + 450 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 75 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)} \\ x = 6 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy số học sinh nam của nhóm là 6 học sinh và số học sinh nữ là : $15 - 6 = 9$ học sinh

Bài 4 (3,5 điểm) ✓

Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ 2 tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (A, B là 2 tiếp điểm). Lấy điểm C trên cung nhỏ AB (C không trùng với A, B). Từ điểm C kẻ CD vuông góc với AB , CE vuông góc với MA , CF vuông góc với MB ($D \in AB, E \in MA, F \in MB$). Gọi I là giao điểm của AC và DE , K là giao điểm của BC và DF . Chứng minh rằng :

- 1) Tứ giác $ADCE$ nội tiếp 1 đường tròn
- 2) Hai tam giác CED và CFD đồng dạng
- 3) Tia đối của tia CD là tia phân giác của $\widehat{ECF}$
- 4) $IK \parallel AB$



1)
Xét tứ giác $ADCE$ có $\widehat{ADC} + \widehat{AEC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
Suy ra $ADCE$ là tứ giác nội tiếp $\square$.

2)
Vì $ADCE$ là tứ giác nội tiếp theo cmt nên $\begin{cases} \widehat{CED} = \widehat{CAD} \\ \widehat{EDC} = \widehat{EAC} \end{cases} \quad (*_1)$

Chứng minh tương tự ta có $CDBF$ là tứ giác nội tiếp nên $\begin{cases} \widehat{CFD} = \widehat{CBD} \\ \widehat{FDC} = \widehat{FBC} \end{cases} \quad (*_2)$

Mặt khác ta có $\begin{cases} \widehat{CAD} = \widehat{FBC} \\ \widehat{EAC} = \widehat{CBD} \end{cases} \quad (*_3)$

Từ $(*_1); (*_2); (*_3)$ suy ra $\begin{cases} \widehat{CED} = \widehat{CDF} \\ \widehat{CDE} = \widehat{CFD} \end{cases} \Rightarrow \triangle CED \sim \triangle CDF (g.g) \square$

3)
Từ $\triangle CED \sim \triangle CDF$ (cmt) $\Rightarrow \widehat{ECD} = \widehat{FCD}$

Mà $\begin{cases} \widehat{ECx} = 180^\circ - \widehat{ECD} \\ \widehat{FCx} = 180^\circ - \widehat{FCD} \end{cases}$

Do đó : $\widehat{ECx} = \widehat{FCx} \Rightarrow Cx$ là tia phân giác của $\widehat{ECF} \square$

4)

Tứ giác $CIDK$ có :

$$\begin{aligned}\widehat{ICK} + \widehat{IDK} &= \widehat{ICK} + \widehat{IDC} + \widehat{KDC} \\ &= \widehat{ICK} + \widehat{CBA} + \widehat{CAB} \\ &= 180^\circ\end{aligned}$$

$\Rightarrow CIDK$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CIK} = \widehat{CDK} = \widehat{CAB} \Rightarrow IK // AB \quad \square$

Bài 5 (1 điểm) ✓

1) Giải phương trình : $(x^2 - x + 1)(x^2 + 4x + 1) = 6x^2$

2) Cho 4 số thực dương x, y, z, t thỏa mãn $x + y + z + t = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$A = \frac{(x + y + z)(x + y)}{xyzt}$$

1)

Xét phương trình : $(x^2 - x + 1)(x^2 + 4x + 1) = 6x^2 \quad (1)$

Đặt $t = x^2 + 1 \ (t \geq 1)$ thì phương trình (1) trở thành :

$$\begin{aligned}(t - x)(t + 4x) &= 6x^2 \Leftrightarrow t^2 + 3xt - 10x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (t - 2x)(t + 5x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t - 2x = 0 \\ t + 5x = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

• Với $t - 2x = 0$ ta có : $x^2 + 1 - 2x = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

• Với $t + 5x = 0$ ta có : $x^2 + 1 + 5x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$

Vậy phương trình (1) có tập nghiệm là $S = \left\{ 1; \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2} \right\}$

2)

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có :

$$\begin{aligned}x + y &\geq 2\sqrt{xy} \\ x + y + z &= (x + y) + z \geq 2\sqrt{(x + y) \cdot z} \\ x + y + z + t &= (x + y + z) + t \geq 2\sqrt{(x + y + z) \cdot t}\end{aligned}$$

Nhân vế với vế của 3 bất đẳng thức trên ta được :

$$\begin{aligned}(x + y)(x + y + z)(x + y + z + t) &\geq 8\sqrt{xyzt(x + y)(x + y + z)} \\ \Leftrightarrow (x + y)(x + y + z) &\geq 16xyzt \quad (\text{vì } x + y + z + t = 2) \\ \Leftrightarrow A = \frac{(x + y + z)(x + y)}{xyzt} &\geq 16\end{aligned}$$

$$A = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y = z \\ x + y + z = t \\ x + y + z + t = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{1}{4} \\ z = \frac{1}{2} \\ t = 1 \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 16, đạt được tại $x = y = \frac{1}{4}; z = \frac{1}{2}$ và $t = 1$

Bài 1 (3 điểm) ✓

- 1) Tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt{x+1}$ với $x = 8$
- 2) Giải phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$
- 3) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{2}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

1)

Với $x = 8$ ta có : $P = \sqrt{x+1} = \sqrt{8+1} = \sqrt{9} = 3$

2)

Phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ có $\Delta' = 4 - 3 = 1$. Từ đó suy ra phương trình có 2 nghiệm phân biệt là : $x_1 = \frac{2+\sqrt{1}}{1} = 3$; $x_2 = \frac{2-\sqrt{1}}{1} = 1$

3)

Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Bài 2 (1,5 điểm) ✓

Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+2y=m \\ 2x+5y=1 \end{cases}$ với m là tham số

- 1) Giải hệ phương trình khi $m = 0$
- 2) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) sao cho x, y là 2 nghiệm của phương trình $t^2 - (3m-1)t + m^4 + 9m - 13 = 0$ với t là ẩn số

1)

Với $m = 0$, hệ phương trình đã cho trở thành :

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=0 \\ 2x+5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ 2x+5y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy với $m = 0$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (-2; 1)$

2)

Xét hệ phương trình : (I) $\begin{cases} x+2y=m & (1) \\ 2x+5y=1 & (2) \end{cases}$

Từ (1) $\Rightarrow x = m - 2y$. Thay vào (2) ta được :

$$2(m-2y)+5y=1 \Leftrightarrow 2m+y=1 \Leftrightarrow y=1-2m$$

$$\Rightarrow x = m - 2y = m - 2(1 - 2m) = 5m - 2$$

Như vậy, hệ (I) luôn có nghiệm duy nhất $(x; y) = (5m - 2; 1 - 2m)$

Xét phương trình : $t^2 - (3m - 1)t + m^4 + 9m - 13 = 0$ (3)

Theo Vi-et, để $x; y$ là 2 nghiệm của (3) thì cần :

$$\begin{aligned} x.y &= m^4 + 9m - 13 \Leftrightarrow (5m - 2)(1 - 2m) = m^4 + 9m - 13 \\ &\Leftrightarrow m^4 + 10m^2 - 11 = 0 \\ &\Leftrightarrow (m^2 - 1)(m^2 + 11) = 0 \\ &\Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow m = \pm 1 \end{aligned}$$

Thử lại thấy $m = \pm 1$ thỏa mãn. Vậy những giá trị cần tìm của m là $m = 1$ hoặc $m = -1$

Bài 3 (1 điểm) ✓

Quãng đường từ Bắc Ninh đến Hà Nội dài 30km. Một ô tô đi từ Bắc Ninh ra Hà Nội rồi từ Hà Nội về Bắc Ninh. Biết vận tốc lúc đi lớn hơn vận tốc lúc về là 10km/h nên thời gian về nhiều hơn thời gian đi là 9 phút. Tính vận tốc của ô tô khi đi từ Bắc Ninh ra Hà Nội

Gọi vận tốc của ô tô lúc đi từ Bắc Ninh ra Hà Nội là : $x(\text{km/h})$ ($x > 10$).

Khi đó, vận tốc của ô tô lúc từ Hà Nội về Bắc Ninh là : $x - 10(\text{km/h})$.

Theo bài ra ta có phương trình :

$$\begin{aligned} \frac{30}{x - 10} - \frac{30}{x} &= \frac{9}{60} \Leftrightarrow 200(x - x + 10) = x(x - 10) \\ &\Leftrightarrow x^2 - 10x - 2000 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -40 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)} \\ x = 50 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy vận tốc của ô tô lúc đi từ Bắc Ninh ra Hà Nội là 50km/h

Bài 4 (3,5 điểm) ✓

Cho tam giác ABC có 3 góc đều nhọn, $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Các đường cao BD, CE cắt nhau tại H .

- 1) Chứng minh rằng tứ giác $ADHE$ nội tiếp 1 đường tròn
- 2) Chứng minh rằng $\triangle HDC$ vuông cân tại D
- 3) Tính tỉ số $\frac{DE}{BC}$
- 4) Chứng minh rằng $OA \perp DE$

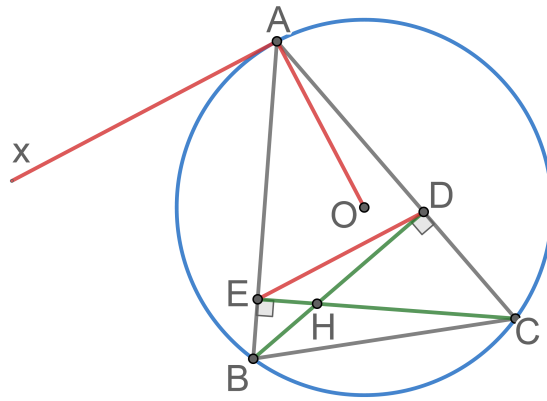
1)

Xét tứ giác $ADHE$ có : $\widehat{ADH} + \widehat{AEH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Suy ra $ADHE$ là tứ giác nội tiếp $\square$.

2)

Xét $\triangle ACE$ vuông tại E có $\widehat{CAE} = 45^\circ (\text{gt}) \Rightarrow \widehat{ACE} = 45^\circ$



Xét $\triangle CDH$ vuông tại D có $\widehat{DCH} = \widehat{ACE} = 45^\circ \Rightarrow \triangle DCH$ vuông cân tại D $\square$.

3)

Để thấy $BCDE$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{EDH} = \widehat{BCH}$. Từ đó ta có :

$$\triangle EHD \sim \triangle BHC (g.g) \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{HD}{HC}$$

Mà $\triangle DCH$ vuông cân tại D theo cmt nên $\frac{HD}{HC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy $\frac{DE}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4)

Kẻ tiếp tuyến Ax của (O) . Khi đó $OA \perp Ax$, đồng thời ta có :

$$\widehat{xAB} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{sd}AB (*_1)$$

Mặt khác, $BCDE$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ACB} = \widehat{AED} (*_2)$

Từ $(*_1)$ và $(*_2)$ suy ra : $\widehat{xAB} = \widehat{AED}$. Mà 2 góc này nằm ở vị trí so le trong nên $Ax \parallel ED \Rightarrow OA \perp ED$ vì $OA \perp Ax$ $\square$

Bài 5 (1 điểm) ✓

1) Giải phương trình : $x^2 + 2x - 3 = 4\sqrt{2x+3}$

2) Cho 3 số thực a, b, c thỏa mãn $a + b = 4c$. Chứng minh rằng :

$$2\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{a^2 - 2ac + 4c^2} + \sqrt{b^2 - 2bc + 4c^2} \geq 8c$$

1)

Xét phương trình $x^2 + 2x - 3 = 4\sqrt{2x+3}$ (1). Điều kiện $2x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{-3}{2}$ (*).

Ta có :

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 2x + 3 + 4\sqrt{2x+3} + 4 \\ &\Leftrightarrow (x+2)^2 = (\sqrt{2x+3} + 2)^2 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = \sqrt{2x+3} + 2 & (*_1) \\ x+2 = -\sqrt{2x+3} - 2 & (*_2) \end{cases} \end{aligned}$$

Với điều kiện (*) rõ ràng $(*_2)$ không thể xảy ra vì $VT > 0 > VP$

Xét $(*_1)$ ta có :

$$\begin{aligned} (*_1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2x + 3 \\ x \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \\ x \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow x = 3 \text{ (thỏa mãn } (*)) \end{aligned}$$

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x = 3$

2)

Ta có :

$$\begin{aligned} 4(a^2 - ab + b^2) &= (a+b)^2 + 3(a-b)^2 \geq (a+b)^2 \Rightarrow 2\sqrt{a^2 - ab + b^2} \geq |a+b| = |4c| \\ a^2 - 2ac + 4c^2 &= \frac{3}{4}(a-2c)^2 + \frac{1}{4}(a+2c)^2 \geq \frac{1}{4}(a+2c)^2 \Rightarrow \sqrt{a^2 - 2ac + 4c^2} \geq \frac{1}{2}|a+2c| \\ b^2 - 2bc + 4c^2 &= \frac{3}{4}(b-2c)^2 + \frac{1}{4}(b+2c)^2 \geq \frac{1}{4}(b+2c)^2 \Rightarrow \sqrt{b^2 - 2bc + 4c^2} \geq \frac{1}{2}|b+2c| \end{aligned}$$

Cộng vế với vế của 3 BPT trên ta được :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{a^2 - 2ac + 4c^2} + \sqrt{b^2 - 2bc + 4c^2} &\geq |4c| + \frac{1}{2}|a+2c| + \frac{1}{2}|b+2c| \\ &\geq 4c + \frac{1}{2}(a+2c) + \frac{1}{2}(b+2c) = 8c \quad \square \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 2c \\ b = 2c \\ c \geq 0 \\ a + 2c \geq 0 \\ b + 2c \geq 0 \\ a + b = 4c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2c \geq 0$$

Bài 1 (3 điểm) ✓

- 1) Giải phương trình $3x + 2 = x + 3$
- 2) Tìm m để hàm số $y = (m - 2)x + 1$ đồng biến
- 3) Rút gọn biểu thức $A = \left(3 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \cdot \left(3 - \frac{a - 5\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 5}\right)$ với $x \geq 0; x \neq 25$

1)

Ta có :

$$3x + 2 = x + 3 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = \frac{1}{2}$

2)

Hàm số $y = (m - 2)x + 1$ đồng biến $\Leftrightarrow m - 2 > 0 \Leftrightarrow m > 2$

Vậy những giá trị cần tìm của m là $m > 2$

3)

Với $x \geq 0; x \neq 25$ ta có :

$$\begin{aligned} A &= \left(3 + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}\right) \cdot \left(3 - \frac{a - 5\sqrt{a}}{\sqrt{a} - 5}\right) \\ &= (3 + \sqrt{a}) \cdot (3 - \sqrt{a}) \\ &= 9 - a \end{aligned}$$

Bài 2 (2 điểm) ✓

Cho phương trình $x^2 - 2mx + 2m - 10 = 0$ (1) với m là tham số

- 1) Giải hệ phương trình khi $m = -3$
- 2) Tìm m để hệ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho $2x_1 + x_2 = -4$

1)

Với $m = -3$ phương trình (1) trở thành :

$$x^2 + 6x - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -8 \end{cases}$$

Vậy với $m = -3$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt là $x = 2$ và $x = -8$

2)

Xét phương trình (1) có : $\Delta' = m^2 - 2m + 10 = (m - 1)^2 + 9 > 0 \forall m$. Do đó phương trình (1) luôn có 2 nghiệm $x_1; x_2$ với mọi m .

Theo Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m & (*_1) \\ x_1 \cdot x_2 = 2m - 10 & (*_2) \end{cases}$

Theo bài ra : $2x_1 + x_2 = -4$ (*₃)

Từ (*₁), (*₃) ta có hệ : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ 2x_1 + x_2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2m - 4 \\ x_2 = 4m + 4 \end{cases}$

Thay vào (*₂) ta có :

$$(-2m - 4)(4m + 4) = 2m - 10 \Leftrightarrow 4m^2 + 13m + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Thử lại thấy $m = -3$ và $m = -\frac{1}{4}$ đều thỏa mãn.

Vậy những giá trị cần tìm của m là $m = -3$ hoặc $m = -\frac{1}{4}$

Bài 3 (1 điểm) ✓

Một mảnh đất hình chữ nhật có chu vi bằng $28m$. Đường chéo của nó dài $10m$. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh đất đó.

Gọi chiều dài và chiều rộng của mảnh đất lần lượt là $a, b(m)$ ($0 < b < a < 28$)

Khi đó, đường chéo của mảnh đất là : $\sqrt{a^2 + b^2}$

Theo bài ra ta có :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2(a+b) = 28 \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 14 \\ a^2 + b^2 = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14-b \\ (14-b)^2 + b^2 = 100 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 14-b \\ b^2 - 14b + 48 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 14-b \\ b = 6 \text{ hoặc } b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = 8 \\ b = 6 \end{cases} & (\text{thỏa mãn}) \\ \begin{cases} a = 6 \\ b = 8 \end{cases} & (\text{không thỏa mãn}) \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy chiều dài và chiều rộng của mảnh đất lần lượt là $8m$ và $6m$

Bài 4 (2,5 điểm) ✓

Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm E (E khác A). Tiếp tuyến kẻ từ E cắt các tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) lần lượt tại C và D . Gọi M là tiếp điểm của tiếp tuyến kẻ từ E .

- 1) Chứng minh rằng tứ giác $ACMO$ nội tiếp 1 đường tròn
- 2) Chứng minh rằng $\frac{DM}{DE} = \frac{CM}{CE}$
- 3) Chứng minh rằng khi E thay đổi trên tia đối của tia AB thì tích $AC \cdot BD$ không đổi

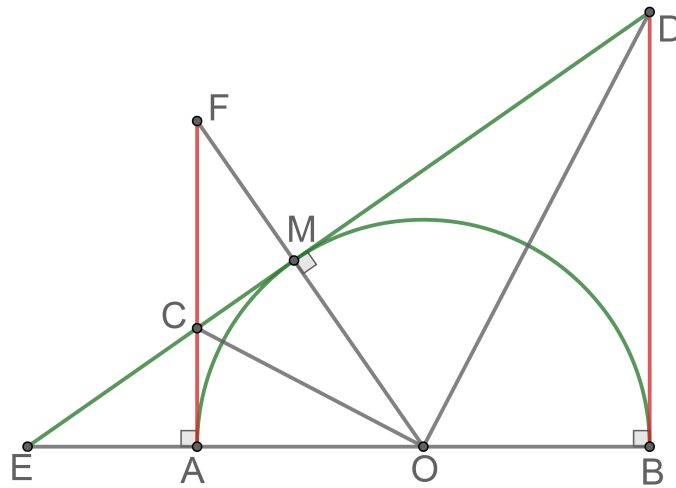
1)

Xét tứ giác $ACMO$ có $\widehat{CAO} + \widehat{CMO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Suy ra $ACMO$ là tứ giác nội tiếp $\square$.

2)

Theo tính chất của tiếp tuyến ta có : $\begin{cases} CM = CA \\ DM = DB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{CM}{CE} = \frac{CA}{CE} \\ \frac{DM}{DE} = \frac{DB}{DE} \end{cases} \quad (*_1)$



Mặt khác vì $AC \parallel BD$ nên: $\frac{CA}{DB} = \frac{CE}{DE} \Rightarrow \frac{CA}{CE} = \frac{DB}{DE}$ $(*)$.

Từ $(*)$, $(*)$ suy ra: $\frac{DM}{DE} = \frac{CM}{CE}$ $\square$

3)

Dễ dàng chứng minh được $\triangle AOC \sim \triangle BDO (g.g) \Rightarrow \frac{AC}{BO} = \frac{OA}{BD} \Rightarrow AC \cdot BD = BO \cdot OA = R^2$

Vậy khi E thay đổi trên tia đối của tia AB thì tích $AC \cdot BD$ luôn không đổi $\square$

Bài 5 (1,5 điểm) ✓

- 1) Cho a là số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \frac{a}{a^2+1} + \frac{5(a^2+1)}{2a}$
- 2) Cho đường tròn (O, R) và 2 dây cung AB, CD ($AB > CD$). Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M . Chứng minh rằng $MA + MB > MC + MD$

1)

Theo BĐT AM-GM, ta có:

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{a^2+1}{4a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{a^2+1} \cdot \frac{a^2+1}{4a}} = 1$$

$$a^2+1 \geq 2\sqrt{a^2 \cdot 1} = 2a \Rightarrow \frac{a^2+1}{a} \geq 2$$

Từ đó suy ra:

$$S = \frac{a}{a^2+1} + \frac{5(a^2+1)}{2a}$$

$$= \left(\frac{a}{a^2+1} + \frac{a^2+1}{4a} \right) + \frac{9}{4} \cdot \frac{a^2+1}{a}$$

$$\geq 1 + \frac{9}{4} \cdot 2$$

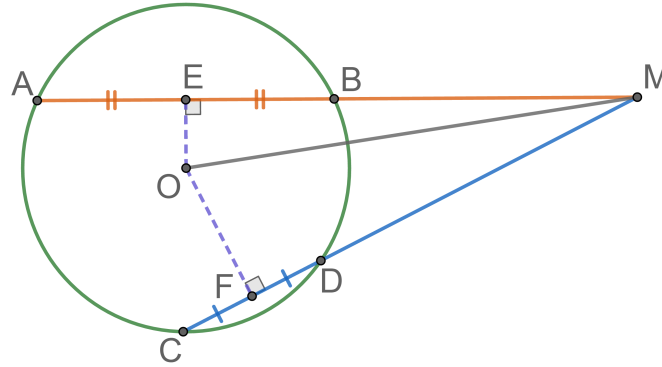
$$= \frac{11}{2}$$

$$S = \frac{11}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{a^2+1} = \frac{a^2+1}{4a} \\ a^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\frac{11}{2}$ đạt được tại $a = 1$

2)

Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, CD . Khi đó : $OE \perp AB, OF \perp CD$



Vì $AB > CD$ nên $OE < OF$.

$$\text{Để thấy } \begin{cases} MA + MB = 2ME \\ MC + MD = 2MF \end{cases} \quad (*)$$

Theo Pytago : $ME = \sqrt{MO^2 - OE^2}$; $MF = \sqrt{MO^2 - OF^2}$

Mà $OE < OF$ suy ra $ME > MF$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra : $MA + MB > MC + MD$ $\square$

Bài 1 (1,5 điểm) ✓

Cho phương trình $x^2 + 2mx - 2m - 6 = 0$ (1) với m là tham số.

- 1) Giải phương trình khi $m = 1$
- 2) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2$ nhỏ nhất

1)

Khi $m = 1$ thì phương trình (1) trở thành : $x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4 \end{cases}$

Vậy với $m = 1$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt là $x = 2$ và $x = -4$

2)

Phương trình (1) có $\Delta' = m^2 + 2m + 6 = (m + 1)^2 + 5 > 0 \forall m$. Do đó, phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$.

Theo Vi-et ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 \cdot x_2 = -2m - 6 \end{cases}$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4m^2 + 4m + 12 = (2m + 1)^2 + 11 \geq 11$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 11 \Leftrightarrow 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

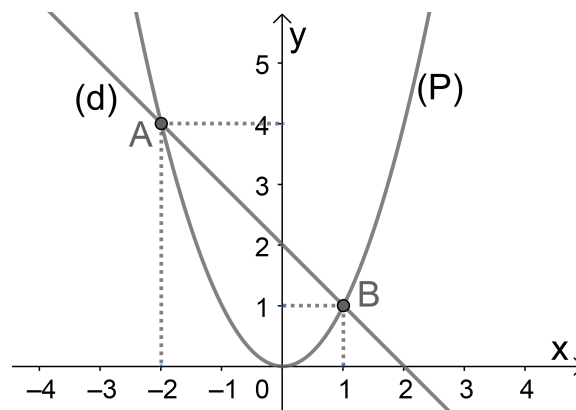
Vậy $m = -\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm của m

Bài 2 (1,5 điểm) ✓

Trên cùng 1 hệ tọa độ, gọi (P) là đồ thị hàm số $y = x^2$ và (d) là đồ thị hàm số $y = -x + 2$

- 1) Vẽ các đồ thị (P) và (d) . Từ đó xác định giao điểm của (P) và (d) bằng đồ thị
- 2) Tìm a, b để đồ thị Δ của hàm số $y = ax + b$ song song với (d) và cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng -1

1)



(P) và (d) có 2 giao điểm là $A(-2; 4)$ và $B(1; 1)$

2)

Ta có : $\Delta // (d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b \neq 2 \end{cases} \quad (*)$

Mặt khác, điểm có hoành độ bằng -1 thuộc (P) là $C(-1; 1)$. Do đó, Δ cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng -1 khi và chỉ khi $C \in \Delta \Leftrightarrow 1 = -a + b \quad (**)$

Thay $a = -1$ vào $(**)$ ta được $b = 0$ (thỏa mãn $(*)$)

Vậy $a = -1$ và $b = 0$ là các giá trị cần tìm.

Bài 3 (2 điểm) ✓

1) Một người đạp xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B, quãng đường AB dài 24km. Khi từ B về A người đó tăng vận tốc thêm 4km/h so với lúc đi, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B.

2) Giải phương trình : $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{x(1-x)} = 1$

1)

Gọi vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B là $x(\text{km/h})$ thì vận tốc khi đi từ B về A là $x + 4(\text{km/h})$ ($x > 0$). Theo bài ra ta có :

$$\begin{aligned} \frac{24}{x} - \frac{24}{x+4} &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow x(x+4) = 192 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 4x - 192 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -16 \text{ (không thỏa mãn)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B là 12km/h

2)

Xét phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{x(1-x)} = 1 \quad (2)$

Điều kiện $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \quad (*)$

Đặt $t = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ ($t \geq 0$) thì $\sqrt{x(1-x)} = \frac{t^2 - 1}{2}$. Phương trình (2) trở thành :

$$\begin{aligned} t + \frac{t^2 - 1}{2} &= 1 \\ &\Leftrightarrow t^2 + 2t - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \text{ loại} \end{cases} \end{aligned}$$

Với $t = 1$ ta có :

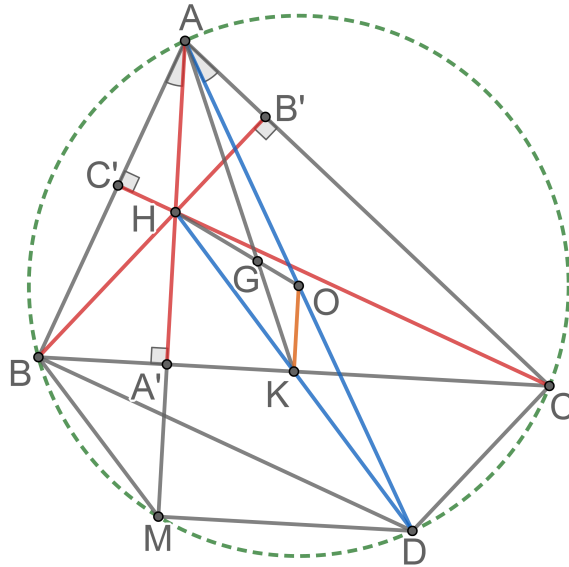
$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x(1-x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ thỏa mãn } (*) \\ x = 1 \text{ thỏa mãn } (*) \end{cases}$$

Vậy phương trình (2) có 2 nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$

Bài 4 (3 điểm) ✓

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn và 3 đường cao AA', BB', CC' cắt nhau tại H . Vẽ hình bình hành $BHCD$. Đường thẳng qua D song song với BC cắt AH tại M .

- 1) Chứng minh rằng A, B, C, D, M cùng thuộc 1 đường tròn
- 2) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh rằng $BM = CD$ và $\widehat{BAM} = \widehat{OAC}$
- 3) Gọi K là trung điểm của BC . Đường thẳng AK cắt OH tại G . Chứng minh rằng G là trọng tâm của $\triangle ABC$



1)
Để dàng chứng minh được $ABDC$ và $ACDM$ là các tứ giác nội tiếp. Từ đó suy ra A, B, C, D, M cùng thuộc 1 đường tròn $\square$

2)
Trong (O) , 2 dây cung BC và MD song song với nhau nên 2 cung BM và CD bằng nhau $\Rightarrow BM = CD \quad \square$

Vì $\widehat{ACD} = 90^\circ$ nên AD là đường kính của (O) . Từ đó ta có :

$$\widehat{OAC} = \widehat{DAC} = \widehat{BAM} \quad \square$$

3)
 $HCDB$ là hình bình hành nên BC và HD cắt nhau tại trung điểm mỗi đường. Mà K là trung điểm BC nên K cũng là trung điểm của HD .

Xét $\triangle AHD$ có OK là đường trung bình nên : $OK \parallel AH$ và $OK = \frac{AH}{2}$

Từ đó theo Ta-let ta có :

$$\frac{GK}{GA} = \frac{OK}{AH} = \frac{1}{2} \Rightarrow GA = \frac{2}{3}AK$$

Mà AK là đường trung tuyến của $\triangle ABC$ nên G là trọng tâm của $\triangle ABC \quad \square$

Bài 5 (2 điểm) ✓

- 1) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 2014$
- 2) Có 6 thành phố, trong đó cứ 3 thành phố bất kỳ thì có ít nhất 2 thành phố liên lạc được với nhau. Chứng minh rằng trong 6 thành phố nói trên tồn tại 3 thành phố liên lạc được với nhau.

1)

Ta có :

$$\begin{aligned}
 2P &= 2a^2 + 2ab + 2b^2 - 6a - 6b + 4028 \\
 &= (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) - 4(a + b) + 4026 \\
 &= (a + b)^2 - 4(a + b) + 4 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 4022 \\
 &= (a + b - 2)^2 + (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + 4022 \\
 &\geq 4022 \\
 \Rightarrow P &\geq 2011
 \end{aligned}$$

$$P = 2011 \Leftrightarrow a + b - 2 = a - 1 = b - 1 = 0 \Leftrightarrow a = b = 1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2011, đạt được tại $a = b = 1$

2)

Gọi 6 thành phố đã cho là $T_1; T_2; T_3; T_4; T_5; T_6$

Xét thành phố T_1 . Trong 5 thành phố còn lại tồn tại ít nhất 3 thành phố liên lạc được với T_1 hoặc ít nhất 3 thành phố không liên lạc được với T_1 .

- Nếu trong 5 thành phố còn lại, tồn tại ít nhất 3 thành phố liên lạc được với T_1 . Giả sử 3 thành phố đó là $T_2; T_3; T_4$. Theo giả thiết, trong 3 thành phố $T_2; T_3; T_4$ tồn tại 2 thành phố liên lạc được với nhau. 2 thành phố này cùng với thành phố T_1 tạo thành 3 thành phố liên lạc được với nhau. Ta có điều phải chứng minh.
- Nếu trong 5 thành phố còn lại, tồn tại ít nhất 3 thành phố không liên lạc được với T_1 . Giả sử 3 thành phố đó là $T_2; T_3; T_4$. Xét các bộ 3 thành phố $(T_1, T_2, T_3); (T_1, T_2, T_4); (T_1, T_3, T_4)$. Từ giả thiết suy ra T_2, T_3 liên lạc được với nhau, T_2, T_4 liên lạc được với nhau, T_3, T_4 liên lạc được với nhau. Như vậy bộ 3 thành phố $T_2; T_3; T_4$ tạo thành 3 thành phố liên lạc được với nhau. Ta có điều phải chứng minh.

Vậy trong 6 thành phố nói trên tồn tại 3 thành phố liên lạc được với nhau $\square$

Bài 1 (3 điểm) ✓

- 1) Cho biểu thức $P = x + 5$. Tính giá trị của P khi $x = 1$
- 2) Hàm số $y = 2x + 1$ đồng biến hay nghịch biến trên $\mathbb{R}$? Vì sao?
- 3) Giải phương trình $x^2 + 5x + 4 = 0$

1)

Khi $x = 1$ ta có $P = x + 5 = 1 + 5 = 6$

2)

Hàm số $y = 2x + 1$ là hàm số bậc nhất có hệ số $a = 2 > 0$ nên $y = 2x + 1$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

3)

$$\text{Ta có : } x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt là $x = -1$ và $x = -4$

Bài 2 (2 điểm) ✓

Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx + 3y = 5 \\ 2x - my = 0 \end{cases}$ (m là tham số)

- 1) Giải hệ phương trình với $m = 2$
- 2) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (x, y) thỏa mãn $y = 2x$

1)

Khi $m = 2$, hệ phương trình đã cho trở thành :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$$

Vậy với $m = 2$ thì hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x, y) = (1, 1)$

2)

$$\text{Xét hệ phương trình (I) } \begin{cases} mx + 3y = 5 & (*_1) \\ 2x - my = 0 & (*_2) \end{cases}$$

Khi $y = 2x$ thay vào $(*_2)$ ta có : $2x - 2mx = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $m = 1$

- Nếu $x = 0 \Rightarrow y = 2x = 0$. Nhưng khi đó $(*_1)$ không được thỏa mãn
- Nếu $m = \frac{1}{2}$ thì hệ (I) trở thành :

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{7} \\ y = \frac{10}{7} \end{cases} \text{ thỏa mãn } y = 2x$$

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm của m

Bài 3 (1,5 điểm) ✓

Khoảng cách giữa 2 bến sông A, B là 30km . Một ca nô đi xuôi dòng từ A đến B rồi lại ngược dòng từ B về A . Tổng thời gian ca nô đi xuôi dòng và ngược dòng là 4h . Tính vận tốc của ca nô khi nước lặng biết vận tốc dòng nước là 4km/h

Gọi vận tốc của ca nô khi nước lặng là $a(\text{km/h})$ ($a > 4$)

Khi đó :

+ Vận tốc ca nô khi xuôi dòng là : $a + 4(\text{km/h})$

+ Vận tốc ca nô khi ngược dòng là : $a - 4(\text{km/h})$

Theo bài ra ta có :

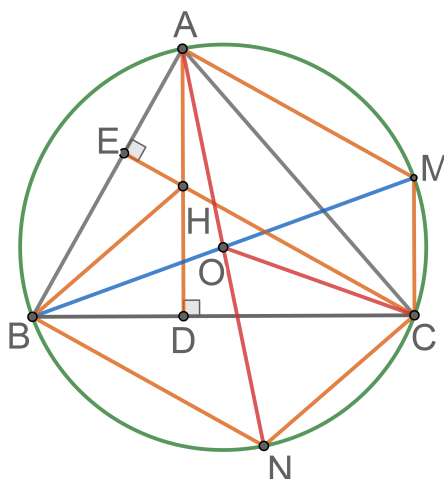
$$\frac{30}{a+4} + \frac{30}{a-4} = 4 \Leftrightarrow a^2 - 15a - 16 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \text{ (không thỏa mãn)} \\ a = 16 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$$

Vậy vận tốc của ca nô khi nước lặng là $16(\text{km/h})$

Bài 4 (2,5 điểm) ✓

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O . Hai đường cao AD, CE cắt nhau tại H . Vẽ đường kính BM của đường tròn tâm O

- 1) Chứng minh rằng $EHDB$ là tứ giác nội tiếp
- 2) Chứng minh rằng $AHCM$ là hình bình hành
- 3) Cho $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Chứng minh rằng $BH = BO$



1)

Xét tứ giác $EHDB$ có $\widehat{BEH} + \widehat{BDH} = 180^\circ \Rightarrow EHDB$ là tứ giác nội tiếp $\square$

2)

Xét tứ giác $AHCM$ có : $\begin{cases} AH \parallel CM (\perp BC) \\ AM \parallel HC (\perp AB) \end{cases} \Rightarrow AHCM$ là hình bình hành $\square$.

3)

Kẻ đường kính AN . Dễ dàng chứng minh được $BHCN$ là hình bình hành nên $BH =$

CN (*)

Xét $\triangle ONC$ cân tại O có $\widehat{ONC} = \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \triangle ONC$ đều $\Rightarrow CN = ON = BO$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $BH = BO$ $\square$.

Bài 5 (1 điểm) ✓

1) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc = 1$. Tính giá trị của biểu thức :

$$P = \frac{1}{a+ab+1} + \frac{1}{b+bc+1} + \frac{1}{c+ca+1}$$

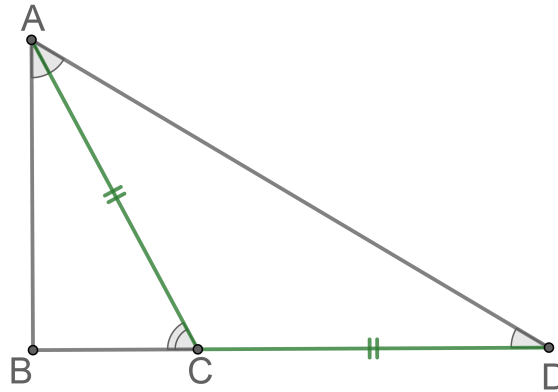
2) Chứng minh rằng nếu tam giác ABC có $\widehat{C} = 2\widehat{A}$ và $AC = 2BC$ thì tam giác ABC là tam giác vuông

1)

Với $abc = 1$, ta có :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} \\ &= \frac{1}{ab+a+1} + \frac{a}{abc+ab+a} + \frac{ab}{a^2bc+abc+ab} \\ &= \frac{1}{ab+a+1} + \frac{a}{1+ab+a} + \frac{ab}{a+1+ab} \\ &= \frac{1+a+ab}{ab+a+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2) Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = CA$



Dễ dàng chứng minh được :

$$\begin{aligned} \triangle ABC \sim \triangle DBA (g.g) &\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{BA} \\ &\Rightarrow AB^2 = BC \cdot BD \\ &\Leftrightarrow AB^2 = BC \cdot (BC + CD) \\ &\Leftrightarrow AB^2 = BC \cdot (BC + CA) \\ &\Leftrightarrow AB^2 = BC^2 + \frac{CA^2}{2} \quad (CA = 2BC) \\ &\Leftrightarrow 2AB^2 = 2BC^2 + CA^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2(AB^2 + BC^2) = 4BC^2 + CA^2$$

$$\Leftrightarrow 2(AB^2 + BC^2) = 2CA^2 \quad (CA = 2BC)$$

$$\Leftrightarrow AB^2 + BC^2 = CA^2$$

$\Rightarrow \triangle ABC$ là tam giác vuông $\square$

Bài 1 (2 điểm) ✓

1) Tìm giá trị của x để các biểu thức sau có nghĩa : $\sqrt{3x-2}; \frac{4}{\sqrt{2x-1}}$

2) Rút gọn $A = \frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

1)

$$\sqrt{3x-2} \text{ có nghĩa } \Leftrightarrow 3x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{\sqrt{2x-1}} \text{ có nghĩa } \Leftrightarrow 2x-1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$$

2)

Ta có :

$$A = \frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \sqrt{1} = 1$$

Bài 2 (2 điểm) ✓

Cho phương trình $mx^2 - (4m-2)x + 3m-2 = 0$ (1) với m là tham số

- 1) Giải phương trình với $m = 2$
- 2) Chứng minh rằng phương trình có nghiệm với mọi giá trị của m
- 3) Tìm m nguyên để phương trình (1) có các nghiệm đều nguyên

1)

Khi $m = 2$, phương trình đã cho trở thành :

$$2x^2 - 6x + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy với $m = 2$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 1$ và $x = 2$

2)

Xét 2 khả năng sau :

- Nếu $m = 0$, phương trình (1) trở thành : $2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- Nếu $m \neq 0$ thì (1) là phương trình bậc hai có :

$$\Delta' = (2m-1)^2 - m(3m-2) = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ (1) có nghiệm với mọi $m \neq 0$

Vậy phương trình (1) luôn có nghiệm với mọi giá trị của m $\square$

3)

Khi $m = 0$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x = 1$

Khi $m \neq 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm là: $x_1 = 1$ và $x_2 = \frac{3m-2}{m} = 3 - \frac{2}{m}$

Với $m \in \mathbb{Z}$ thì:

$$x_2 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m \in U(2) = \{\pm 1; \pm 2\}$$

Vậy những giá trị cần tìm của m là $m \in \{0; 1; -1; 2; -2\}$

Bài 3 (2 điểm) ✓

Một mảnh vườn hình chữ nhật có chu vi là $34m$. Nếu tăng thêm chiều dài $3m$ và chiều rộng $2m$ thì diện tích tăng thêm $45m^2$. Tính chiều dài, chiều rộng của mảnh vườn.

Gọi chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn đó lần lượt là $a, b(m)$ ($a > b > 0$)

Theo bài ra ta có:

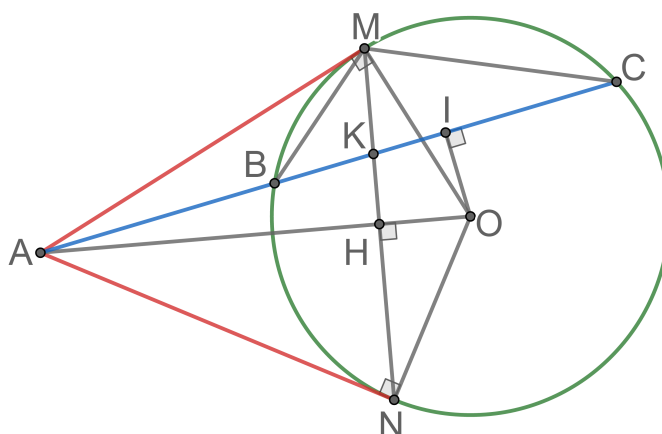
$$\begin{cases} 2(a+b) = 34 \\ (a+3)(b+2) - ab = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+2b = 34 \\ 2a+3b = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 5 \\ 2a+3b = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 12 \\ b = 5 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn lần lượt là $12m$ và $5m$

Bài 4 (3 điểm) ✓

Cho đường tròn tâm O . Từ điểm A nằm ngoài (O) kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm).

- 1) Chứng minh rằng $AMON$ nội tiếp đường tròn đường kính AO
- 2) Đường thẳng qua A cắt (O) tại B, C (B nằm giữa A và C). Gọi I là trung điểm BC . Chứng minh I cũng thuộc đường tròn đường kính AO
- 3) Gọi K là giao điểm của MN và BC . Chứng minh rằng $AK \cdot AI = AB \cdot AC$



1) Vì $\triangle AMO$ và $\triangle ANO$ lần lượt vuông tại M và N nên $AMON$ nội tiếp đường tròn đường kính AO □

2)

- Nếu đường thẳng AB đi qua O thì I trùng với O

- Nếu đường thẳng AB không đi qua O thì $OI \perp BC \Rightarrow \triangle AIO$ vuông tại $I \Rightarrow I$ thuộc đường tròn đường kính AO

Vậy I thuộc đường tròn đường kính AO $\square$

3)

Gọi H là giao điểm của MN và OA

- Trường hợp 1 : đường thẳng AB không đi qua O
Dễ dàng chứng minh được :

$$\triangle ABM \sim \triangle AMC (g.g) \Rightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow AB.AC = AM^2 \quad (*_1)$$

$$\triangle AKH \sim \triangle AOI (g.g) \Rightarrow \frac{AK}{AO} = \frac{AH}{AI} \Rightarrow AK.AI = AH.AO \quad (*_2)$$

Mặt khác theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, xét $\triangle AMO$ ta có :

$$AH.AO = AM^2 \quad (*_3)$$

Từ $(*_1), (*_2), (*_3)$ suy ra : $AB.AC = AK.AI$

- Trường hợp 2 : đường thẳng AB đi qua O
Khi đó K trùng với H và I trùng với $O \Rightarrow AK.AI = AO.AH$
Lập luận như trường hợp 1 ta cũng có : $AB.AC = AK.AI$

Vậy $AB.AC = AK.AI$ $\square$

Bài 5 (1 điểm) ✓

Cho các số thực x, y thỏa mãn $x \geq 0; y \geq 0; x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A = x^2 + y^2$

Từ $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$. Vì $x \geq 0; y \geq 0$ nên $0 \leq x \leq 1$.

Ta có :

$$A = x^2 + y^2 = x^2 + (1 - x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$$

- $A = 2x^2 - 2x + 1 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

- $A = 2x^2 - 2x + 1 = 2x(x - 1) + 1 \leq 1$ vì $0 \leq x \leq 1$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

+ $x = 0 \Rightarrow y = 1$

+ $x = 1 \Rightarrow y = 0$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{1}{2}$, đạt được tại $x = y = \frac{1}{2}$ và giá trị lớn nhất của A là 1, đạt được tại $(x, y) = (0, 1)$ hoặc $(x, y) = (1, 0)$

Bài 1 (1,5 điểm) ✓1) So sánh 2 số $3\sqrt{5}$ và $4\sqrt{3}$ 2) Rút gọn $A = \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} - \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$

1)

Ta có :

$$\begin{aligned} (3\sqrt{5})^2 &= 45; (4\sqrt{3})^2 = 48 \\ \Rightarrow (3\sqrt{5})^2 &< (4\sqrt{3})^2 \\ \Rightarrow 3\sqrt{5} &< 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

2)

Ta có :

$$\begin{aligned} A &= \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} - \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \\ &= \frac{(3 + \sqrt{5})^2 - (3 - \sqrt{5})^2}{(3 + \sqrt{5}) \cdot (3 - \sqrt{5})} \\ &= \frac{12\sqrt{5}}{4} \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

Bài 2 (2 điểm) ✓Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x + y = 5m - 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ với m là tham số1) Giải hệ phương trình với $m = 1$ 2) Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (x, y) thỏa mãn $x^2 - 2y^2 = 1$

1)

Với $m = 1$ thì hệ phương trình đã cho trở thành :

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy với $m = 1$ thì hệ đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (2, 0)$

2)

Ta có :

$$\begin{cases} 2x + y = 5m - 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 5m - 1 \\ 2x - 4y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ 5y = 5m - 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 4 \\ y = m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5-m}{2} \\ y = m - 1 \end{cases}$$

Từ đó, hệ đã cho có nghiệm (x, y) thỏa mãn $x^2 - 2y^2 = 1$ khi và chỉ khi :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{5-m}{2} \right)^2 - 2(m-1)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow & -7m^2 + 6m + 13 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{13}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy những giá trị cần tìm của m là $m = -1$ hoặc $m = \frac{13}{7}$

Bài 3 (2 điểm) ✓

Một người đi xe đạp từ A đến B cách nhau 24km. Khi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 4km/h so với lúc đi, vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi là 30 phút. Tính vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B

Gọi vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B là x (km/h) ($x > 0$)

Vận tốc xe đạp khi từ B về A là $x + 4$ (km/h).

Theo bài ra ta có :

$$\begin{aligned} & \frac{24}{x} - \frac{24}{x+4} = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow & x^2 + 4x - 192 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 12 \text{ (thỏa mãn)} \\ x = -16 \text{ (không thỏa mãn)} \end{cases} \end{aligned}$$

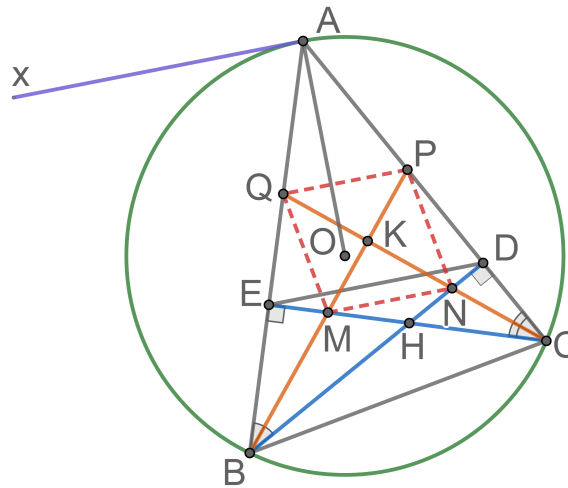
Vậy vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B là 12km/h

Bài 4 (3,5 điểm) ✓

Cho đường tròn tâm (O, R) , dây cung BC cố định ($BC < 2R$) và điểm A di động trên cung lớn BC sao cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn. Các đường cao BD và CE của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H .

- 1) Chứng minh rằng $ADHE$ là tứ giác nội tiếp
- 2) Giả sử $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Tính khoảng cách từ O đến BC theo R
- 3) Chứng minh rằng đường thẳng kẻ qua A vuông góc với DE luôn đi qua 1 điểm cố định.
- 4) Phân giác của $\widehat{ABD}$ cắt CE tại M , cắt AC tại P . Phân giác của $\widehat{ACE}$ cắt BD tại N , cắt AB tại Q . Tứ giác $MNPQ$ là hình gì? Vì sao?

- 1)
Để dàng chứng minh
- 2)



Ta có $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 120^\circ$. Từ đó xét $\triangle BOC$ cân tại O . Kẻ đường cao OI và xét $\triangle OIC$ ta có :

$$\frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \cos \widehat{IOC} = \frac{OI}{OC} \Rightarrow OI = \frac{OC}{2} = \frac{R}{2}$$

Vậy nếu $\widehat{BAC} = 60^\circ$ thì khoảng cách từ O đến BC bằng $\frac{R}{2}$

3)

Kẻ tiếp tuyến Ax của $(O) \Rightarrow Ax \perp OA$. Ta có :

$$\widehat{xAB} = \widehat{ACB} = \frac{1}{2} \text{sđ} \widehat{AB} (*)$$

Dễ thấy $BEDC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{AED} (**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra : $\widehat{xAB} = \widehat{AED}$

Mà 2 góc này ở vị trí so le trong $\Rightarrow Ax \parallel ED$. Mặt khác $Ax \perp OA \Rightarrow OA \perp ED$.

Vậy đường thẳng qua A và vuông góc với ED luôn đi qua điểm O cố định $\square$

4)

Gọi K là giao điểm của BP và CQ

Vì $BEDC$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$

$\Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{PBD} = \widehat{ACQ} = \widehat{QCE}$. Từ đó suy ra :

$$\begin{aligned} \widehat{KBC} + \widehat{KCB} &= \widehat{KBC} + \widehat{ECB} + \widehat{ECK} \\ &= \widehat{MBC} + \widehat{BCE} + \widehat{EBM} = 90^\circ \\ &\Rightarrow \widehat{BKC} = 90^\circ \\ &\Rightarrow BP \perp CQ \end{aligned}$$

Suy ra M và N lần lượt là trực tâm của các tam giác BCQ và BCP

$\Rightarrow QM \perp BC; PN \perp BC$

$\Rightarrow QM \parallel PN (*)$

$BCPQ$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{QPB} = \widehat{QCB}$

$BCNM$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{NCB} = \widehat{KMN}$

$\Rightarrow \widehat{QPB} = \widehat{KMN} \Rightarrow PQ \parallel MN (**)$

Từ $(*)$, $(**)$ suy ra $MNPQ$ là hình bình hành. Mà $MP \perp QN$ theo cmt nên $MNPQ$ là hình thoi.

Bài 5 (1 điểm) ✓

Cho biểu thức $P = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 36$. Chứng minh rằng P luôn dương với mọi $x, y \in \mathbb{R}$

Ta có :

$$\begin{aligned} P &= xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 36 \\ &= xy(x-2)(y+6) + 12x(x-2) + 3(y^2 + 6y + 12) \\ &= x(x-2)(y^2 + 6y + 12) + 3(y^2 + 6y + 12) \\ &= (y^2 + 6y + 12)(x^2 - 2x + 3) \\ &= \left[(y+3)^2 + 3 \right] \cdot \left[(x-1)^2 + 2 \right] \\ &> 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \square \end{aligned}$$

Bài 1 (2 điểm) ✓

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} \right) : \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+a}$

1) Rút gọn P

2) Tìm a để $P = \frac{13}{3}$

1)

Điều kiện : $a > 0$

Với điều kiện trên, ta có :

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} \right) : \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+a} \\ &= \frac{a + \sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)} \cdot \frac{\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}} \\ &= \frac{a + \sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} P = \frac{13}{3} &\Leftrightarrow \frac{a + \sqrt{a} + 1}{\sqrt{a}} = \frac{13}{3} \\ &\Leftrightarrow 3a - 10\sqrt{a} + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{a} - 3)(3\sqrt{a} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} = 3 \\ \sqrt{a} = \frac{1}{3} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 9 \\ a = \frac{1}{9} \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn}) \end{aligned}$$

Vậy những giá trị cần tìm của a là $a = 9$ hoặc $a = \frac{1}{9}$

Bài 2 (2 điểm) ✓

Một đội công nhân dự định làm xong công việc với 500 ngày công thợ. Tính số người của đội biết rằng nếu bổ sung thêm 5 công nhân thì số ngày hoàn thành công việc giảm đi 5 ngày.

Gọi số công nhân của đội là a (người) ($a \in \mathbb{N}^*$). Theo bài ra ta có :

$$\frac{500}{a} - \frac{500}{a+5} = 5 \Leftrightarrow a^2 + 5a - 500 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 20 \text{ (thỏa mãn)} \\ a = -25 \text{ (không thỏa mãn)} \end{cases}$$

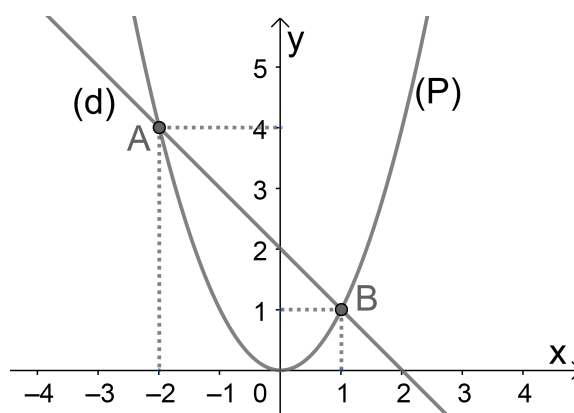
Vậy đội đó có 20 công nhân.

Bài 3 (2 điểm) ✓

Cho 2 hàm số $y = -x + 2$ và $y = x^2$

- 1) Vẽ đồ thị (d) của hàm số $y = -x + 2$ và đồ thị (P) của hàm số $y = x^2$ trên cùng 1 hệ trục tọa độ
- 2) Tìm giao điểm của (d) và (P) bằng đồ thị và kiểm tra lại bằng phương pháp đại số.
- 3) Tìm hàm số $y = ax + m$ biết đồ thị (d') của nó song song với (d) và cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng 2

1)



2)

Từ đồ thị ta có (P) và (d) có 2 giao điểm là $A(-2;4)$ và $B(1;1)$
Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = -x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ x = -2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vậy (d) và (P) có 2 giao điểm là $A(-2;4)$ và $B(1;1)$

3)

Ta có : $(d') \parallel (d) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ m \neq 2 \end{cases} \quad (*)$

Mặt khác, điểm có hoành độ bằng 2 thuộc (P) là $C(2;4)$. Do đó , (d') cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng 2 khi và chỉ khi $C \in \Delta \Leftrightarrow 4 = 2a + m \quad (**)$

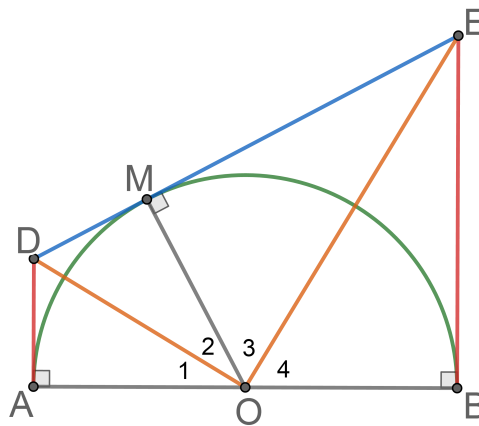
Thay $a = -1$ vào $(**)$ ta được $m = 6$ (thỏa mãn $(*)$)

Vậy hàm số cần tìm là $y = -x + 6$.

Bài 4 (3 điểm) ✓

Cho nửa đường tròn (O) , đường kính $AB = 2R$. Kẻ 2 tiếp tuyến Ax, By của nửa đường tròn. Tiếp tuyến thứ ba tại M của nửa đường tròn cắt Ax tại D và cắt By tại E .

- 1) Chứng minh $\triangle DOE$ là tam giác vuông
- 2) Chứng minh $AD \cdot BE = R^2$
- 3) Xác định vị trí của M trên nửa đường tròn sao cho diện tích $\triangle DOE$ đạt giá trị nhỏ nhất.



- 1)
Theo tính chất của tiếp tuyến ta có $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ và $\widehat{O_3} = \widehat{O_4}$
Suy ra :

$$\begin{aligned} \widehat{O_1} + \widehat{O_2} &= \frac{\widehat{O_1} + \widehat{O_2} + \widehat{O_3} + \widehat{O_4}}{2} = 90^\circ \\ \Rightarrow \widehat{DOE} &= 90^\circ \\ \Rightarrow \triangle DOE &\text{ là tam giác vuông} \square \end{aligned}$$

- 2)
Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông DOE ta có :

$$DM \cdot ME = OM^2 = R^2 \quad (*_1)$$

Hơn nữa, theo tính chất tiếp tuyến ta có : $DM = DA; ME = BE \quad \square$

Từ $(*_1), (*_2)$ suy ra : $AD \cdot BE = R^2 \quad \square 3)$

Ta có : $S_{DOE} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot DE$. Do đó :

$$\begin{aligned} S_{DOE} \text{ nhỏ nhất} &\Leftrightarrow DE \text{ nhỏ nhất} \\ &\Leftrightarrow DE \text{ là khoảng cách giữa } Ax, By \\ &\Leftrightarrow DE \parallel AB \\ &\Leftrightarrow M \text{ là điểm chính giữa cung } AB \end{aligned}$$

Vậy diện tích tam giác DOE nhỏ nhất khi M là điểm chính giữa cung AB .

Bài 5 (1 điểm) ✓

Cho $(x + \sqrt{x^2 + \sqrt{2010}}) \cdot (y + \sqrt{y^2 + \sqrt{2010}}) = \sqrt{2010}$. Tính $S = x + y$

Từ giả thiết suy ra :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} (x + \sqrt{x^2 + \sqrt{2010}}) \cdot (x - \sqrt{x^2 + \sqrt{2010}}) \cdot (y + \sqrt{y^2 + \sqrt{2010}}) = \sqrt{2010} \cdot (x - \sqrt{x^2 + \sqrt{2010}}) \\ (x + \sqrt{x^2 + \sqrt{2010}}) \cdot (y + \sqrt{y^2 + \sqrt{2010}}) \cdot (y - \sqrt{y^2 + \sqrt{2010}}) = \sqrt{2010} \cdot (y - \sqrt{y^2 + \sqrt{2010}}) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -\sqrt{2010} \cdot (y + \sqrt{y^2 + \sqrt{2010}}) = \sqrt{2010} \cdot (x - \sqrt{x^2 + \sqrt{2010}}) \\ (x + \sqrt{x^2 + \sqrt{2010}}) \cdot (-\sqrt{2010}) = \sqrt{2010} \cdot (y - \sqrt{y^2 + \sqrt{2010}}) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -\left(y + \sqrt{y^2 + \sqrt{2010}}\right) = x - \sqrt{x^2 + \sqrt{2010}} & (*_1) \\ -\left(x + \sqrt{x^2 + \sqrt{2010}}\right) = y - \sqrt{y^2 + \sqrt{2010}} & (*_2) \end{cases} \end{aligned}$$

Cộng vế với vế của $(*_1)$ và $(*_2)$ ta được :

$$-x - y = x + y \Leftrightarrow x + y = 0$$

Vậy $S = 0$

THI VÀO 10 CHUYÊN

DANH SÁCH ĐỀ THI

1	Năm học 2019-2020	 268
2	Năm học 2018-2019	 273
3	Năm học 2017-2018	 279
4	Năm học 2016-2017	 284
5	Năm học 2015-2016	 289
6	Năm học 2014-2015	 293
7	Năm học 2013-2014	 299
8	Năm học 2012-2013	 304
9	Năm học 2011-2012	 310
10	Năm học 2010-2011	 315

Bài 1 (2 điểm) ✓

1. Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 38x + 5}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}$ khi $x = 2 + \sqrt{3}$
2. Cho 2 hàm số $y = x^2$ và $y = (m-1)x - 1$ (với m là tham số) có đồ thị lần lượt là (P) và (d) . Tìm m để (P) cắt (d) tại 2 điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho $y_1^3 - y_2^3 = 18(x_1^3 - x_2^3)$

Lời giải

1.

$$x = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow (x-2)^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = 4x - 1$$

Từ đó ta có :

$$\begin{aligned} x^3 &= x(4x-1) = 4x^2 - x = 4(4x-1) - x = 15x - 4 \\ 7x^4 &= x(15x-4) = 15x^2 - 4x = 15(4x-1) - 4x = 56x - 15 \\ \Rightarrow x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 38x + 5 &= 56x - 15 - 2(15x-4) + 3(4x-1) - 38x + 5 = -5 \end{aligned}$$

$$\text{Đồng thời } \sqrt{x^2 - 4x + 5} = \sqrt{(x-2)^2 + 1} = 2$$

$$\text{Từ đó } A = \frac{-5}{2} \text{ với } x = 2 + \sqrt{3}$$

2.

 (P) cắt (d) tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi :

$$\begin{aligned} &\text{phương trình } x^2 - (m-1)x + 1 = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt} \\ \Leftrightarrow \Delta &= (m-1)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -1 \end{cases} \quad (*) \end{aligned}$$

Vì $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in (P)$ nên :

$$\begin{aligned} y_1^3 - y_2^3 &= 18(x_1^3 - x_2^3) \\ \Leftrightarrow x_1^6 - x_2^6 &= 18(x_1^3 - x_2^3) \\ \Leftrightarrow x_1^3 + x_2^3 &= 18 \text{ (vì } x_1 \neq x_2) \\ \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) &= 18 \quad (**) \end{aligned}$$

Theo Vi-et, ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = m-1 \\ x_1x_2 = 1 \end{cases}$. Thay vào $(**)$ ta được :

$$\begin{aligned} (m-1)^3 - 3(m-1) &= 18 \\ \Leftrightarrow (m-4)(m^2 + m + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow m &= 4 \text{ (vì } m^2 + m + 4 > 0, \forall m) \text{ (thỏa mãn } (**)) \end{aligned}$$

Vậy $m = 4$ là giá trị cần tìm của m

Bài 2 (2.5 điểm) ✓

1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2 + 2xy + 4 = 2x + 5y \\ 5x^2 + 7y - 18 = \sqrt{x^4 + 4} \end{cases}$

2. Cho x, y, z không âm thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm GTLN, GTNN của :

$$M = \sqrt{x^2 - 6x + 25} + \sqrt{y^2 - 6y + 25} + \sqrt{z^2 - 6z + 25}$$

Lời giải

1.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} y^2 + 2xy + 4 = 2x + 5y & (1) \\ 5x^2 + 7y - 18 = \sqrt{x^4 + 4} & (2) \end{cases}$. Ta có :

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (y^2 - y) + (2xy - 2x) - (4y - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (y - 1)(2x + y - 4) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y - 1 = 0 \\ 2x + y - 4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Nếu $y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1$. Thay vào (2) ta được :

$$5x^2 - 11 = \sqrt{x^4 + 4} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{45 + \sqrt{217}}{24}} \text{ (đặt } x^2 = t)$$

- Nếu $2x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - 2x$. Thay vào (2) ta được :

$$5x^2 - 14x + 10 = \sqrt{x^4 + 4} = \sqrt{x^2 + 2x + 2} \cdot \sqrt{x^2 - 2x + 2} \quad (3)$$

Đặt $\sqrt{x^2 + 2x + 2} = a$; $\sqrt{x^2 - 2x + 2} = b$ thì $a, b > 0$ và (3) trở thành :

$$\begin{aligned} 6a^2 - b^2 &= ab \\ &\Leftrightarrow (a - 2b)(a + 3b) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 0 \\ a + 3b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow a - 2b = 0 \text{ (vì } a, b > 0) \end{aligned}$$

Ta có :

$$\begin{aligned} a - 2b &= 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 2\sqrt{x^2 - 2x + 2} \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 4(x^2 - 2x + 2) \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

2.

• Đặt $\begin{cases} a = 3 - x \\ b = 3 - y \\ c = 3 - z \end{cases}$. Khi đó $\begin{cases} a + b + c = 6 \\ 0 \leq a, b, c \leq 3 \end{cases}$ và $M = \sqrt{a^2 + 16} + \sqrt{a^2 + 16} + \sqrt{a^2 + 16}$

• Tìm Min

Theo BĐT Minkowski ta có :

$$M = \sqrt{a^2 + 16} + \sqrt{a^2 + 16} + \sqrt{a^2 + 16} \geq \sqrt{(a + b + c)^2 + (4 + 4 + 4)^2} = 6\sqrt{5}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 2$

• Tìm Max

UCT với điều kiện $0 \leq a \leq 3$ ta được $\sqrt{a^2 + 16} \leq \frac{a + 12}{3}$ (*)

Thật vậy :

$$(*) \Leftrightarrow 9(a^2 + 16) \leq (a + 12)^2 \Leftrightarrow 8a^2 - 24a \leq 0 \Leftrightarrow a(a - 3) \leq 0 \text{ (đúng)}$$

Hoàn toàn tương tự và suy ra : $M \leq 14$

Đẳng thức xảy ra khi $(a, b, c) = (0, 3, 3)$ và các hoán vị

Bài 3 (1.5 điểm) ✓

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn $(xy + x + y)(x^2 + y^2 + 1) = 30$
2. Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{12n^2 + 1}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $2\sqrt{12n^2 + 1} + 2$ là số chính phương.

Lời giải

1.

Vì $x, y \in \mathbb{Z}^+$ nên $xy + x + y \geq 3; x^2 + y^2 + 1 \geq 3$, đồng thời $xy + x + y = 3 \Leftrightarrow x = y = 1$ và $x^2 + y^2 + 1 = 3 \Leftrightarrow x = y = 1$. Hơn nữa :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2xy \\ x^2 + 1 \geq 2x \\ y^2 + 1 \geq 2y \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$$

Do đó chỉ xảy ra khả năng sau : $\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + y^2 + 1 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (1; 2) \text{ hoặc } (x, y) = (2; 1)$

2.

Vì $12n^2 + 1$ là số lẻ nên theo bài ra ta có :

$$\begin{aligned} \sqrt{12n^2 + 1} &= 2m + 1, m \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow 3n^2 &= m(m + 1) (*) \\ \Rightarrow m &\text{ chia hết cho 3 hoặc } m \text{ chia 3 dư 2} \end{aligned}$$

+ Nếu m chia 3 dư 2 thì $m = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}$.

Từ (*) suy ra : $3n^2 = (3k + 2)(3k + 3) \Leftrightarrow n^2 = (k + 1)(3k + 2)$

Vì $UCLN(k + 1; 3k + 2) = 1$ nên phải có
$$\begin{cases} k + 1 = p^2 \\ 3k + 2 = q^2 \\ pq = n \end{cases}, (p, q \in \mathbb{Z})$$

Nhưng 1 số chính phương hoặc chia hết cho 3 hoặc chia 3 dư 1 nên không thể tồn tại $q \in \mathbb{Z}$ mà $q^2 = 3k + 2 \Rightarrow$ trường hợp này không xảy ra

+ Nếu m chia hết cho 3 thì $m = 3k, k \in \mathbb{Z}$.

Từ (*) suy ra : $3n^2 = 3k(3k + 1) \Leftrightarrow n^2 = k(3k + 1)$

Vì $UCLN(k; 3k + 1) = 1$ nên phải có
$$\begin{cases} k = p^2 \\ 3k + 1 = q^2 \\ pq = n \end{cases}, (p, q \in \mathbb{Z})$$

$\Rightarrow m = 3p^2$ và $q^2 = 3p^2 + 1$

$\Rightarrow 2\sqrt{12n^2 + 1} + 2 = 2(2m + 1) + 2 = 4m + 4 = 12p^2 + 4 = 4q^2 = (2q)^2$

$\Rightarrow 2\sqrt{12n^2 + 1} + 2$ là số chính phương.

Bài 4 (3 điểm) ✓

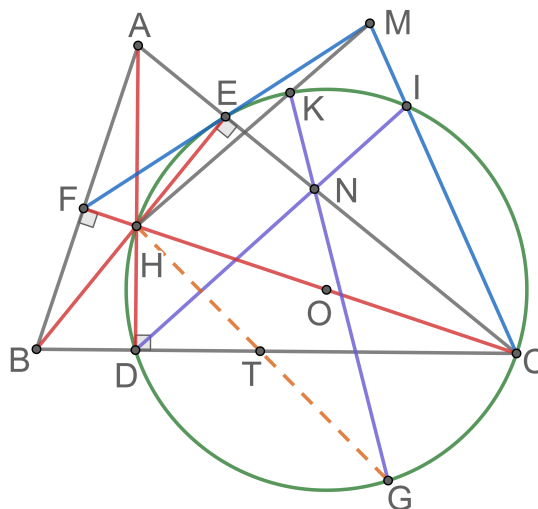
Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, $AB < AC$. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DHEC$. Trên cung nhỏ EC của (O) lấy điểm I khác E sao cho $IC > IE$. Đường thẳng DI cắt đường thẳng CE tại N , đường thẳng EF cắt đường thẳng CI tại M .

1. Chứng minh $NI \cdot ND = NE \cdot NC$

2. Chứng minh MN vuông góc với CH

3. Đường thẳng HM cắt (O) tại K khác H , đường thẳng KN cắt (O) tại G khác K , đường thẳng MN cắt đường thẳng BC tại T .
Chứng minh rằng 3 điểm H, T, G thẳng hàng.

Lời giải



1.

Ta có : $\triangle NDE \sim \triangle NCI \Rightarrow \frac{ND}{NC} = \frac{NE}{NI} \Rightarrow NI \cdot ND = NE \cdot NC$

2.

Ta chứng minh : $\widehat{DIC} = \widehat{DHC} = \widehat{AHF} = \widehat{AEF} = \widehat{MEC}$
 $\Rightarrow MENI$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EMN} = \widehat{EID} = \widehat{AHE} = \widehat{AFE}$
 $\Rightarrow MN \parallel AF \Rightarrow MN \perp CH$

3.

Ta có : $\widehat{NMC} = \widehat{IHC} = \widehat{NDT} \Rightarrow \triangle DNT \sim \triangle MNI \Rightarrow DN \cdot NI = MN \cdot NT$

Lại có : $\triangle KNI \sim \triangle DNG \Rightarrow DN \cdot NI = NK \cdot NG$

Suy ra : $MN \cdot NT = NK \cdot NG \Rightarrow \triangle MNK \sim \triangle GNT (c.g.c) \Rightarrow \widehat{TGK} = \widehat{HMN}$

Mà $\widehat{HMN} = \widehat{HCK} \Rightarrow \widehat{TGK} = \widehat{HCK} = \widehat{HGK} \Rightarrow TG \equiv HG$ hay 3 điểm T, G, H thẳng hàng.

Bài 5 (1 điểm) ✓

Cho 2020 cái kẹo vào 1010 cái hộp sao cho không có hộp nào chứa nhiều hơn 1010 cái kẹo và mỗi hộp chứa ít nhất 1 cái kẹo. Chứng minh rằng có thể tìm được 1 số hộp mà tổng số kẹo trong các hộp đó bằng 1010.

- Gọi a_i là số kẹo có trong hộp thứ i ($i = \overline{1, 1010}$)
 Khi đó theo giả thiết $1 \leq a_i \leq 1010$ và $a_1 + a_2 + \dots + a_{1010} = 2020$
- Đặt $S_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ với $i = \overline{1, 1010}$
 Khi đó $0 < S_i < 2020$ với $\forall i = \overline{1, 1009}$ và $S_{1010} = 2020$
- Xét dãy $S_1, S_2, \dots, S_{1009}$ gồm 1009 số
 Nếu trong dãy này tồn tại một số chia hết cho 1010 thì nó phải bằng 1010, ta có điều phải chứng minh. Ngược lại, nếu không tồn tại số nào chia hết cho 1010 thì theo nguyên lý Dirichle, tồn tại ít nhất 2 số có cùng số dư khi chia cho 1010.
 Giả sử 2 số đó là S_m và S_n ($S_m > S_n$). Do đó $(S_m - S_n) : 1010$, kết hợp với $0 < S_i < 2020, \forall i = \overline{1, 1009}$ suy ra $S_m - S_n = 1010$, ta có điều phải chứng minh

Bài 1 (2.5 điểm) ✓

1. Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \right) : \frac{4\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{b^2}$

với $|a| > |b| > 0$

2. Cho phương trình $x^2 + ax + b = 0$ (1) với x là ẩn, a, b là tham số. Tìm a, b biết phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases}$

Lời giải

1.

Với $|a| > |b| > 0$, ta có :

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \right) : \frac{4\sqrt{a^4 - a^2b^2}}{b^2} \\ &= \frac{(a + \sqrt{a^2 - b^2})^2 - (a - \sqrt{a^2 - b^2})^2}{b^2} \cdot \frac{b^2}{4\sqrt{a^2(a^2 - b^2)}} \\ &= \frac{4a \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}{4|a| \cdot \sqrt{a^2 - b^2}} \\ &= \frac{a}{|a|} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{nếu } a > 0 \\ -1 & \text{nếu } a < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

2.

Ta có :

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^3 - x_2^3 = 35 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ (x_1 - x_2)^2 + 3x_1x_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 5 \\ x_1x_2 = 6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + 5 \\ x_2(x_2 + 5) - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 + 5 \\ x_2^2 + 5x_2 - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 1 \\ x_1 = -1 \\ x_2 = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó, phương trình (1) có 2 nghiệm thỏa mãn điều kiện của bài toán khi và chỉ khi nó có 2 nghiệm là 1 và 6 hoặc -1 và -6

• 1 và 6 là 2 nghiệm của phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a + b = 0 \\ 36 + 6a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -7 \\ b = 6 \end{cases}$

• -1 và -6 là 2 nghiệm của phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a + b = 0 \\ 36 - 6a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 6 \end{cases}$

Vậy các giá trị cần tìm của a, b là $(a, b) \in \{(-7, 6); (7, 6)\}$

Bài 2 (2.5 điểm) ✓

- Giải phương trình $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = x+3$
- Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $0 \leq a, b, c \leq 2$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $P = \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$

Lời giải

1.

Xét phương trình: $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = x+3$ (1). Điều kiện $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ 3x+1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+3} \\ b = \sqrt{3x+1} \end{cases} \quad (a, b \geq 0) \Rightarrow 3a^2 - b^2 = 8$. Kết hợp với (1) ta có hệ:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a+b = a^2 \\ 3a^2 - b^2 = 8 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} b = a^2 - a \\ 3a^2 - (a^2 - a)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^2 - a \\ -a^4 + 2a^3 + 2a^2 - 8 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = a^2 - a \\ -(a-2)^2(a^2 + 2a + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a^2 - a \\ a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đó ta có: $\begin{cases} \sqrt{x+3} = 2 \\ \sqrt{3x+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Vậy phương trình (1) có nghiệm duy nhất là $x = 1$

2.

* Tìm Min: Dễ thấy $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ và do $a, b, c \geq 0$ nên:

$$P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq \frac{ab + bc + ca}{ab + bc + ca} = 1$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$

* Tìm Max: Vì $0 \leq a, b, c \leq 2$ nên:

$$\begin{aligned} (a-2)(b-2)(c-2) &\leq 0 \Leftrightarrow abc - 2(ab+bc+ca) + 4(a+b+c) - 8 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow 2(ab+bc+ca) \geq abc + 4 \quad (\text{vì } a+b+c=3) \\ &\Rightarrow ab+bc+ca \geq 2 \quad (\text{vì } abc \geq 0) \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó suy ra: } P = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} = \frac{(a+b+c)^2}{ab + bc + ca} - 2 = \frac{9}{ab + bc + ca} - 2 \leq \frac{9}{2} - 2 = \frac{5}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)(b-2)(c-2) = 0 \\ abc = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ trong 3 số a, b, c có một số bằng 0, một số bằng 1 và một số bằng 2

Vậy $\text{Min } P = 1$ và $\text{Max } P = \frac{5}{2}$

Bài 3 (1.5 điểm) ✓

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố (x, y) thỏa mãn $x^2 - 2y^2 = 1$
2. Chứng minh rằng nếu hiệu các lập phương của 2 số nguyên liên tiếp là bình phương của 1 số tự nhiên n thì n là tổng của 2 số chính phương liên tiếp

Lời giải

1.

Vì x, y là các số nguyên tố nên nếu x, y đều khác 3 thì $a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Khi đó $x^2 - 2y^2 \equiv 2 \pmod{3}$. Nhưng $x^2 - 2y^2 = 1$ nên x, y không thể cùng khác 3, tức là có ít nhất 1 số phải bằng 3.

- Nếu $x = 3$ thì: $3^2 - 2y^2 = 1 \Rightarrow y = 2$ (thỏa mãn)
- Nếu $y = 3$ thì: $x^2 - 2 \cdot 3^2 = 1 \Rightarrow x^2 = 19$ (không thỏa mãn)

Vậy $x = 3$ và $y = 2$ là các giá trị cần tìm.

2.

Giả sử $(a+1)^3 - a^3 = n^2$ với a là 1 số nguyên nào đó. Ta có:

$$\begin{aligned} (a+1)^3 - a^3 = n^2 &\Leftrightarrow 3a^2 + 3a + 1 = n^2 \\ &\Leftrightarrow 12a^2 + 12a + 3 = 4n^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow 3(2a+1)^2 = (2n-1)(2n+1) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } (2n-1; 2n+1) = 1 \text{ nên phải có } (*_1) \begin{cases} 2n-1 = 3p^2 \\ 2n+1 = q^2 \\ pq = 2a+1 \end{cases} \text{ hoặc } (*_2) \begin{cases} 2n-1 = p^2 \\ 2n+1 = 3q^2 \\ pq = 2a+1 \end{cases}$$

Trong đó p, q là các số tự nhiên lẻ.

Tuy nhiên $(*_1)$ không thể xảy ra vì từ $2n-1 = 3p^2 \Rightarrow 2n+1 = 3p^2 + 2 = q^2$ nhưng 1 số chính phương không thể chia 3 dư 2. Do đó xét $(*_2)$ ta có:

$$2n-1 = p^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow n = 2k^2 + 2k + 1 = k^2 + (k+1)^2$$

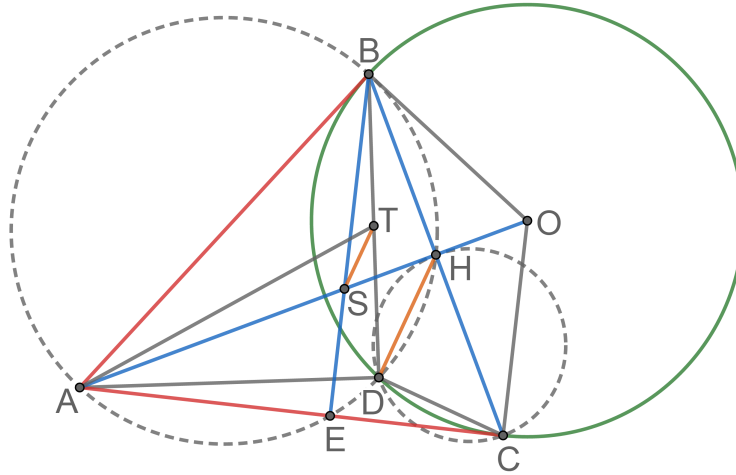
Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 4 (3 điểm) ✓

1. Từ 1 điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ 2 tiếp tuyến AB, AC của (O) với B, C là các tiếp điểm. Gọi H là giao điểm của AO, BC . Đường tròn đường kính CH cắt (O) tại D khác C . Gọi T là trung điểm của BD .
 - a) Chứng minh rằng $ABHD$ là tứ giác nội tiếp.
 - b) Gọi E là giao điểm của đường tròn đường kính AB và AC (E khác A); S là giao điểm của AO và BE . Chứng minh $TS \parallel HD$
2. Cho 2 đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A, B . Gọi MN là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn với $M \in (O_1), N \in (O_2)$. Qua A kẻ đường thẳng d song song với MN . (d) cắt $(O_1), (O_2), BM, BN$ lần lượt tại C, D, F, G (C, D khác A). Gọi E là giao điểm của CM, DN . Chứng minh $EF = EG$

Lời giải

1.



a)

Ta có : $\widehat{ABD} = \widehat{BCD}$ $(*_1)$ (cùng bằng 1 nửa số đo cung BD)

Hơn nữa dễ thấy AO là tiếp tuyến tại H của đường tròn đường kính CH nên :

$$\widehat{AHD} = \widehat{HCD} = \widehat{BCD} \quad (*_2)$$

Từ $(*_1)$ và $(*_2)$ suy ra : $\widehat{ABD} = \widehat{AHD} \Rightarrow ABHD$ là tứ giác nội tiếp $\square$

b)

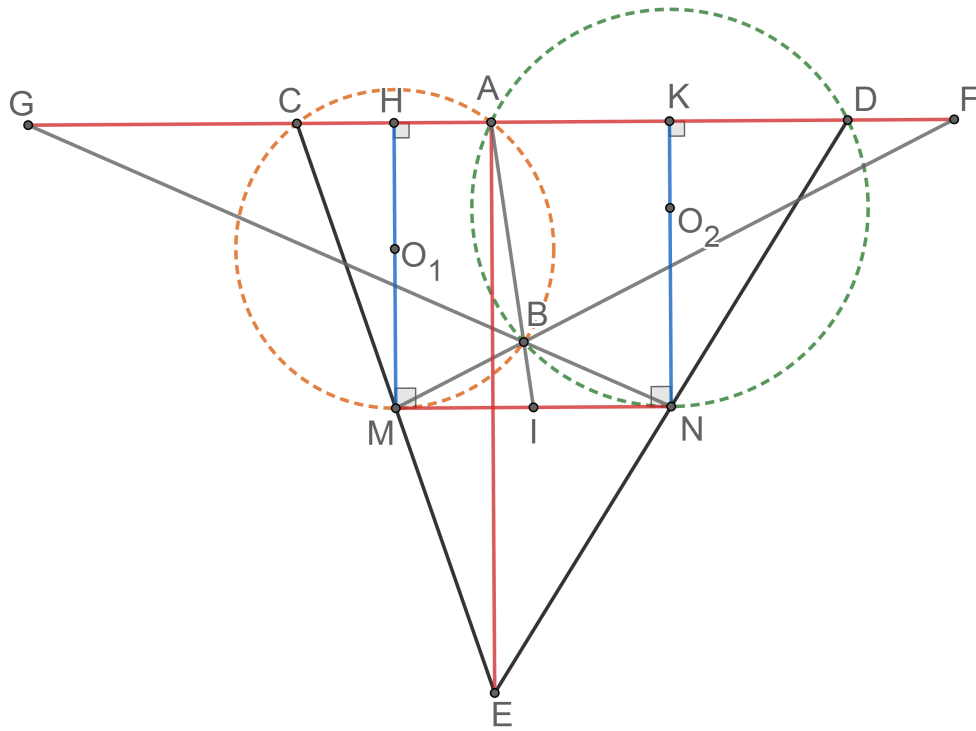
Vì $ABHD$ là tứ giác nội tiếp nên dễ dàng chứng minh được :

$$\triangle BCD \sim \triangle AHD (g.g) \Rightarrow \frac{AD}{AH} = \frac{BD}{BC} = \frac{2TD}{2HC} = \frac{TD}{HC}$$

Từ đó, kết hợp với $\widehat{TDA} = \widehat{AHC} = 90^\circ$ suy ra :

$$\begin{aligned} \triangle TAD \sim \triangle CAH (c.g.c) &\Rightarrow \widehat{TAD} = \widehat{CAH} \\ &\Rightarrow \widehat{TAS} = \widehat{DAE} = \widehat{EBD} = \widehat{SBT} \\ &\Rightarrow ABTS \text{ là tứ giác nội tiếp} \\ &\Rightarrow \widehat{STD} = \widehat{BAS} = \widehat{SHD} \\ &\Rightarrow TS // HD \quad \square \end{aligned}$$

2.



Gọi H, K lần lượt là giao điểm của O_1M và O_2N với d và I là giao điểm của AB với MN . Khi đó, dễ thấy H, K lần lượt là trung điểm của AC, AD và $MNKH$ là hình chữ nhật. Do đó :

$$MN = HK = \frac{CD}{2}$$

Hơn nữa $MN \parallel CD \Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\triangle CDE \Rightarrow M, N$ lần lượt là trung điểm của EC và ED . Từ đó ta có MH là đường trung bình của $\triangle ACE \Rightarrow MH \parallel AE \Rightarrow AE \perp GF$ (*3)

Theo Talet : $\frac{MI}{AF} = \frac{NI}{AG}$ (*4)

Mặt khác, theo tính chất của phương tích ta có : $IM^2 = IA \cdot IB = IN^2 \Rightarrow IM = IN$ (*5)

Từ (*4), (*5) $\Rightarrow AF = AG$ (*6)

Từ (*3) và (*6) suy ra AE là đường trung trực của $FG \Rightarrow EF = EG$ $\square$

Bài 5 (0.5 điểm) ✓

Cho 20 số tự nhiên, mỗi số có ước nguyên tố không vượt quá 7. Chứng minh rằng tồn tại 2 số trong 20 số đã cho mà tích của 2 số đó là số chính phương.

Lời giải

Gọi 20 số tự nhiên đã cho là a_i ($i = \overline{1, 20}$). Theo giả thiết ta có :

$$a_i = 2^{m_i} \cdot 3^{n_i} \cdot 5^{p_i} \cdot 7^{q_i} \quad (m_i, n_i, p_i, q_i \in \mathbb{N})$$

Xét tương ứng $\begin{cases} m_i \rightarrow 0 \text{ nếu } m_i \text{ chẵn} \\ m_i \rightarrow 1 \text{ nếu } m_i \text{ lẻ} \end{cases}$ và áp dụng cho n_i, p_i, q_i . Khi đó mỗi bộ (m_i, n_i, p_i, q_i)

sẽ tương ứng với 1 bộ gồm 4 phần tử mà mỗi phần tử là 0 hoặc 1 (ta gọi là bộ $(0, 1)$). Có tất cả là $2^4 = 16$ bộ như thế. Do đó, theo nguyên lý Dirichle, tồn tại 2 số trong 20 số

đã cho mà các m_i, n_i, p_i, q_i của 2 số đó cùng tương ứng với 1 bộ $(0,1)$. Không giảm tính tổng quát, giả sử đó là a_1 và a_2 . khi đó :

$$m_1 + m_2 = 2x; n_1 + n_2 = 2y; p_1 + p_2 = 2z; q_1 + q_2 = 2t$$

Suy ra : $a_1.a_2 = (2^x.3^y.5^z.7^t)^2$ là 1 số chính phương. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 1 (2.5 điểm) ✓

Cho 2 biểu thức $P = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2}$ và $Q = \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x} + 2x - 2}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

1. Rút gọn P và Q
2. Tìm tất cả các giá trị của x để $P = Q$

Lời giải

1. Với $x \geq 0; x \neq 4$, ta có :

$$P = \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(2x - 4\sqrt{x}) + (\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x} - 2} = \frac{(\sqrt{x} - 2)(2\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 2} = 2\sqrt{x} + 1$$

$$Q = \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{x} + 2x - 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{(x\sqrt{x} + 2x) - (\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x} + 2} = \frac{(\sqrt{x} + 2)(x - 1)}{\sqrt{x} + 2} = x - 1$$

2.

$$P = Q \Leftrightarrow 2\sqrt{x} + 1 = x - 1 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 + \sqrt{3} \\ \sqrt{x} = 1 - \sqrt{3} \text{ (vô nghiệm)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 4 + 2\sqrt{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy các giá trị cần tìm của x là $x = 4 + 2\sqrt{3}$

Bài 2 (2.5 điểm) ✓

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a}$. Tính giá trị của biểu thức :

$$P = \frac{4a + 6b + 2017c}{4a - 6b + 2017c}$$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2y = xy + 4 \\ x^2 - x + 3 - x\sqrt{6-x} = (y-3)\sqrt{y-3} \end{cases}$$

Lời giải

1.

Vì $a, b, c > 0 \Rightarrow a + b + c > 0$. Do đó, theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{a+b+c}{b+c+a} = 1 \Rightarrow a = b = c \Rightarrow P = \frac{2027}{2015}$$

2.

$$\text{Xét hệ phương trình } \begin{cases} x^2 + 2y = xy + 4 \\ x^2 - x + 3 - x\sqrt{6-x} = (y-3)\sqrt{y-3} \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \cdot \text{Điều kiện } \begin{cases} x \leq 6 \\ y \geq 3 \end{cases}$$

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 - 4) - (xy - 2y) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2-y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = x + 2 \end{cases}$$

- Nếu $x = 2$. Thay vào (2) ta có :

$$(y-3)\sqrt{y-3} = 1 \Leftrightarrow y-3 = 1 \Leftrightarrow y = 4$$

- Nếu $y = x+2$. Thay vào (2) ta được :

$$x^2 - x + 3 = (x-1)\sqrt{x-1} + x\sqrt{6-x} \quad (3)$$

Theo AM-GM :

$$(x-1)\sqrt{x-1} + x\sqrt{6-x} \leq \frac{(x-1)^2 + (x-1)}{2} + \frac{x^2 + (6-x)}{2} = x^2 - x + 3$$

Do đó, (3) vô nghiệm. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x, y) = (2, 4)$

Bài 3 (1.5 điểm) ✓

1. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$M = \frac{a^2 + 6a + 3}{a^2 + a} + \frac{b^2 + 6b + 3}{b^2 + b} + \frac{c^2 + 6c + 3}{c^2 + c}$$

2. Cho tam giác vuông có độ dài các cạnh là các số tự nhiên có 2 chữ số. Nếu đổi chỗ 2 chữ số của số đo cạnh huyền ta được số đo của 1 cạnh góc vuông. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó.

Lời giải

1.

$$\begin{aligned} M &= \frac{a^2 + 6a + 3}{a^2 + a} + \frac{b^2 + 6b + 3}{b^2 + b} + \frac{c^2 + 6c + 3}{c^2 + c} \\ &= 1 + \frac{3}{a} + \frac{2}{a+1} + 1 + \frac{3}{b} + \frac{2}{b+1} + 1 + \frac{3}{c} + \frac{2}{c+1} \\ &= 3 + 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 2\left(\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right) \\ &\geq 3 + 3 \cdot \frac{9}{a+b+c} + 2 \cdot \frac{9}{a+1+b+1+c+1} \quad \left(\text{Áp dụng: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}\right) \\ &\geq 3 + 3 \cdot \frac{9}{3} + 2 \cdot \frac{9}{6} \quad (\text{Vì } a+b+c \leq 3) \\ &= 15 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 15

2.

Giả sử tam giác đã cho là $\triangle ABC$ vuông tại A .

Theo giả thiết, đặt : $\begin{cases} AB = \overline{ab}; BC = \overline{ba} \\ AC = \overline{cd} \end{cases}$ với $0 < a < b \leq 9; 1 \leq c < b; 0 \leq d \leq 9$

Áp dụng Pytago :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow \overline{ba}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{cd}^2$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \overline{cd}^2 &= \overline{ba}^2 - \overline{ab}^2 \\ \Leftrightarrow \overline{cd}^2 &= 99 \cdot (b^2 - a^2) \\ \Rightarrow \overline{cd}^2 &: 33 \\ \Rightarrow \overline{cd} &: 33 \\ \Rightarrow \overline{cd} &\in \{33; 66; 99\} \end{aligned}$$

- Nếu $\overline{cd} = 99 \Rightarrow \overline{ba} > \overline{cd} = 99$ (vô lý)
- Nếu $\overline{cd} = 66 \Rightarrow b^2 - a^2 = 44 \Leftrightarrow (a-b)(a+b) = 44$
Do $b-a; a+b$ cùng tính chẵn lẻ nên $b-a; a+b$ phải cùng chẵn. Tuy nhiên $0 < b-a < a+b \leq 18$ mà 44 chỉ tách được thành tích của 2 số tự nhiên chẵn là 2 và 22. Do vậy, không tồn tại a, b thỏa mãn.
- Nếu $\overline{cd} = 33 \Rightarrow b^2 - a^2 = 11 \Leftrightarrow (b-a)(a+b) = 11$. Vì $0 < b-a < a+b$ nên :

$$\begin{cases} b-a=1 \\ a+b=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=6 \end{cases}$$

Như vậy $AB = 56; BC = 65; AC = 33$. Từ đó ta có bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ là :

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{AB \cdot AC}{AB + BC + CA} = \frac{56 \cdot 33}{56 + 65 + 33} = 12$$

Bài 4 (3 điểm) ✓

Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn, $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại A của đường tròn cắt BC tại M . Kẻ đường cao BF của $\triangle ABC$. Từ F kẻ đường thẳng song song với MA cắt AB tại E . Gọi H là giao điểm của BF, CE ; D là giao điểm của AH, BC .

1. Chứng minh rằng $MA^2 = MB \cdot MC$ và $\frac{MC}{MB} = \frac{AC^2}{AB^2}$
2. Chứng minh rằng $AH \perp BC$
3. Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh rằng E, F, D, I cùng nằm trên 1 đường tròn.
4. Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với HI cắt AB, AC lần lượt tại P, Q . Chứng minh rằng H là trung điểm của PQ .

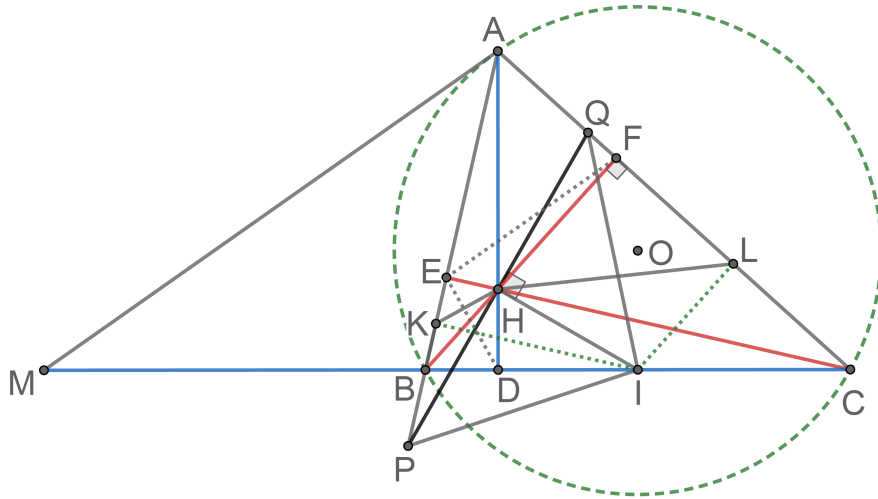
Lời giải

1.

Ta có : $\triangle MAB \sim \triangle MCA (g.g) \Rightarrow \frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MA} \Rightarrow MA^2 = MB \cdot MC \quad \square$

Mặt khác cũng từ 2 tam giác trên đồng dạng, ta có :

$$\frac{MA}{MC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{MC^2}{MA^2} = \frac{MC^2}{MB \cdot MC} = \frac{MC}{MB} \quad \square$$



2.

Vì $\begin{cases} \widehat{MAE} = \widehat{AEF} & (MA // EF) \\ \widehat{ACB} = \widehat{MAE} & (\text{cùng chắn cung } AB) \end{cases} \Rightarrow \widehat{ACB} = \widehat{AEF} \Rightarrow BEFC \text{ là tứ giác nội tiếp}$

Mà $\widehat{BFC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow H$ là trực tâm của $\triangle ABC$. Do đó $AH \perp BC$ $\square$

3.

Vì $\triangle BFC$ vuông tại F và có FI là trung tuyến nên $FI = IB \Rightarrow \triangle BFI$ cân tại I . Từ đó theo tính chất góc ngoài ta có :

$$\widehat{FIC} = \widehat{IBF} + \widehat{IFB} = 2\widehat{IBF} \quad (*_1)$$

Mặt khác $BEHD, AEHF, ABDF$ là các tứ giác nội tiếp nên :

$$\begin{cases} \widehat{HBD} = \widehat{HED} \\ \widehat{FAH} = \widehat{FEH} \\ \widehat{HBD} = \widehat{FAH} \end{cases} \Rightarrow 2\widehat{IBF} = 2\widehat{HBD} = \widehat{HED} + \widehat{FEH} = \widehat{FED} \quad (*_2)$$

Từ $(*_1), (*_2) \Rightarrow \widehat{FIC} = \widehat{FED} \Rightarrow EFID$ là tứ giác nội tiếp hay 4 điểm E, F, I, D cùng nằm trên 1 đường tròn $\square$

4.

Gọi K, L lần lượt là trung điểm của BE, CF . Ta có :

$$\triangle HBE \sim \triangle HCF \Rightarrow \frac{HE}{HF} = \frac{BE}{CF} = \frac{KE}{LF}$$

Xét $\triangle HKE$ và $\triangle HLF$ có :

$$\begin{cases} \frac{HE}{HF} = \frac{KE}{LF} \text{ (cmt)} \\ \widehat{KEH} = \widehat{HFL} = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle HKE \sim \triangle HLF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{HKE} = \widehat{HLF} \quad (*_3)$$

Lại có : IK là đường trung bình của $\triangle EBC \Rightarrow IK // CE \Rightarrow IK \perp AB \Rightarrow KPIH$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HKE} = \widehat{HIP} \quad (*_4)$

Chứng minh tương tự ta cũng có : $\widehat{HLF} = \widehat{HIQ} \quad (*_5)$

Từ $(*_3), (*_4), (*_5)$ suy ra : $\widehat{HIP} = \widehat{HIQ}$. Mặt khác $HI \perp PQ \Rightarrow \triangle IPQ$ cân tại I . Do đó, HI cũng là đường trung tuyến của $\triangle IPQ \Rightarrow H$ là trung điểm của PQ $\square$

Bài 5 (0.5 điểm) ✓

Cho $2n + 1$ số nguyên, trong đó có đúng 1 số 0 và các số $1; 2; \dots; n$ mỗi số xuất hiện 2 lần. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n , ta luôn sắp xếp được $2n + 1$ số nguyên trên thành 1 dãy sao cho với mọi số $m \in \{1; 2; \dots; n\}$ có đúng m số nằm giữa 2 số m

Lời giải

Trước hết ta có nhận xét sau đây :

- Với dãy gồm các số lẻ : $1; 3; 5; \dots; 2k + 1$ mỗi số xuất hiện 2 lần, ta có cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng cách dùng thêm 1 ô trống như sau :

$$2k + 1; 2k - 1; \dots; 1; \square; 1; \dots; 2k - 1; 2k + 1$$

- Với dãy gồm các số chẵn : $2; 4; 6; \dots; 2k$ mỗi số xuất hiện 2 lần, ta có cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán bằng cách dùng thêm 1 ô trống như sau :

$$2k; 2k - 2; \dots; 2; \square; \square; 2; \dots; 2k - 2; 2k$$

Trở lại bài toán, xét 2 khả năng :

- Nếu $n = 2k + 1$, ta có cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán như sau :

$$2k + 1; 2k - 1; \dots; 1; \boxed{2k}; 1; \dots; 2k - 1; 2k + 1; 2k - 2; 2k - 4; \dots; 2; \boxed{2k}; \boxed{0}; 2; \dots; 2k - 4; 2k - 2$$

- Nếu $n = 2k$, ta có cách sắp xếp thỏa mãn yêu cầu bài toán như sau :

$$2k - 1; 2k - 3; \dots; 1; \boxed{2k}; 1; \dots; 2k - 3; 2k - 1; 2k - 2; 2k - 4; \dots; 2; \boxed{0}; \boxed{2k}; 2; \dots; 2k - 4; 2k - 2$$

Vậy, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 1 (2.5 điểm) ✓

1. Phân tích đa thức $P(x) = x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6$ thành nhân tử
2. Rút gọn biểu thức :

$$Q = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \text{ với } x > 1, x \neq 2$$

Lời giải

1.

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 6 = (x^4 + 5x^3 + 6x^2) - (x^2 + 5x + 6) \\ &= (x^2 + 5x + 6)(x^2 - 1) \\ &= (x+2)(x+3)(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

2.

Để ý rằng :

$$\begin{aligned} x - \sqrt{4(x-1)} &= x - 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} - 1)^2 \\ x + \sqrt{4(x-1)} &= x + 2\sqrt{x-1} = (\sqrt{x-1} + 1)^2 \\ x^2 - 4(x-1) &= (x-2)^2 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{|\sqrt{x-1} - 1| + |\sqrt{x-1} + 1|}{|x-2|} \cdot \frac{x-2}{x-1} \\ &= \frac{|\sqrt{x-1} - 1| + \sqrt{x-1} + 1}{|x-2|} \cdot \frac{x-2}{x-1} \end{aligned}$$

$$+ \text{ Nếu } 1 < x < 2 \text{ thì } Q = \frac{1 - \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} + 1}{2-x} \cdot \frac{x-2}{x-1} = \frac{2}{1-x}$$

$$+ \text{ Nếu } x > 2 \text{ thì } Q = \frac{\sqrt{x-1} - 1 + \sqrt{x-1} + 1}{x-2} \cdot \frac{x-2}{x-1} = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$$

Bài 2 (2 điểm) ✓

1. Giải phương trình $2(2x-1) - 3\sqrt{5x-6} = \sqrt{3x-8}$
2. Cho 4 số thực a, b, c, d khác 0 thỏa mãn : a, b là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - 10cx - 11d = 0$; c, d là 2 nghiệm của phương trình $x^2 - 10a - 11b = 0$.
Tính $S = a + b + c + d$

Lời giải

1.

$$\begin{aligned} 2(2x-1) - 3\sqrt{5x-6} &= \sqrt{3x-8} \Leftrightarrow 4(2x-1) - 6\sqrt{5x-6} - 2\sqrt{3x-8} = 0 \\ &\Leftrightarrow (5x-6-6\sqrt{5x-6}+9) + (3x-8-2\sqrt{3x-8}+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{5x-6}-3)^2 + (\sqrt{3x-8}-1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{5x-6}-3 = \sqrt{3x-8}-1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $x = 3$

2.

Theo Vi-et ta có :

$$\begin{cases} a+b=10c & (1) \\ c+d=10a & (2) \\ ab=-11d & (3) \\ cd=-11b & (4) \end{cases}$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow b+d = 9(a+c) (*_1) \Rightarrow S = 10(a+c) \quad (5)$

Từ (3), (4) $\Rightarrow abcd = 121bd \Rightarrow ac = 121 \quad (*_2)$

Hơn nữa, a là nghiệm của phương trình $x^2 - 10ac - 11d = 0$ và c là nghiệm của phương trình $x^2 - 10ac - 11b = 0$ nên :

$$\begin{aligned} a^2 - 10c - 11d &= 0 \\ c^2 - 10a - 11b &= 0 \\ \Rightarrow a^2 + c^2 - 20ac - 11(b+d) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+c)^2 - 99(a+c) - 2662 &= 0 \quad (\text{vì } (*_1), (*_2)) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a+c = -22 \\ a+c = 121 \end{cases} \end{aligned}$$

• Nếu $a+c = -22$. Thay vào (5) $\Rightarrow S = -220$

• Nếu $a+c = 121$. Thay vào (5) $\Rightarrow S = 1210$

Vậy $S = -220$ hoặc $S = 1210$

Bài 3 (1 điểm) ✓

Cho 3 số dương a, b, c . Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = \frac{3a^4 + 3b^4 + c^3 + 2}{(a+b+c)^3}$

Lời giải

Theo AM-GM :

$$\begin{aligned} 3a^4 + 1 &= a^4 + a^4 + a^4 + 1 \geq 4\sqrt[4]{a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 \cdot 1} = 4a^3 \\ 3b^4 + 1 &= b^4 + b^4 + b^4 + 1 \geq 4\sqrt[4]{b^4 \cdot b^4 \cdot b^4 \cdot 1} = 4b^3 \\ \Rightarrow M &\geq \frac{4(a^3 + b^3) + c^3}{(a+b+c)^3} \quad (*) \end{aligned}$$

Mặt khác với $x, y > 0$ thì :

$$\begin{aligned}(x-y)^2(x+y) &\geq 0 \Leftrightarrow x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2 \\ &\Leftrightarrow 4(x^3 + y^3) \geq (x+y)^3 \quad (**)\end{aligned}$$

Áp dụng (**), từ (*) suy ra :

$$M \geq \frac{(a+b)^3 + c^3}{(a+b+c)^3} \geq \frac{(a+b+c)^3}{4(a+b+c)^3} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4 = b^4 = 1 \\ a = b \\ a + b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ c = 2 \end{cases}$$

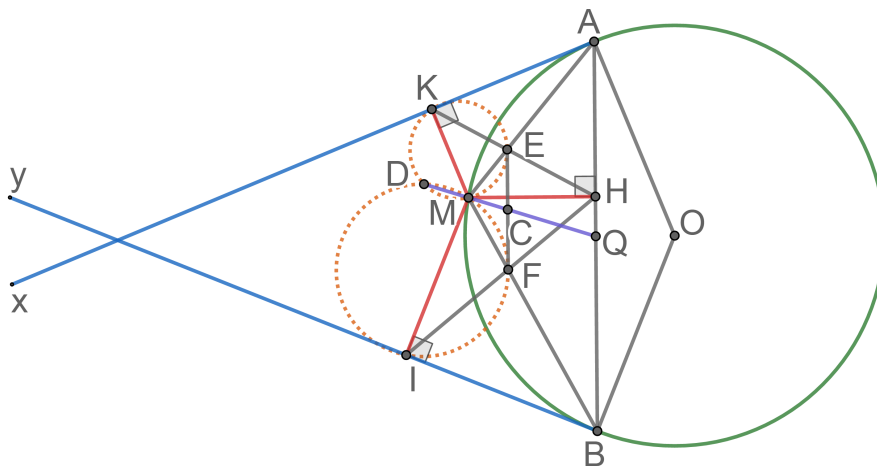
Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{1}{4}$, đạt được tại $a = b = 1$ và $c = 2$

Bài 4 (3 điểm) ✓

Cho đường tròn (C) tâm O , bán kính R và dây cung $AB < 2R$. Từ A, B vẽ 2 tiếp tuyến Ax, By của (C) . Lấy điểm M bất kỳ thuộc cung nhỏ AB (M khác A, B). Gọi H, K, I lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB, Ax, By

1. Chứng minh rằng $MH^2 = MK \cdot MI$
2. Gọi E là giao điểm của AM và KH , F là giao điểm của BM và HI . Chứng minh rằng đường thẳng EF là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn ngoại tiếp các tam giác MEK và MFI
3. Gọi D là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp 2 tam giác MEK và MFI . Chứng minh rằng khi M di chuyển trên cung nhỏ AB thì đường thẳng DM luôn đi qua 1 điểm cố định.

Lời giải



1.

1.

Vì Ax, By là 2 tiếp tuyến của (C) và $AKMH, BIMH$ là các tứ giác nội tiếp nên :

$$\widehat{MIH} = \widehat{MBH} = \widehat{MAK} = \widehat{MHK}$$

$$\begin{aligned}\widehat{MKH} &= \widehat{MAH} = \widehat{MBI} = \widehat{MHI} \\ \Rightarrow \triangle MIH &\sim \triangle MHK (g.g) \\ \Rightarrow \frac{MI}{MH} &= \frac{MH}{MK} \Rightarrow MH^2 = MI \cdot MK\end{aligned}$$

2.

Theo chứng minh trên ta có :

$$\begin{aligned}\begin{cases} \widehat{MBA} = \widehat{MHK} \\ \widehat{MAB} = \widehat{MHI} \end{cases} &\Rightarrow \widehat{EHF} + \widehat{EMF} = 180^\circ \\ &\Rightarrow MEHF \text{ là tứ giác nội tiếp} \\ &\Rightarrow \widehat{EFM} = \widehat{EHM}\end{aligned}$$

Mà $\widehat{EHM} = \widehat{HBM} = \widehat{HIM} \Rightarrow \widehat{EFM} = \widehat{HIM} = \widehat{FIM}$, suy ra EF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle FIM$

Chứng minh tương tự ta có EF là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp $\triangle MEK$. Vậy EF là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn nói trên.

3.

Ta có $\widehat{MFE} = \widehat{MHE} = \widehat{MBA} \Rightarrow EF \parallel AB$

Gọi C là giao điểm của DM và EF , Q là giao điểm của DM và AB .

Vì EF là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn ngoại tiếp $\triangle MEK$ và $\triangle FIM$ nên :

$$\begin{cases} CE^2 = CM \cdot CD \\ CF^2 = CM \cdot CD \end{cases} \Rightarrow CE = CF$$

Mà theo Talet : $\frac{CE}{QA} = \frac{CM}{CQ} = \frac{CF}{BQ} \Rightarrow AQ = BQ$.

Vậy Q là trung điểm của AB . Do đó, khi M đi chuyển trên cung nhỏ AB thì DM luôn đi qua 1 điểm cố định là trung điểm của AB .

Bài 5 (1.5 điểm) ✓

1. Tìm 3 số nguyên tố a, b, c thỏa mãn $a < b < c$ và $bc - 1$ chia hết cho a , $ca - 1$ chia hết cho b , $ab - 1$ chia hết cho c
2. Các nhà khoa học gặp nhau tại hội nghị. Một số người là bạn của nhau. Tại hội nghị, không có 2 nhà khoa học nào có số bạn bằng nhau lại có bạn chung. Chứng minh rằng có 1 nhà khoa học chỉ có đúng 1 người bạn.

Lời giải

1.

Ta có :

$$(bc - 1) : a \Rightarrow (ab + bc + ca - 1) : a$$

$$(ca - 1) : b \Rightarrow (ab + bc + ca - 1) : b$$

$$(ab - 1) : c \Rightarrow (ab + bc + ca - 1) : c$$

Hơn nữa vì a, b, c là các số nguyên tố nên a, b, c đôi một nguyên tố cùng nhau. Do đó :

$$(ab + bc + ca - 1) : abc \Rightarrow ab + bc + ca - 1 \geq abc (*) \text{ (vì } ab + bc + ca - 1 > 0)$$

Nếu $a \geq 3 \Rightarrow abc \geq 3bc > ab + bc + ca > ab + bc + ca - 1 \rightarrow$ mâu thuẫn với (*). Do đó, $a = 2$.

Khi đó: $\begin{cases} 2b - 1 \vdots c \\ 2c - 1 \vdots b \end{cases}$. Lập luận tương tự như ở trên suy ra $2b + 2c - 1 \geq bc$ (**)

Nếu $b \geq 5 \Rightarrow bc \geq 5c > 3b + 2c > 2b + 2c - 1 \rightarrow$ mâu thuẫn với (**). Do đó, $b = 3$ (vì $b > a$). Từ $ab - 1 \vdots c \Rightarrow 5 \vdots c \Rightarrow c = 5$

Thử lại thấy $a = 2, b = 3, c = 5$ thỏa mãn. Vậy $a = 2, b = 3, c = 5$ là các giá trị cần tìm

2.

Gọi k là số bạn của các nhà khoa học có nhiều bạn nhất tại hội nghị và gọi A là 1 trong số các nhà khoa học đó. Giả sử, nhà khoa học A có các bạn là $A_1; A_2; \dots; A_k$. Theo cách gọi và theo giả thiết:

- Các nhà khoa học $A_1; A_2; \dots; A_k$ không ai có nhiều hơn k người bạn
- Không có 2 nhà khoa học nào trong số các nhà khoa học $A_1; A_2; \dots; A_k$ có số người bạn bằng nhau vì họ có bạn chung là A

Như vậy, các nhà khoa học $A_1; A_2; \dots; A_k$ chỉ có thể có số bạn là $1; 2; \dots; k$. Tức là trong số các nhà khoa học này có 1 người chỉ có đúng 1 bạn.

Bài 1 (1.5 điểm) ✓

1. Cho 2 số $a_1 = 1 + \sqrt{2}; a_2 = 1 - \sqrt{2}$. Tính $a_1 + a_2$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = -3 \end{cases}$

Lời giải

1.

$$a_1 + a_2 = 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 2$$

2.

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x - 2y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 5x = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y) = (-1, 1)$

Bài 2 (1.5 điểm) ✓

Cho biểu thức $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2} + \frac{4\sqrt{a}-1}{a-4} \right) : \frac{1}{\sqrt{a}+2}$ với $a \geq 0, a \neq 4$

1. Rút gọn biểu thức A

2. Tính giá trị của A khi $a = 6 + 4\sqrt{2}$

Lời giải

1.

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+2} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2} + \frac{4\sqrt{a}-1}{a-4} \right) : \frac{1}{\sqrt{a}+2} \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2) - \sqrt{a}(\sqrt{a}+2) + 4\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)} \cdot (\sqrt{a}+2) \\ &= \frac{a-2\sqrt{a}-a-2\sqrt{a}+4\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)} \cdot (\sqrt{a}+2) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{a}-2} \end{aligned}$$

2.

Vì $6 + 4\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^2$ nên tại $a = 6 + 4\sqrt{2}$ ta có :

$$A = -\frac{1}{2 + \sqrt{2} - 2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bài 3 (2.5 điểm) ✓

Cho phương trình $x^2 - (2m - 1)x + m(m - 1) = 0$ (1) với m là tham số

1. Giải phương trình (1) với $m = 2$
2. Chứng minh rằng phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m
3. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình (1) ($x_1 < x_2$). Chứng minh rằng $x_1^2 - 2x_2 + 3 \geq 0$

Lời giải

1.

Với $m = 2$ phương trình (1) trở thành :

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy với $m = 2$ thì phương trình (1) có 2 là $x = 1$ và $x = 2$

2.

Xét phương trình (1) có :

$$\Delta = (2m - 1)^2 - 4m(m - 1) = 1$$

Do đó, phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

3.

Dựa vào kết quả $\Delta = 1$, phương trình (1) có 2 nghiệm là m và $m - 1$. Hơn nữa vì $x_1 < x_2$ nên $x_1 = m - 1$ và $x_2 = m$. Từ đó ta có :

$$x_1^2 - 2x_2 + 3 = (m - 1)^2 - 2m + 3 = m^2 - 4m + 4 = (m - 2)^2 \geq 0 \quad \forall m$$

Bài 4 (3 điểm) ✓

Trong mặt phẳng cho đường tròn (O) , AB là dây cung cố định không đi qua tâm. Gọi I là trung điểm của dây cung AB , M là 1 điểm trên cung lớn AB (M khác A, B). Vẽ đường tròn (O') đi qua M và tiếp xúc với AB tại A . Tia MI cắt (O') tại điểm thứ hai N và cắt (O) tại điểm thứ hai C .

1. Chứng minh $\triangle BIC = \triangle AIN$, từ đó chứng minh $ANBC$ là hình bình hành.
2. Chứng minh BI là tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN
3. Xác định vị trí của M trên cung lớn AB để diện tích $ANBC$ là lớn nhất.

Lời giải

1.

Xét $\triangle BIC$ và $\triangle AIN$ có $\begin{cases} BI = AI (gt) \\ \widehat{BIC} = \widehat{AIN} (\text{đối đỉnh}) \\ \widehat{IBC} = \widehat{AMC} = \widehat{NAI} \end{cases}$. Suy ra $\triangle BIC = \triangle AIN (g.c.g)$

Từ đó, theo AM-GM :

$$\begin{aligned} \left(1+x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2015} + \left(1+x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2015} &\geq 2\sqrt{\left(1+x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2015} \cdot \left(1+x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2015}} \\ &= 2\sqrt{(2+2x)^{2015}} \\ &\geq 2\sqrt{(2+2)^{2015}} \quad (\text{vì } x \geq 1) \\ &= 2^{2016} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$. Thử lại thấy $x = 1$ thỏa mãn phương trình đã cho. Do đó, $x = 1$ là nghiệm riêng duy nhất của phương trình đã cho.

2.

Xét điểm M bất kỳ trong 2015 điểm đã cho. Có 2 khả năng sau đây :

- Nếu 2014 điểm còn lại đều cách M một khoảng nhỏ hơn 1 thì 2014 điểm đó đều nằm trong đường tròn $(M, 1)$. Ta có điều phải chứng minh.
- Nếu trong 2014 điểm còn lại, tồn tại 1 điểm có khoảng cách đến M không nhỏ hơn 1, giả sử đó là điểm N . Xét 2 đường tròn $(M, 1)$ và $(N, 1)$. Vì $MN \geq 1$ nên theo giả thiết, 2013 điểm còn lại phải có khoảng cách đến M nhỏ hơn 1 hoặc có khoảng cách đến N nhỏ hơn 1. Tức là 2013 điểm này phải nằm trong 1 trong 2 đường tròn $(M, 1); (N, 1)$. Theo nguyên lý Dirichle, có ít nhất 1007 điểm nằm trong 1 đường tròn. Giả sử đó là $(M, 1)$. Vì M cũng nằm trong $(M, 1)$ nên $(M, 1)$ chứa ít nhất 1008 điểm. Ta có điều phải chứng minh

Vậy luôn tồn tại 1 đường tròn có tâm là một trong 2015 điểm và bán kính là 1 chứa ít nhất 1008 điểm trong 2015 điểm đã cho.

Bài 1 (2 điểm) ✓

Cho biểu thức $P = (\sqrt{x} - 1) \left(\frac{1 - x\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \right)^2$ với $x \geq 0, x \neq 1$

1. Rút gọn P

2. Tìm số chính phương x để $\frac{2}{P}$ là số nguyên.

Lời giải

1.

Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có :

$$\begin{aligned} P &= (\sqrt{x} - 1) \left(\frac{1 - x\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \right)^2 \\ &= (\sqrt{x} - 1) \left(\left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right) (1 + x + \sqrt{x}) + \sqrt{x} \right) \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} \right)^2 \\ &= (\sqrt{x} - 1) (1 + x + \sqrt{x} + \sqrt{x}) \left(\frac{1}{1 + \sqrt{x}} \right)^2 \\ &= (\sqrt{x} - 1) (1 + \sqrt{x})^2 \frac{1}{(1 + \sqrt{x})^2} \\ &= \sqrt{x} - 1 \end{aligned}$$

2.

Vì x là số chính phương nên $\sqrt{x} - 1 \in \mathbb{Z}$. Do đó :

$$\frac{2}{P} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{x} - 1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 \in U(2) = \{-1; -2; 1; 2\}$$

Hơn nữa $\sqrt{x} - 1 \geq -1$ nên chỉ xảy ra các khả năng sau :

$$+ \sqrt{x} - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (thỏa mãn đk)}$$

$$+ \sqrt{x} - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (thỏa mãn đk)}$$

$$+ \sqrt{x} - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn đk)}$$

Vậy các giá trị cần tìm của x là $x \in \{0; 4; 9\}$

Bài 2 (2 điểm) ✓

1. Cho các số thực a, b, c, x, y, z thỏa mãn $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

2. Tìm các số nguyên a để phương trình $x^2 - (3 + 2a)x + 40 - a = 0$ có nghiệm nguyên. Tìm các nghiệm nguyên đó.

Lời giải

1.

Điều kiện $abcxyz \neq 0$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{ayz + bzx + cxy}{xyz} = 0 \Leftrightarrow ayz + bzx + cxy = 0 \quad (*)$$

Ta có :

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 &\Rightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{zx}{ca} \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \frac{ayz + bzx + cxy}{xyz} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (\text{vì } (*)) \end{aligned}$$

2.

Xét phương trình $x^2 - (3 + 2a)x + 40 - a = 0$ (2) có :

$$\Delta = (3 + 2a)^2 - 4(40 - a) = 4a^2 + 16a - 151$$

Để phương trình (2) có nghiệm nguyên thì điều kiện cần là :

$$\Delta = k^2 \quad (k \in \mathbb{N}) \Leftrightarrow (2a + 4)^2 - k^2 = 167 \Leftrightarrow (2a + 4 - k)(2a + 4 + k) = 167$$

Do 167 là số nguyên tố và $2a + 4 + k \geq 2a + 4 - k$ nên xảy ra 2 khả năng sau :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \begin{cases} 2a + 4 + k = 167 \\ 2a + 4 - k = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 40 \\ k = 83 \end{cases} \\ \bullet \quad \begin{cases} 2a + 4 + k = -1 \\ 2a + 4 - k = -167 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -44 \\ k = 83 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy $a = 40$ hoặc $a = -44$

Khi $a = 40$, giải phương trình (2) được 2 nghiệm $x = 0; x = 83$

Khi $a = -44$, giải phương trình (2) được 2 nghiệm $x = -1; x = -84$

Bài 3 (1.5 điểm) ✓

- Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + my = 3m \\ mx - y = m^2 - 2 \end{cases}$ với m là tham số. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) thỏa mãn $x^2 - 2x - y > 0$
- Cho a, b, c là 3 cạnh của 1 tam giác thỏa mãn $2c + b = abc$. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$S = \frac{3}{b+c-a} + \frac{4}{c+a-b} + \frac{5}{a+b-c}$$

Lời giải

1.

Xét hệ phương trình (I) $\begin{cases} x + my = 3m & (1) \\ mx - y = m^2 - 2 & (2) \end{cases}$. Từ (1) $\Rightarrow x = 3m - my$.

Thay vào (2) ta được :

$$m(3m - my) - y = m^2 - 2 \Leftrightarrow (m^2 + 1)(2 - y) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = m$$

Từ đó :

$$x^2 - 2x - y > 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 + \sqrt{3} \\ m < 1 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy những giá trị cần tìm của m là $m > 1 + \sqrt{3}$ hoặc $m < 1 - \sqrt{3}$

2.

Sử dụng BĐT quen thuộc $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \quad \forall x, y > 0$, ta có :

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{b+c-a} + \frac{4}{c+a-b} + \frac{5}{a+b-c} \\ &= \left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} \right) + 2 \left(\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+b-c} \right) + 3 \left(\frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \right) \\ &\geq \frac{4}{2c} + \frac{8}{2b} + \frac{12}{2a} \\ &= \frac{2}{c} + \frac{4}{b} + \frac{6}{a} \end{aligned}$$

Mặt khác $2c + b = abc \Rightarrow \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = a$. Do đó :

$$S \geq 2a + \frac{6}{a} \geq 2\sqrt{2a \cdot \frac{6}{a}} = 4\sqrt{3} \quad (AM - GM)$$

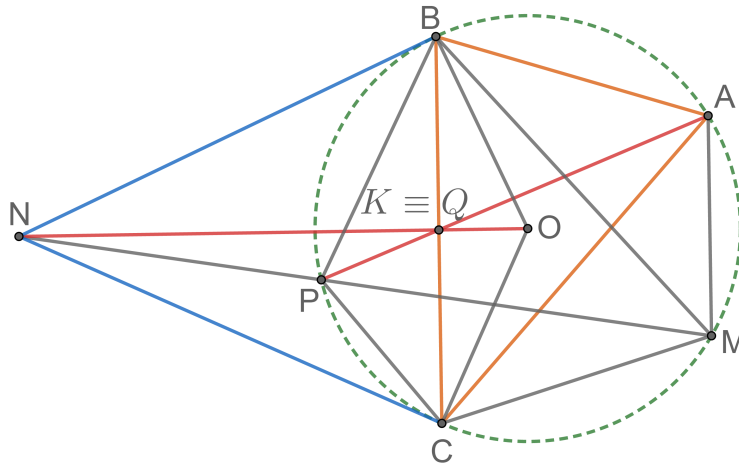
$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-c = b+c-a = c+a-b \\ 2c+b = abc \\ 2a = \frac{6}{a} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{3}$$

Vậy Min $S = 4\sqrt{3}$ đạt được tại $a = b = c = \sqrt{3}$

Bài 4 (3 điểm) ✓

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O) ($AB < AC$). Các tiếp tuyến tại B, C cắt nhau tại N . Vẽ dây AM song song với BC . Đường thẳng MN cắt (O) tại M, P

1. Cho biết $\frac{1}{OB^2} + \frac{1}{NC^2} = \frac{1}{16}$. Tính BC
2. Chứng minh rằng $\frac{BP}{AC} = \frac{CP}{AB}$
3. Chứng minh rằng BC, ON, AP đồng quy.

Lời giải


1.

Theo tính chất của tiếp tuyến ta có $NB = NC$. Kết hợp với $OB = OC$ suy ra NO là đường trung trực của BC . Gọi K là giao điểm của ON và BC thì K là trung điểm của BC
 $\Rightarrow BC = 2.BK$.

Xét tam giác OBK vuông tại B có BK là đường cao nên :

$$\frac{1}{BK^2} = \frac{1}{BN^2} + \frac{1}{BO^2} = \frac{1}{CN^2} + \frac{1}{BO^2} = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow BK = 4 \Rightarrow BC = 2.BK = 8$$

2.

Ta có :

$$\triangle NBP \sim \triangle NMB (g.g) \Rightarrow \frac{BP}{MB} = \frac{NB}{NM} \quad (*)_1$$

$$\triangle NCP \sim \triangle NMC (g.g) \Rightarrow \frac{CP}{MC} = \frac{NC}{NM} \quad (*)_2$$

Mà $NC = NB$ nên từ $(*)_1, (*)_2 \Rightarrow \frac{BP}{MB} = \frac{CP}{MC} \quad (*)_3$

Mặt khác $AM \parallel BC$ nên $AMCB$ là hình thang cân $\Rightarrow AB = MC; AC = MB \quad (*)_4$

Từ $(*)_3, (*)_4$ suy ra $\frac{BP}{AC} = \frac{CP}{AB}$

3.

Gọi Q là giao điểm của AP và BC . Ta chứng minh $Q \equiv K$, tức là chứng minh Q là trung điểm của BC hay $BQ = CQ$.

Thật vậy, ta có :

$$\triangle BPQ \sim \triangle ACQ (g.g) \Rightarrow \frac{BQ}{AQ} = \frac{PB}{AC} \quad (*_5)$$

$$\triangle CPQ \sim \triangle ABQ (g.g) \Rightarrow \frac{CQ}{AQ} = \frac{PC}{AB} \quad (*_6)$$

Từ $(*_5), (*_6)$ và kết hợp với $\frac{BP}{AC} = \frac{CP}{AB}$ đã chứng minh ở trên suy ra :

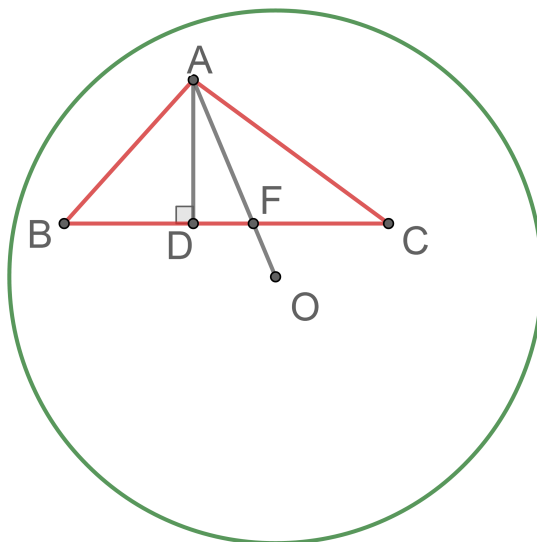
$$\frac{BQ}{AQ} = \frac{CQ}{AQ} \Rightarrow BQ = CQ$$

Vậy BC, ON, AP đồng quy tại K là trung điểm của BC .

Bài 5 (1.5 điểm) ✓

- Cho đường tròn tâm O bán kính 1 và tam giác ABC có 3 đỉnh nằm trong đường tròn và có diện tích lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng điểm O nằm trong hoặc nằm trên cạnh của tam giác ABC .
- Cho tập $A = \{1; 2; 3; \dots; 16\}$. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho mỗi tập con gồm k phần tử của A đều tồn tại 2 số phân biệt a, b sao cho $a^2 + b^2$ là 1 số nguyên tố.

Lời giải



1.

Giả sử O nằm ngoài miền $\triangle ABC$. Không mất tính tổng quát, giả sử A và O nằm khác phía đối với BC . Khi đó, gọi F là giao điểm của OA và BC ; AD là đường cao của $\triangle ABC$. Ta có :

$$AD \leq AF < AO = 1; BC < 2 \Rightarrow S_{ABC} = \frac{AD \cdot BC}{2} < 1 \rightarrow \text{mâu thuẫn với giả thiết}$$

Vậy điều giả sử là sai, tức là điểm O nằm trong hoặc nằm trên cạnh của tam giác ABC .
2.

Với $a, b \in A$ và a, b đều là số chẵn (hoặc lẻ) thì ta có $\begin{cases} a^2 + b^2 \text{ là số chẵn} \\ a^2 + b^2 > 2 \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 + b^2$ là hợp số.

Do đó, tập con X của A thỏa mãn yêu cầu bài toán không thể chứa các phần tử đều chẵn (hoặc lẻ) được. Tập A gồm 8 số chẵn (8 số lẻ) nên $k \geq 9$. Ta chứng minh $k = 9$ là giá trị nhỏ nhất của k thỏa mãn yêu cầu bài toán, tức là mọi tập con X gồm 9 phần tử bất kỳ của A luôn tồn tại 2 phần tử phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là số nguyên tố.

Chia A thành 8 cặp số, mỗi cặp gồm 2 phần tử x, y mà $x^2 + y^2$ là số nguyên tố như sau :

$$(1, 4) \quad (2, 3) \quad (5, 8) \quad (6, 11) \quad (7, 10) \quad (9, 16) \quad (12, 13) \quad (14, 15)$$

Theo nguyên lý Dirichle, trong 9 phần tử của X luôn tồn tại 2 phần tử phân biệt thuộc cùng một trong 8 cặp số nêu trên. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

Bài 1 (1.5 điểm) ✓

1. Rút gọn $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

2. Cho $x = \frac{(\sqrt{3}-1) \cdot \sqrt[3]{10+6\sqrt{3}}}{\sqrt{21+4\sqrt{5}}+3}$. Tính giá trị của $P = (x^2 + 4x - 2)^{2013}$

Lời giải

1.

Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{x+2 + (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) - (x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{x-1}{x-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 10+6\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^3 \\ 21+4\sqrt{5} = (2\sqrt{5}+1)^2 \end{cases} &\Rightarrow x = \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{5}+1+3} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{5}-2 \\ &\Rightarrow x^2 + 4x - 2 = (x+2)^2 - 6 = -1 \\ &\Rightarrow P = -1 \end{aligned}$$

Vậy $P = -1$

Bài 2 (2 điểm) ✓

Cho phương trình $2x^2 - 4mx + 2m^2 - 1 = 0$ (1) với m là tham số.

- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m , phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt
- Gọi 2 nghiệm của phương trình (1) là x_1, x_2 . Tìm m để :

$$2x_1^2 + 4mx_2 + 2m^2 - 9 < 0$$

Lời giải

1.

Xét phương trình (1) có :

$$\Delta' = (2m)^2 - 2(2m^2 - 1) = 2$$

Do đó, phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m

2.

Vì x_1 là nghiệm của (1) nên :

$$\begin{aligned} 2x_1^2 - 4mx_1 + 2m^2 - 1 &= 0 \Rightarrow 2x_1^2 = 4mx_1 - 2m^2 + 1 \\ &\Rightarrow 2x_1^2 + 4mx_2 + 2m^2 - 9 = 4m(x_1 + x_2) - 8 \end{aligned}$$

Theo Vi-et : $x_1 + x_2 = 2m$. Do đó :

$$\begin{aligned} 2x_1^2 + 4mx_2 + 2m^2 - 9 < 0 &\Leftrightarrow 4m(x_1 + x_2 - 2) - 8 < 0 \\ &\Leftrightarrow 8m^2 - 8 < 0 \\ &\Leftrightarrow -1 < m < 1 \end{aligned}$$

Vậy các giá trị cần tìm của m là $-1 < m < 1$

Bài 3 (1.5 điểm) ✓

1. Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x - y = x^3 + y^3$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 < 1$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x = y^2 + 1 \\ 2y = z^2 + 1 \\ 2z = x^2 + 1 \end{cases}$$

Lời giải

1.

Vì $x, y > 0$ nên từ giả thiết suy ra $x > y > 0$. Ta có :

$$\begin{aligned} x - y &= x^3 + y^3 > x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \\ &\Rightarrow 1 > x^2 + xy + y^2 > x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Vậy $x^2 + y^2 < 1$

2.

Cộng vế với vế của 3 phương trình ta được :

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

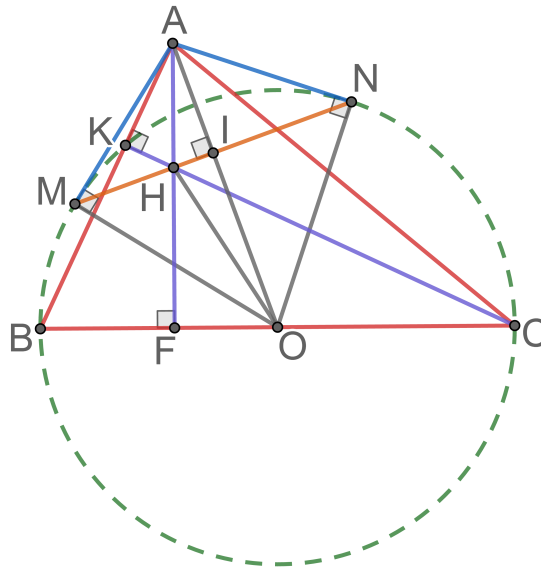
Thử lại thấy $x = y = z = 1$ thỏa mãn hệ phương trình. Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x, y, z) = (1, 1, 1)$

Bài 4 (3 điểm) ✓

Cho đường tròn tâm O , đường kính $BC = 2R$. Điểm A nằm ngoài đường tròn sao cho tam giác ABC nhọn. Từ A kẻ 2 tiếp tuyến AM, AN với (O) (M, N là các tiếp điểm). Gọi H là trực tâm tam giác ABC , F là giao của AH và BC . Chứng minh rằng :

1. 5 điểm A, O, M, N, F cùng nằm trên 1 đường tròn.
2. M, N, H thẳng hàng
3. $HA.HF = R^2 - OH^2$

Lời giải



1.

Để thấy 5 điểm A, O, M, N, F cùng nằm trên đường tròn đường kính AO .

2.

Gọi I là giao điểm của AO và MN ; K là giao điểm của CH và AB thì I là trung điểm của MN ; $OA \perp MN$ và CK là đường cao của $\triangle ABC$

Xét $\triangle AMO$ vuông tại M có MI là đường cao nên :

$$AI \cdot AO = AM^2 \quad (*_1)$$

Theo tính chất phương tích ta lại có :

$$AM^2 = AK \cdot AB = AH \cdot AF \quad (*_2)$$

Từ $(*_1), (*_2) \Rightarrow AI \cdot AO = AH \cdot AF \Rightarrow OIHF$ là tứ giác nội tiếp. Do đó :

$$\widehat{HIO} = 180^\circ - \widehat{HFO} = 90^\circ \Rightarrow OI \perp HI$$

Mà $OI \perp MN$ và $I \in MN$ nên M, N, H thẳng hàng.

3.

Theo chứng minh phần 1 thì $AMFN$ là tứ giác nội tiếp. Do đó :

$$\begin{aligned} AH \cdot HF &= HM \cdot HN = (IM - HI)(IN + HI) = IM^2 - HI^2 \\ &= MO^2 - OI^2 - (OH^2 - OI^2) \\ &= MO^2 - OH^2 = R^2 - OH^2 \end{aligned}$$

Bài 5 (2 điểm) ✓

1. Tìm tất cả các bộ số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn $\frac{x + y\sqrt{2013}}{y + z\sqrt{2013}}$ là số hữu tỷ, đồng thời $x^2 + y^2 + z^2$ là số nguyên tố.
2. Tính diện tích của ngũ giác lồi $ABCDE$ biết các tam giác ABC, BCD, CDE, DEA, EAB cùng có diện tích bằng 1.

Lời giải

1.

Giả sử $\frac{x+y\sqrt{2013}}{y+z\sqrt{2013}} = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $(m, n) = 1$. Khi đó ta có :

$$\begin{aligned} \frac{x+y\sqrt{2013}}{y+z\sqrt{2013}} = \frac{m}{n} &\Leftrightarrow (x+y\sqrt{2013}).n = (y+z\sqrt{2013}).m \\ &\Leftrightarrow (nx-my) + \sqrt{2013}(ny-mz) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} nx-my=0 \\ ny-mz=0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{m}{n} \\ &\Rightarrow y^2 = xz \quad (*_1) \end{aligned}$$

Từ đó ta có :

$$P = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + 2xz + z^2 - y^2 = (x+z)^2 - y^2 = (x+y+z)(x-y+z)$$

Vì x, y, z nguyên dương và P là số nguyên tố nên phải có $x-y+z = 1 \Rightarrow x+z = y+1 \quad (*_2)$

Từ $(*_1), (*_2)$ suy ra :

$$(x+z)^2 - 4xz = (y+1)^2 - 4y^2 \Leftrightarrow (x-z)^2 = -3y^2 + 2y + 1 \Rightarrow -3y^2 + 2y + 1 \geq 0 \Rightarrow y = 1$$

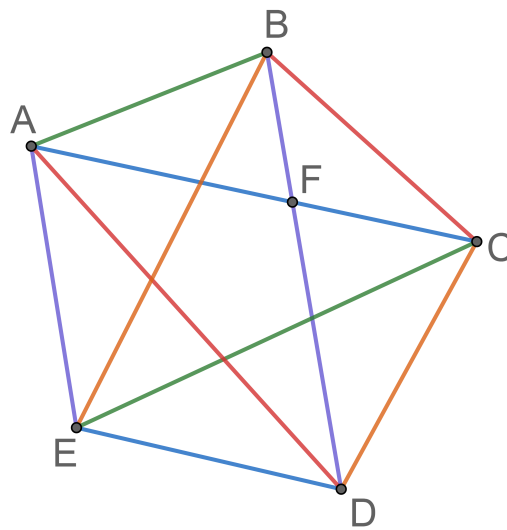
Từ đó, vì $xz = y^2 = 1$ và x, z nguyên dương nên $x = z = 1$.

Thử lại thấy $x = y = z = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ là bộ số nguyên dương cần tìm.

2.

Vì $S_{AEB} = S_{AED} = 1 \Rightarrow AE // BD$



Chứng minh tương tự ta có : $AC // ED; BE // CD; AD // BC$

Goi F là giao của AC và BD và đặt $S_{FBC} = x \Rightarrow S_{ABF} = 1-x \quad (x < 1)$.

Ta có $\triangle BFC$ đồng dạng với $\triangle DFA$ theo hệ số tỉ lệ $k = \frac{FC}{FA} = \frac{S_{BFC}}{S_{BFA}} = \frac{x}{1-x}$

Suy ra : $\frac{S_{BFC}}{S_{DFA}} = k^2 = \frac{x^2}{(1-x)^2} \quad (*)$

Mặt khác vì $AEDF$ là hình bình hành nên : $S_{DFA} = S_{DEA} = 1$. Do đó từ $(*)$ ta có :

$$\frac{x^2}{(1-x)^2} = x \Leftrightarrow x = (1-x)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \text{ (vì } x < 1)$$

Từ đó :

$$S_{ABCDE} = S_{DEA} + S_{DFA} + S_{BCD} + S_{ABF} = 1 + 1 + 1 + 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$$

Bài 1 (2.5 điểm) ✓

1. Rút gọn biểu thức : $A = \sqrt{4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} - \sqrt{4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$
2. Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x^2 - 2x - 19} = 2x + 39$

Lời giải**1.**Để thấy $A < 0$. Ta có :

$$\begin{aligned}
 A^2 &= 4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} + 4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} - 2\sqrt{(4 + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}})(4 - \sqrt{10 - 2\sqrt{5}})} \\
 &= 8 - 2\sqrt{16 - (10 - 2\sqrt{5})} \\
 &= 8 - 2\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} \\
 &= 8 - 2(\sqrt{5} + 1) \\
 &= 6 - 2\sqrt{5} \\
 &= (\sqrt{5} - 1)^2
 \end{aligned}$$

Từ đó vì $A < 0 \Rightarrow A = 1 - \sqrt{5}$ **2.**Xét phương trình $x^2 + \sqrt{x^2 - 2x - 19} = 2x + 39$ (*)Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x - 19}$ ($t \geq 0$). Phương trình (*) trở thành :

$$t^2 + t - 20 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -5 \text{ (không thỏa mãn)} \end{cases}$$

Như vậy :

$$\sqrt{x^2 - 2x - 19} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -5 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 7$ và $x = -5$ **Bài 2 (2 điểm) ✓**

1. Cho a, b, c thỏa mãn $4a - 5b + 9c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ luôn có nghiệm
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + y^2 + x = 7y \\ \frac{x}{y}(x + y) = 12 \end{cases}$

Lời giải

1.

- Nếu $a = 0$ thì từ giả thiết $\Rightarrow -5b + 9c = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{5}{9} \text{ nếu } b \neq 0 \\ b = c = 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho trở thành :

$$bx + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{9} \text{ nếu } b \neq 0 \\ x \in \mathbb{R} \text{ nếu } b = c = 0 \end{cases}$$

- Nếu $a \neq 0$ thì phương trình đã cho là phương trình bậc hai có :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \Rightarrow 25\Delta = 25b^2 - 100ac \\ &= (4a + 9c)^2 - 100ac \text{ vì } 4a - 5b + 9c = 0 \Rightarrow 5b = 4a + 9c \\ &= 16a^2 - 28ac + 81c^2 \\ &= (2a - 7c)^2 + 12a^2 + 32c^2 \geq 0 \Rightarrow \Delta \geq 0 \end{aligned}$$

Do đó, phương trình đã cho có nghiệm

Vậy phương trình đã cho luôn có nghiệm.

2.

Xét hệ $\begin{cases} xy + y^2 + x = 7y \\ \frac{x}{y}(x+y) = 12 \end{cases}$ (I). Với điều kiện $y \neq 0$ ta có : (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \frac{x}{y} = 7 \\ \frac{x}{y}(x+y) = 12 \end{cases}$.

Đặt $a = x + y; b = \frac{x}{y}$ ta có hệ : $\begin{cases} a + b = 7 \\ a.b = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \text{ và } b = 4 \\ a = 4 \text{ và } b = 3 \end{cases}$

+ Với $a = 3; b = 4$ ta có $\begin{cases} x + y = 3 \\ \frac{x}{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{12}{5} \\ y = \frac{3}{5} \end{cases}$

+ Với $a = 4; b = 3$ ta có $\begin{cases} x + y = 4 \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ (I) có các nghiệm là $(x, y) = \left(\frac{12}{5}; \frac{3}{5}\right)$ và $(x, y) = (3; 1)$

Bài 3 (1.5 điểm) ✓

1. Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng :

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c)$$

2. Phân chia 9 số : 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 thành 3 nhóm tùy ý, mỗi nhóm 3 số. Gọi T_1 là tích 3 số của nhóm thứ nhất, T_2 là tích 3 số của nhóm thứ 2, T_3 là tích 3 số của nhóm thứ 3. Hỏi tổng $T_1 + T_2 + T_3$ có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu?

Lời giải

1.

Vì $a, b, c > 0$ nên từ $a + b + c = 1 \Rightarrow 1 - a, 1 - b, 1 - c > 0$. Từ đó, theo AM-GM :

$$\begin{aligned} 1 + a &= (1 - b) + (1 - c) \geq 2\sqrt{(1 - b)(1 - c)} \\ 1 + b &= (1 - c) + (1 - a) \geq 2\sqrt{(1 - c)(1 - a)} \\ 1 + c &= (1 - a) + (1 - b) \geq 2\sqrt{(1 - a)(1 - b)} \\ \Rightarrow (1 + a)(1 + b)(1 + c) &\geq 8(1 - a)(1 - b)(1 - c) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

2.

Theo AM-GM :

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 + T_3 &\geq 3\sqrt[3]{T_1 \cdot T_2 \cdot T_3} = 3\sqrt[3]{1.2.3.4.5.6.7.8.9} \\ &= 3\sqrt[3]{72.72.70} \\ &> 3.71 = 213 \end{aligned}$$

Mà $T_1 + T_2 + T_3 \in \mathbb{Z}$ nên $T_1 + T_2 + T_3 \geq 214$.

Mặt khác nếu chọn $\begin{cases} T_1 = 1.8.9 = 72 \\ T_2 = 3.4.6 = 72 \\ T_3 = 2.5.7 = 70 \end{cases}$ thì $T_1 + T_2 + T_3 = 214$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $T_1 + T_2 + T_3$ là 214.

Bài 4 (2.5 điểm) ✓

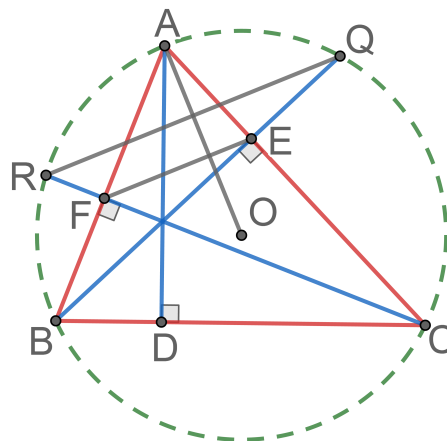
Cho đường tròn tâm O bán kính R và dây cung cố định BC khác đường kính. Gọi A là 1 điểm chuyển động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC . Các đường thẳng BE, CF tương ứng cắt (O) tại điểm thứ hai là Q, R .

1. Chứng minh $QR \parallel EF$

2. Chứng minh $S_{AE OF} = \frac{EF \cdot R}{2}$

3. Xác định vị trí của A để chu vi tam giác DEF lớn nhất.

Lời giải



1.

Để thấy $BCEF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{FCB} (*_1)$

Lại có $\widehat{FCB} = \widehat{QCB} (*_2)$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ số đo cung BR).

Từ $(*_1), (*_2) \Rightarrow \widehat{FEB} = \widehat{QCB} \Rightarrow EF \parallel QR$

2.

Từ $BCEF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{FBE} = \widehat{FCE} \Rightarrow AQ = AR \Rightarrow OA \perp QR$

Mà $EF \parallel QR$ theo cmt $\Rightarrow OA \perp EF \Rightarrow S_{AE OF} = \frac{OA \cdot EF}{2} = \frac{R \cdot EF}{2}$

3.

Chúng minh tương tự câu 2, ta có :

$$\begin{aligned} S_{BDOF} &= \frac{FD \cdot R}{2}; S_{CDOE} = \frac{ED \cdot R}{2} \\ \Rightarrow S_{ABC} &= S_{AE OF} + S_{BDOF} + S_{CDOE} = \frac{R \cdot (EF + FD + DE)}{2} \\ \Rightarrow EF + FD + DE &= \frac{2 \cdot S_{ABC}}{R} \end{aligned}$$

Do đó, chu vi $\triangle DEF$ lớn nhất khi và chỉ khi S_{ABC} lớn nhất. Mà BC cố định nên S_{ABC} lớn nhất khi khoảng cách từ A đến BC lớn nhất. Điều này có được khi A là điểm chính giữa của cung lớn BC .

Vậy vị trí cần tìm của A là điểm chính giữa cung lớn BC .

Bài 5 (1.5 điểm) ✓

1. Tìm 2 số nguyên a, b để $a^4 + 4b^4$ là số nguyên tố.
2. Hãy chia 1 tam giác bất kỳ thành 7 tam giác cân trong đó có 3 tam giác bằng nhau.

Lời giải

1.

Ta có :

$$P = a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2)^2 - 2a^2b^2 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$$

Vì $a^2 - 2ab + 2b^2 = (a - b)^2 + b^2 \geq 0$; $a^2 + 2ab + 2b^2 = (a + b)^2 + b^2 \geq 0$ nên để P là số nguyên tố thì phải có $a^2 - 2ab + 2b^2 = 1$ hoặc $a^2 + 2ab + 2b^2 = 1$

$$\bullet \quad a^2 - 2ab + 2b^2 = 1 \Leftrightarrow (a - b)^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (a - b)^2 = 1 \\ b^2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} (a - b)^2 = 0 \\ b^2 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

+ Ta có (1) $\Rightarrow b = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow P = 1 \rightarrow$ không thỏa mãn

+ Ta có (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 1 \\ a = b = -1 \end{cases} \Rightarrow P = 5 \rightarrow$ thỏa mãn

$$\bullet a^2 + 2ab + 2b^2 = 1 \Leftrightarrow (a+b)^2 + b^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = 1 \\ b^2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} (a+b)^2 = 0 \\ b^2 = 1 \end{cases} \quad (4)$$

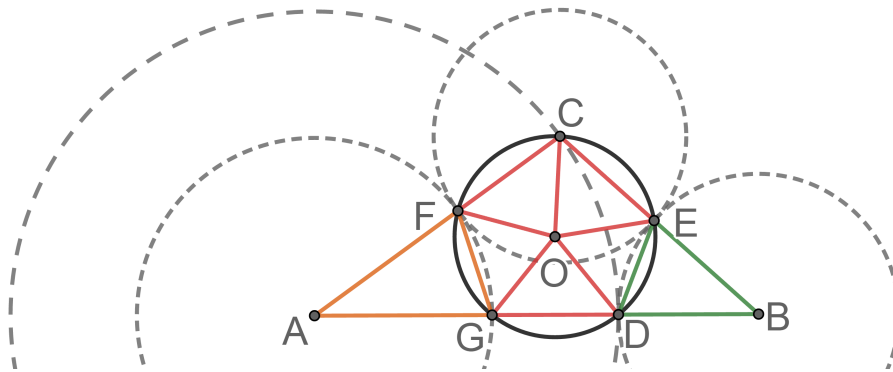
+ Ta có (3) $\Rightarrow b = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow P = 1 \rightarrow$ không thỏa mãn

+ Ta có (4) $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \text{ và } b = -1 \\ a = -1 \text{ và } b = 1 \end{cases} \Rightarrow P = 5 \rightarrow$ thỏa mãn

Vậy các bộ số (a, b) cần tìm là $(a, b) \in \{(1, 1); (-1, -1); (-1, 1); (1, -1)\}$

2.

Trường hợp 1 : tam giác ABC không cân



Giả sử BC là cạnh lớn nhất của $\triangle ABC$.

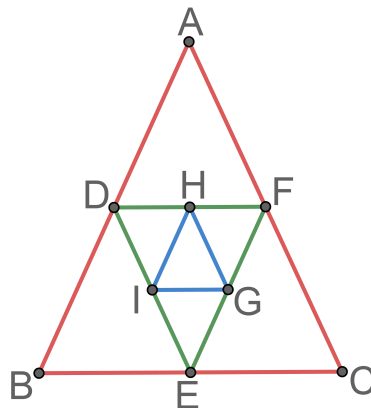
- Dựng đường tròn (A, AC) cắt AB tại D
- Dựng đường tròn (B, BD) cắt BC tại E
- Dựng đường tròn (C, CE) cắt AC tại F
- Dựng đường tròn (A, AF) cắt AB tại G

Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

Vì $\triangle BDE$ cân tại B nên BO là trung trực của $DE \Rightarrow OD = OE$

Chứng minh tương tự ta có $OD = OE = OC = OF = OG$. Như vậy $\triangle ABC$ được chia thành 7 tam giác cân là $AFG; BDE; COE; COF; FOG; DOG$, trong đó dễ dàng chứng minh được 3 tam giác $COE; COF; DOG$ bằng nhau. Vậy cách chia như trên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2 : tam giác ABC cân và giả sử $\triangle ABC$ cân tại A



Gọi $D, E, F; H, I, G$ lần lượt là trung điểm của $AB, BC, CA; DF, DE, EF$. Khi đó tam giác ABC được chia thành 7 tam giác $BDE, CEF, ADF, DIH, EIG, FGH, HIG$. Dễ dàng chứng minh được đây là 7 tam giác cân và 3 tam giác DIH, EIG, FGH bằng nhau. Như vậy cách chia như trên thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 1 (2 điểm) ✓

Cho phương trình $x^2 - 2(m+2)x + 6m + 1 = 0$ (1) với m là tham số

1. Chứng minh rằng phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m
2. Tìm điều kiện của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt lớn hơn 2.

Lời giải

1.

Phương trình (1) có $\Delta' = (m+2)^2 - (6m+1) = (m-1)^2 + 2 > 0 \forall m$. Do đó, phương trình (1) luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m .

2.

Đặt $t = x - 2$ thì phương trình (1) trở thành : $t^2 - 2mt + 2m - 3 = 0$ (2)

Vì (1) có nghiệm với mọi m nên (2) cũng có nghiệm với mọi m . Gọi t_1, t_2 là 2 nghiệm của (2) thì theo Vi-et ta có $\begin{cases} t_1 + t_2 = 2m \\ t_1 \cdot t_2 = 2m - 3 \end{cases}$

Phương trình (1) có 2 nghiệm lớn hơn 2 khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm dương, tức là :

$$\begin{cases} t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m > 0 \\ 2m - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$$

Vậy $m > \frac{3}{2}$ là giá trị cần tìm của m

Bài 2 (3 điểm) ✓

1. Cho a, b là 2 số thực dương thỏa mãn $a - \sqrt{ab} - 6b = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{a+b}{a+\sqrt{ab}+b}$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 3y = 2 \\ 9y^2 - 8x = 8 \end{cases}$

Lời giải

1.

Vì $a, b > 0$ nên :

$$a - \sqrt{ab} - 6b = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a} + 2\sqrt{b})(\sqrt{a} - 3\sqrt{b}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} - 3\sqrt{b} = 0 \Leftrightarrow a = 9b$$

Do đó :

$$P = \frac{a+b}{a+\sqrt{ab}+b} = \frac{10b}{9b+3b+b} = \frac{10}{13}$$

2.

Xét hệ phương trình (I) $\begin{cases} x^2 - 3y = 2 & (1) \\ 9y^2 - 8x = 8 & (2) \end{cases}$

Nhân cả 2 vế của (1) với 4 rồi trừ từng vế tương ứng cho (2) ta được :

$$4x^2 - 12y - (9y^2 - 8x) = 0 \Leftrightarrow (2x - 3y)(2x + 3y + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 2x + 3y + 4 = 0 \end{cases}$$

- Nếu $2x - 3y = 0 \Rightarrow 3y = 2x$. Thay vào (1) ta được :

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{3} \\ x = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

- Nếu $2x + 3y + 4 = 0 \Rightarrow 3y = -2x - 4$. Thay vào (1) ta được :

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \text{ (vô nghiệm)}$$

Vậy hệ (I) có các nghiệm là $(x, y) \in \left\{ \left(1 - \sqrt{3}, \frac{2 - 2\sqrt{3}}{3} \right); \left(1 + \sqrt{3}, \frac{2 + 2\sqrt{3}}{3} \right) \right\}$

Bài 3 (1.5 điểm) ✓

1. Cho các số thực a, b thỏa mãn $a + b \neq 0$. Chứng minh rằng :

$$a^2 + b^2 + \left(\frac{1 + ab}{a + b} \right)^2 \geq 2$$

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$M = \sqrt{a^2 + abc} + \sqrt{b^2 + abc} + \sqrt{c^2 + abc} + 9\sqrt{abc}$$

Lời giải

1.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + \left(\frac{1 + ab}{a + b} \right)^2 \geq 2 &\Leftrightarrow a^2 + b^2 + \left(\frac{1 + ab}{a + b} \right)^2 - 2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a + b)^2 - 2(ab + 1) + \left(\frac{1 + ab}{a + b} \right)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(a + b - \frac{1 + ab}{a + b} \right)^2 \geq 0 \text{ (luôn đúng)} \end{aligned}$$

Vậy $a^2 + b^2 + \left(\frac{1+ab}{a+b}\right)^2 \geq 2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a+b - \frac{1+ab}{a+b} = 0 \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 = 1$

2.

Để ý rằng khi $a+b+c=1$ ta có :

$$a+bc = a(a+b+c) + bc = (a+b)(a+c) \Rightarrow a^2 + abc = a(a+b)(a+c)$$

Tương tự và suy ra :

$$\begin{aligned} M &= \sqrt{a(a+b)(a+c)} + \sqrt{b(b+c)(b+a)} + \sqrt{c(c+a)(c+b)} + 9\sqrt{abc} \\ &= \left[\sqrt{a(a+b)(a+c)} + \sqrt{abc} \right] + \left[\sqrt{b(b+c)(b+a)} + \sqrt{abc} \right] \\ &\quad + \left[\sqrt{c(c+a)(c+b)} + \sqrt{abc} \right] + 6\sqrt{abc} \\ &= \sqrt{a} \left[\sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{bc} \right] + \sqrt{b} \left[\sqrt{(b+c)(b+a)} + \sqrt{ac} \right] \\ &\quad + \sqrt{c} \left[\sqrt{(c+a)(c+b)} + \sqrt{ab} \right] + 6\sqrt{abc} \end{aligned}$$

Theo AM-GM :

$$\sqrt{(a+b)(a+c)} + \sqrt{bc} \leq \frac{a+b+a+c}{2} + \frac{b+c}{2} = a+b+c = 1$$

$$\sqrt{a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (1 \cdot \sqrt{3a}) \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} (1+3a)$$

Tương tự và suy ra :

$$\begin{aligned} M &\leq \frac{1}{2\sqrt{3}} (1+3a+1+3b+1+3c) + 6\sqrt{abc} \\ &= \sqrt{3} + 6\sqrt{abc} \\ &\leq \sqrt{3} + 6\sqrt{\frac{1}{27}} \text{ vì } abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = \frac{1}{27} \\ &= \frac{5\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$

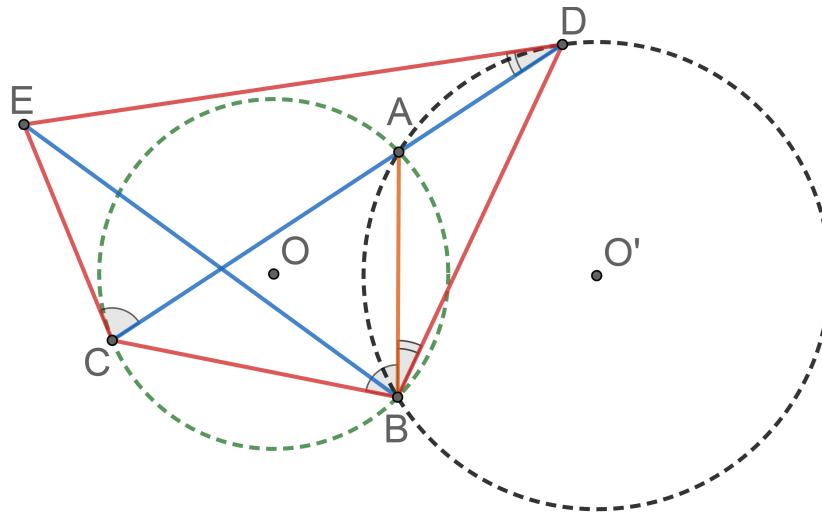
Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{5\sqrt{3}}{3}$, đạt được tại $a=b=c=\frac{1}{3}$

Bài 4 (3 điểm) ✓

Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại 2 điểm A, B . Vẽ đường thẳng (d) qua A cắt (O) tại C và cắt (O') tại D sao cho A nằm giữa C, D . Tiếp tuyến của (O) tại C và tiếp tuyến của (O') tại D cắt nhau tại E .

1. Chứng minh $BDEC$ là tứ giác nội tiếp
2. Chứng minh $BE \cdot CD = BC \cdot DE + BD \cdot CE$

Lời giải



1.

Ta có $\begin{cases} \widehat{ABD} = \widehat{ADE} \text{ (cùng bằng 1 nửa số đo cung AD)} \\ \widehat{ABC} = \widehat{ACE} \text{ (cùng bằng 1 nửa số đo cung BC)} \end{cases}$

Từ đó :

$$\widehat{CBD} + \widehat{CED} = \widehat{ABD} + \widehat{ABC} + \widehat{CED} = \widehat{EDC} + \widehat{DCE} + \widehat{CED} = 180^\circ$$

Suy ra $BDEC$ là tứ giác nội tiếp

2.

Xét 2 tam giác EBC và ABD có :

$$\begin{cases} \widehat{CBE} = \widehat{ABD} (= \widehat{ADE}) \\ \widehat{CEB} = \widehat{ADB} \end{cases} \Rightarrow \triangle EBC \sim \triangle DBA (g.g) \Rightarrow \frac{EC}{DA} = \frac{EB}{DB} \Rightarrow EC \cdot DB = DA \cdot EB \quad (*_1)$$

Chứng minh tương tự ta có :

$$\triangle EBD \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{EB}{CB} = \frac{ED}{CA} \Rightarrow EB \cdot CA = BC \cdot DE \quad (*_2)$$

Từ $(*_1), (*_2)$ suy ra :

$$EC \cdot DB + DE \cdot BC = DA \cdot EB + EB \cdot CA = EB(DA + CA) = EB \cdot CD$$

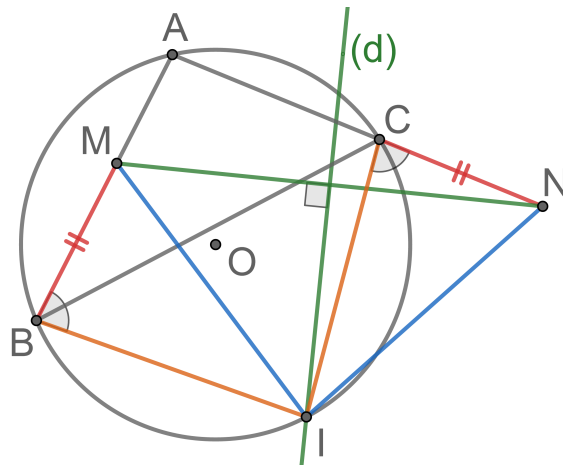
Bài 5 (0.5 điểm) ✓

Cho tam giác ABC . Trên tia BA lấy điểm M , trên tia đối của tia CA lấy điểm N sao cho $BM = CN$. Chứng minh rằng đường trung trực của MN luôn đi qua 1 điểm cố định

Lời giải

Gọi I là điểm chính giữa của cung BC không chứa A và (d) là trung trực của MN .

$$\text{Xét 2 tam giác } MBI \text{ và } NCI \text{ có : } \begin{cases} BM = CN (gt) \\ \widehat{MBI} = \widehat{NCI} \\ IB = IC \end{cases} \Rightarrow \triangle MBI = \triangle NCI (c.g.c)$$



Suy ra $IM = IN \Rightarrow I \in (d)$.

Vậy trung trực của MN luôn đi qua 1 điểm cố định là điểm chính giữa của cung BC không chứa A .

Bài 1 (1.5 điểm) ✓

Cho hàm số $y = f(x) = -x|x|$ có đồ thị là P

1. Chứng minh rằng $f(x)$ nghịch biến với mọi $x \in \mathbb{R}$
2. Tìm tọa độ giao điểm của P với đường thẳng $y = -2x$
3. Vẽ đồ thị P

Lời giải

1.

Xét $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ và $x_1 < x_2$. Xét các khả năng sau :

- $x_1 < 0 < x_2$. Khi đó $f(x_1) > 0 > f(x_2)$
- $x_1 < x_2 \leq 0 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2$. Khi đó $f(x_1) = x_1^2 > x_2^2 = f(x_2)$
- $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1^2 > -x_2^2$. Khi đó $f(x_1) = -x_1^2 > -x_2^2 = f(x_2)$

Như vậy ta luôn có $f(x_1) > f(x_2)$, do đó $f(x)$ nghịch biến với mọi $x \in \mathbb{R}$

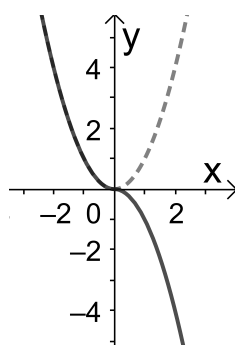
2.

Tọa độ giao điểm của P với đường thẳng $y = -2x$ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y = -2x \\ -x|x| = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x(|x| - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 0 \\ x = 2 \text{ và } y = -4 \\ x = -2 \text{ và } y = 4 \end{cases}$$

Vậy các giao điểm của P và đường thẳng $y = -2x$ là $O(0;0), A(2; -4), B(-2;4)$

3.


Bài 2 (2 điểm) ✓

Cho phương trình $x^2 - 2x - 2|x - m| + 2 = 0$

1. Giải phương trình khi $m = 1$
2. Tìm m để phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm.

Lời giải

1.

Khi $m = 1$, phương trình đã cho trở thành :

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 2|x - 1| + 2 = 0 &\Leftrightarrow (x - 1)^2 - 2|x - 1| + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (|x - 1| - 1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow |x - 1| = 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy với $m = 1$ thì phương trình đã cho có 2 nghiệm là $x = 0; x = 2$.

2.

$$x^2 - 2x - 2|x - m| + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^2 - 4x + 2m - 2 = 0 & (1) \text{ với } x > m \\ x^2 - 2m + 2 = 0 & (2) \text{ với } x \leq m \end{cases}$$

- Nếu $m = 1$ thì theo kết quả câu 1, phương trình đã cho có 2 nghiệm $(*_1)$
- Nếu $m < 1$ thì phương trình (2) vô nghiệm. Do đó, phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $m < x_1 < x_2$. Điều này có được khi :

$$\begin{cases} \Delta' = 6 - 2m > 0 \\ f(m) > 0 \\ \frac{S}{2} = 2 > m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m^2 - 2m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1 - \sqrt{3}$$

Kết hợp với $m < 1 \Rightarrow m < 1 - \sqrt{3} \quad (*_2)$

- Nếu $m > 1$ thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = -\sqrt{2m-2} < x_2 = \sqrt{2m-2} < m$. Do đó, phương trình đã cho có đúng 2 nghiệm thì phương trình (1) hoặc vô nghiệm hoặc có 2 nghiệm đều không lớn hơn m

+ Phương trình (1) vô nghiệm khi và chỉ khi :

$$\Delta' = 6 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > 3$$

+ Phương trình (1) có 2 nghiệm đều không lớn hơn m khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \Delta' = 6 - 2m \geq 0 \\ \frac{S}{2} = 2 \leq m \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 3$$

Kết hợp với $m > 1 \Rightarrow m \geq 2 \quad (*_3)$

Từ $(*_1), (*_2), (*_3)$ suy ra những giá trị cần tìm của m là : $m = 1$ hoặc $m \geq 2$ hoặc $m < 1 - \sqrt{3}$

Bài 3 (2 điểm) ✓

1. Cho 2 số dương x, y thỏa mãn $x + y = 3\sqrt{xy}$. Tính $P = \frac{x}{y}$

2. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$

Lời giải

1.

$$x + y = 3\sqrt{xy} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 3$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{x}{y}}$ ($t > 0$). Khi đó ta có :

$$t + \frac{1}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

- Với $t = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \Rightarrow P = t^2 = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$
- Với $t = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow P = t^2 = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$

2.

Giả sử $x \geq y > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$. Từ giả thiết suy ra :

$$2\frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < y \leq 4 (*)$$

Hơn nữa $\frac{1}{y} < \frac{1}{2} \Rightarrow y > 2 (**)$ Từ (*), (**) suy ra $y = 3$ hoặc $y = 4$

- Nếu $y = 3 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = 6$
- Nếu $y = 4 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = 4$

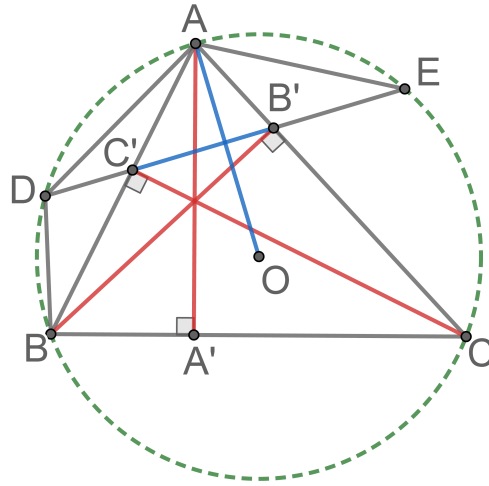
Vậy các cặp (x, y) cần tìm là $(x, y) \in \{(4, 4); (3, 6); (6, 3)\}$

Bài 4 (3 điểm) ✓

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R . Kẻ các đường cao AA', BB', CC' . Gọi S là diện tích tam giác ABC , S' là diện tích tam giác $A'B'C'$.

1. Chứng minh $AO \perp B'C'$
2. Chứng minh $S = \frac{1}{2}P.R$ trong đó P là chu vi tam giác $A'B'C'$
3. Chứng minh $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - \frac{S'}{S}$

Lời giải



1.

Gọi D, E là giao của đường thẳng $B'C'$ với (O) .
Để thấy $BCB'C'$ là tứ giác nội tiếp nên :

$$\begin{aligned}\widehat{AC'B'} &= \widehat{ACB} \Leftrightarrow \widehat{DAB} + \widehat{ADE} = \widehat{ACB} \text{ (tính chất góc ngoài tam giác)} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\text{sđ}AE + \frac{1}{2}\text{sđ}BD = \frac{1}{2}\text{sđ}ADB \\ &\Rightarrow \text{sđ}AE = \text{sđ}AD\end{aligned}$$

Do đó, A là điểm chính giữa cung $DE \Rightarrow OA \perp DE \Rightarrow OA \perp B'C'$

2.

Chứng minh tương tự ta cũng có : $OB \perp A'C'$; $OC \perp A'B'$. Từ đó :

$$\begin{aligned}S &= S_{AC'OB'} + S_{BA'OC'} + S_{CB'OA'} = \frac{1}{2}(AO.B'C' + BO.A'C' + CO.A'B') \\ &= \frac{1}{2}.R(A'B' + B'C' + C'A') = \frac{1}{2}PR\end{aligned}$$

3.

Xét 2 tam giác vuông ABB' và ACC' ta có :

$$\cos A = \frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} \Rightarrow \cos^2 A = \frac{AB'.AC'}{AB.AC} \quad (*)$$

Hơn nữa dễ thấy :

$$\triangle AB'C' \sim \triangle ABC (g.g) \Rightarrow \frac{AB'.AC'}{AB.AC} = \frac{S_{AB'C'}}{S} \quad (**)$$

Từ $(*)$, $(**)$ $\Rightarrow \cos^2 A = \frac{S_{AB'C'}}{S}$.

Chứng minh tương tự và suy ra :

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{S_{AB'C'}}{S} + \frac{S_{BA'C'}}{S} + \frac{S_{CA'B'}}{S} = \frac{S - S'}{S} = 1 - \frac{S'}{S}$$

Bài 5 (1.5 điểm) ✓

1. Hai số 2^{2010} và 5^{2010} viết cạnh nhau hỏi có bao nhiêu chữ số?
2. Cho tam giác ABC có đường phân giác trong BE hợp với cạnh AC góc 45° ($\widehat{BEA} = 45^\circ$). Vẽ đường cao AD . Chứng minh rằng $\widehat{EDC} = 45^\circ$

Lời giải

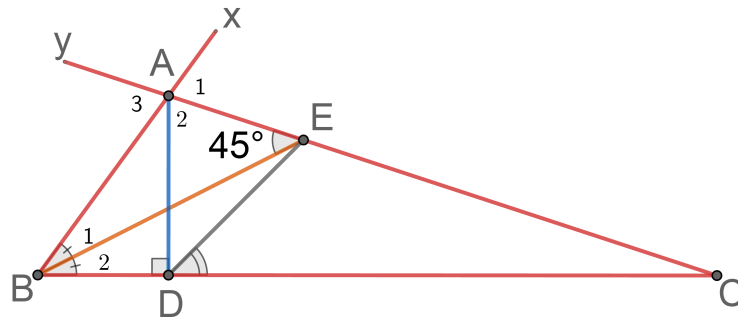
1.

Giả sử số 2^{2010} có a chữ số và số 5^{2010} có b chữ số. Ta có :

$$\begin{aligned} 10^{a-1} &< 2^{2010} < 10^a \\ 10^{b-1} &< 5^{2010} < 10^b \\ \Rightarrow 10^{a-1} \cdot 10^{b-1} &< 2^{2010} \cdot 5^{2010} < 10^a \cdot 10^b \\ \Leftrightarrow 10^{a+b-2} &< 10^{2010} < 10^{a+b} \\ \Leftrightarrow a+b-2 &< 2010 < a+b \\ \Leftrightarrow a+b &= 2011 \end{aligned}$$

Vậy Hai số 2^{2010} và 5^{2010} viết cạnh nhau hời có 2011 chữ số.

2.



Theo tính chất góc ngoài ta có :

$$\begin{aligned} \widehat{DAx} &= \widehat{ABD} + \widehat{ADB} = 2\widehat{B_1} + 90^\circ \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\widehat{DAx} &= \widehat{B_1} + 45^\circ \quad (*_1) \end{aligned}$$

Hơn nữa cũng theo tính chất góc ngoài ta có :

$$\widehat{A_1} = \widehat{A_3} = \widehat{ABE} + \widehat{AEB} = \widehat{B_1} + 45^\circ \quad (*_2)$$

Từ $(*_1), (*_2) \Rightarrow \widehat{A_1} = \frac{1}{2}\widehat{DAx} \Rightarrow AC$ là phân giác của $\widehat{DAx}$.

Như vậy tam giác ABD có BE là phân giác của góc trong tại đỉnh B , AE là phân giác của góc ngoài tại đỉnh E nên DE cũng là phân giác tại góc ngoài đỉnh D . Do đó $\widehat{ADE} = 45^\circ$