**1.3. PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC TRƯNG.**

1. Cho dãy số  xác định bởi  Tìm .

**Hướng dẫn giải**

Dễ thấy dãy đã cho là dãy số dương, do đó không có số hạng nào của dãy bằng 0. Từ công thức truy hồi của dãy ta có .

Đặt , ta được dãy số .

Dễ thấy dãy  là dãy số dương và . Do đó.

 Vậy ta có .

Xét hàm số . Ta có  Do đó có hai dãy con đơn điệu của dãy  và hai dãy con này đều bị chặn nên chúng có giới hạn. Giả sử  và  thì ta có hệ.

.

Ta thấy chỉ có  thỏa mãn và đây là giới hạn cần tìm.

1. Tìm số các dãy số  thỏa mãn điều kiện: .

**Hướng dẫn giải**

 Viết lại  với .

Nhận xét: .

Vì vậy: .

 Với  tồn tại duy nhất α:  và .

Lúc đó: ; .

Quy nạp ta được: .

.

⇔ .

Vì  nên .

Do  nên: .

Từ đó có tất cả  giá trị u1 thỏa bài toán: .

Do đó có tất cả  dãy số  thỏa điều kiện đã cho.

1. Cho  là các nghiệm dương của phương trình  được sắp theo thứ tự tăng dần. Tính .

**Hướng dẫn giải**

Xét hàm số , với . Ta có  =>  tăng từ  đến .

Suy ra: trong khoảng  phương trình  có nghiệm duy nhất .

 với =>  => .

 =  = .

1. Cho dãy số xác định như sau: . Tìm điều kiện của  để dãy số  có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Ta có: .

\* Suy ra dãy số  tăng; từ đó dãy số  có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi dãy bị chặn trên.

Giả sử tồn tại , thì chuyển qua giới hạn hệ thức  ta có: .

- Nếu có chỉ số  mà  thì  nên  trái với kết quả .

Do đó:  với mọi  hay  nói riêng  từ đó ta được .

\* Đảo lại: Nếu .

.

và .

Bằng quy nạp ta chứng minh được  (H/s trình bày ra).

Như vậy dãy  tăng, bị chặn trên bới , do đó dãy  có giới hạn hữu hạn.

*Kết luận:* Với điều kiện  thì dãy số  có giới hạn hữu hạn và .

1. Cho hai dãy số  và  được xác định như sau:.

, ;, .

Chứng minh rằng  và  có cùng giới hạn, tìm giới hạn đó.

**Hướng dẫn giải**

Bằng quy nạp, ta chứng minh rằng:.

; (2).

Từ (1), (2) tồn tại  và .

Ngoài ra: .

.

Vậy hai dãy  có cùng giới hạn chung là .

1. Cho dãy số (xn) thỏa mãn: . Chứng minh dãy số trên có giới hạn.

**Hướng dẫn giải**

\*) Ta chứng minh   với mọi n  1 (1).

Thật vậy:  đúng.

Giả sử (1) đúng với  .

 = .

.

 (đpcm).

\*) Ta chứng minh  có giới hạn.

NX:  tăng và  với mọi .

Ta có  với mọi  1.

Vậy  có giới hạn.

1. Tam giác mà 3 đỉnh của nó là ba trung điểm của ba cạnh tam giác  được gọi là tam giác trung bình của tam giác .

Xây dựng dãy các tam giác    sao cho tam giác  là một tam giác đều cạnh bằng 1 và với mỗi số nguyên  tam giác  là tam giác trung bình của tam giác . Với mỗi số nguyên dương , kí hiệu  tương ứng là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác . Chứng minh rằng dãy số  là một cấp số nhân. Hãy xác định số hạng tổng quát của cấp số nhân đó?.

**Hướng dẫn giải**

+  là một cấp số nhân với công bội  và số hạng đầu .

+ Số hạng tổng quát: .

1. Cho dãy số  được xác định bởi:  và  với mọi  Xét dãy số  mà:  với mọi .

a) Chứng minh rằng dãy số  là một cấp số cộng. Hãy xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng đó.

b) Cho số nguyên dương . Hãy tính tổng  số hạng đầu tiên của dãy số  theo . Từ đó, hãy suy ra số hạng tổng quát của dãy số .

Hướng dẫn giải

a) Từ giả thiết  là một cấp số cộng với số hạng đầu  và công sai .

b) + Tổng  số hạng đầu của dãy  là: .

+ Số hạng tổng quát của dãy  là: .

1. Cho dãy số  được xác định bởi .

Tìm số  nhỏ nhất để chia hết cho 2048.

**Hướng dẫn giải**

Từ công thức truy hồi cuả dãy , đặt , thì dãy () xác định bởi .

Phương trình đặc trưng : , từ đó suy ra : .

.

Do  là số là số lẻ nên .

.

Vậy  là giá trị cần tìm thỏa mãn điều kiện bài toán.