

CD14: PHẦN HÌNH HỌC

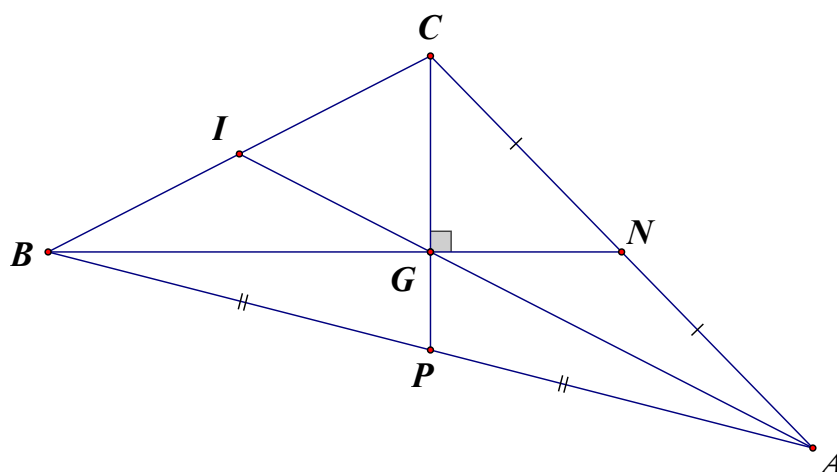
Dạng toán: Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau, so sánh góc
Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh đoạn thẳng bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh tam giác bằng nhau
Dạng toán: Chứng minh ba điểm thẳng hàng
Dạng toán: Bất đẳng thức tam giác
Dạng toán: Chứng minh song song, vuông góc
Dạng toán: Hình khối trong thực tiễn
Dạng toán: Bài toán chứng minh tổng hợp

Dạng toán: Tính độ dài đoạn thẳng, chứng minh đoạn thẳng bằng nhau

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho hình vẽ, biết $\triangle ABC$ có hai đường trung tuyến BN, CP vuông góc với nhau tại G . Tia AG cắt BC tại I . $BC = 5\text{cm}$. Độ dài GA là:



- A. 10cm B. 2,5cm C. 5cm D. 3cm

Lời giải

Chọn C

Theo đề ta có tam giác BCG vuông tại G và I là trung điểm BC .

$$IC = IB = IG = \frac{BC}{2}$$

Nên

Mà AI là trung tuyến nên $GA = 2 \cdot IG = BC = 5\text{cm}$

Câu 2. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại B , $AB = 6$, $\angle A = 30^\circ$. Phân giác góc C cắt AB tại D . Khi đó độ dài đoạn thẳng BD và AD lần lượt là:

A. 2; 4

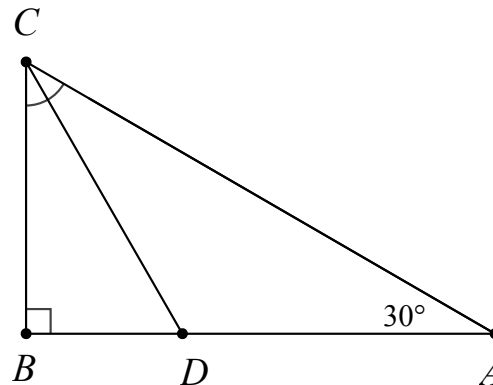
B. 3; 3

C. 4; 2

D. 1; 5

Lời giải

Chọn A



+) Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có $\angle ABC = 30^\circ$

$$\Rightarrow CB = \frac{1}{2} AC$$

hay $AC = 2CB$

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có $AC^2 = BC^2 + AB^2$ (định lý Pythagore)

$$\Rightarrow (2BC)^2 = BC^2 + 6^2$$

$$4BC^2 - BC^2 = 36$$

$$3BC^2 = 36$$

$$BC^2 = 12$$

+) Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có $\angle BAC + \angle BCA = 90^\circ$

$$30^\circ + \angle BCA = 90^\circ$$

$$\angle BCA = 60^\circ$$

Vì CD là phân giác của $\angle BCA$ (gt)

$$\Rightarrow \angle BCD = \frac{1}{2} \angle BCA = 30^\circ$$

+) Xét $\triangle DBC$ vuông tại B có $\angle BCD = 30^\circ$

$$\Rightarrow BD = \frac{1}{2} CD$$

hay $CD = 2BD$

+) Xét $\triangle DBC$ vuông tại B có $CD^2 = BC^2 + BD^2$ (định lý Pythagore)

$$\Rightarrow (2BD)^2 = 12 + BD^2$$

$$4BD^2 - BD^2 = 12$$

$$3BD^2 = 12$$

$$BD^2 = 4$$

$$BD = 2 \quad (BD > 0)$$

$$\text{Vì: } BD + DA = AB$$

$$\Rightarrow 2 + AD = 6$$

$$\Rightarrow AD = 4$$

$$\text{Vậy } BD = 2, AD = 4.$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tam giác DEF có $\widehat{E} = \widehat{F}$. Tia phân giác của góc D cắt EF tại I . Ta có:

A. $\triangle DIE = \triangle DIF$

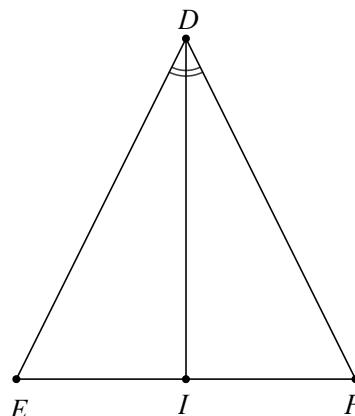
B. $DE = DF, \widehat{DEI} = \widehat{DFI}$

C. $IE = IF, DI = EF$

D. Cả A, B đều đúng

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\widehat{E} = \widehat{F}$ (gt) $\Rightarrow \triangle DEF$ cân tại D

Xét $\triangle DIE$ và $\triangle DIF$ có:

DI : cạnh chung

$DE = DF$ ($\triangle DEF$ cân tại D)

$\widehat{EDI} = \widehat{FDI}$ (DI là tia phân giác)

$\Rightarrow \triangle DIE = \triangle DIF$ (c - g - c)

$\Rightarrow IE = IF$ (hai cạnh tương ứng)

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ cân tại A , trên cạnh BC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC . Biết $AB = 5\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, độ dài AM là:

A. $\sqrt{17}\text{ cm}$

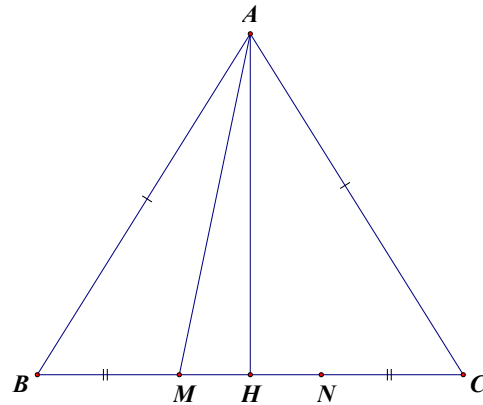
B. 4 cm

C. $\sqrt{15}\text{ cm}$

D. $\sqrt{14}\text{ cm}$

Lời giải

Chọn C



$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = 4$$

Tam giác ABH vuông tại H , nên

Mặt khác $BH = \frac{BC}{2}$ và $BM = \frac{BC}{3}$ nên $MH = \frac{BH}{3} = \frac{BC}{6} = \frac{6}{6} = 1$

Tam giác AMH vuông tại H , nên $AM = \sqrt{AH^2 + MH^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$

Câu 5. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A , $AB = 6\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$. Gọi G là trọng tâm của tam giác. Độ dài AG là:

A. $\frac{11}{3}\text{cm}$

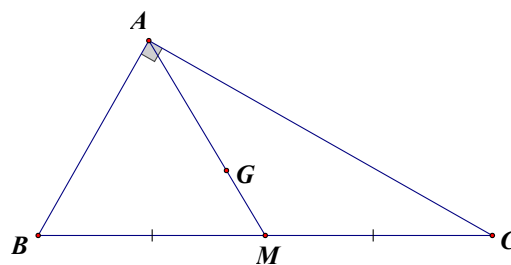
B. 5cm

C. $\frac{10}{3}\text{cm}$

D. 3cm

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của BC , nên AM là trung tuyến

Mà tam giác ABC vuông tại A

$$AM = \frac{BC}{2}$$

Suy ra

Theo Pitago: $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 36 + 64 = 100$

Suy ra $BC = 10$

Mặt khác G là trọng tâm của tam giác ABC , nên từ đó ta có:

$$AG = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{10}{3}$$

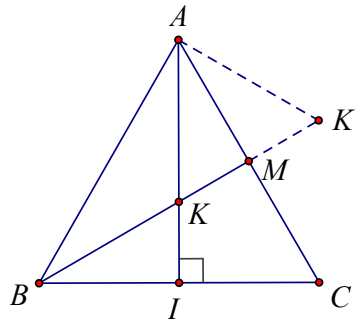
Câu 6. (HSG 7 huyện Sơn Động, 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ đều độ dài cạnh là 6 cm. Kẻ AI vuông góc với BC tại I , đường thẳng BM ($M \in AC$) cắt AI tại K , biết $MA = 3$ cm và $KI = \sqrt{3}$ cm. Độ dài cạnh AI là

- A. $3\sqrt{2}$ cm B. 3 cm C. $2\sqrt{3}$ cm D. $6\sqrt{3}$ cm

Lời giải

Chọn C



Vì $\triangle ABC$ đều độ dài cạnh là 6 cm mà $M \in AC$ và $MA = 3$ cm nên M là trung điểm AC .

Suy ra $BM \perp AC$. Ta dễ dàng chứng minh được $\triangle AMK = \triangle BIK$ (g-c-g).

Do đó: $KM = KI = \sqrt{3}$ cm

Xét $\triangle AMK$ vuông tại M có $\angle MAK = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$

Suy ra $\triangle AMK$ chính là nửa tam giác đều (lấy K' trên tia đối của tia MK sao cho $MK' = MK$ ta được ngay $\triangle AKK'$ đều). Do đó: $AK = 2KM = 2\sqrt{3}$ cm

Vậy $AI = AK + KI = 3\sqrt{3}$ cm

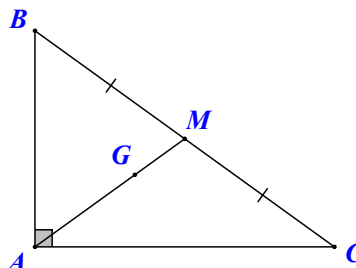
Câu 7. (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông tại A , trọng tâm G , $BC = 6$ cm. Khi đó AG bằng

- A. 1,5 cm B. 2 cm C. 1 cm D. 3 cm

Lời giải

Chọn B



Do tam giác ABC vuông tại A nên $AM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3(\text{cm})$
 $AG = \frac{2}{3} \cdot AM = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2(\text{cm})$
 Suy ra

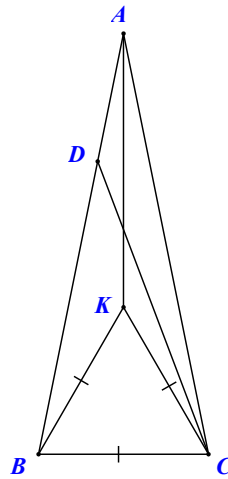
Câu 8. (HSG 7 huyện Tam Nông, 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A , $AB = AC = x$, $BC = 2$ và $\angle A = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy D sao cho $\angle ACD = 10^\circ$. Độ dài AD bằng

- A. $\frac{x}{2}$. B. $\sqrt{x}$. C. 1. D. 2

Lời giải

Chọn D



Vẽ điểm K nằm cùng phía với A đối với BC sao cho tam giác KBC là tam giác đều.

Vì $\angle A = 20^\circ$ nên $\angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$

Suy ra $\angle KCB < \angle ACB$ ($60^\circ < 80^\circ$) do đó K nằm trong tam giác ABC

Kẻ AK .

Xét $\triangle AKB$ và $\triangle AKC$ có: $AB = AC (=x)$, $BK = CK$ (cạnh của tam giác đều), KA là cạnh chung.

$\Rightarrow \triangle AKB = \triangle AKC$ (c.c.c)

$\Rightarrow \angle KAB = \angle KAC = \frac{\angle BAC}{2} = 10^\circ$

Ta có $\angle KCA = \angle ACB - \angle KCB = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle ACK$: AC là cạnh chung, $\angle DAC = \angle KCA (=20^\circ)$, $\angle ACD = \angle KAC (=10^\circ)$,

$\Rightarrow \triangle ADC = \triangle ACK$ (g.c.g)

Do đó $AD = CK \Rightarrow AD = BC = 2$

Câu 9. (HSG 7 Tam Nông, Phú Thọ 2021-2022)

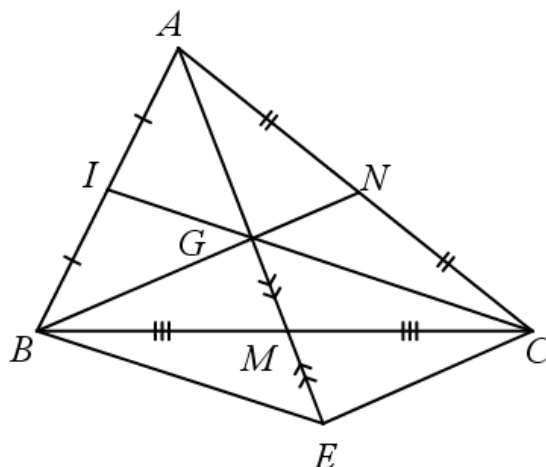
Tam giác ABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E

sao cho $ME = \frac{1}{3}AM$. Khi đó giá trị $\frac{EB + EC + EA}{PC + BN + 2AM}$ là

- A. 2. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C



Tam giác ABC có ba đường trung tuyến AM, BN, CP , gọi G là trọng tâm của ΔABC

Suy ra $GC = \frac{2}{3}PC$, $GB = \frac{2}{3}BN$, $GA = \frac{2}{3}AM$, $GM = \frac{1}{3}AM$

+) Có $GA = \frac{2}{3}AM$, $GM = \frac{1}{3}AM$, $ME = \frac{1}{3}AM \Rightarrow GM = ME$ và $AE = 2AG = \frac{2}{3} \cdot 2AM$
(1)

+) Xét ΔBME và ΔCMG có
 $BM = MC$ (vì M là trung điểm BC)

$\angle BME = \angle CMG$ (hai góc đối đỉnh)

$ME = GM$ (GT)

Suy ra $\Delta BME = \Delta CMG$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = GC$ (hai cạnh tương ứng)

mà $GC = \frac{2}{3}PC \Rightarrow BE = \frac{2}{3}PC$
(2)

+) Xét ΔBGM và ΔCEM có
 $BM = MC$ (vì M là trung điểm BC)

$\angle BMG = \angle CME$ (hai góc đối đỉnh)

$ME = GM$

Suy ra $\Delta BMG = \Delta CME$ (c.g.c) $\Rightarrow BG = EC$ (hai cạnh tương ứng)

$$\text{mà } GB = \frac{2}{3}BN \Rightarrow EC = \frac{2}{3}BN \quad (3)$$

$$\frac{EB}{PC} = \frac{EC}{BN} = \frac{AE}{2AM} = \frac{2}{3}$$

+) Từ (1), (2), (3) suy ra

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta được:

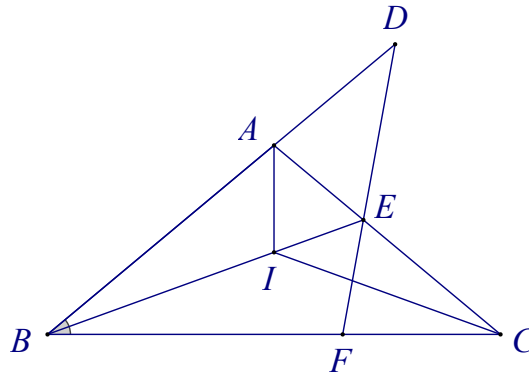
$$\frac{EB}{PC} = \frac{EC}{BN} = \frac{AE}{2AM} = \frac{EB+EC+EA}{PC+BN+2AM} = \frac{2}{3}$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Lập Thạch – Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A , có $\angle A = 100^\circ$ và I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác ABC . Trên tia BA lấy điểm D sao cho $BD = BC$. Đường thẳng BI cắt AC tại E , DE cắt BC tại F . Chứng minh rằng $FB = FD$.

Lời giải



$$\triangle ABC \text{ cân tại } A \text{ có } \angle A = 100^\circ \Rightarrow \angle B = \angle C = 40^\circ \quad (1)$$

Xét $\triangle BED$ và $\triangle BEC$ có

BE chung

$$\angle EBC = \angle EBD \text{ (do } BE \text{ là phân giác } \angle B)$$

$$BD = BC \text{ (gt)}$$

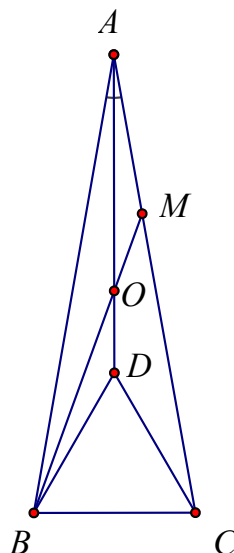
$$\text{Do đó } \triangle BED = \triangle BEC \text{ (c.g.c) suy ra } \angle BDE = \angle BCE \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\angle BDE = \angle EBD (= 40^\circ)$. Suy ra $\triangle FBD$ cân tại F suy ra $FB = FD$

Câu 2. (HSG 7 huyện Sơn Động 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A có $\angle BAC = 20^\circ$. Vẽ tam giác đều BCD sao cho điểm D nằm trong tam giác ABC . Tia phân giác của $\angle ABD$ cắt AC tại M . Chứng minh $AM = BC$.

Lời giải



Xét $\triangle ADB$ và $\triangle ADC$ có:

$AB = AC$ (do $\triangle ABC$ cân tại A), $BD = CD$ (do $\triangle BCD$ đều), AD chung.

Suy ra: $\triangle ADB = \triangle ADC$ (c.c.c). Suy ra $\angle DAB = \angle DAC$ (hai góc tương ứng).

Do đó: $\angle DAB = 20^\circ : 2 = 10^\circ$.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A , mà $\angle BAC = 20^\circ$ (giả thiết) nên $\angle ABC = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$.

Vì $\triangle BCD$ là tam giác đều nên $\angle DBC = 60^\circ$.

Tia BD nằm giữa hai tia BA và BC suy ra $\angle ABD = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ$.

Tia BM là phân giác của $\angle ABD$ nên $\angle ABM = 10^\circ$.

Xét tam $\triangle ABM$ và $\triangle BAD$ có:

$$\angle ABM = \angle DAB = 10^\circ$$

AB cạnh chung

$$\angle BAM = \angle ABD = 20^\circ$$

Suy ra: $\triangle ABM = \triangle BAD$ (g.c.g).

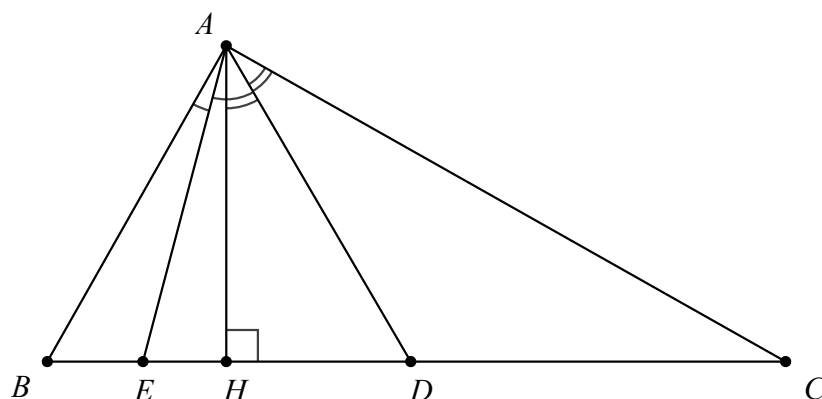
Suy ra $AM = BD$, mà $BD = BC$ (do $\triangle BCD$ đều) nên $AM = BC$.

Câu 3. (HSG 7 trường Bùi Hữu Duyên, huyện Hưng Hà; trường Đồng Xuân, huyện Phúc Yên 2022 - 2023; huyện Lục Nam 2018 - 2019)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 90^\circ$. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Tia phân giác của $\angle HAC$ cắt cạnh BC ở điểm D và tia phân giác của $\angle HAB$ cắt cạnh BC ở E .

Chứng minh rằng $AB + AC = BC + DE$.

Lời giải



+ Vì $\angle B$ và $\angle HAC$ cùng phụ với $\angle BAH$ nên $\angle B = \angle HAC$

$$\angle AEC = \angle ABC + \angle BAE = (\angle HAD + \angle DAC) + \angle EAH = \angle EAC$$

Suy ra

Suy ra $\triangle AEC$ cân tại $C \Rightarrow AC = CE$ (*)

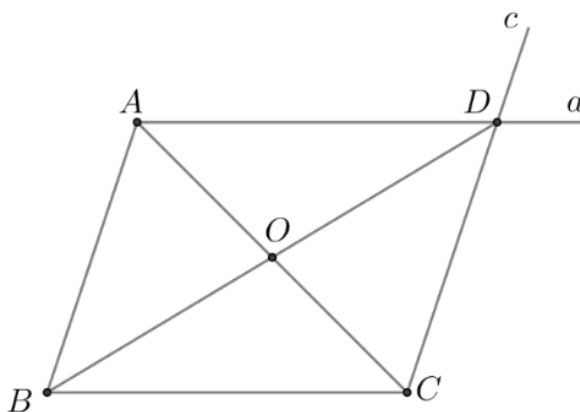
+ Tương tự chứng minh được $AB = BD$ (**)

+ Từ (*) và (**) $\Rightarrow AB + AC = BD + EC = ED + BC$

Câu 4. (HSG 7 trường THCS-THPT Tri Thức 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC , qua A kẻ đường thẳng a song song với BC , qua C kẻ đường thẳng c song song với AB , a cắt c tại D . Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh $OC = OA$.

Lời giải



Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CDB$ có:

$$\angle ABD = \angle CDB \text{ (so le trong vì } c \parallel AB \text{)}$$

BD cạnh chung

$$\angle ADB = \angle CBD \text{ (so le trong vì } a \parallel BC \text{)}$$

Suy ra $\triangle ABD = \triangle CDB$ (g - c - g)

$$\Rightarrow AB = CD \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

Xét $\triangle AOB$ và $\triangle COD$ có:

$$\widehat{OAB} = \widehat{OCD} \text{ (so le trong vì } a \parallel BC \text{)}$$

$$AB = CD \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{OBA} = \widehat{OCD} \text{ (so le trong vì } c \parallel AB \text{)}$$

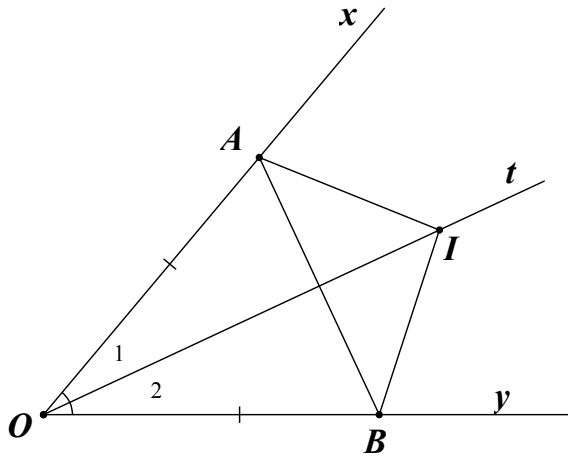
$$\text{Suy ra } \Delta AOB = \Delta COD \text{ (g - c - g)}$$

$$\Rightarrow OA = OC \text{ (2 cạnh tương ứng).}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Như Thanh, tỉnh Thanh Hóa năm học 2021 - 2022)

Cho góc nhọn xOy . Gọi Ot là tia phân giác của góc xOy . Lấy các điểm A, B, I lần lượt thuộc các tia Ox, Oy, Ot (A, B, I khác O) sao cho $OA = OB < OI$. Chứng minh: $IA = IB$ và $OI \perp AB$.

Lời giải



+) Xét ΔAOI và ΔBOI có:

$$OA = OB \text{ (gt)}$$

$$\widehat{O_1} = \widehat{O_2} \text{ (vì } Ot \text{ là tia phân giác của góc } xOy \text{)}$$

OI cạnh chung

$$\text{Vậy } \Delta AOI = \Delta BOI \text{ (c-g-c)}$$

$$\Rightarrow IA = IB \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

+) Ta có $OA = OB$ (gt)

$$IA = IB \text{ (cmt)}$$

Suy ra: O, I cách đều hai điểm A và B

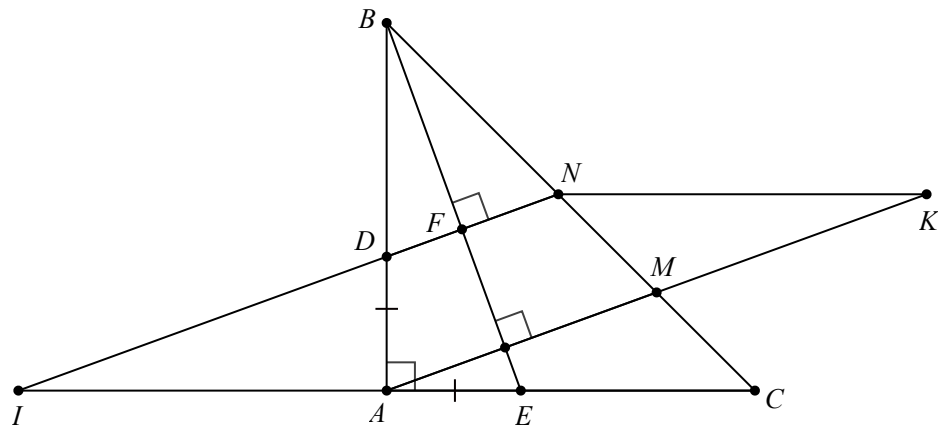
Hay OI là đường trung trực AB hay $OI \perp AB$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh, trường THCS Dân Chủ 2022 - 2023)

Cho ΔABC vuông tại A , $AB = AC$. Trên AB và AC lần lượt lấy điểm D và E sao cho $AD = AE$. Qua A và D kẻ đường vuông góc với BE cắt BC lần lượt tại M và N . Tia ND cắt tia CA tại I . Chứng minh rằng:

- a) A là trung điểm của CI .
- b) $CM = MN$.
- c) $AM = \frac{1}{2}NI$.

Lời giải



- a) Gọi F là giao điểm của DN với BE .

Xét $\triangle ADI$ vuông tại A có: $\widehat{HDA} + \widehat{I} = 90^\circ$ (định lí)

Xét $\triangle FIE$ vuông tại F có: $\widehat{I} + \widehat{FEI} = 90^\circ$ (định lí)

$$\Rightarrow \widehat{HDA} = \widehat{FEI}$$

Xét $\triangle ABE$ vuông tại A và $\triangle ADI$ vuông tại A có:

$$AE = AD \text{ (gt)}$$

$$\widehat{HDA} = \widehat{FEI} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle AID \text{ (cạnh góc vuông- góc nhọn kề)}$$

$$\Rightarrow AB = AI \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Mà } AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow AC = AI$$

Vậy A là trung điểm của CI .

- b) Ta có: $BE \perp DN; BE \perp MA$ (gt)

$$\Rightarrow DN \parallel AM \text{ (Quan hệ giữa tính vuông góc với tính song song)}$$

$$\text{Hay } NI \parallel AM$$

Từ N kẻ đường thẳng song song với AC cắt AM tại K .

Chứng minh được: $\triangle ANI = \triangle NAK$ (g.c.g)

$$\Rightarrow AI = NK \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Mà } AC = AI \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\Rightarrow AC = NK$$

Chứng minh được: $\triangle MNK = \triangle MCA$ (g.c.g)

$$\Rightarrow MN = MC \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

c) Ta có: $\triangle MNK = \triangle MCA$ (chứng minh trên)

$$\Rightarrow MK = MA \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Do đó: M là trung điểm của AK

$$AM = \frac{1}{2} AK.$$

Nên:

Mà $AK = NI$ ($\triangle ANI = \triangle NAK$ - chứng minh trên)

$$AM = \frac{1}{2} NI.$$

Do đó:

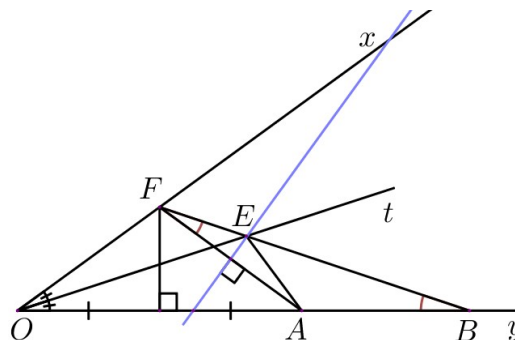
Câu 7. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Vị Thanh 2018 - 2019)

Cho góc nhọn $\angle xOy$ và tia phân giác Ot . Trên tia Oy lấy điểm A . Đường trung trực của OA cắt tia Ox tại F . Trên tia Ay lấy điểm B sao cho $AB = AF$, BF cắt Ot tại E .

a) Chứng minh E thuộc đường trung trực của FA

b) So sánh EF và EB

Lời giải



a) F thuộc đường trung trực của $OA \Rightarrow FO = FA \Rightarrow \triangle OFA$ cân tại F
 $\Rightarrow \angle FOA = \angle FAO = 2\angle EOB = 2\angle FOE$

Do $AF = AB \Rightarrow \triangle FAB$ cân tại $A \Rightarrow \angle AFB = \angle ABF \Rightarrow \angle FAO = 2\angle FBA$
 $\Rightarrow \angle EOB = \angle EBO$

Vậy $OE = EB$

$\triangle OFE = \triangle BAE$ ($OF = AB, OE = EB, \angle FOE = \angle EBO$)

$$\Rightarrow EF = EA$$

$\Rightarrow E$ thuộc đường trung trực của FA .

b) $\angle FOA < 90^\circ \Rightarrow \angle FOE < 45^\circ$

$\triangle OFE$ có $\angle F = 180^\circ - 3\angle O = 3(60^\circ - \angle O) > 3(60^\circ - 45^\circ) = 45^\circ > \angle O$

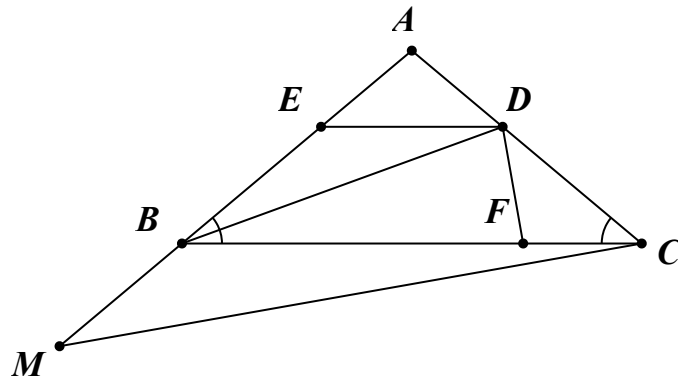
Nên $EF < OE$ mà $OE = EB$

Do đó $EF < EB$

Câu 8. (HSG 7 huyện Việt Yên 2017- 2018)

Cho tam giác ABC cân tại A ($\angle B = \angle C = 40^\circ$). Kẻ phân giác BD ($D \in AC$). Trên tia AB lấy điểm M sao cho $AM = BC$. Chứng minh $BD + AD = BC$.

Lời giải



Từ D kẻ $DE \parallel BC$, trên BC lấy điểm F sao cho $BD = BF$ (1)

Chứng minh được $DE = BE$ (tam giác BED cân)

Do tam giác AED cân nên $AD = AE \Rightarrow BE = CD \Rightarrow DE = CD$

Tam giác BDF cân có $\angle DBF = 20^\circ$ nên $\angle BFD = 80^\circ \Rightarrow \angle FDC = 100^\circ$
 $\Rightarrow \angle FDC = \angle EAD = 100^\circ$

Vậy $\triangle DFC$ có $\angle FDC = 40^\circ$

Chứng minh được $\triangle ADE = \triangle FCD$ (g.c.g)

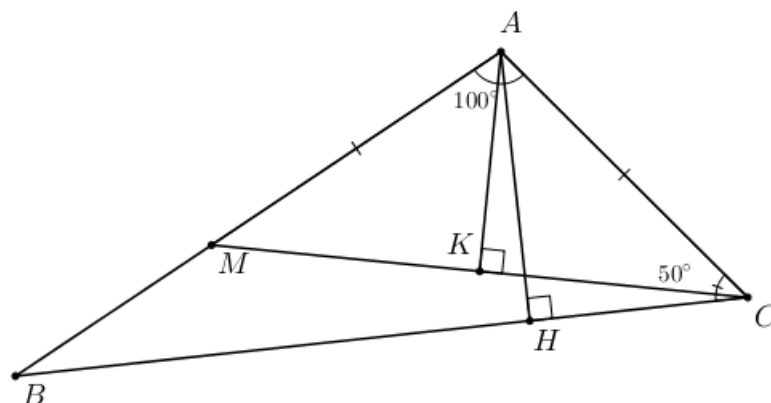
$\Rightarrow AD = CF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BD + AD = BC$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 100^\circ, \angle C = 50^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $MA = AC$. Chứng minh rằng: $CM = AB$.

Lời giải



+ Kẻ $AH \perp BC$ tại H , $AK \perp MC$ tại K

+ Xét $\triangle ABC$ có $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow \angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 180^\circ - (100^\circ + 50^\circ) = 30^\circ$

+ $\triangle AHB$ vuông tại H có $\angle HBA = 30^\circ$, lập luận được $AB = 2AH$ (1)

+ Chứng minh $\triangle AKM = \triangle AKC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$$\Rightarrow KM = KC = \frac{1}{2}CM \Rightarrow CM = 2KC \quad (2)$$

$$\triangle AKM = \triangle AKC \Rightarrow \angle KAM = \angle KAC = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 50^\circ$$

Vì

Xét $\triangle KAC$ và $\triangle HCA$ có :

$$\angle KAC = \angle HCA = 50^\circ$$

$$\angle AKC = \angle CHA = 90^\circ$$

AC chung.

$$\Rightarrow \triangle KAC = \triangle HCA \quad (\text{cạnh huyền – góc nhọn}) \Rightarrow KC = AH \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $CM = AB$.

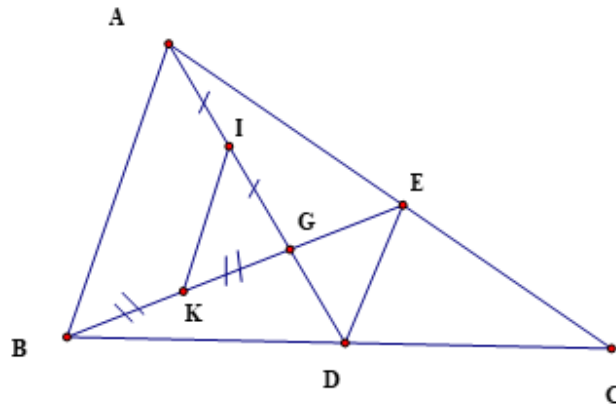
Câu 10. (HSG 7 huyện 2022 - 2023; trường Hiền Quan 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC có đường trung tuyến AD . Kẻ đường trung tuyến BE cắt AD ở G . Gọi I, K theo thứ tự là trung điểm của GA, GB . Chứng minh rằng:

a) $IK \parallel DE; IK = DE$

b) $AG = \frac{2}{3}AD$

Lời giải



a) $\triangle ABC$ có hai trung tuyến AD và BE cắt nhau tại G

$\Rightarrow G$ là trọng tâm $\triangle ABC$

$$\Rightarrow GD = \frac{1}{2} AG \quad GE = \frac{1}{2} BG$$

và

Mà $GI = \frac{1}{2} AG$ và $GK = \frac{1}{2} BG$ (I, K lần lượt là trung điểm của AG và BG)

$$\Rightarrow GD = GI \quad \text{và} \quad GE = GK$$

Xét $\triangle GED$ và $\triangle GKI$ có:

$$GD = GI \quad (\text{chứng minh trên})$$

$$GE = GK \quad (\text{chứng minh trên})$$

$$\angle EGD = \angle IGK \quad (\text{hai góc đối đỉnh})$$

$$\Rightarrow \triangle GED = \triangle GKI \quad (\text{c.g.c})$$

$$\Rightarrow \angle GED = \angle GKI \quad (\text{hai góc tương ứng})$$

Mà $\angle GED$ và $\angle GKI$ ở vị trí so le trong

$$\Rightarrow IK \parallel ED$$

$$\text{Từ } \triangle GED = \triangle GKI$$

$$\Rightarrow IK = ED$$

b) $\triangle ABC$ có hai trung tuyến AD và BE cắt nhau tại G .

$\Rightarrow G$ là trọng tâm $\triangle ABC$

$$\Rightarrow AG = \frac{2}{3} AD$$

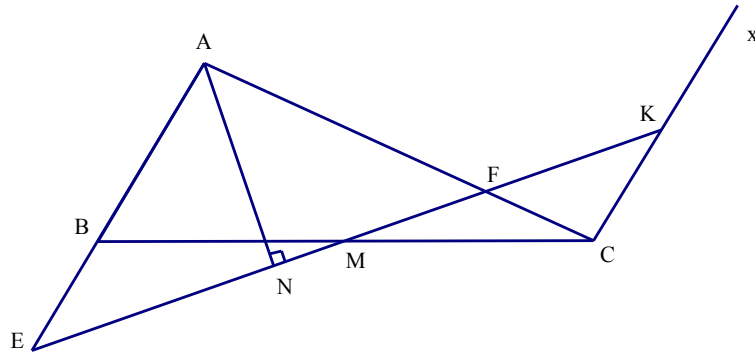
Câu 11. (HSG 7 Lai Châu - năm học 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC , từ M kẻ đường thẳng vuông góc với tia phân giác của góc BAC tại N và cắt tia AB tại E và cắt tia AC tại F . Chứng minh rằng:

1) $AE = AF$

2) $BE = CF$

Lời giải



1) Xét $\triangle ANE$ và $\triangle ANF$ có: $\angle ANE = \angle ANF = 90^\circ$, AN chung, $\angle EAN = \angle FAN$ (gt)

Suy ra: $\triangle ANE = \triangle ANF$ (g - c - g). Vậy $AE = AF$ (2 cạnh tương ứng)

2) Từ C kẻ tia $Cx \parallel AB$, cắt tia EF tại K

Xét $\triangle BME$ và $\triangle CMK$ có: $MB = MC$ (gt), $\angle BME = \angle CMK$ (đối đỉnh), $\angle EBM = \angle KCM$ (so le trong)

Suy ra: $\triangle BME = \triangle CMK$ (g.c.g) $\Rightarrow BE = CK$ (2 cạnh tương ứng) (1)

Vì $AE = AF$ nên tam giác AEF cân tại A , suy ra: $\angle E = \angle F_1$

Mà: $\angle F_1 = \angle F_2$ (đối đỉnh) và $\angle E = \angle K$ (so le trong)

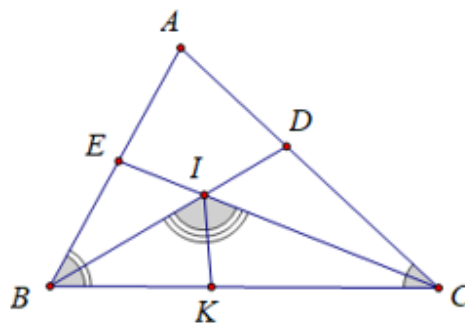
Suy ra: $\angle F_2 = \angle K \Rightarrow$ tam giác CFK cân tại $C \Rightarrow CF = CK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $BE = CF$ (đpcm)

Câu 12. (Đề khảo sát HSG 7 huyện Sông Lô, Vĩnh Phúc năm học 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle A = 60^\circ$. Hai tia phân giác BD, CE của các $\angle ABC$ và $\angle ACB$ cắt nhau ở I ($D \in AC, E \in AB$). Chứng minh rằng $ID = IE$.

Lời giải



+ Kẻ tia phân giác IK của góc BIC

+ Xét $\triangle ABC$ có: $\angle A = 60^\circ \Rightarrow \angle B + \angle C = 120^\circ$

+ Vì BD, CE là các tia phân giác của $\angle ABC$ và $\angle ACB$

$\Rightarrow \angle IBC + \angle ICB = 60^\circ \Rightarrow \angle BIC = 120^\circ$

$$\Rightarrow \angle BIE = \angle DIC = 60^\circ \quad (\text{góc kề bù với góc } BIC)$$

+ Chứng minh được: $\triangle IBE = \triangle IKC$ (g - c - g) $\Rightarrow IE = IK$ (1)

+ Chứng minh tương tự được $ID = IK$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $ID = IE$.

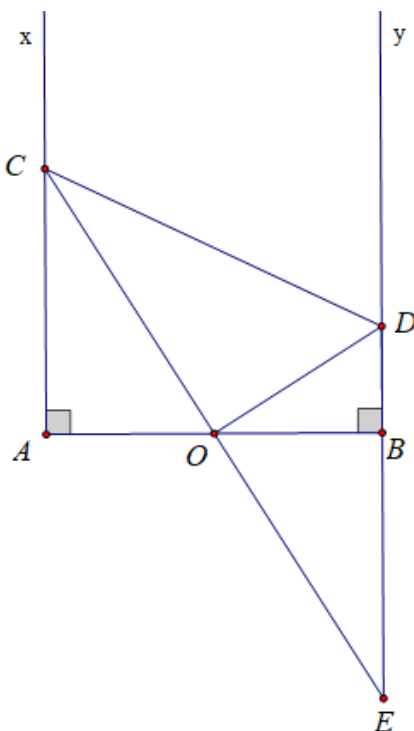
Câu 13. (HSG 7 huyện Yên Thế 2022 - 2023; trường Đào Duy Từ, huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019)

1) Cho đoạn thẳng AB , O là trung điểm của AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia Ax ; By vuông góc với AB . Gọi C là một điểm thuộc tia Ax . Đường vuông góc với OC tại O cắt tia By ở D . Chứng minh $CD = AC + BC$.

2) Cho tam giác ABC . Gọi O là giao điểm các đường phân giác của tam giác đó. Từ O kẻ OD , OE , OF lần lượt vuông góc với BC , AC , AB . Trên tia đối của các tia AC , BA , CB lấy theo thứ tự ba điểm M , N , P sao cho $AM = BC$, $BN = AC$, $CP = AB$. Chứng minh $EM = FN = DP$.

Lời giải

1)



Giả sử đường thẳng CO cắt BD tại E

Chứng minh được $\triangle ACO = \triangle BEO$ (g.c.g)

$$\Rightarrow CO = OE; AC = BE$$

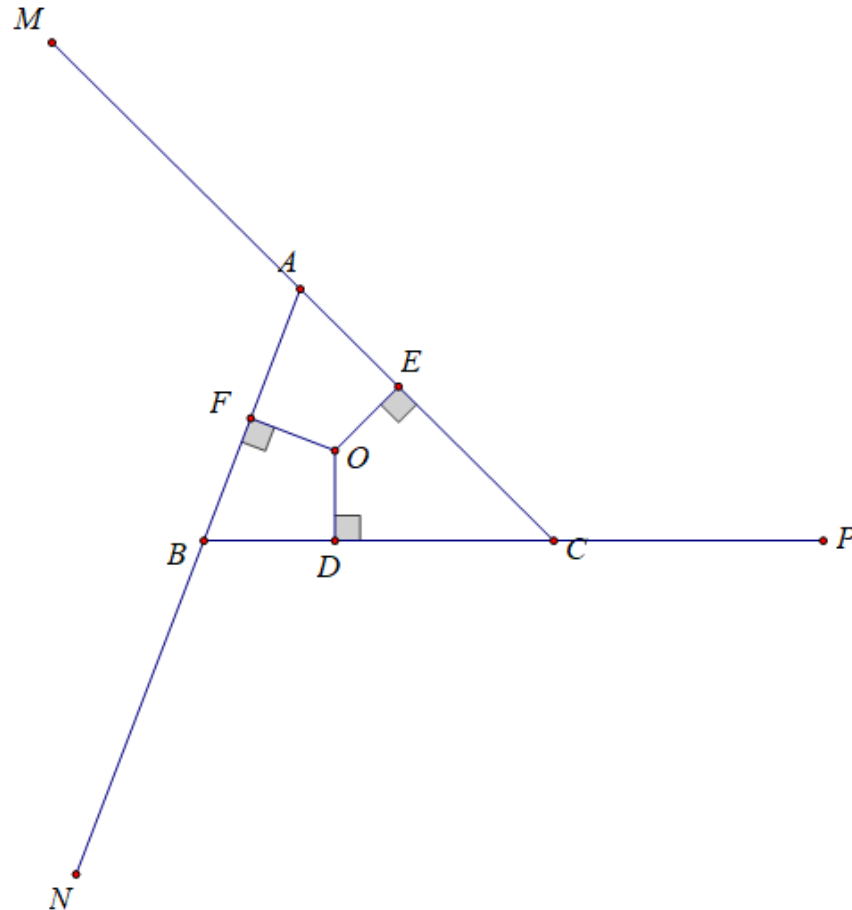
Chứng minh $\triangle OCD = \triangle OED$ (c - g - c)

hoặc chứng minh $\triangle CDE$ cân tại D (DO vừa là đường cao, vừa là trung tuyến)

$$\Rightarrow CD = DE$$

$$\text{Có } CD = DE = BD + BE = BD + AC \quad (\text{đpcm}).$$

2)



Ta có O là giao điểm các đường phân giác $\Rightarrow OD = OE = OF$
 $\Rightarrow AE = AF; BD = BF; CD = CE$

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$

Xét $b + c - a = AB + AC - BC = AF + BF + AE + CE - BD - CD = 2AE$

$$\Rightarrow AE = \frac{b + c - a}{2}$$

$$\text{Tương tự } BF = \frac{a + c - b}{2}; \quad CD = \frac{a + b - c}{2}$$

$$\text{Ta có } EM = AE + AM = \frac{b + c - a}{2} + a = \frac{a + b + c}{2};$$

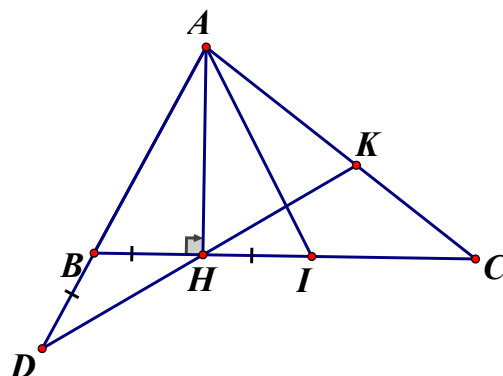
$$FN = BF + BN = \frac{a + c - b}{2} + b = \frac{a + b + c}{2}; \quad DP = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\Rightarrow EM = FN = DP$$

Câu 14. (HSG 7 Thường Xuân 2022 - 2023; huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle B = 2\angle C < 90^\circ$ vẽ AH vuông góc với BC tại H . Trên tia AB lấy điểm D sao cho $AD = HC$. Chứng minh đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC .

Lời giải



Gọi giao điểm của DH với AC là F .

Vì $\angle B = 2\angle C < 90^\circ$ nên $AC > BA$, suy ra: $HC > HB$

Trên HC lấy E sao cho $HB = HE$ (1)

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle AHE$ có:

AH chung

$$\angle AHB = \angle AHE = 90^\circ$$

$$HB = HE$$

$$\Rightarrow \triangle AHB = \triangle AHE \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow \angle ABH = \angle AEH \text{ và } AB = AE$$

$$\text{Mà: } \angle B = 2\angle C \Rightarrow \angle AEH = 2\angle ACB$$

$$\text{Mặt khác: } \angle AEH = \angle ACB + \angle CAE \text{ (góc ngoài tam giác)}$$

$$\text{Do đó: } \angle ACB = \angle CAE, \text{ suy ra: } \triangle ACE \text{ cân tại } E \text{ nên } EA = EC \Rightarrow AB = EC$$

$$\text{Mà: } AD = HC$$

$$\Rightarrow AB + BD = HE + EC \Rightarrow BD = EH \text{ (2)}$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra: } BD = BH$$

$$\text{do đó } \triangle BDH \text{ cân tại } B$$

$$\Rightarrow \angle BDH = \angle BHD = \frac{\angle ABC}{2} = \angle ACB$$

$$\Rightarrow \angle AHF = \angle FAH \text{ (cùng phụ với hai góc bằng nhau)}$$

$$\text{Suy ra: } \triangle AFH \text{ cân tại } F \Rightarrow FA = FH$$

$$\text{Lại có: } \triangle HFC \text{ cân tại } F \Rightarrow FH = FC$$

$$\Rightarrow FC = FA \text{ nên } F \text{ là trung điểm của } AC.$$

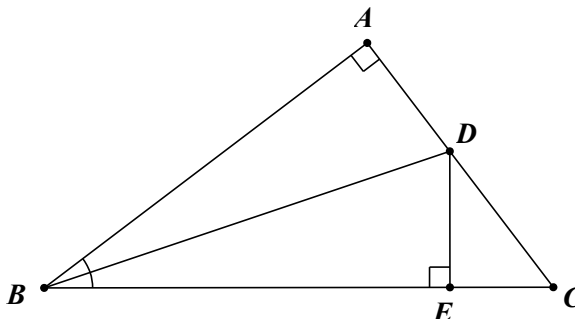
Vậy đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC .

Câu 15. (HSG 7 huyện Tam Nông, trường THCS Hiền Quan 2017- 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A , tia phân giác $\angle ABC$ cắt AC tại D . Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho $BE = BA$. Chứng minh rằng:

- $DA = DE$.
- $DA < DC$.

Lời giải



a) Chứng minh được $\triangle ABE = \triangle EBD$ (c.g.c)
 $\Rightarrow DA = DE$

b) $\triangle ABE = \triangle EBD$ (cmt)
 $\Rightarrow \angle A = \angle E = 90^\circ$

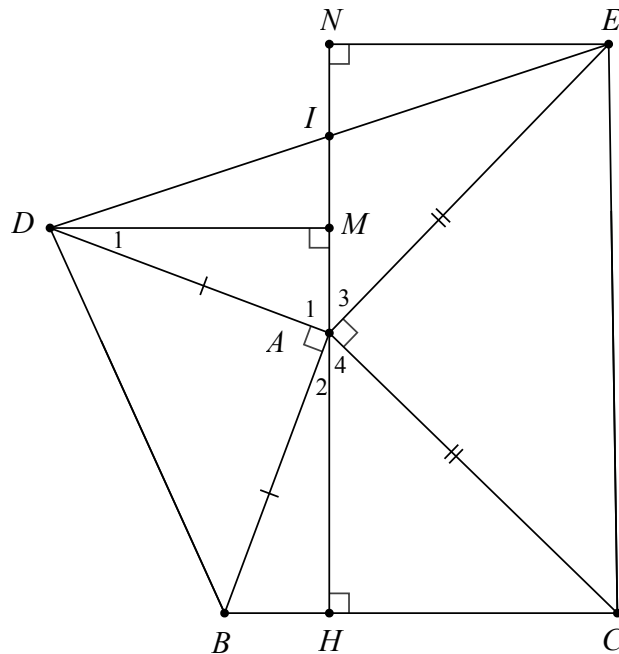
Trong $\triangle EDC$ có $DE < DC$ hay $AD < DC$.

Câu 16. (HSG 7 huyện Hoàng Hóa 2017 - 2018)

Cho tam giác nhọn ABC . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác vuông tại A : $\triangle ABD, \triangle ACE$ sao cho $AB = AD, AE = AC$. Kẻ AH vuông góc với BC , DM vuông góc với AH , EN vuông góc với AH .

- Chứng minh: $DM = AH$.
- Chứng minh MN đi qua trung điểm của DE .

Lời giải



$\triangle MAD$ và $\triangle HBA$ có:

a) Xét

$$\angle AMD = \angle BHA = 90^\circ \quad (\text{gt})$$

$$AD = AB \quad (\text{gt})$$

$$\angle D_1 = \angle A_2 \quad (\text{cùng phụ với } \angle A_1)$$

$$\Rightarrow \triangle MAD = \triangle HBA \quad (\text{cạnh huyền – góc nhọn})$$

$$\Rightarrow DM = AH \quad (\text{hai cạnh tương ứng}) \quad (\text{đpcm}).$$

b) Chứng minh tương tự câu a $\Rightarrow EN = AH$

Gọi giao điểm của MN và DE là I .

Chứng minh được: $\triangle MID = \triangle NIE$ (cạnh góc vuông – góc nhọn)

$$\Rightarrow ID = IE$$

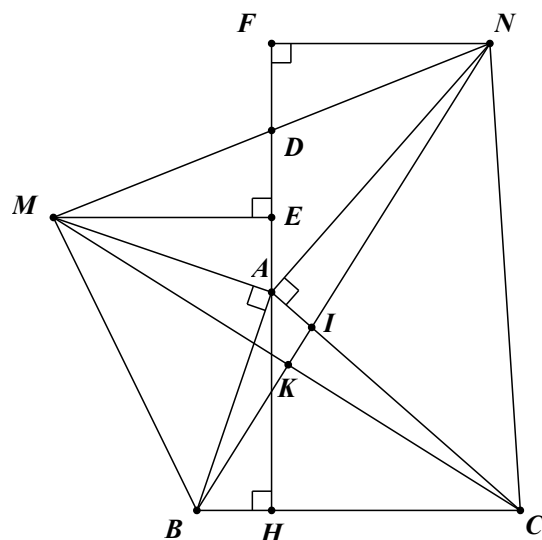
$$\Rightarrow I \text{ là trung điểm của } DE.$$

$$\Rightarrow MN \text{ đi qua trung điểm } I \text{ của } DE \quad (\text{đpcm}).$$

Câu 17. (HSG 7 Huyện Vị Thanh, 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có góc A nhỏ hơn 90° . Vẽ ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN .

Lời giải



Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$ có: $AM = AB$ ($\triangle AMB$ vuông cân)
 $AC = AN$ ($\triangle ACN$ vuông cân)
 $\Rightarrow \angle MAC = \angle NAC (=90^\circ + \angle BAC) \Rightarrow \triangle AMC = \triangle ABN (c.g.c)$

Gọi I là giao điểm của BN, AC . K là giao điểm của BN, MC

Xét $\triangle KIC$ và $\triangle AIN$ có: $\angle INI = \angle KCI$ ($\triangle AMC = \triangle ABN$)

$\angle AIN = \angle KIC$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \angle KIC = \angle AIN = 90^\circ$, do đó: $MC \perp BN$

Kẻ $ME \perp AH$ tại E , $NF \perp AH$ tại F . Gọi D là giao điểm của MN và AH

Ta có: $\angle BAH + \angle MAE = 90^\circ$ ($\angle MAB = 90^\circ$)

Lại có: $\angle MAE + \angle AME = 90^\circ$ nên $\angle AME = \angle BAH$

Xét $\triangle MAE$ và $\triangle ABH$ vuông tại E và H ta có:

$\angle AME = \angle BAH$

$MA = AB$

$\Rightarrow \triangle MAE = \triangle ABH (ch - gn)$

$\Rightarrow ME = AH$

Chứng minh tương tự ta có $\triangle AFN = \triangle CHA \Rightarrow FN = AH$

Xét $\triangle MED$ vuông tại E và $\triangle NFD$ vuông tại F có:

$ME = NF (=AH)$

$\angle EMD = \angle FND$ (cùng phụ với $\angle MDE$ và $\angle PDN$ mà $\angle MDE = \angle PDN$)

$\Rightarrow \triangle MED = \triangle NFD$

$\Rightarrow BD = ND$

Vậy AH đi qua trung điểm của MN .

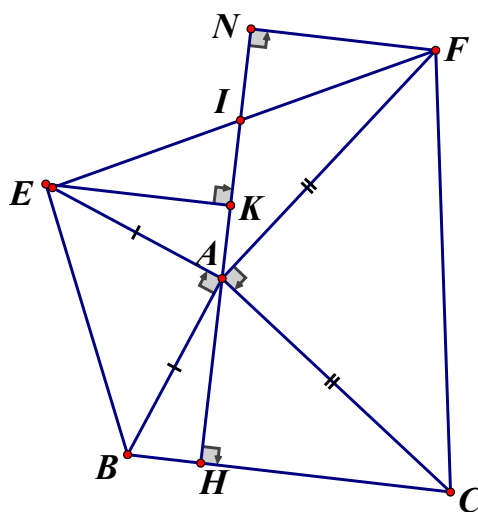
Câu 18. (HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, đường cao AH . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác ABE và ACF vuông cân tại A . Từ E và F kẻ đường vuông góc EK và FN với đường thẳng HA .

a) Chứng minh rằng: $EK = FN$.

b) Gọi I là giao điểm của EF với đường thẳng HA . Tìm điều kiện của tam giác ABC để $EF = 2AI$.

Lời giải



a) Xét hai tam giác vuông $\triangle KAE$ và $\triangle HBA$ có $AE = AB$ (gt), $\angle EAK = \angle HAB$ (cùng phụ với $\angle KAE$)

$\Rightarrow \triangle KAE = \triangle HBA$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow EK = AH$

Tương tự $\triangle NFA = \triangle AHC$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow FN = AH$

Suy ra $EK = FN$

b) Ta có $\triangle KEI = \triangle NFI$ (cạnh góc vuông – góc nhọn kề) $\Rightarrow EI = FI = \frac{1}{2} EF$

Mà $AI = \frac{EF}{2}$ (gt) $\Rightarrow AI = EI = FI \Rightarrow \angle EAI = \angle IAE$ và $\angle FAI = \angle IFA$

$\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ$

Vậy $EF = 2AI$ khi tam giác ABC vuông tại A .

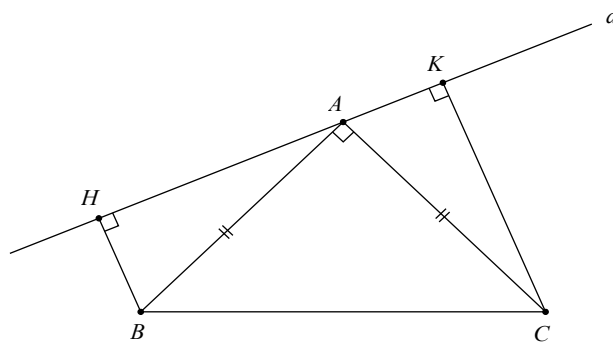
Câu 19. (HSG 7 Trường THCS Tào Sơn 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC$. Qua A vẽ đường thẳng d sao cho B và C nằm cùng phía đối với đường thẳng d . Kẻ BH và CK vuông góc với d . Chứng minh rằng:

a) $AH = CK$.

b) $HK = BH + CK$.

Lời giải



a) Xét $\triangle AHB$ và $\triangle CKA$ có:

$$\angle AHB = \angle CKA (=90^\circ)$$

$$AB = AC \text{ (gt)}$$

$$\angle HAB = \angle KCA \text{ (cùng phụ với } \angle HAC)$$

$$\Rightarrow \triangle AHB = \triangle CKA \text{ (g - c - g)}$$

$$\Rightarrow AH = CK \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

b) Vì $\triangle AHB = \triangle CKA$ (cmt)

$$\Rightarrow BH = AK \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

$$\text{Vậy } KH = AH + AK = BH + CK$$

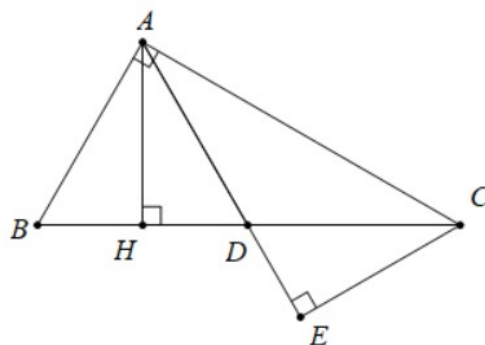
Câu 20. (HSG 7 huyện Chương Mỹ 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC vuông tại A , $\angle C = \frac{1}{2} \angle B$, kẻ AH vuông góc với BC tại H . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ đường thẳng CE vuông góc với đường thẳng AD .

a) Tam giác ABD là tam giác gì? Vì sao?

b) Chứng minh rằng $AD = CD$; $DE = DH$.

Lời giải



a) Ta có: $\triangle ABC$ vuông tại A , suy ra $\angle B + \angle C = 90^\circ$

$$\angle C = \frac{1}{2} \angle B \quad \angle C = 30^\circ; \angle B = 60^\circ$$

Mà nên

Chứng minh $\triangle AHB = \triangle AHD$ (c.g.c) $\Rightarrow AB = AD$ nên $\triangle ABD$ cân tại A ,

Mà $\angle B = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều.

b) Chứng minh $\triangle AHD = \triangle CED$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra $DH = DE$

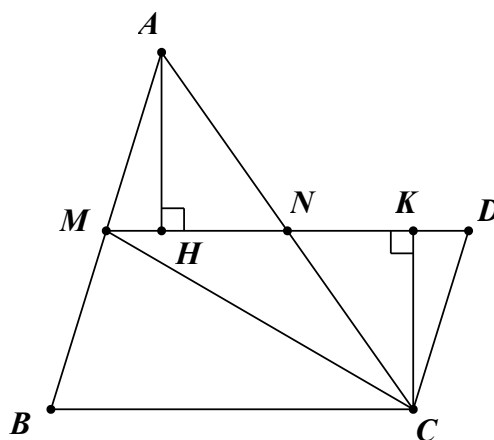
Câu 21. (HSG 7 trường Thực hành Sài Gòn 2017- 2018)

Cho tam giác có ba góc đều nhọn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, AC . Kẻ $AH \perp MN$ tại H và CK vuông góc với đường thẳng MN tại K . Chứng minh:

a) $AH = CK$

b) $BC = 2MN$

Lời giải



a) Xét $\triangle NHA$ và $\triangle NKC$ có:

$AN = CN$ (gt)

$\angle HNA = \angle KNC$ (đối đỉnh)

$\angle AHN = \angle CKN (=90^\circ)$

Nên $\triangle NHA = \triangle NKC$

$\Rightarrow AH = CK$

b) Trên tia đối của tia NM lấy D sao cho $ND = NM$

Xét $\triangle NAM$ và $\triangle NCD$ có:

$AN = CN$

$\angle ANM = \angle CND$

$NM = ND$

Từ đó $\triangle NAM = \triangle NCD$ (c.g.c)

$\Rightarrow AM = CD$ và $\angle NAM = \angle NCD$

Do đó $AM \parallel CD$

Mà $\angle BM$, $\angle MCD$ ở vị trí so le trong nên $\angle MB = \angle MCD$

Xét $\triangle MCB$ và $\triangle CMD$ có:

$$BM = CD$$

$$\angle MB = \angle MCD$$

MC chung

Nên $\triangle MCB = \triangle CMD (c.g.c)$

$$\Rightarrow BC = MD$$

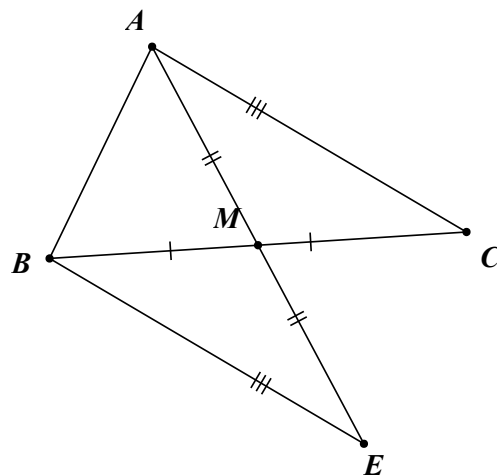
Mà $MD = 2MN$

Nên $BC = 2MN$.

Câu 22. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Trên tia đối của tia MA lấy điểm E sao cho $ME = MA$. Chứng minh rằng: $AC = EB$.

Lời giải



Xét $\triangle AMC$ và $\triangle EMB$ có:

$$AM = EM \text{ (gt)}$$

$$\angle AMC = \angle EMB \text{ (đối đỉnh)}$$

$$BM = MC \text{ (gt)}$$

Nên $\triangle AMC = \triangle EMB (c.g.c)$

$$\Rightarrow AC = EB$$

Câu 23. (HSG 7 huyện Giao Thủy 2016 - 2017)

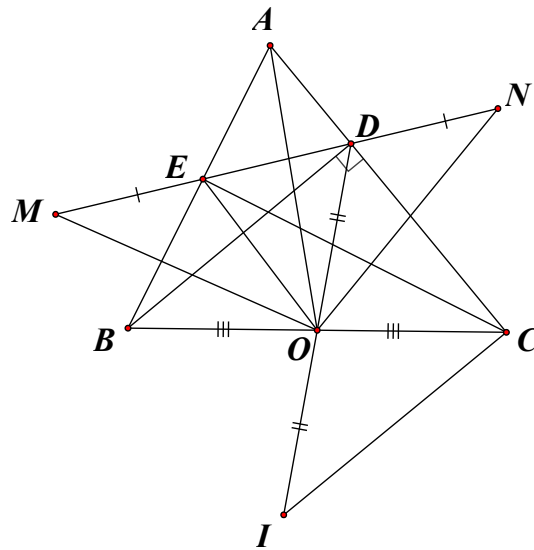
Cho tam giác ABC , O là trung điểm của BC . Từ B kẻ BD vuông góc với AC (D thuộc AC). Từ C kẻ CE vuông góc với AB ($E \in AB$)

$$OD = \frac{1}{2} BC$$

a) Chứng minh rằng:

b) Trên tia đối của tia DE lấy điểm N , trên tia đối của tia ED lấy điểm M sao cho $DN = EM$. Chứng minh rằng: Tam giác OMN là tam giác cân

Lời giải



$$OD = \frac{1}{2} BC$$

a) Chứng minh

Trên tia đối của tia OD lấy điểm I sao cho $OI = OD$. Nối I với C

$$\triangle OBD = \triangle OCI \text{ (c.g.c)}$$

Chứng minh được

$$\Rightarrow BD = CI$$

Và $\angle BDO = \angle OIC$, mà hai góc này ở vị trí so le trong

$$\Rightarrow DB \parallel CI$$

Mà $CD \perp BD$

$$\Rightarrow CD \perp CI$$

$$\Rightarrow \angle DCI = 90^\circ$$

Xét $\triangle BDC$ và $\triangle ICD$ có:

$$BD = CI \text{ (cmt)}$$

$$\angle BDC = \angle DCI = 90^\circ$$

DC chung

$$\triangle BDC = \triangle ICD \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BC = DI$$

Mà O là trung điểm của BC .

$$\Rightarrow OD = \frac{1}{2} BC$$

b) Nối O với E

$$OE = \frac{1}{2} BC$$

Chứng minh tương tự câu a có:

$$\Rightarrow OD = OE$$

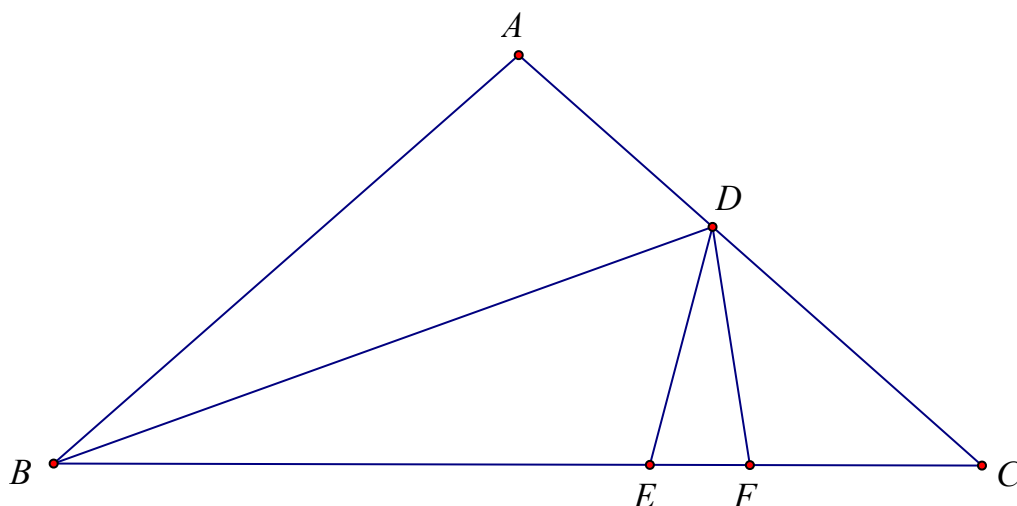
$\Rightarrow \triangle OED$ cân tại O

Chứng minh được: $\widehat{OEM} = \widehat{ODN}$
 Chứng minh được: $\Delta OEM = \Delta ODN$ (c.g.c)
 $\Rightarrow OM = ON$

Câu 24. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

Cho ΔABC cân tại A , có $\widehat{A} = 100^\circ$ tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$ cắt AC tại D . Chứng minh :
 $AD + BD = BC$

Lời giải



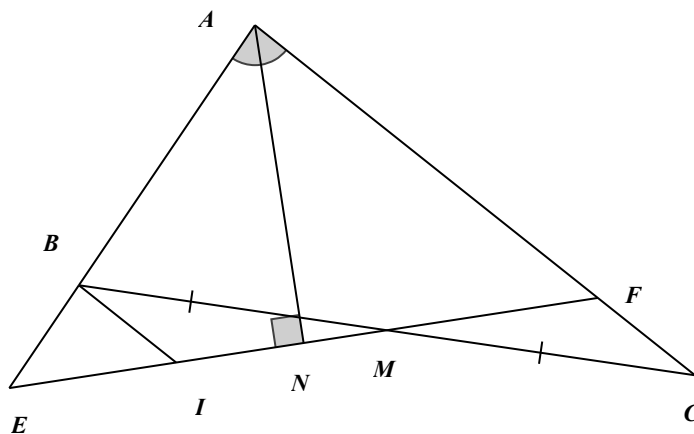
Trên cạnh BC lấy 2 điểm E, F sao cho: $BE = BA, BF = BD$.
 Học sinh chứng minh được $AD = DE$
 Học sinh chứng minh được ΔDFE cân tại D
 $\Rightarrow DE = DF$
 Chứng minh được ΔDFC cân tại F
 $\Rightarrow DF = FC$
 $\Rightarrow DE = FC$
 Suy ra $AD + BD = BC$

Câu 25. (HSG 7 trường Nguyễn Bảo Phương; huyện Thanh Thủy; huyện Phù Ninh 2018 - 2019; huyện Nam Sách 2017 - 2018; huyện Ngọc Lặc; huyện Tân Lạc 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC có $AB < AC$. Gọi M là trung điểm của BC , từ M kẻ đường thẳng vuông góc với phân giác của góc A , cắt tia này tại N , cắt tia AB tại E và cắt tia AC tại F . Chứng minh rằng:

- $BE = CF$
- $AE = \frac{AB + AC}{2}$
- Tính AE, BE theo $AC = b, AB = c$

Lời giải



a) Chứng minh: $BE = CF$.

Qua B kẻ đường thẳng song song với AC , cắt EF tại I .

Xét $\triangle MBI$ và $\triangle MCF$ có:

$$\widehat{IBM} = \widehat{FCM} \text{ (so le trong); } MB = MC \text{ (gt), } \widehat{BMI} = \widehat{CMF} \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle MBI = \triangle MCF \text{ (c.g.c.)} \Rightarrow BI = CF \quad (1)$$

Mặt khác $\triangle AEF$ có AN vừa là đường cao, vừa là đường phân giác nên $\triangle AEF$ cân tại A

$$\Rightarrow \widehat{E} = \widehat{F} \text{ mà } \widehat{BIE} = \widehat{MFA} \text{ (đồng vị) nên } \widehat{BIE} = \widehat{E}$$

$$\Rightarrow \triangle BIE \text{ cân tại } B, \text{ suy ra } BI = BE \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BE = CF$ (đpcm).

$$AE = \frac{AB + AC}{2}$$

b) Chứng minh:

Ta có: $\triangle AEF$ cân tại A (cmt). $\Rightarrow AE = AF$

$$2AE = AE + AF = (AB + BE) + (AC - CF) = (AB + BI) + (AC - CF) \quad (\text{Vì } BE = BI)$$

$$\Rightarrow 2AE = (AB + AC) + (BI - CF) = AB + AC \quad (\text{Vì } BI = CF)$$

$$AE = \frac{AB + AC}{2}$$

Vậy

$$\Rightarrow AE = \frac{b + c}{2},$$

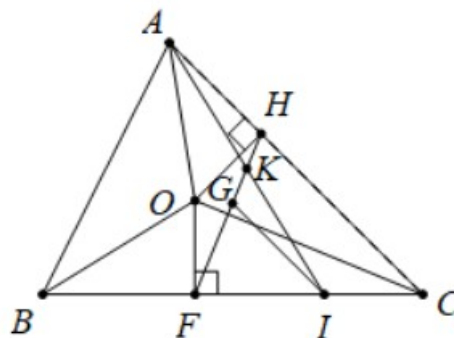
$$BE = \frac{AC - AB}{2} \Rightarrow BE = \frac{b - c}{2}$$

c) Từ câu b chứng minh được:

Câu 26. (HSG 7 trường THCS Nhơn Trí 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI . Chứng minh tam giác FCH cân và $AK = KI$

Lời giải



Chứng minh $\triangle CHO = \triangle CFO$ (ch-gn)

Suy ra $CH = CF \Rightarrow \triangle FCH$ cân tại C .

Vẽ $IG \parallel AC$ ($G \in FH$), chứng minh $\triangle FIG$ cân tại I

Suy ra $AH = IG$ và $\angle IGK = \angle AHK$

Chứng minh $\triangle AHK = \triangle IGK$ (g.c.g)

Suy ra $AK = KI$

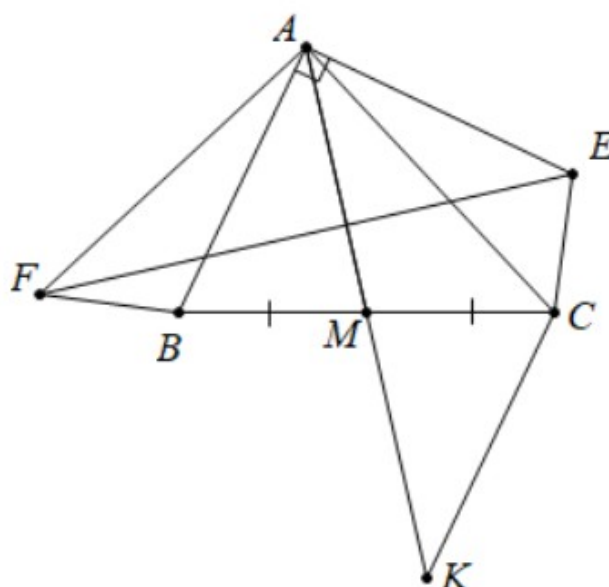
Câu 27. (HSG 7 huyện Rạch Giá 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC , trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh C bờ là đường thẳng AB dựng đoạn AE vuông góc với AB và $AE = AB$. Trên nửa mặt phẳng chứa đỉnh B bờ là đường thẳng AC dựng đoạn AF vuông góc với AC và $AF = AC$. Chứng minh rằng:

a) $FB = EC$

b) $EF = 2AM$

Lời giải



a) Ta có $\triangle ABF = \triangle AEC \Rightarrow FB = EC$

b) Trên tia đối của tia MA lấy K sao cho $AK = 2AM$.

Ta có: $\triangle ABM = \triangle KCM \Rightarrow CK \parallel AB$

$\Rightarrow \angle ACK + \angle CAB = \angle EAF + \angle CAB = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle ACK = \angle EAF$$

$\triangle EAF$ và $\triangle KCA$ có $AE = AB = CK$;

$AF = AC$ (gt)

$$\angle ACK = \angle EAF$$

$$\Rightarrow \triangle EAF = \triangle KCA$$

$$\Rightarrow EF = AK = 2AM$$

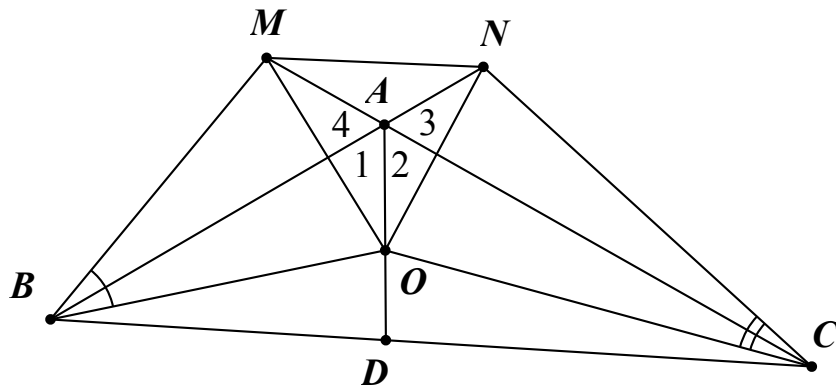
Câu 28. (HSG 7 huyện Bồ Trách 2017 - 2018; huyện Triệu Sơn 2015 - 2016)

Cho $\triangle ABC$ có $\angle B + \angle C = 60^\circ$, phân giác AD . Trên AD lấy điểm O , trên tia đối của tia AC lấy điểm M sao cho $\angle ABM = \angle ABO$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm N sao cho $\angle ACN = \angle ACO$. Chứng minh rằng

a) $AM = AN$

b) $\triangle MON$ là tam giác đều.

Lời giải



a) $\triangle ABC$ có $\angle B + \angle C = 60^\circ$ nên $\angle A = 120^\circ$

Do AD là tia phân giác nên $\angle A_1 = \angle A_2 = 60^\circ$ ta lại có $\angle A_3 = \angle A_4 = 180^\circ - \angle A = 60^\circ$

Suy ra $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = \angle A_4 (= 60^\circ) \Rightarrow \begin{cases} \triangle ABM = \triangle ABD (g.c.g) \Rightarrow AM = AO(1) \\ \triangle ACN = \triangle ACO (g.c.g) \Rightarrow AN = AO(2) \end{cases}$

Từ (1) và (2) suy ra $AM = AN$

b) $\triangle AOM = \triangle ONC (c.g.c) \Rightarrow OM = ON$ (3)

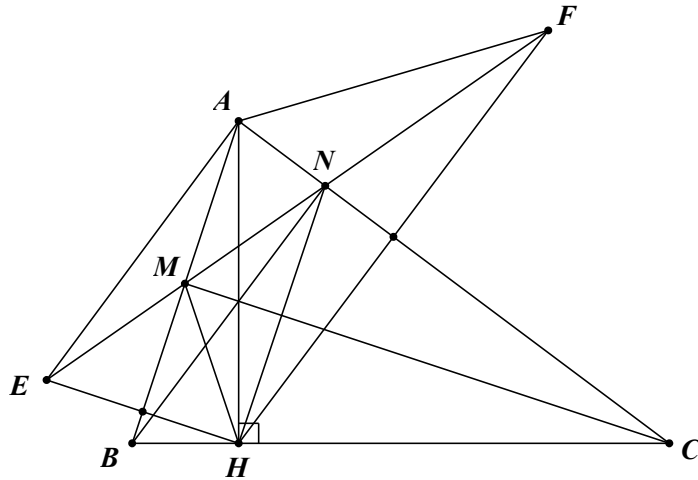
$\triangle AOM = \triangle AMN (c.g.c) \Rightarrow OM = NM$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $OM = ON = NM \Rightarrow \triangle MON$ là tam giác đều.

Câu 29. (HSG 7 Huyện Hương Sơn, 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC ($\angle BAC < 90^\circ$) đường cao AH . Gọi E, F lần lượt là điểm đối xứng của H qua AB, AC đường thẳng EF cắt AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng $AE = AF$.

Lời giải



Vì AB là trung trực của EH nên ta có: $AE = AH$ (1)

Vì AC là trung trực của FH nên ta có: $AH = AF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE = AF$.

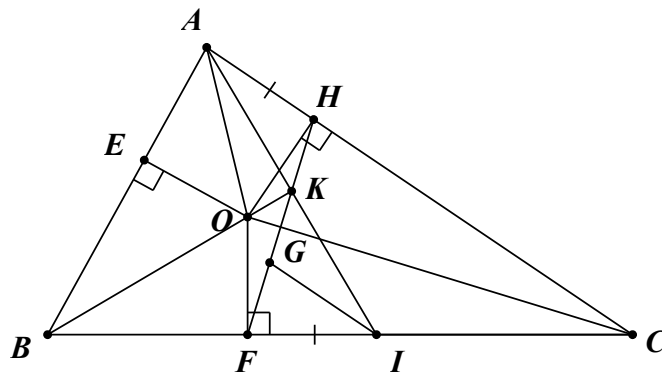
Câu 30. (HSG 7 trường Lý Thường Kiệt 2017 - 2018)

Cho $\triangle ABC$ có 3 góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI .

a) Chứng minh $\triangle FCH$ cân

b) Chứng minh $AK = KI$

Lời giải



Ta có $\angle HO = \angle FO = 90^\circ$ (vì $OH \perp AC$, $OF \perp BC$)

Xét $\triangle CHO$ vuông và $\triangle CFO$ vuông có:

OC chung

$\angle HCO = \angle FCO$ (OC là phân giác $\angle C$)

Vậy $\triangle CHO = \triangle CFO$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow CH = CF$ (hai cạnh tương ứng).

Vậy $\triangle FCH$ cân tại C .

Qua I vẽ $IG \parallel AC$ ($G \in FH$)

Ta có $\triangle FCH$ cân tại C (cmt) $\Rightarrow \angle HF = \angle FH$ (1)

Mà $\angle HF = \angle FI$ (đồng vị, $IG \parallel AC$) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle FH = \angle FI$ hay $\angle FG = \angle GF$

Vậy $\triangle IFG$ cân tại I

$\Rightarrow FI = GI$

Mặt khác: $FI = AH$ nên $GI = AH (= FI)$

Ta lại có: $\angle IGK = \angle HK$; $\angle HAK = \angle GIK$ (so le trong, $IG \parallel AC$)

Xét $\triangle AHK$ và $\triangle IGK$ có:

$\angle IGK = \angle HK$ (cmt)

$GI = AH$ (cmt)

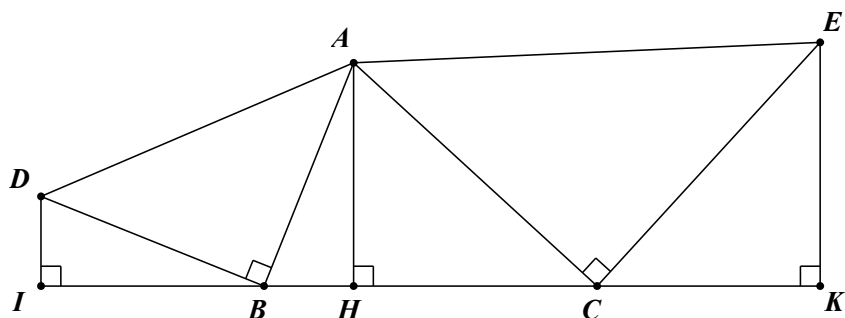
$\angle HAK = \angle GIK$ (cmt)

$\Rightarrow \triangle AHK = \triangle IGK$ (g.c.g) $\Rightarrow AK = KI$ (đpcm)

Câu 31. (HSG 7 Thị xã Sầm Sơn 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có góc B và C nhọn. Dựng ra ngoài tam giác ABC các tam giác vuông cân tại các đỉnh B và C . Vẽ AH , DI và EK cùng vuông góc với đường thẳng BC ($H, I, K \in BC$). Chứng minh: $\triangle BDI = \triangle ABH$ và $DI + EK = BC$.

Lời giải



$\triangle BDI$ vuông tại I có $\angle DBI + \angle BDI = 90^\circ$

Mà $\angle ABH + \angle BDI = 90^\circ$ Nên $\angle DBI = \angle ABH$

Tương tự $\angle ACH = \angle ECK$

Chứng minh $\triangle BDI = \triangle ABH$; $\triangle CKE = \triangle AHC$ (ch - gn)

Từ đó suy ra: $DI + EK = BH + HC = BC$.

Câu 32. (HSG 7 trường THCS Nguyệt Ấn 2022 - 2023)

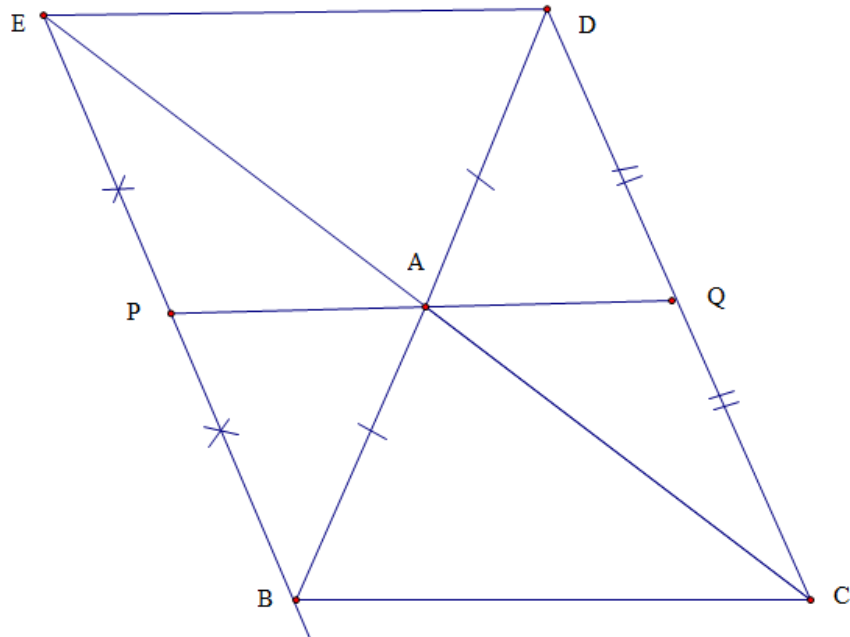
Cho $\triangle ABC$ nhọn có $AB < AC$. Trên tia đối của tia AB lấy điểm D sao cho $AB = AD$. Qua B kẻ đường thẳng song song với CD và cắt đường thẳng AC tại E .

a) Chứng minh rằng: $BE = CD$; $ED = BC$

b) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BE, CD . Chứng minh rằng A là trung điểm của PQ

c) Gọi M là điểm bất kì nằm trong $\triangle ABC$. Xác định vị trí của M để biểu thức $MA \cdot BC + MB \cdot AC + MC \cdot AB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



a) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ADC$ có

$\angle BAE = \angle DAC$ (hai góc đối đỉnh)

$AB = AD$ (gt)

$\angle ABE = \angle ADC$ (do $BE \parallel CD$)

Suy ra $\triangle ABE = \triangle ADC$ (g-c-g)

Suy ra: $BE = CD$ (hai cạnh tương ứng). (đpcm)

Và $AE = AC$ (hai cạnh tương ứng) suy ra A là trung điểm của EC

Ta có:

Xét $\triangle ADE$ và $\triangle ABC$ có

$AE = AC$ (chứng minh trên)

$\angle EAD = \angle CAB$ (hai góc đối đỉnh)

$AB = AD$ (gt)

Suy ra $\triangle ADE = \triangle ABC$ (c-g-c)

Suy ra: $ED = BC$ (hai cạnh tương ứng). (đpcm)

b) Vì P là trung điểm của BE và A là trung điểm của EC

suy ra PA là đường trung bình của tam giác BEC

Suy ra: $PA \parallel BC$ và $PA = \frac{1}{2}BC$

Chứng minh tương tự: QA là đường trung bình của tam giác BCD

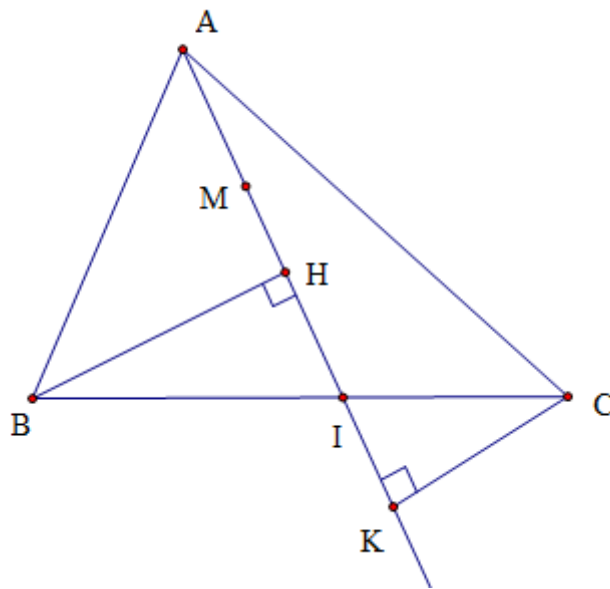
Suy ra: $QA \parallel BC$ và $QA = \frac{1}{2}BC$

Vì $PA \parallel BC$ và $QA \parallel BC$ suy ra: P, A, Q thẳng hàng (theo Tiên đề Euclid) (1)

Vì $PA = \frac{1}{2}BC$ và $QA = \frac{1}{2}BC$ suy ra $PA = QA$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: A là trung điểm của PQ (đpcm).

c)



Kẻ BH và CK cùng vuông góc với AM , ta có:

$$S_{MAB} + S_{MAC} = \frac{1}{2}AM \cdot BH + \frac{1}{2}AM \cdot CK = \frac{1}{2}AM \cdot (BH + CK) \quad (1)$$

Mặt khác: $BH \leq BI; CK \leq CI$

Suy ra: $BH + CK \leq BI + CI \Leftrightarrow BH + CK \leq BC$ (2)

$$S_{MAB} + S_{MAC} = \frac{1}{2}AM \cdot (BH + CK) \leq \frac{1}{2}AM \cdot BC \quad (3)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

Dấu “=” xảy ra khi $AM \perp BC$

Chứng minh tương tự ta được:

$$S_{MBC} + S_{MAB} \leq \frac{AC \cdot BM}{2} \quad (4)$$

$$S_{MBC} + S_{MAC} \leq \frac{AB \cdot MC}{2} \quad (5)$$

Từ (3), (4) và (5) ta được:

$$2[S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MAC}] \leq \frac{BC \cdot AM}{2} + \frac{AC \cdot BM}{2} + \frac{AB \cdot MC}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4.S_{ABC} \leq MA \cdot BC + MB \cdot CA + MC \cdot AB$$

Dấu “=” xảy ra khi: $AM \perp BC, BM \perp AC, CM \perp AB$ Hay M là trực tâm của ΔABC .

$$MA \cdot BC + MB \cdot CA + MC \cdot AB = 4.S_{ABC}$$

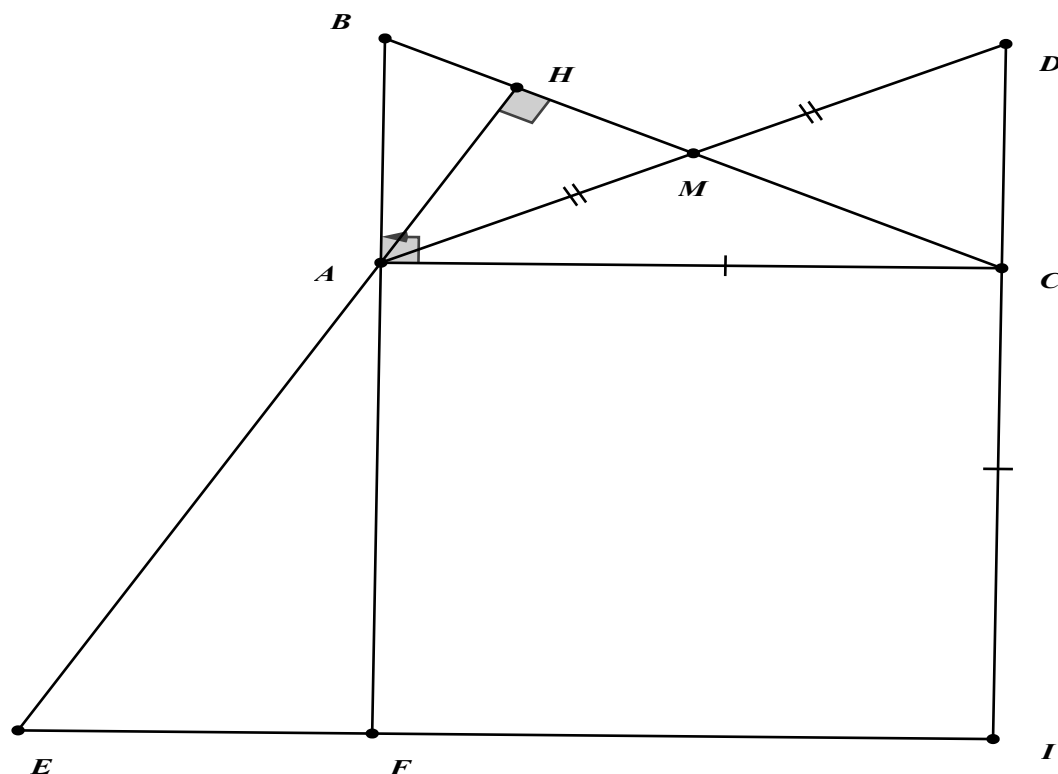
Vậy min

Xảy ra khi: $AM \perp BC, BM \perp AC, CM \perp AB$ Hay M là trực tâm của ΔABC .

Câu 33. (HSG 7 Trường Hoàng Quyên huyện Thanh Oai năm 2018 – 2019)

Cho ΔABC vuông tại A , đường cao AH , trung tuyến AM . Trên tia đối của tia MA lấy điểm D sao cho $DM = MA$. Trên tia đối của tia CD , lấy điểm I sao cho $CI = CA$. Qua I vẽ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng AH tại E . Chứng minh $AE = BC$.

Lời giải



Gọi giao của AB và EI là F

$$\Delta ABM = \Delta DCM \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle B_1 = \angle C_1 \Rightarrow BF \parallel DI$$

$$\Rightarrow \angle BAC = \angle ACI = 90^\circ \Rightarrow ID \perp AC$$

$$BF \parallel DI \Rightarrow \angle A_1 = \angle I_1; IF \parallel AC \Rightarrow \angle A_2 = \angle I_2$$

$$\Rightarrow \Delta CAI = \Delta FIA \text{ (g.c.g)} \Rightarrow IC = AF = AC$$

$$\text{Mà } \angle EAF = \angle BAH \text{ (đối đỉnh)} \Rightarrow \angle BAH = \angle ACB \text{ (cùng phụ với } \angle ABC)$$

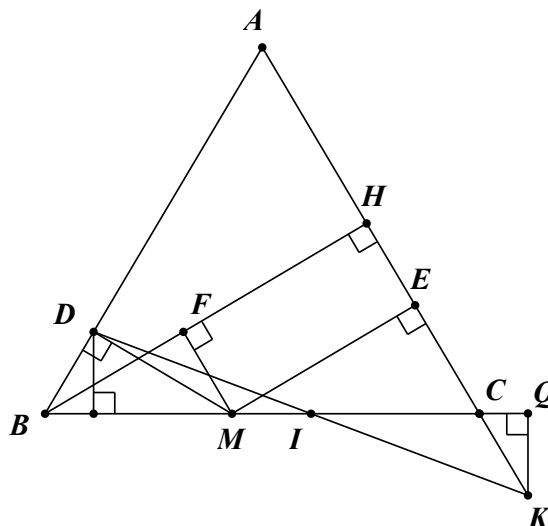
$$\Rightarrow \angle EAF = \angle ACB \Rightarrow \Delta AFE = \Delta CAB \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AE = BC$$

Câu 34. (HSG 7 huyện Mỹ Cày 2017- 2018)

Cho tam giác ABC cân tại A , BH vuông góc với AC tại H . Trên cạnh BC lấy điểm M bất kỳ (khác B và C). Gọi D, E, F là chân đường vuông góc hạ từ M đến AB, AC, BH .

- a) Chứng minh khi M chạy trên cạnh BC thì tổng $MD + ME$ có giá trị không đổi.
b) Trên tia đối của tia CA lấy điểm K sao cho $CK = EH$. Chứng minh BC đi qua trung điểm của DK .

Lời giải



a) Chứng minh được $\triangle DBM = \triangle FMB$ (ch - gn)

Ta có: $\triangle DBM = \triangle FMB$ (ch - gn)

$$\Rightarrow MD = BF \quad (1)$$

Chứng minh $\triangle MFH = \triangle HEM$

$$\Rightarrow ME = FH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $MD + ME = BF + FH = BH$

BH không đổi $\Rightarrow MD + ME$ không đổi (đpcm)

b) Vẽ $DP \perp BC$ tại P , $KQ \perp BC$ tại Q , gọi I là giao điểm của DK và BC .

Chứng minh $BD = FM = EH = CK$

Chứng minh $\triangle BDP = \triangle CKQ$ (ch - gn) $\Rightarrow DP = KQ$ (hai cạnh tương ứng)

Chứng minh $\angle D = \angle K$

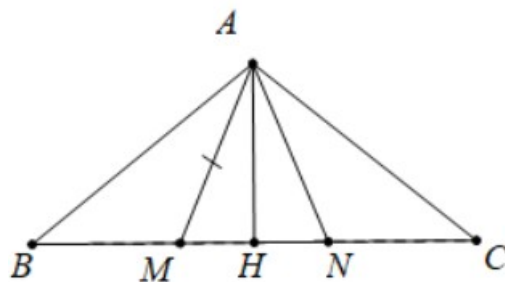
$$\Rightarrow \triangle DPI = \triangle KQI \text{ (c.g.c)}$$

Suy ra $ID = IK$ (đpcm).

Câu 35. (HSG 7 trường Đáp Cầu năm học 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC cân tại đỉnh A , trên cạnh BC lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Gọi H là trung điểm của BC . Chứng minh $AM = AN$ và $AH \perp BC$.

Lời giải

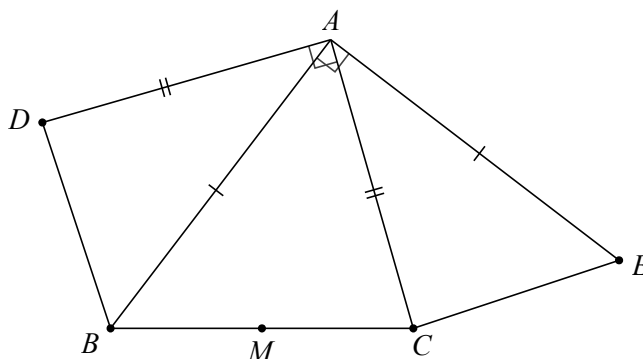


Chứng minh $\triangle ABM = \triangle ACN$ (c.g.c) $\Rightarrow AM = AN$

Chứng minh $\triangle ABH = \triangle ACH$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle AHB = \angle AHC = 90^\circ \Rightarrow AH \perp BC$

Câu 36. (HSG 7 huyện Quốc Oai 2016 - 2017)

Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, trung tuyến AM . Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa điểm C , vẽ đoạn thẳng AE vuông góc và bằng AB . Trên nửa mặt phẳng bờ AC chứa điểm B , vẽ đoạn thẳng AD vuông góc và bằng AC . Chứng minh $BD = CE$.



Ta có $\angle BAD + \angle BAC = 90^\circ$; $\angle CAE + \angle BAC = 90^\circ$

Suy ra $\angle BAD = \angle CAE$ (cùng phụ $\angle BAC$)

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ACE$ có:

$AD = AC$ (GT)

$\angle BAD = \angle CAE$ (cmt)

$AE = AB$ (GT)

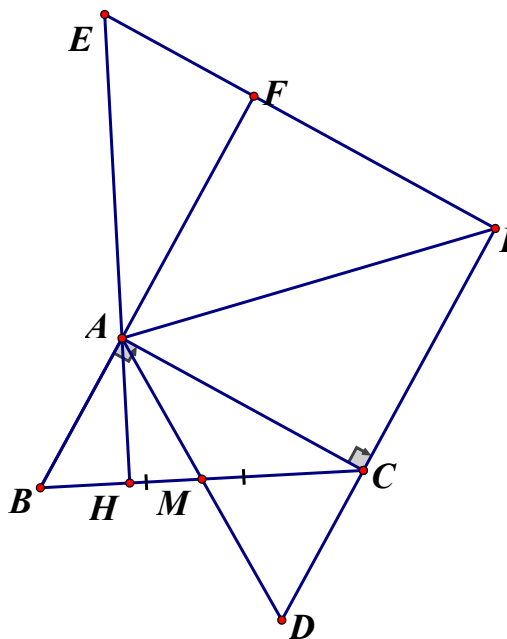
Do đó $\triangle ABD = \triangle AEC$ (c.g.c)

Suy ra $BD = CE$ (hai cạnh tương ứng)

Câu 37. (HSG 7 huyện 2016 - 2017)

Cho tam giác vuông ABC ($\angle A = 90^\circ$), đường cao AH , trung tuyến AM . Trên tia đối tia MA lấy điểm D sao cho $DM = MA$. Trên tia đối tia CD lấy điểm I sao cho $CI = CA$, qua I vẽ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng AH tại E . Chứng minh $AE = BC$.

Lời giải



Đường thẳng AB cắt EI tại F

$\triangle ABM = \triangle DCM$ vì $AM = DM$ (gt); $MB = MC$ (gt), $\angle AMB = \angle DMC$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \angle BAM = \angle CDM \Rightarrow FB \parallel ID \Rightarrow ID \perp AC$ và $\angle FAI = \angle CIA$ (so le trong) (1)

$IE \parallel AC$ (gt) $\Rightarrow \angle FIA = \angle CAI$ (so le trong) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle CAI = \triangle FIA$ (AI chung) $\Rightarrow IC = AC = AF$ (3)

Và $\angle EFA = 90^\circ$ (4),

mặt khác $\angle EAF = \angle BAH$ (đối đỉnh), $\angle BAH = \angle ACB$ (cùng phụ với $\angle ABC$)

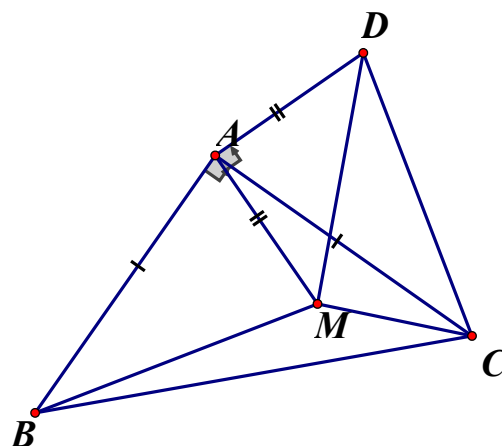
$\Rightarrow \angle EAF = \angle ACB$ (5)

Từ (3), (4) và (5) $\Rightarrow \triangle AFE = \triangle CAB \Rightarrow AE = BC$

Câu 38. (HSG 7 huyện Tam Dương, tỉnh Vĩnh Phúc 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Điểm M nằm bên trong tam giác sao cho $MA = 2\text{cm}$, $MB = 3\text{cm}$, $\angle AMC = 135^\circ$. Tính MC .

Lời giải



Dựng tam giác ADM vuông cân tại A , (D, B khác phía đối với AM)

+ Xét $\triangle ABM$ và $\triangle ACD$ có:

$AD = AM$ ($\triangle AMD$ vuông cân tại A)

$\angle MAB = \angle CAD$ (cùng phụ với $\angle CAM$)

$AB = AC$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ABM = \triangle ACD$ (c.g.c)

$\Rightarrow CD = BM = 3cm$ (hai cạnh tương ứng)

+ $\triangle ADM$ vuông cân tại A

nên $MD^2 = AD^2 + AM^2 = 8$ và $\angle AMD = 45^\circ$

mà $\angle AMC = 135^\circ$ nên $\angle CMD = 90^\circ \Rightarrow \triangle CMD$ vuông tại M

$\Rightarrow MC^2 = CD^2 - MD^2 = 9 - 8 = 1 \Rightarrow CD = 1$

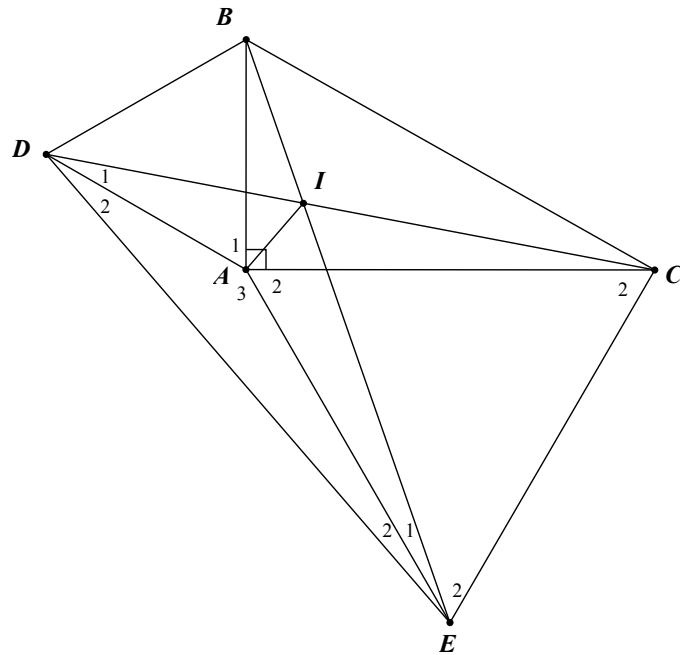
Câu 39. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2017- 2018)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao điểm của BE và CD . Chứng minh rằng

a) $BE = CD$.

b) $\triangle BDE$ là tam giác cân.

Lời giải



$$\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{A_1} + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \\ \widehat{BAE} = \widehat{A_2} + 90^\circ = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BAE} \end{cases}$$

a) Ta có:

Xét $\triangle DAC$ và $\triangle BAE$ có

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{BAE} \text{ (cmt)}$$

$$AC = AE \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle DAC = \triangle BAE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow BE = CD \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

b) Ta có :

$$\widehat{A_3} + \widehat{A_1} + \widehat{BAC} + \widehat{A_2} = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{A_3} + 60^\circ + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{A_3} = 150^\circ = \widehat{BAC}$$

Xét $\triangle DAE$ và $\triangle BAE$ có

$$DA = BA \text{ (gt)}$$

$$\widehat{A_3} = \widehat{BAC} \text{ (cmt)}$$

$$AE \text{ chung}$$

$$\Rightarrow \triangle DAE = \triangle BAE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow DE = BE$$

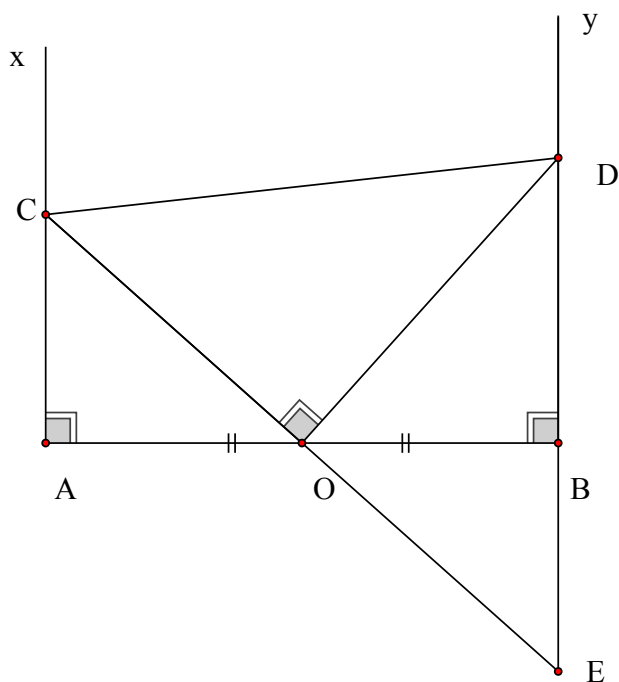
Vậy $\triangle BDE$ cân tại E .

Câu 40. (HSG 7 trường THCS Phan Đình Phùng 2017 - 2018; huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia Ax, By lần lượt vuông góc với AB tại A và B . Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Trên tia Ax lấy điểm C và trên tia Bx lấy điểm D sao cho góc $\angle COD = 90^\circ$. Chứng minh rằng $AC + BD = CD$.

Lời giải



Gọi E là giao điểm của CO và BD

Xét $\triangle AOC$ và $\triangle BOE$ có:

$$\angle OAC = \angle OBE = 90^\circ; OA = OB (gt); \angle AOC = \angle BOE \text{ (đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \triangle AOC = \triangle BOE \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} AC = BE \\ CO = EO \end{cases}$$

Xét $\triangle DOC$ và $\triangle DOE$ có:

$$OC = OE (cmt), \angle COD = \angle DOE = 90^\circ, OD \text{ là cạnh chung}$$

$$\Rightarrow \triangle DOC = \triangle DOE \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow CD = ED$$

$$\text{Mà } ED = EB + BD = AC + BD$$

$$\Rightarrow CD = AC + BD$$

$$\text{Vậy } CD = AC + BD.$$

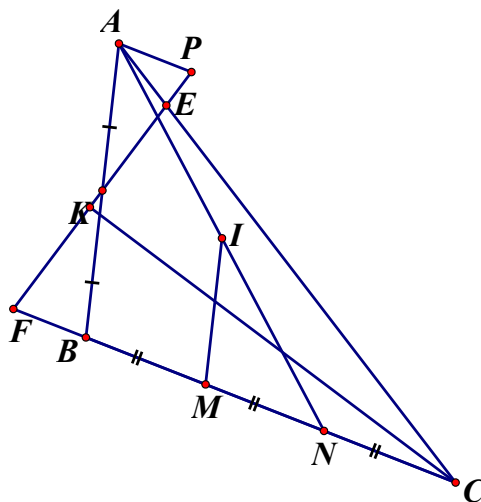
Câu 41. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2015 - 2016)

Cho tam giác ABC ($CA < CB$), trên BC lấy các điểm M và N sao cho $BM = MN = NC$. Qua điểm M kẻ đường thẳng song song với AB cắt AN tại I .

a) Chứng minh I là trung điểm của AN .

b) Qua K là trung điểm của AB kẻ đường thẳng vuông góc với đường phân giác góc $\angle ACB$ cắt đường thẳng AC tại E , đường thẳng BC tại F . Chứng minh $AE = BF$.

Lời giải



a) Từ I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại H . Nối MH
Ta có: $\triangle BHM = \triangle IMH$ vì: $\angle BHM = \angle IMH$; $\angle BMH = \angle IHM$; HM chung
 $\Rightarrow BM = IH = MN$

$\triangle AHI = \triangle IMN$ vì: $IH = MN$ (cmt); $\angle AHI = \angle IMN (= \angle ABC)$; $\angle AIH = \angle INM$ (đồng vị)
 $\Rightarrow AI = IN$ (đpcm)

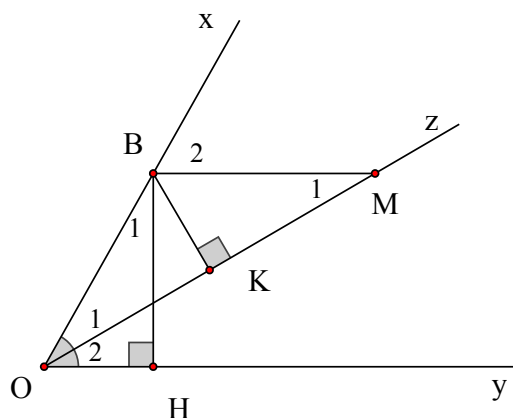
b) Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt EF tại P . $\triangle PKA = \triangle FKB$ vì:
 $\angle PKA = \angle FKB$ (đối đỉnh); $\angle APK = \angle BFK$ (so le trong); $AK = KB \Rightarrow AP = BF$ (1)
 $\angle EPA = \angle KFC$ (đồng vị); $\angle EEF = \angle KFC$ ($\triangle CFE$ cân)
 $\Rightarrow \angle EPA = \angle EEF \Rightarrow \triangle APE$ cân $\Rightarrow AP = AK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AE = BF$ (đpcm)

Câu 42. (HSG 7 huyện Tam Dương 2016 - 2017)

Cho $\angle Oy$ bằng 60° . Tia Oz là phân giác của $\angle Oy$. Từ điểm B bất kỳ trên tia Ox kẻ BH, BK lần lượt vuông góc với Oy, Oz tại H và K . Qua B kẻ đường song song với Oy cắt Oz tại M . Chứng minh rằng: $BH = MK$.

Bài giải



Ta có: $\angle O_1 = \angle O_2 = \frac{\angle xOy}{2} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$ (Vì Oz là phân giác của $\angle xOy$)

$\angle O_2 = \angle M_1$ (hai góc so le trong do $BM \parallel Oy$)

$$\Rightarrow \angle O_1 = \angle M_1 = 30^\circ$$

Xét $\triangle BOM$ có $\angle O_1 = \angle M_1 = 30^\circ$

$\Rightarrow \triangle BOM$ cân tại B

BK là đường cao của tam giác cân BMO nên K là trung điểm của OM

$$\Rightarrow KM = KO \quad (1)$$

Xét $\triangle OBH$ vuông tại H có $\angle BOH = \angle xOy = 60^\circ$

$$\Rightarrow \angle B_1 = 90^\circ - \angle BOH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

Xét $\triangle BKO$ và $\triangle OHB$ có:

$$\angle BKO = \angle BHO (=90^\circ)$$

OB là cạnh chung

$$\angle B_1 = \angle O_1 (=30^\circ)$$

$$\Rightarrow \triangle BKO = \triangle OHB \text{ (ch - gn)}$$

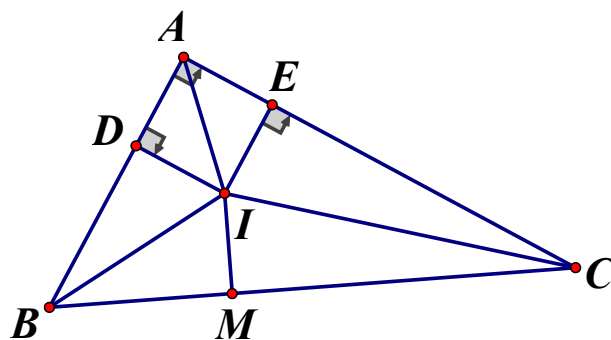
$$\Rightarrow BH = OK \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BH = MK$ (đpcm).

Câu 43. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2016 - 2017)

Cho tam giác ABC vuông tại A , có $AB = 3\text{ cm}$; $AC = 4\text{ cm}$. Điểm I nằm trong tam giác và cách đều ba cạnh của tam giác ABC . Gọi M là chân đường vuông góc kẻ từ I đến BC . Tính MB .

Lời giải



Vì I nằm trong tam giác ABC cách đều ba cạnh nên I là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC .

Tam giác ABC vuông tại A nên tính $BC = 5\text{ cm}$

Xét $\triangle CEI$ và $\triangle CMI$ có:

$$\angle CEI = \angle CMI = 90^\circ$$

CI cạnh chung

$$\angle ECI = \angle MCI \quad (CI \text{ là phân giác của } \angle ACB)$$

$$\Rightarrow \triangle CEI = \triangle CMI \quad (\text{cạnh huyền – góc nhọn})$$

$$\Rightarrow CM = CE \quad (\text{hai cạnh tương ứng})$$

Chứng minh tương tự ta có: $AE = AD$; $BD = BM$

$$MB = \frac{BC + AB - AC}{2} = 2$$

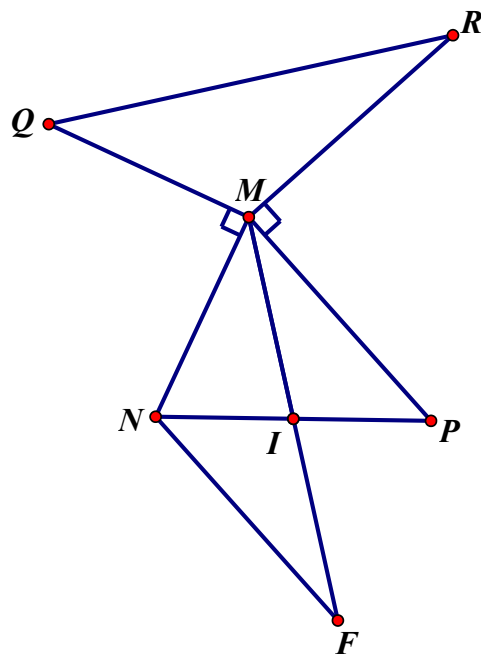
Suy ra

Câu 44. (HSG 7 Bình Lục 2022 - 2023)

Cho tam giác MNP có $\angle NMP < 90^\circ$. Vẽ ra phía ngoài tam giác MNP hai đoạn thẳng MQ vuông góc và bằng MN , MR vuông góc và bằng MP . Gọi I là trung điểm của NP . Chứng

minh $MI = \frac{1}{2}QR$.

Lời giải



Trên tia đối của tia IM , lấy điểm F sao cho $IF = IM$

Dễ dàng chứng minh được $\triangle PIM = \triangle NIF$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \angle IMP = \angle IFN \Rightarrow \begin{cases} MP \parallel NF \\ MP = NF \end{cases}$$

$$\Rightarrow \angle MNF + \angle NMP = 180^\circ \quad (1)$$

$$\text{Và } \angle QMR + \angle NMP = 180^\circ \quad (\text{vì } \angle QMN + \angle RMP = 180^\circ \text{ (gt)}) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } \Rightarrow \angle MNF = \angle QMR$$

Chứng minh được $\triangle MNF = \triangle QMR$ (c.g.c)

$$\Rightarrow MF = QR = 2MI$$

$$\Rightarrow MI = \frac{1}{2}QR$$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>