

SỞ GD & ĐT THANH HÓA
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN

KỲ THI OLYMPIC CÁC TRƯỜNG THCS
HƯỚNG ĐẾN KỲ THI HSG LỚP 9 NĂM HỌC 2023-2024

Môn thi: Toán

ĐỀ CHÍNH THỨC

Ngày thi: 05/11/2023

(Đề thi có 01 trang)

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Câu I. (4,0 điểm)

1. Rút gọn $A = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$

2. Cho các số dương a,b thỏa mãn $a + b = \sqrt{2024 - a^2} + \sqrt{2024 - b^2}$

Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$

Câu II. (4,0 điểm)

1. Giả sử đa thức $P(x) = x^5 - 6x^3 + x^2 + 9x - 3$ có 5 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Xét đa thức $Q(x) = x^2 - 2$. Tính $F = Q(x_1)Q(x_2)Q(x_3)Q(x_4)Q(x_5)$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y - 6x^2 + xy^2 = 0 \\ 1 - 5x^2 + x^2y^2 = 0 \end{cases}$$

Câu III (4,0 điểm)

1. Cho 4 là số nguyên dương và phương trình nghiệm nguyên $ax + by = c$ với các hệ số nguyên a,b,c thỏa mãn a,b nguyên tố cùng nhau, $a \leq b \leq A$. Chứng minh số nghiệm nguyên (x,y) thỏa mãn điều kiện $|x| \leq A, |y| \leq A$ của phương

trình đã cho không vượt quá $\frac{3A}{|b|}$

2. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $(3^n - 1) : 2^{2023}$

Câu IV. (6,0 điểm)

1. Gọi O là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC. Đường thẳng qua O và vuông góc với CO cắt CA tại M, cắt CB tại N. Chứng minh rằng:

a) Tam giác AOM đồng dạng với tam giác OBN.

$$\text{b) } \frac{AM}{AC} + \frac{BN}{BC} + \frac{OC^2}{AC \cdot BC} = 1$$

2. Cạnh BC của tam giác ABC tiếp xúc với đường tròn nội tiếp (O) của tam giác đó tại điểm D.

Chứng minh rằng tâm O của đường tròn này nằm trên đường thẳng đi qua trung điểm của các đoạn thẳng BC và AD.

Câu V. (2,0 điểm) Tìm tất cả các tập hợp dư $A \not\equiv \emptyset$ gồm hữu hạn các số thực sao cho $\forall x \in A$ thì $x+1-x^2 \in A$ và $x-1+x^2 \in A$

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh.....Số báo danh:.....

Chữ ký của giám thị 1.....Chữ ký của giám thị 2.....

ĐÁP ÁN

Câu I. (4,0 điểm)

1. Rút gọn $A = \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$

$$\begin{aligned} \text{Giải. Ta có } A &= \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}+3.2+3\sqrt{2}+1} - \sqrt[3]{2\sqrt{2}-3.2+3\sqrt{2}-1} \\ &= \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} - \sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3} = \sqrt{2}+1 - \sqrt{2}+1 = 2 \end{aligned}$$

2. Cho các số dương a,b thỏa mãn $a+b = \sqrt{2024-a^2} + \sqrt{2024-b^2}$

Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b^2$

Giải.

$$\begin{aligned} \text{Từ } a+b &= \sqrt{2024-a^2} + \sqrt{2024-b^2} \Rightarrow a - \sqrt{2024-b^2} = \sqrt{2024-a^2} - b \\ \Rightarrow \frac{a^2 - (2024-b^2)}{a + \sqrt{2024-b^2}} &= \frac{(2024-a^2) - b^2}{\sqrt{2024-a^2} + b} \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - 2024}{a + \sqrt{2024-b^2}} = \frac{2024 - a^2 - b^2}{\sqrt{2024-a^2} + b} \\ \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - 2024}{a + \sqrt{2024-b^2}} + \frac{a^2 + b^2 - 2024}{\sqrt{2024-a^2} + b} &= 0 \Rightarrow (a^2 + b^2 - 2024) \left(\frac{1}{a + \sqrt{2024-b^2}} + \frac{1}{\sqrt{2024-a^2} + b} \right) = 0 \\ \text{Vì } \frac{1}{a + \sqrt{2024-b^2}} + \frac{1}{\sqrt{2024-a^2} + b} &> 0 \end{aligned}$$

nên ta có $a^2 + b^2 - 2024 = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = 2024$

Vậy $P = 2024$.

Câu II. (4,0 điểm)

1. Giả sử đa thức $P(x) = x^5 - 6x^3 + x^2 + 9x - 3$ có 5 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 . Xét đa thức $Q(x) = x^2 - 2$. Tính $F = Q(x_1)Q(x_2)Q(x_3)Q(x_4)Q(x_5)$

Giải.

Vì đa thức $P(x) = x^5 - 6x^3 + x^2 + 9x - 3$ có 5 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 nên đa thức $P(x)$ có thể viết dưới dạng $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$

Khi đó:

$$\begin{aligned} F &= Q(x_1)Q(x_2)Q(x_3)Q(x_4)Q(x_5) = (x_1^2 - 2)(x_2^2 - 2)(x_3^2 - 2)(x_4^2 - 2)(x_5^2 - 2) \\ &= (\sqrt{2} - x_1)(\sqrt{2} - x_2)(\sqrt{2} - x_3)(\sqrt{2} - x_4)(\sqrt{2} - x_5)(-\sqrt{2} - x_1)(-\sqrt{2} - x_2)(-\sqrt{2} - x_3)(-\sqrt{2} - x_4)(-\sqrt{2} - x_5) \\ &= P(\sqrt{2})P(-\sqrt{2}) \\ &= \left[(\sqrt{2})^5 - 6(\sqrt{2})^3 + (\sqrt{2})^2 + 9(\sqrt{2}) - 3 \right] \cdot \left[(-\sqrt{2})^5 - 6(-\sqrt{2})^3 + (-\sqrt{2})^2 + 9(-\sqrt{2}) - 3 \right] \\ &= (-1 + \sqrt{2})(-1 - \sqrt{2}) = -1 \end{aligned}$$

Vậy $F = -1$.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} y - 6x^2 + xy^2 = 0 \\ 1 - 5x^2 + x^2y^2 = 0 \end{cases}$$

Giải.

Viết lại hệ
$$\begin{cases} y + xy^2 = 6x^2 \\ 1 + x^2y^2 = 5x^2 \end{cases}$$
. Ta thấy $x=0$ không thỏa mãn.

Xét $x \neq 0$, hệ tương đương với
$$\begin{cases} \frac{1}{x^2}y + \frac{1}{x}y^2 = 6 \\ \frac{1}{x^2} + y^2 = 5 \end{cases}$$

Đặt $\frac{1}{x} = z$, ta có hệ
$$\begin{cases} z^2y + zy^2 = 6 \\ z^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yz(y + z) = 6 \\ (y + z)^2 - 2yz = 5 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} S = y + z \\ P = yz \end{cases}$, ta có hệ
$$\begin{cases} SP = 6 \\ S^2 - 2P = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} SP = 6 \\ P = \frac{S^2 - 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S \cdot \frac{S^2 - 5}{2} = 6 \\ P = \frac{S^2 - 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 5S - 12 = 0 \\ P = \frac{S^2 - 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (S - 3)(S^2 + 3S + 4) = 0 \\ P = \frac{S^2 - 5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 3 \\ P = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = y + z \\ 2 = yz \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = 1 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \text{ dẫn đến } \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \\ y = 1 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Từ đó ta có

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm (x;y) là (1;2) và $(\frac{1}{2};1)$

Câu III. (4,0 điểm)

1. Cho 4 là số nguyên dương và phương trình nghiệm nguyên $ax + by = c$ với các hệ số nguyên a,b,c thỏa mãn a,b nguyên tố cùng nhau, $a \nmid b \leq A$. Chứng minh số nghiệm nguyên (x,y) thỏa mãn điều kiện $|x| \leq A, |y| \leq A$ của phương trình đã

cho không vượt quá $\frac{3A}{|b|}$

Giải.

+) Trường hợp 1: a = 0

Vì (a,b)=1 suy ra $b = \pm 1$ như vậy phương trình đã cho có dạng y=c hoặc y=-c. Trong các phương trình này số nghiệm nguyên (x,y) của phương trình thỏa mãn điều kiện $|x| \leq A, |y| \leq A$ không vượt quá số điểm nguyên trên đoạn

$[A; -A]$ tức là số nghiệm nguyên đó nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{2A+1}{|b|} \leq \frac{3A}{|b|}$

+) Trường hợp 2: b=0

Tương tự như Trường hợp 1 ta cũng có được số nghiệm nguyên đó nhỏ hơn

hoặc bằng $\frac{3A}{|b|}$

+) Trường hợp 3: $a \neq 0, b \neq 0$

Ta thấy rằng nếu (x, y) và (x', y') là 2 nghiệm khác nhau của phương trình

$$ax + by = c \quad \text{Ta có} \quad \begin{cases} ax + by = c \\ ax' + by' = c \end{cases} \Rightarrow a(x - x') = b(y - y')$$

$$\text{Vì } (a, b) = 1 \Rightarrow x - x' \vdots b \Rightarrow |x - x'| \geq b$$

Giả sử $(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)$ là tất cả các nghiệm nguyên khác nhau của phương trình thỏa mãn $|x_i| \leq A, |y_i| \leq A, \forall i = \overline{1, n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$

Vì nếu $x_i = x_j \Rightarrow y_i = y_j, \forall i, j = \overline{1, n} \ (n \in \mathbb{N}^*)$ nên không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 < x_2 < \dots < x_n$.

$$\begin{cases} x_2 - x_1 \geq |b| \\ x_3 - x_2 \geq |b| \\ \dots \\ x_n - x_{n-1} \geq |b| \end{cases} \Rightarrow x_n - x_1 \geq (n-1)|b| \quad (1)$$

Khi đó ta có $x_1 \in [-A; A], x_n \in [-A; A] \Rightarrow x_n - x_1 \leq 2A \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $2A \geq (n-1)|b| \Leftrightarrow 2A + |b| \geq n|b|$

Vì $|b| \leq A \Rightarrow 3A \geq n|b| \Rightarrow n \leq \frac{3A}{|b|} \quad (\text{ĐPCM}).$

2. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho $(3^n - 1):2^{2023}$

Giải.

Đặt $n = 2^k l$ với $k, l \in \mathbb{N}$ và l là số lẻ, ta có

$$A = 3^n - 1 = (3^{2^k})^l - 1 = (3^{2^k} - 1) \left[(3^{2^k})^{l-1} + (3^{2^k})^{l-2} + \dots + (3^{2^k})^1 + 1 \right]$$

Vì l là số lẻ nên $\left[(3^{2^k})^{l-1} + (3^{2^k})^{l-2} + \dots + (3^{2^k})^1 + 1 \right] \not\equiv 2$ suy ra

$$A:2^{2023} \Leftrightarrow B = 3^{2^k} - 1 : 2^{2023}$$

Ta có $B = (3^{2^{k-1}})^2 - 1 = (3^{2^{k-1}} + 1)(3^{2^{k-1}} - 1) = (3^{2^{k-1}} + 1)(3^{2^{k-2}} + 1) \dots (3^{2^1} + 1)(3^2 - 1)$

Do $\begin{cases} 3^{2^i} + 1 : 2 \\ 3^{2^k} + 1 : 4 \end{cases} \forall i = \overline{1, k-1}$ và $3^{2^1} - 1 = 8$ nên $\begin{cases} B : 2^{k-1} \cdot 8 \\ B \not\vdots 2^k \cdot 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B : 2^{k+2} \\ B \not\vdots 2^{k+3} \end{cases}$

Dẫn đến khi phân tích ra thừa số nguyên tố thì B có đúng k+2 thừa số 2.

Suy ra $B : 2^{2023} \Leftrightarrow k+2 \geq 2023 \Leftrightarrow k \geq 2021$. Kiểm tra $n = 2^{2021}$ thấy thỏa mãn

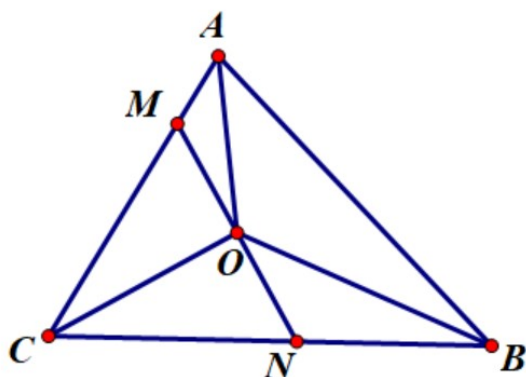
Như vậy số nguyên dương n nhỏ nhất là 2^{2021} .

Câu IV. (6,0 điểm)

1. Gọi O là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC. Đường thẳng qua O và vuông góc với CO cắt CA tại M, cắt CB tại N. Chứng minh rằng:

a) Tam giác AOM đồng dạng với tam giác OBN.

b) $\frac{AM}{AC} + \frac{BN}{BC} + \frac{OC^2}{AC \cdot BC} = 1$



Giải.

a) Ta có:

$$\angle MC = 90^\circ - \frac{C}{2} = \frac{1}{2}(180^\circ - C) = \frac{1}{2}(A + B) \quad (1)$$

$$\text{mà } \angle MC = \angle MAO + \angle MOA \text{ (góc ngoài tam giác OMA)} \Rightarrow \angle MC = \frac{A}{2} + \angle MOA \quad (2)$$

Từ (1); (2) suy ra $\angle MOA = \frac{B}{2}$ suy ra tam giác AOM đồng dạng với tam giác

$$ABO \quad (3). \text{ Tương tự } \angle NC = 90^\circ - \frac{C}{2} = \frac{1}{2}(180^\circ - C) = \frac{1}{2}(A + B) \quad (4)$$

$$\text{mà } \angle NC = \angle NBO + \angle NOB \text{ (góc ngoài tam giác ONB)} \Rightarrow \angle NC = \frac{B}{2} + \angle NOB$$

Từ (4); (5) suy ra $\angle NOB = \frac{A}{2}$ suy ra tam giác OBN đồng dạng với tam giác ABO (6).

Từ (3) và (6) suy ra tam giác AOM đồng dạng với tam giác OBN

b) Theo câu a) thì tam giác AOM đồng dạng với tam giác OBN suy ra

$$\frac{AM}{ON} = \frac{OM}{BN} \Rightarrow AM \cdot BN = OM \cdot ON$$

Theo giả thiết ta có tam giác CMN cân tại C $OM = ON \Rightarrow AM \cdot BN = OM^2$

$$\text{mà } OM^2 = CM^2 - CO^2 \text{ nên } AM \cdot BN = CM^2 - CO^2 = CM \cdot CN - CO^2$$

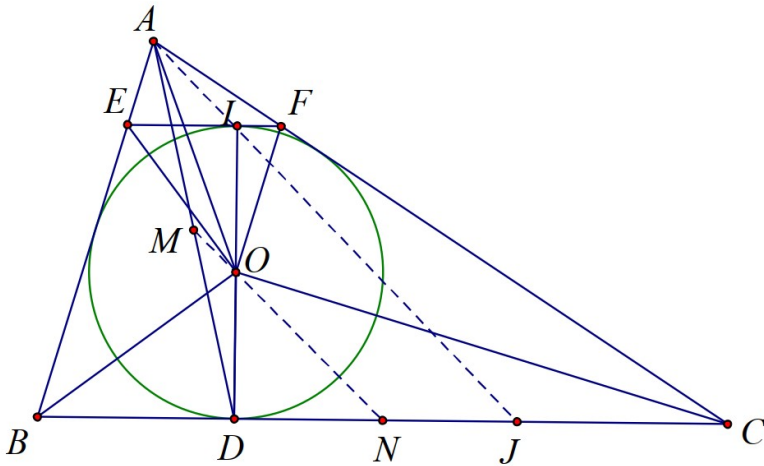
$$\text{Hay } AM \cdot BN = (AC - AM)(CB - AM) = AC \cdot CB - AC \cdot AM - BN \cdot CB + AM \cdot BN$$

$$\Leftrightarrow AC \cdot BC = AM \cdot CB + AC \cdot BN + CO^2 \Leftrightarrow \frac{AM}{AC} + \frac{BN}{BC} + \frac{OC^2}{AC \cdot BC} = 1 \quad (\text{ĐPCM})$$

2. Cạnh BC của tam giác ABC tiếp xúc với đường tròn nội tiếp (O) của tam giác đó tại điểm D.

Chứng minh rằng tâm O của đường tròn này nằm trên đường thẳng đi qua trung điểm của các đoạn thẳng BC và AD.

Giải.



Gọi N là trung điểm BC, M là trung điểm AD, ta sẽ chứng minh M,O,N thẳng hàng. Trên đoạn BC lấy điểm J sao cho

$BD = JC$ mà N là trung điểm của BC $\Rightarrow ND = NJ$.

Kẻ đường kính DI của (O), qua I vẽ tiếp tuyến cắt AB, AC lần lượt tại E và F.

Ta có: $EF \parallel BC$ (vì cùng

vuông góc DI) suy ra $\angle IFC + \angle FCD = 180^\circ$

mà OF và OC là phân giác của góc IFC, FCD nên $\angle FOC = 90^\circ$

Do đó tam giác IFO đồng dạng với tam giác DOC suy ra

$$\frac{IF}{DO} = \frac{IO}{DC} \Leftrightarrow IF \cdot DC = R^2 \quad (1) \text{ (R là bán kính đường tròn tâm O)}$$

Chứng minh tương tự tam giác EOB vuông tại O suy ra tam giác EOI đồng

$$\text{dạng với tam giác OBD suy ra } \frac{EI}{DO} = \frac{OI}{BD} \Leftrightarrow IE \cdot BD = R^2 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } IF \cdot DC = IE \cdot BD \Leftrightarrow \frac{IF}{BD} = \frac{IE}{DC} \Rightarrow \frac{IF}{JC} = \frac{IE}{BJ}$$

Mà $EF \parallel BC$ suy ra EB; IJ; CF đồng quy hay A, I, J thẳng hàng.

Trong tam giác DAJ có M; O; N lần lượt là trung điểm của AD, DI, JD nên M, O, N thẳng hàng (ĐPCM).

Câu V. (2,0 điểm)

Tìm tất cả các tập hợp dư $A \not\equiv \emptyset$ gồm hữu hạn các số thực sao cho $\forall x \in A$ thì $x+1-x^2 \in A$ và $x-1+x^2 \in A$

Giải. Đặt $f(x) = -x^2 + x + 1; g(x) = x^2 + x - 1$

Do $A \not\equiv \emptyset$ và hữu hạn nên gọi x_1, x_2 lần lượt là phần tử lớn nhất và phần tử nhỏ nhất của A.

$$\text{Vì } f(x_1) \in A; g(x_1) \in A \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) \leq x_1 \\ g(x_1) \leq x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - x_1^2 \leq 0 \\ x_1^2 - 1 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = \pm 1$$

Tương tự $x_2 = \pm 1$

Xét các trường hợp:

Nếu A có 1 phần tử thì $A = \{-1\}$; $A = \{1\}$ thử lại thấy thỏa mãn.

Nếu A có 2 phần tử thì $A = \{-1\}$; $A = \{1\}$ thử lại thấy thỏa mãn.

Nếu A có hơn 2 phần tử thì $-1 \in A; 1 \in A$ (do $-1, 1$ lần lượt là phần tử nhỏ nhất và phần tử lớn nhất của A). Gọi $x_0 \in A; x_0 \neq \pm 1 \Rightarrow -1 < x_0 < 1$

Nếu $0 < x_0 < 1 \Rightarrow 1 + x_0 - x_0^2 > 1$ vô lí

Nếu $-1 < x_0 < 0 \Rightarrow -1 + x_0 + x_0^2 < -1$ vô lí

Suy ra $x_0 = 0$ và $A = [-1, 0, 1]$ thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy các tập hợp A thỏa mãn đề bài là $A = \{-1\}; A = \{1\}; A = \{-1, 1\}; A = [-1, 0, 1]$

---Hết---