

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

(ghi lại nội dung chính của bài/ của chương: dạng liệt kê, bảng hoặc sơ đồ tư duy)

B. BÀI TẬP**CHUYÊN ĐỀ:****DẠNG 4: RÚT GỌN VÀ TÌM CÁC GIÁ TRỊ CỦA BIẾN (NGUYÊN HOẶC THỰC) ĐỂ BIỂU THỨC CÓ GIÁ TRỊ NGUYÊN****PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM****1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN (soạn khoảng 12 câu theo các mức độ****NB: 4 câu; TH: 4 câu; VD: 3 câu; VDC: 1 câu)****Câu 1. [NB]:** Tìm giá trị x nguyên để biểu thức $A = \frac{1}{x+2}$ nhận giá trị nguyên

- A.** $x \in \{-3; 1\}$ **B.** $x \in \{3; -1\}$ **C.** $x \in \{3; 1\}$ **D.** $x \in \{-3; -1\}$

Lời giải

Chọn DĐK: $x \neq -2$ Để A nhận giá trị nguyên khi $x \in \mathbf{Z}$ thì $\frac{1}{x+2}$ hay $x+2 \in \{-1; 1\}$.

Ta có bảng

$x+2$	-1	1
x	-3(TM)	-1(TM)

Vậy với $x \in \{-3; -1\}$ thì P đạt giá trị nguyên**Câu 2. [NB]** Tìm giá trị x nguyên để biểu thức $P = \frac{4}{\sqrt{x}+3}$ nhận giá trị nguyên

- A.** -1 **B.** 1 **C.** $\frac{1}{2}$ **D.** $-\frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn B $P = \frac{4}{\sqrt{x}+3}$ nguyên khi $\sqrt{x}+3$ là ước của 4 vì $\sqrt{x}+3 \geq 3$ Nên $\sqrt{x}+3=4$ hay $\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$ Vậy với $x=1$ thì P đạt giá trị nguyên**Câu 3. [NB]** Tìm giá trị x nguyên để biểu thức $A = \frac{4}{25-x}$ nhận giá trị nguyên lớn nhất

- A.** $x=23$ **B.** $x=24$ **C.** $x=21$ **D.** $x=26$

Lời giải

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10**Chọn B**

Để P nhận giá trị nguyên khi $x \in \mathbf{Z}$ thì $4 \mid (25 - x)$ hay $25 - x \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$.

Khi đó, ta có bảng giá trị sau:

$25 - x$	- 4	- 2	- 1	1	2	4
x	29	27	26	24	23	21
$P = A.B$	- 1	- 2	- 4	4	2	1
Đánh giá	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Do P đạt giá trị nguyên lớn nhất nên ta có $P = 4$. Khi đó giá trị cần tìm của x là $x = 24$.

Câu 4. [NB] Tìm giá trị x nguyên để biểu thức $P = \frac{2}{x-1}$ nhận giá trị nguyên

- A. $x \in \{-1; 0; 2; 3\}$ B. $x \in \{1; 0; 2; 3\}$ C. $x \in \{1; 2; 3\}$ D. $x \in \{-1; 2; 3\}$

Lời giải

Chọn A

$P = \frac{2}{x-1}$ nguyên khi $x-1$ là ước của 2,

$x-1$	- 1	1	- 2	2
x	0	2	- 1	3

Vậy với $x \in \{-1; 0; 2; 3\}$ thì P đạt giá trị nguyên

Câu 5. [TH] Tìm giá trị x nguyên để biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ có giá trị nguyên.

- A. $x \in \{1; 16\}$ B. $x \in \{15; 25\}$ C. $x \in \{1; 16; 25; 49\}$ D. $x \in \{1; 25\}$

Lời giải

Chọn C

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}$$

Do $P \in \mathbf{Z}$ nên $\sqrt{x}-3$ là ước của 4 $\Rightarrow \sqrt{x}-3$ nhận các giá trị: $-4; -2; -1; 1; 2; 4$
 $\Rightarrow x \in \{1; 4; 16; 25; 49\}$ do $x \neq 4 \Rightarrow x \in \{1; 16; 25; 49\}$

Câu 6. [TH] Tìm các giá trị nguyên của a để $T = \frac{2(a-1)}{a+1}$ nhận giá trị nguyên

- A. - 1 B. 4 C. 3 D. $-\frac{1}{2}$

Chọn C

Ta có $T = \frac{2(a-1)}{a+1} = 2 - \frac{4}{a+1}$. Do đó $T \in \mathbb{Z}$, khi $a+1$ là ước của 4

Vì $a > 0, a \neq 1$ nên ta có $a+1=4 \Rightarrow a=3$.

Vậy $a=3$ là giá trị cần tìm.

Câu 7. [TH] Tìm giá trị x nguyên để $P = \frac{x-7}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0, x \neq 4$ nhận giá trị nguyên

A. $x \in \{1; -7\}$. **B.** $x \in \{1; 7\}$. **C.** $x \in \{-1; 7\}$. **D.** $x \in \{-1; -7\}$.

Lời giải**Chọn B**

$$P = \frac{x-7}{\sqrt{x}+2} = \sqrt{x} - 2 - \frac{3}{\sqrt{x}+2}$$

$$+) \quad P=0 \Leftrightarrow \frac{x-7}{\sqrt{x}+2} = 0 \Leftrightarrow x=7 \text{ (tmdk)}$$

$$+) \quad P \neq 0$$

$$\text{Trường hợp 1: } x \in \mathbb{Z}, x \neq 7, \sqrt{x} \in \mathbb{I}. \Rightarrow P = \frac{x-7}{\sqrt{x}+2} \in \mathbb{I} \quad (\text{Loại}).$$

$$\text{Trường hợp 2: } x \in \mathbb{Z}, \sqrt{x} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{x} - 2 - \frac{3}{\sqrt{x}+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 \in U(3) \Leftrightarrow x=1 \text{ (TMĐK)}.$$

Kết luận: $x \in \{1; 7\}$.

Câu 8. [TH] Tìm giá trị x nguyên để $P = 2 \cdot \frac{a-2}{a+2}$ với $a \neq -2$ nhận giá trị nguyên

A. $a \in \{-6; -4; -3; -1; 2\}$ **B.** $a \in \{-6; -4; -3; -1; 0\}$

C. $a \in \{-10; -6; -4; -3; -1; 0; 2; 6\}$ **D.** $a \in \{-4; -3; -1; 0; 2\}$

Lời giải**Chọn C**

$$P = 2 \cdot \frac{a-2}{a+2} \text{ với } a \neq -2$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

P nguyên thì $\frac{2a-4}{a+2}$ nguyên.

Đề

$$\frac{2a-4}{a+2} = \frac{2a+4-8}{a+2} = 2 - \frac{8}{a+2}$$

Ta có

Do đó, để P nguyên thì $a+2$ là ước của 8, tức là $a+2 \in \{-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\}$.

Suy ra $a \in \{-10; -6; -4; -3; -1; 0; 2; 6\}$

Câu 9. [VD] Tìm giá trị x để biểu thức $P = \frac{3}{x+\sqrt{x+1}}$ có giá trị nguyên.

A. $x = \left\{ \frac{2-\sqrt{3}}{2}; 1 \right\}$ **B.** $x = \left\{ \frac{\sqrt{3}-2}{2}; 1 \right\}$ **C.** $x = \left\{ \frac{-2-\sqrt{3}}{2} \right\}$ **D.** $x = \left\{ \frac{2+\sqrt{3}}{2} \right\}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $3 > 0$ và $x + \sqrt{x+1} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ với mọi x thuộc điều kiện xác định.

$$\Rightarrow \frac{3}{x+\sqrt{x+1}} > 0 \Rightarrow P > 0$$

$$x > 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} + 1 > 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x+\sqrt{x+1}} < 3 \Rightarrow P < 3 \quad (2)$$

Lại có:

Từ (1) và (2) ta có $0 < P < 3$ mà $P \in \mathbb{Z} \Rightarrow P \in \{1; 2\}$

a)

$$\text{TH1: } P=1 \Rightarrow \frac{3}{x+\sqrt{x+1}}=1 \Leftrightarrow x+\sqrt{x+1}=3 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-2=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ (TMĐK)}$$

$$\text{TH2: } P=2 \Rightarrow \frac{3}{x+\sqrt{x+1}}=2 \Leftrightarrow 2x+2\sqrt{x}+2=3 \Leftrightarrow 2x+2\sqrt{x}-1=0$$

$$\Leftrightarrow 2x+2\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \text{ (TMĐK)}$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{2-\sqrt{3}}{2}; 1 \right\}$ biểu thức P có giá trị nguyên.

Câu 10. [VD] Tìm x nguyên dương để biểu thức $P = \frac{3}{\sqrt{x+2}}$, $x \geq 0, x \neq 4$ có giá trị nguyên.

A. $x \in \{0\}$ **B.** $x \in \emptyset$ **C.** $x \in \{0; -4\}$ **D.** $x \in \{4; -4\}$

Lời giải

Chọn A

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$P = \frac{3}{\sqrt{x}+1} \text{ . (Điều kiện : } x \geq 0, x \neq 4 \text{) .}$$

Để $P \in \mathbb{Z}$ thì $(\sqrt{x}+1)$ là ước của 3 .

Do $\sqrt{x}+1 > 0$ với x thỏa mãn điều kiện nên

$$+) \sqrt{x}+1 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ (tm) .}$$

$$+) \sqrt{x}+1 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \text{ (ktm) .}$$

Vậy $x \in \{0\}$

Câu 11. [VD] Tìm số nguyên x lớn nhất để biểu thức $P = \frac{x-3}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0; x \neq 4$ nhận giá trị nguyên.

A. $x \in \emptyset$

B. $x = 9$

C. $x \in [0; -9]$

D. $x \in [9; -9]$

Lời giải

Chọn B

$$P = \frac{x-3}{\sqrt{x}+3} \quad (x \geq 0; x \neq 4)$$

$$* \text{ TH1: } x-3=0 \Rightarrow x=3 \text{ (tmđk)} \Rightarrow M=0 \in \mathbb{Z}$$

Vậy $x=3$ thì P nguyên (1)

$$* \text{ TH2: } x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$$

$$P = \frac{x-3}{\sqrt{x}+3} = \sqrt{x}-3 + \frac{6}{\sqrt{x}+3}$$

$$P \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}-3 + \frac{6}{\sqrt{x}+3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}+3 \in \{\pm 1; \pm 6; \pm 2; \pm 3\}$$

Mà: $x \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \geq 0$ Type equation here .

$$\Rightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+3 \in [3; 6]$$

$$\Rightarrow x \in [0; 9] \text{ (tmđk) (2)}$$

+ Từ (1) và (2): $x \in [0; 3; 9]$ thì P nguyên

Vì x là số nguyên lớn nhất nên $x=9$

Câu 12. [VDC] Cho $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{\sqrt{x}+2} + \frac{4\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}-2}$ và $B = 1 - \frac{2}{1-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Với $P=A:B$. Tìm x để $4-\frac{3}{2}P$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.

A. $x=\frac{5}{2}$

B. $x=0$

C. $x=4$

D. $x=2$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $B=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$ $A=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}$

;

$P=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

Đặt $M=4-\frac{3}{2}P=4-\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} = \frac{8\sqrt{x}+8-3\sqrt{x}-6}{2(\sqrt{x}+2)} = \frac{5\sqrt{x}+2}{2(\sqrt{x}+2)}$

Theo ĐKXD: $x \geq 0$ nên $5\sqrt{x}+2 > 0$ và $2(\sqrt{x}+2) > 0$. Suy ra: $M > 0$

Ta có: $M=\frac{5\sqrt{x}+2}{2(\sqrt{x}+2)} \Rightarrow 2M=\frac{5(2\sqrt{x}+4)-16}{2(\sqrt{x}+2)} = 5-\frac{16}{2(\sqrt{x}+2)} < 5 \Rightarrow M < \frac{5}{2}$

Vậy: $0 < M < \frac{5}{2}$ nên M đạt giá trị nguyên lớn nhất là 2.

$M=2 \Rightarrow 4-\frac{3}{2}P=2 \Leftrightarrow P=\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}=\frac{4}{3} \Rightarrow 3\sqrt{x}+6=4\sqrt{x}+4 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$ (t/m đkxd)

Kết luận: Để thỏa mãn đề bài thì $x=4$

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (Soạn khoảng 4 câu): Các khẳng định đúng sai được sắp xếp theo thứ tự từ dễ đến khó, các khẳng định về cùng một nội dung hỏi.

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Cho $A=\frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}$. Các câu sau Đúng hay Sai?

a) A nhận giá trị nguyên khi $x=4$

b) A nhận giá trị nguyên khi $x=1$

a) A nhận giá trị nguyên khi $x=9$

a) A nhận giá trị nguyên khi $x=16$

Lời giải

a) S

b) Đ

c) Đ

d) S

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

a) Thay $x=4$ ta có $A = \frac{2(\sqrt{4}-1)}{\sqrt{4}+1} = \frac{2}{3}$ (Sai)

a) Thay $x=1$ ta có $A = \frac{2(\sqrt{1}-1)}{\sqrt{1}+1} = 0$ (Đúng)

a) Thay $x=9$ ta có $A = \frac{2(\sqrt{9}-1)}{\sqrt{9}+1} = 1$ (Đúng)

a) Thay $x=16$ ta có $A = \frac{2(\sqrt{16}-1)}{\sqrt{16}+1} = \frac{6}{5}$ (Sai)

Câu 2. Cho $A = \frac{10}{\sqrt{x}+3}$. Các câu sau Đúng hay Sai?

- a) Với $x \in \mathbb{Z}$, biểu thức A nhận giá trị nguyên khi $x \in \{4; 49\}$
b) Với số hữu tỉ x, biểu thức A nhận giá trị nguyên khi $x \in \left\{\frac{1}{9}; 4; 49\right\}$
c) Với $x \in \mathbb{Z}$, biểu thức A nhận giá trị nguyên lớn nhất khi $x \in \{49\}$
d) Với $x \in \mathbb{Z}$, biểu thức A nhận giá trị nguyên nhỏ nhất khi $x \in \{4\}$

Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) S

d) S

Với $x \in \mathbb{Z}$, biểu thức A nhận giá trị nguyên khi $\frac{10}{\sqrt{x}+3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}+3 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\}$

a)

$$x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3 \Rightarrow \sqrt{x}+3 \in \{5; 10\} \Rightarrow \sqrt{x} \in \{2; 7\} \Rightarrow x \in \{4; 49\}$$

Vì

Điều kiện : $x \geq 0$

b)

Vì $10 > 0, \sqrt{x}+3 > 0$ nên $A > 0$

$$\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3 \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{10}{3} \Rightarrow A \leq \frac{10}{3}$$

Mặt khác,

Do đó $0 < A \leq \frac{10}{3}$ nên $A \in \mathbb{Z}$ khi

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$\begin{cases} A=1 \\ A=2 \\ A=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{\sqrt{x}+3}=1 \\ \frac{10}{\sqrt{x}+3}=2 \\ \frac{10}{\sqrt{x}+3}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10=\sqrt{x}+3 \\ 10=2\sqrt{x}+6 \\ 10=3\sqrt{x}+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=7 \\ \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=49 \\ x=4 \\ x=\frac{1}{9} \end{cases}$$

(thỏa mãn điều kiện)

$x \in \left\{49; 4; \frac{1}{9}\right\}$ là giá trị cần tìm.

Vậy

c) Với $x \in \mathbb{Z}$, biểu thức A nhận giá trị nguyên lớn nhất khi $x \in \{9; 49\}$

Ta có

x	4	49
A	2	1

Vậy giá trị nguyên lớn nhất của $A=2$ khi $x=4$

d) Với $x \in \mathbb{Z}$, biểu thức A nhận giá trị nguyên nhỏ nhất là 4 khi $x=49$

Câu 3. Cho $A = \frac{a-4}{a+2\sqrt{a}}$ và $B = \frac{a+7\sqrt{a}}{a-4}$ ($a > 0, a \neq 4$), Cho $P = A \cdot B$

a) Với $a=1$, biểu thức P nhận giá trị nguyên.

b) Với $a \in \left\{\frac{1}{4}; 9\right\}$, biểu thức P nhận giá trị nguyên.

c) Với $a=9$, biểu thức P nhận giá trị nguyên nhỏ hơn 3.

d) Với $a \in \left\{\frac{1}{9}; 4\right\}$, biểu thức P nhận giá trị nguyên lớn hơn 1.

Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) S

d) S

Với $a > 0, a \neq 4$, $P = \frac{\sqrt{a}+7}{\sqrt{a}+2} = 1 + \frac{5}{\sqrt{a}+2}$

Chỉ ra $1 < P < \frac{7}{2}$

Do đó để P nguyên thì $P=2$ hoặc $P=3$.

Tìm được $a \in \left\{9; \frac{1}{9}\right\}$ thì P nguyên.

Câu 4. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{4}{\sqrt{x}+3} + \frac{2x-\sqrt{x}-13}{x-9} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$ với $x^3 \neq 0, x \neq 9$.

c) Tìm giá trị của x nguyên nhỏ nhất để P có giá trị nguyên.

a) Khi $x=4$ thì $A=7$

b) Rút gọn biểu thức $P = \frac{B}{A}$ ta được $P = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$.

c) Khi $x=4$, biểu thức P nhận giá trị nguyên.

d) $x=1$ là giá trị nguyên nhỏ nhất của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) S

b) Đ

c) S

d) Đ

a) Thay $x=4$ (Thỏa mãn ĐKXĐ) vào A , ta có:

$$A = \frac{\sqrt{4}+5}{\sqrt{4}-3} = \frac{2+5}{2-3} = -7$$

Vậy với $x=4$ thì $A=-7$.

b) ĐKXĐ: $x^3 \neq 0, x \neq 9$.

$$\begin{aligned} P &= \frac{B}{A} = \frac{\frac{4}{\sqrt{x}+3} + \frac{2x-\sqrt{x}-13}{x-9} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}}{\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-3}} \\ &= \frac{4(\sqrt{x}-3) + 2x-\sqrt{x}-13 - \sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+5} \\ &= \frac{x-25-\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+5} = \frac{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+5} \\ &= \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3}$ với $x^3 \neq 0, x \neq 9$.

$$P = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+3} = 1 - \frac{8}{\sqrt{x}+3}$$

Vì $x \in \mathbb{P}$ Để $P \in \mathbb{P}$ thì $\sqrt{x}+3 \in U_{(8)} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$.

Ta có bảng sau :

$\sqrt{x}+3$	-1	1	-2	2	-4	4	-8	8
$\sqrt{x}$	-2 (L)	-4 (L)	-1 (L)	-5 (L)	1	-7 (L)	5	-11 (L)
x					1		25	

Vì $x \in \mathbb{P}$, x nhỏ nhất $\mathbb{P}$ $x=1$.

Vậy $P \in \mathbb{P}$ $x=1$

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN (soạn khoảng 6 câu)

Câu 1. [NB] Cho biểu thức $A = \frac{3}{2\sqrt{x}+1}$. Tìm x nguyên để A nguyên.
Lời giải

Đáp án: $x \in \{0; 1\}$

Điều kiện xác định $x \geq 0$

Cách 1: $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{x}+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2\sqrt{x}+1$ thuộc các ước dương của 3 (vì $2\sqrt{x}+1 > 0$ với $x \geq 0$)
 $\Rightarrow 2\sqrt{x}+1 \in \{1; 3\} \Rightarrow x \in \{0; 1\}$ (thỏa mãn)

Cách 2: Ta có $A = \frac{3}{2\sqrt{x}+1} > 0$ với mọi $x \geq 0$

Với $x \geq 0 \Rightarrow 2\sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow A = \frac{3}{2\sqrt{x}+1} \leq 3$

Khi đó $0 \leq A < 3$, mà $A \in \mathbb{Z} \Rightarrow A \in \{1; 2; 3\}$

+ Xét $A=1 \Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{x}+1} = 1 \Rightarrow 2\sqrt{x}+1 = 3 \Rightarrow x=1 \in \mathbb{Z}$ (thỏa mãn)

+ Xét $A=2 \Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{x}+1} = 2 \Rightarrow 2\sqrt{x}+1 = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$ (loại)

+ Xét $A=3 \Rightarrow \frac{3}{2\sqrt{x}+1} = 3 \Rightarrow 2\sqrt{x}+1 = 1 \Rightarrow x=0 \notin \mathbb{Z}$ (thỏa mãn)

Vậy với $x \in \{0; 1\}$ thì A nguyên.

Câu 2. [NB] Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để biểu thức $M = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$ ($x \geq 0; x \neq 9$) nhận giá trị nguyên
Lời giải

Đáp án: $x \in \{0; 1; 4; 16; 25; 36; 81\}$

$$M = \frac{\sqrt{x}-3+6}{\sqrt{x}-3} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} + \frac{6}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{6}{\sqrt{x}-3}$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $M \in \mathbb{Z}$ khi $\frac{6}{\sqrt{x}-3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}-3 \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$
 $\Rightarrow x \in \{0; 1; 4; 16; 25; 36; 81\}$ (thỏa mãn điều kiện)

$$A = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{25-x}; B = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Câu 3. [TH] Cho Tìm tất cả giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ đạt giá giá trị nguyên lớn nhất

Lời giải

Đáp án: $x = 24$

Ta có
$$P = A.B = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{25-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{4}{25-x}$$

Để P nhận giá trị nguyên khi $x \in \mathbf{Z}$ thì $4 \mid (25-x)$ hay $25-x \in U_{(4)} = \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$.

Khi đó, ta có bảng giá trị sau:

$25-x$	-4	-2	-1	1	2	4
x	29	27	26	24	23	21
$P = A.B$	-1	-2	-4	4	2	1
Đánh giá	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Do P đạt giá trị nguyên lớn nhất nên ta có $P = 4$. Khi đó giá trị cần tìm của x là $x = 24$.

Câu 4. [TH] Tìm $x \in \mathbf{R}$ để các biểu thức $A = \frac{10}{\sqrt{x}+3}$ nhận giá trị là số nguyên :

Lời giải

Đáp án: $x \in \left\{49; 4; \frac{1}{9}\right\}$

Điều kiện : $x \geq 0$

a) Vì $10 > 0, \sqrt{x}+3 > 0$ nên $A > 0$

$$\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+3 \geq 3 \Rightarrow \frac{10}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{10}{3} \Rightarrow A \leq \frac{10}{3}$$

Mặt khác,

Do đó $0 < A \leq \frac{10}{3}$ nên $A \in \mathbf{Z}$ khi

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$\begin{cases} A=1 \\ A=2 \\ A=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{\sqrt{x}+3}=1 \\ \frac{10}{\sqrt{x}+3}=2 \\ \frac{10}{\sqrt{x}+3}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10=\sqrt{x}+3 \\ 10=2\sqrt{x}+6 \\ 10=3\sqrt{x}+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=7 \\ \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=49 \\ x=4 \\ x=\frac{1}{9} \end{cases}$$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy $x \in \left\{49; 4; \frac{1}{9}\right\}$ là giá trị cần tìm.

Câu 5. [VD] Tìm x để biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+1}$ sau có giá trị là số nguyên.

Lời giải

Đáp án: $x \in \left\{0; \frac{1}{4}; 4\right\}$

Điều kiện: $x \geq 0$

Có $A = \frac{2\sqrt{x}+2+3}{\sqrt{x}+1} = \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} = 2 + \frac{3}{\sqrt{x}+1}$

$$B = \frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

Đặt

Vì $2 \in \mathbb{Z}$ nên $A \in \mathbb{Z}$ khi $B = \frac{3}{\sqrt{x}+1} \in \mathbb{Z}$

Vì $3 > 0, \sqrt{x}+1 > 0$ nên $B > 0$

$$\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow B \leq 3$$

Mặt khác

Do đó: $0 < B \leq 3 \Rightarrow B \in \mathbb{Z}$ khi

$$\begin{cases} B=1 \\ B=2 \\ B=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{\sqrt{x}+1}=1 \\ \frac{3}{\sqrt{x}+1}=2 \\ \frac{3}{\sqrt{x}+1}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=\sqrt{x}+1 \\ 3=2\sqrt{x}+2 \\ 3=3\sqrt{x}+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=\frac{1}{2} \\ \sqrt{x}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\frac{1}{4} \\ x=0 \end{cases}$$

(TMĐK)

Vậy $x \in \left\{0; \frac{1}{4}; 4\right\}$ là các giá trị cần tìm

PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải:

Dạng 1: Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $P = a + \frac{b}{c\sqrt{x}+d} \in \mathbb{Z} (a, b, c, d \in \mathbb{Z})$

Bước 1 Đặt điều kiện, khử x ở trên tử, đưa P về dạng như trên.

Bước 2 $P \in \mathbb{Z}$ khi $\Rightarrow \frac{b}{c\sqrt{x}+d} \in \mathbb{Z} \Rightarrow c\sqrt{x}+d \in U(b)$

Dạng 2: Tìm $x \in \mathbb{R}$ để $P = \frac{a}{b\sqrt{x}+c} \in \mathbb{Z} (a, b, c \in \mathbb{N}^*)$

Bước 1 Đặt điều kiện và chặn hai đầu của P :

- $a > 0, b\sqrt{x}+c > 0 \Rightarrow P > 0.$
- $b\sqrt{x}+c \geq c \Rightarrow \frac{a}{b\sqrt{x}+c} \leq \frac{a}{c} \Rightarrow P \leq \frac{a}{c}.$

Như vậy ta chặn hai đầu của P là $0 < P \leq \frac{a}{c}.$

Bước 2 Chọn $P \in \mathbb{Z}, 0 < P \leq \frac{a}{c}.$ Từ đó suy ra x .

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1 [NB]:

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x+2\sqrt{x}}{x-2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ (với $x > 0; x \neq 4$)

1. Chứng minh rằng $A = \frac{2}{\sqrt{x}-2}.$
2. Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $A \in \mathbb{Z}$

Lời giải

1) Với $x > 0; x \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}+2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{2(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{2}{\sqrt{x}-2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = \frac{2}{\sqrt{x}-2} \text{ với } x > 0; x \neq 4.$$

2) Với $x \in \mathbb{Z}$, để $A \in \mathbb{Z}$ thì

$$\frac{2}{\sqrt{x}-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 \in \{\pm 1; \pm 2\} \Leftrightarrow x \in \{0; 1; 16\}$$

Ví dụ 2 [TH]: Cho hai biểu thức: $A = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{25-x}$ và $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10
 với $x \geq 0; x \neq 25$.

1. Rút gọn biểu thức B ;
2. Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A \cdot B$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Lời giải

$$1. \quad B = \left(\frac{15 - \sqrt{x}}{x - 25} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5} = \frac{15 - \sqrt{x} + 2(\sqrt{x} - 5)}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x} - 5} \cdot \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$2. \quad P = A \cdot B = \frac{4(\sqrt{x} + 1)}{25 - x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{4}{25 - x}$$

Vì $4 > 0$ nên để P đạt giá trị nguyên lớn nhất khi $25 - x$ đạt giá trị nguyên dương nhỏ nhất. Khi đó:
 $25 - x = 1 \Leftrightarrow x = 24$.

Vậy khi $x = 24$ thì P đạt giá trị nguyên lớn nhất là 4.

Ví dụ 3 [TH]:

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$.

1) Rút gọn P .

2) Tìm tất cả các giá trị thực của x để $Q = \frac{9}{2}P$ có giá trị nguyên.

Lời giải

$$1) \quad P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 2 + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x} + 2}$$

$$2) \quad \text{Ta có: } Q = \frac{9}{2}P = \frac{9}{\sqrt{x} + 2}$$

Vì $x > 0; x \neq 4$ nên $Q > 0$ (1)

$$\text{Mặt khác: } \sqrt{x} + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{9}{\sqrt{x} + 2} \leq \frac{9}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $0 < Q \leq \frac{9}{2}$. Mà Q nhận giá trị nguyên $\Rightarrow Q \in \{1; 2; 3; 4\} \Rightarrow x \in \left\{ 49; \frac{25}{4}; 1; \frac{1}{16} \right\}$

Ví dụ 4 [VD]:

Cho biểu thức $A = \frac{x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} + \frac{1 + 2x - 2\sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}}$ (Với $x > 0, x \neq 1$)

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm x để biểu thức A nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải

$$A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1}.$$

a)

b) Cách 1: Với $x > 0, x \neq 1 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 > \sqrt{x} + 1 > 1$.

$$0 < A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} < \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}+1} < 2.$$

Vậy

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

Vì A nguyên nên $A = 1$ (Không thỏa mãn).

Vậy không có giá trị nguyên nào của x để giá trị A là một số nguyên.

Cách 2: Dùng miền giá trị

$$A = \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} \hat{=} Ax + (A-1)\sqrt{x} + A-2 = 0$$

Trường hợp 1: $A = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = -2 \Rightarrow x \in \emptyset$

Trường hợp 2: $A \neq 0 \Rightarrow \Delta = (A-1)^2 - 4A(A-2) = -3A^2 + 6A + 1 \geq 0 \Leftrightarrow A^2 - 2A - \frac{1}{3} \leq 0$

$$\Leftrightarrow A^2 - 2A + 1 \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow (A-1)^2 \leq \frac{4}{3} \Rightarrow A \in \left[1; 2\right] \text{ do } A \in \mathbb{Z}, A > 0$$

Với $A = 1 \Rightarrow x = 1$ (loại)

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{x+\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow x = 0$$

Với $A = 2$

(loại).

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. [NB] Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{a-9}$ với $a \geq 0; a \neq 9$

a) Rút gọn B.

b) Tìm các số nguyên a để B nhận giá trị nguyên

Hướng dẫn

a) Với $a \geq 0; a \neq 9$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{a-9} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-3} - \frac{3}{\sqrt{a}+3} - \frac{a-2}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} - \frac{3(\sqrt{a}-3)}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} - \frac{a-2}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} \\ &= \frac{a+3\sqrt{a}-3\sqrt{a}+9-a+2}{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)} = \frac{11}{a-9} \end{aligned}$$

$$b) \text{ Để } B \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{11}{a-9} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 11 : (a-9) \Leftrightarrow (a-9) \in U(11)$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$U^{(11)} = \{1; 11; -1; -11\}$. Khi đó ta có bảng giá trị

$a - 9$	- 11	- 1	1	11
a	- 2	8	10	20
	<i>Không thoả mãn</i>	Thoả mãn	Thoả mãn	Thoả mãn

Vậy $a \in \{8; 10; 20\}$ thì $B \in Z$

$$P = \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} - 2}{3 + \sqrt{x}} - \frac{9 - x}{x + \sqrt{x} - 6} \text{ với } x^3 \geq 0; x^1 \leq 4$$

Bài 2. [TH] Cho biểu thức

a) Rút gọn P

b) Tìm x để $P = \frac{7}{12}$

c) Tìm x để $P > \frac{1}{2}$

d) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $\frac{1}{P}$ nhận giá trị nguyên.

e) Tìm tất cả các giá trị hữu tỷ của của x để P nhận giá trị nguyên.

Hướng dẫn

$$\begin{aligned}
 \text{a) Với } x^3 \geq 0; x^1 \leq 4 \text{ thì } P &= \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} - 2}{3 + \sqrt{x}} - \frac{9 - x}{x + 3\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 6} \\
 &= \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} - 2}{3 + \sqrt{x}} - \frac{9 - x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3) - 2(\sqrt{x} + 3)} \\
 &= \frac{\sqrt{x} - 3}{2 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} - 2}{3 + \sqrt{x}} - \frac{9 - x}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3) - 2(\sqrt{x} + 3)} \\
 &= -\frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} - 2}{3 + \sqrt{x}} - \frac{9 - x}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2)} \\
 &= \frac{-(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3) + (\sqrt{x} - 2)^2 - 9 + x}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2)} \\
 &= \frac{9 - x + (\sqrt{x} - 2)^2 - 9 + x}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3}
 \end{aligned}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Vậy với $x^3 \equiv 0; x^1 \equiv 4$ thì $P = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3}$

$$b) P = \frac{7}{12} \hat{=} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3} = \frac{7}{12} \hat{=} 12\sqrt{x} - 24 = 7\sqrt{x} + 21 \hat{=} 5\sqrt{x} = 45$$

$$\hat{=} \sqrt{x} = 9 \hat{=} x = 81 \text{ (thỏa mãn } x^3 \equiv 0; x^1 \equiv 4)$$

Vậy với $x = 81$ thì $P = \frac{7}{12}$

$$c) P > \frac{1}{2} \hat{=} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3} > \frac{1}{2} \hat{=} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3} - \frac{1}{2} > 0 \hat{=} \frac{2\sqrt{x} - 4 - \sqrt{x} - 3}{2(\sqrt{x} + 3)} > 0 \hat{=} \frac{\sqrt{x} - 7}{\sqrt{x} + 3} > 0 \quad (3)$$

Vì $\sqrt{x}^3 \equiv 0$ với mọi $x^3 \equiv 0; x^1 \equiv 4$ nên $\sqrt{x} + 3 > 0$ với mọi $x^3 \equiv 0; x^1 \equiv 4$

$$\text{Nên (3)} \hat{=} \sqrt{x} - 7 > 0 \hat{=} \sqrt{x} > 7 \hat{=} x > 49$$

Kết hợp với điều kiện $x^3 \equiv 0; x^1 \equiv 4$.

Vậy $x > 49$ thì $P > \frac{1}{2}$

$$d) \text{Ta có } \frac{1}{P} = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} - 2 + 5}{\sqrt{x} - 2} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x} - 2}$$

$$\frac{1}{P} \text{ nguyên} \hat{=} \frac{5}{\sqrt{x} - 2} \text{ nguyên} \hat{=} 5 \mid (\sqrt{x} - 2) \hat{=} \sqrt{x} - 2 \text{ là } U(5) = \{\pm 1; \pm 5\}$$

Lập bảng:

$\sqrt{x} - 2$	-1	1	-5	5
$\sqrt{x}$	1	3	-3	7
x	1	9		49
	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Loại	Thỏa mãn

Vậy $x \in \{1; 9; 49\}$ thì $\frac{1}{P}$ nguyên.

$$e) \text{Ta có } P = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3} = \frac{\sqrt{x} + 3 - 2}{\sqrt{x} + 3} = 1 - \frac{2}{\sqrt{x} + 3}$$

Vì $\frac{2}{\sqrt{x} + 3} > 0$ nên $P < 1$ với mọi $x^3 \equiv 0; x^1 \equiv 4$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Mà $\sqrt{x} + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{x} + 3} - \frac{2}{3} \leq 1 - \frac{2}{\sqrt{x} + 3} \Rightarrow 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Do đó $\frac{1}{3} \leq P < 1$. Vậy không có giá trị hữu tỷ nào của x để P nguyên.

Bài 3. [VD] Cho biểu thức $B = \frac{2(x+4)}{x-3\sqrt{x}-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4}$ với $x \geq 0; x \neq 16$

a) Rút gọn B .

b) Tìm giá trị của x để $B = 1$

c) Tính giá trị của x sao cho không vượt quá $\frac{3}{2}$

d) Tìm giá trị của B khi x thỏa mãn đẳng thức $\sqrt{2x-1} = x$

e) Tìm x để giá trị của B là một số nguyên.

Hướng dẫn

a) Với $x \geq 0; x \neq 16$ thì $B = \frac{2(x+4)}{x+3\sqrt{x}-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4}$

$$= \frac{2(x+4)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)-4(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4} = \frac{2(x+4)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4}$$
$$= \frac{2x+8+\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)-8(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1)} = \frac{2x+8+x-4\sqrt{x}-8\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1)} = \frac{3x-12\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1)} =$$
$$\frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+1)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 16$ thì $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

$B = 1 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = \sqrt{x}+1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

b)

(thỏa mãn $x \geq 0; x \neq 16$). Vậy $x = \frac{1}{4}$ thì $B = 1$

$$\frac{3}{2} \leq B \leq \frac{3}{2} \iff \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \leq \frac{3}{2} \iff \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{2} \leq 0 \iff \frac{6\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 3}{2(\sqrt{x}+1)} \leq 0$$

c) B không vượt quá

$$\iff \frac{3\sqrt{x} - 3}{2(\sqrt{x}+1)} \leq 0 \iff \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}+1} \leq 0$$

$$(*)$$

Vì $\sqrt{x} \geq 0$ với mọi $x \geq 0; x \leq 16$ nên $\sqrt{x}+1 > 0$ với mọi $x \geq 0; x \leq 16$

$$\iff \sqrt{x} - 1 \leq 0 \iff \sqrt{x} \leq 1 \iff x \leq 1$$

Suy ra (*)

$$x \geq 0; x \leq 16$$

Kết hợp với điều kiện

$$\text{Vậy } 0 \leq x \leq 1 \text{ thì } B \text{ không vượt quá } \frac{3}{2}$$

d) Ta có $\sqrt{2x-1} = x$ ($x \geq 0; x \leq 16$) $\iff 2x-1 = x^2 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$

$$(\text{thỏa mãn } x \geq 0; x \leq 16) \implies B = \frac{3\sqrt{1}}{\sqrt{1}+1} = \frac{3}{2} \text{ Vậy } \sqrt{2x-1} = x \text{ thì } B = \frac{3}{2}$$

$$e) B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{3\sqrt{x}+3-3}{\sqrt{x}+1} = 3 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} < 3 \quad (\text{vì } \frac{3}{\sqrt{x}+1} > 0 \text{ với } x \geq 0; x \leq 16)$$

$$\text{Vì } \sqrt{x} \geq 0 \text{ với mọi } x \geq 0; x \leq 16 \text{ nên } \sqrt{x}+1 \geq 1 \text{ với mọi } x \geq 0; x \leq 16$$

$$\implies \frac{3}{\sqrt{x}+1} \leq 3 \implies \frac{3}{\sqrt{x}+1} - 3 \leq 0 \implies 3 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} \geq 0$$

$$\text{Suy ra } 0 \leq B < 3 \text{ Mà } B \in \mathbb{Z} \text{ nên } B \in \{0; 1; 2\}$$

$$\text{TH1: } B = 0 \iff \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = 0 \iff x = 0 \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$\text{TH2: } B = 1 \iff \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = 1 \iff 3\sqrt{x} = \sqrt{x}+3 \iff \sqrt{x} = \frac{3}{2} \iff x = \frac{9}{4} \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$\text{TH3: } B = 2 \iff \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} = 2 \iff 3\sqrt{x} = 2\sqrt{x}+6 \iff \sqrt{x} = 6 \iff x = 36 \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{0; \frac{9}{4}; 36\right\} \text{ thì } B \in \mathbb{Z}$$

$$A = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \text{ với } x \geq 0 \text{ và } B = \frac{5-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5} \text{ với } x \geq 0; x \leq 5$$

Bài 4. [VD] Cho biểu thức:

a) Rút gọn biểu thức

b) Tìm x để biểu thức $M = B - A$ nhận giá trị nguyên.

a) Với $x^3 \geq 0; x^1 \geq 5$ thì

$$B = \frac{15 - \sqrt{x}}{x - 25} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} = \frac{15 - \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} = \frac{15 - \sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 10}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} = \frac{5 + \sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

Vậy với $x^3 \geq 0; x^1 \geq 5$ thì $B = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$

$$M = B - A = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = \frac{-1 - \sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1} = -1 + \frac{3}{\sqrt{x} + 1}$$

b) Ta có

Vì $\sqrt{x^3} \geq 0; x^3 \geq 0; x^1 \geq 5 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 3 \Rightarrow x^3 \geq 0; x^1 \geq 5$

$$\Rightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 1} \geq 3 \Rightarrow M = -1 + \frac{3}{\sqrt{x} + 1} \geq -1 + 3 = 2$$

Lại có $\frac{3}{\sqrt{x} + 1} > 0 \Rightarrow -1 + \frac{3}{\sqrt{x} + 1} > -1$

$\Rightarrow -1 < M \leq 2$. Mà $M \in \mathbb{Z} \Rightarrow M \in \{0; 1; 2\}$

TH1: $M = 0 \Rightarrow \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 4$ (TM)

TH2: $M = 1 \Rightarrow \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = 1 \Rightarrow 2 - \sqrt{x} = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow 2\sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ (TM)

TH3: $M = 2 \Rightarrow \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = 2 \Rightarrow 2 - \sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 2 \Rightarrow 3\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ (TM)

Vậy $x \in \{0; 4; \frac{1}{4}\}$ thì $M \in \mathbb{Z}$

Bài 5 [VD] Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 3}; B = \frac{1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9$

a) Rút gọn biểu thức B .

b) Đặt $M = A.B$, hãy tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức M có giá trị nguyên.

Hướng dẫn

a)
$$B = \frac{\sqrt{x} - 1 + \sqrt{x}(\sqrt{x} + 2) - 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{x - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

b) $M = A.B = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-3}} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x-3}}$

$$M \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x-3}} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 4; \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \sqrt{x-3} \in \{\pm 1; \pm 2; \pm 4\}$$

Vậy $x \in \{1; 4; 16; 25; 49\}$

PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN (soạn khoảng 12 câu theo các mức độ

NB: 4 câu; TH: 4 câu; VD: 3 câu; VDC: 1 câu)

Câu 1. [NB] Cho biểu thức $A = (\sqrt{x} - 2)^2 + 3$ ($x \geq 0$) GTNN của A là:

- A. 1. B. 5. C. 3. D. 7.

Lời giải

Chọn A

Với $x \geq 0$, ta có: $(\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 2)^2 + 3 \geq 3$. Vậy GTNN của A là 3. Dấu « = » xảy ra khi : $x = 4$.

Câu 2. [NB] Cho biểu thức $A = (\sqrt{x} - 4)^2 - 2$ ($x \geq 0$). Biểu thức A đạt GTNN khi:

- A. $x = 0$. B. $x = 4$. C. $x = 8$ D. $x = 16$.

Lời giải

Chọn D

Với $x \geq 0$, ta có: $(\sqrt{x} - 4)^2 \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 4)^2 - 2 \geq -2$. Vậy GTNN của A là -2. Dấu « = » xảy ra khi : $x = 16$.

Câu 3. [NB] Cho biểu thức $B = 15 - \sqrt{x}$ ($x \geq 0$). Biểu thức đạt GTLN khi

- A. $x \geq 0$. B. $x \notin 0$ C. $x = 0$. D. $x \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Với $x \geq 0$, ta có: $-\sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow 15 - \sqrt{x} \leq 15$. Vậy GTLN của A là 15. Dấu « = » xảy ra khi : $x = 0$.

Câu 4. [NB] GTLN của biểu thức $M = -(x + 2)^2 + 25$ là:

- A. 25. B. 2. C. 4. D. 27.

Lời giải

Chọn A

Với $x \geq 0$, ta có: $-(x + 2)^2 \leq 0 \Rightarrow -(x + 2)^2 + 25 \leq 25$. Vậy GTLN của A là 25. Dấu « = » xảy ra khi : $x = -2$.

Câu 5. [TH] GTLN của biểu thức $A = \frac{1}{(\sqrt{x} - 3)^2 + 4}$ ($x \geq 0$) là:

A. 4.

B. $\frac{1}{4}$.

C. 3.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$\left(\sqrt{x} - 3\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x} - 3\right)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{x} - 3\right)^2 + 4} \leq \frac{1}{4}$$

Với $x \geq 0$, ta có:

Vậy GTLN của A là $\frac{1}{4}$. Dấu « = » xảy ra khi : $x = 9$.

$$A = \frac{1}{\left(\sqrt{x} - 3\right)^2 + 4}$$

Câu 6. [TH] Biểu thức $(x \geq 0)$ đạt GTLN khi :

A. $x = 0$.

B. $x = 3$.

C. $x = 9$

D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$\left(\sqrt{x} - 3\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x} - 3\right)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{x} - 3\right)^2 + 4} \leq \frac{1}{4}$$

Với $x \geq 0$, ta có:

Vậy GTLN của A là $\frac{1}{4}$. Dấu « = » xảy ra khi : $x = 9$.

$$M = 1 + \frac{12}{\left(\sqrt{x} - 2\right)^2 + 3}$$

Câu 7. [TH] GTNN của biểu thức $(x \geq 0)$ là:

A. 4.

B. 5.

C. - 3.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\left(\sqrt{x} - 2\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x} - 2\right)^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{12}{\left(\sqrt{x} - 2\right)^2 + 3} \leq \frac{12}{3}$$

Với $x \geq 0$, ta có:

$$\Rightarrow 1 + \frac{12}{\left(\sqrt{x} - 2\right)^2 + 3} \leq 1 + 4 = 5$$

Vậy GTLN của A là 5. Dấu « = » xảy ra khi : $x = 4$.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$N = \sqrt{x} + 5 + \frac{49}{\sqrt{x} + 5} \quad (x \geq 0)$$

Câu 8. [TH] Biểu thức

đạt GTLN khi :

A. $x = 14$.

B. $x = 4$.

C. $x = 7$

D. $x = -5$.

Lời giải

Chọn A

Với $x \geq 0$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy số không âm cho hai số không âm ta có:

$$\sqrt{x} + 5 + \frac{49}{\sqrt{x} + 5} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x} + 5) \cdot \frac{49}{\sqrt{x} + 5}} = 14$$

$$\sqrt{x} + 5 = \frac{49}{\sqrt{x} + 5} \Leftrightarrow x = 4$$

Dấu « = » xảy ra khi :

Câu 9. [VD] Cho $H = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3}$ với $x \geq 0$. Biểu thức H đạt giá trị nhỏ nhất khi

A. $x = 4$.

B. $x = 1$.

C. $x = 0$.

D. $x = -\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

$$x \geq 0, \text{ ta có } H = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 3} = 1 - \frac{5}{\sqrt{x} + 3}$$

Với

$$\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{x} + 3} \leq \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{5}{\sqrt{x} + 3} \geq 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$$

Vậy GTNN của A là $-\frac{2}{3}$. Dấu « = » xảy ra khi : $x = 0$.

Câu 10. [VD] Cho biểu thức $C = \frac{x+12}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0; x \neq 1$. Giá trị nhỏ nhất của C .

A. $C = 6$.

B. $C = 8$.

C. $C = -4$

D. $C = 4$.

Lời giải

Chọn A

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$C = \frac{x+12}{\sqrt{x}+2} = \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} + \frac{16}{\sqrt{x}+2} = \sqrt{x}-2 + \frac{16}{\sqrt{x}+2} = \sqrt{x}+2 + \frac{16}{\sqrt{x}+2} - 4$$

Với $x \geq 0$, ta có:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số không âm ta có:

$$\sqrt{x}+2 + \frac{16}{\sqrt{x}+2} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x}+2) \cdot \frac{16}{\sqrt{x}+2}} = 8 \Rightarrow \sqrt{x}+2 + \frac{16}{\sqrt{x}+2} - 4 \geq 8 - 4 = 4$$

$$\sqrt{x}+2 = \frac{16}{\sqrt{x}+2} \Leftrightarrow x=4$$

Dấu « = » xảy ra khi :

Vậy GTNN của C là 4 khi $x=4$

$$B = \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{(1-x)^2}{2}$$

Câu 11. [VD] Cho biểu thức nhất của B .

với $x \geq 0; x \neq 1$. Tìm giá trị lớn

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Với } x \geq 0, x \neq 1, \text{ rút gọn } B \text{ ta được: } B = -x + \sqrt{x} = -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

$$\text{Dấu « = » xảy ra khi: } x = \frac{1}{4}.$$

Câu 12. [VDC] Cho hai số không âm a và b thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = a^2 + b^2$ là:

A. $\frac{1}{8}$.

B. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}$.

C. $\frac{1}{4}; \frac{1}{8}$.

D. $\frac{1}{8}; 1$.

Lời giải

Chọn D

*) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

$$\text{Chúng minh được bất đẳng thức } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \quad (*), \text{ dấu bằng xảy ra khi } x=y$$

$$\text{Áp dụng (*) ta có } a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} \quad (1), \text{ dấu bằng xảy ra khi } a=b$$

$$\text{Áp dụng (*) ta có } a+b \geq \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{2} = \frac{1}{2} \quad (2), \text{ dấu bằng xảy ra khi } a=b=\frac{1}{4}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

Từ (1) và (2) có $P = \frac{1}{4}$, dấu bằng xảy ra khi $a = b = \frac{1}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{8}$ đạt được khi $a = b = \frac{1}{4}$

*) Tìm giá trị lớn nhất của P

Do a, b không âm mà $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$ nên

$$P - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a^2 - \sqrt{a} + b^2 - \sqrt{b} = \sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) + \sqrt{b}(\sqrt{b} - 1) \leq 0$$

(do

$$0 \leq a, b \leq 1) \text{ hay } P - 1 \leq 0$$

$$\begin{aligned} a &= 0; b = 1 \\ a &= 1; b = 0 \end{aligned}$$

Do đó $P \leq 1$, dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{aligned} a &= 0; b = 1 \\ a &= 1; b = 0 \end{aligned}$$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1 đạt được khi

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (Soạn khoảng 4 câu): Các khẳng định đúng sai được sắp xếp theo thứ tự từ dễ đến khó, các khẳng định về cùng một nội dung hỏi.

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Cho $Q = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$. Các câu sau đúng hay sai?

a) GTLN của Q là 2 tại $x = 0$

b) GTNN của Q là 2 tại $x = 0$

c) GTLN của Q là $\frac{1}{2}$ tại $x = 0$

d) GTNN của Q là $\frac{1}{2}$ tại $x = 0$

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) S

$$\forall x \geq 0 \quad \sqrt{x} + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow Q \leq \frac{1}{2}$$

Vậy GTLN của Q là $\frac{1}{2}$ tại $x = 0$

Câu 2. Cho $P = x - 2\sqrt{x} + 5$. Các câu sau đúng hay sai?

a) GTNN của P là 5 tại $x = 0$

b) GTNN của P là 4 tại $x = 1$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

c) GTNN của $\frac{1}{P}$ là $\frac{1}{4}$ tại $x = 1$

d) GTLN của $\frac{1}{P}$ là $\frac{1}{4}$ tại $x = 1$

Lời giải

a) S

b) Đ

c) S

d) Đ

$$\text{* Ta có } P = x - 2\sqrt{x} + 5 = (\sqrt{x} - 1)^2 + 4$$

$$\text{Vì } (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \geq 0 \text{ nên } (\sqrt{x} - 1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow P \geq 4$$

Vậy GTNN của P là 4 tại $x = 1$

$$\text{*Ta có } \frac{1}{P} = \frac{1}{x - 2\sqrt{x} + 5} = \frac{1}{(\sqrt{x} - 1)^2 + 4}$$

$$\text{Vì } (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \geq 0 \text{ nên } (\sqrt{x} - 1)^2 + 4 \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{(\sqrt{x} - 1)^2 + 4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{P} \leq \frac{1}{4}$$

Dấu = xảy ra khi $\sqrt{x} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$

Vậy GTLN của $\frac{1}{P}$ là $\frac{1}{4}$ tại $x = 1$

$$A = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

Câu 3. Cho $A = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$. Các câu sau đúng hay sai?

a) GTNN của A là 2 tại $x = 0$

b) GTNN của A là 2 tại $x = 1$

c) GTNN của $A + 3$ là 5 tại $x = 1$

d) GTLN của $2A$ là 4 tại $x = 2$

Lời giải

a) S

b) Đ

c) Đ

d) S

$$\text{Ta có } A = \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{*Vì } x > 0; \frac{1}{x} > 0. \text{ Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: } \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} \Rightarrow A \geq 2$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

Dấu $=$ xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$

Vậy GTNN của A là 2 tại $x = 1$

* Vì $x > 0$; $\frac{1}{x} > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} \Leftrightarrow A \geq 2$

Ta có $A + 3 \geq 2 + 3 \Leftrightarrow A \geq 5$

Dấu $=$ xảy ra khi $\sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 1$

Vậy GTNN của $A + 3$ là 5 tại $x = 1$

$$A = \frac{30}{x - 4\sqrt{x} + 10}$$

Câu 4. Cho $A = \frac{30}{x - 4\sqrt{x} + 10}$. Các câu sau đúng hay sai?

a) GTLN của A là 3 tại $x = 0$

b) GTNN của A là 3 tại $x = 0$

c) GTLN của A là 5 tại $x = 4$

d) GTNN của A là 5 tại $x = 4$

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) S

$$\text{Ta có } A = \frac{30}{x - 4\sqrt{x} + 10} = \frac{30}{(x - 4\sqrt{x} + 4) + 6} = \frac{30}{(\sqrt{x} - 2)^2 + 6}$$

$$\text{Vì } (\sqrt{x} - 2)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x \geq 0 \text{ nên } (\sqrt{x} - 2)^2 + 6 \geq 6 \Leftrightarrow \frac{30}{(\sqrt{x} - 2)^2 + 6} \leq \frac{30}{6} \Leftrightarrow A \leq 5$$

Dấu $=$ xảy ra khi $\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$

Vậy GTLN của A là 5 tại $x = 4$

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN (soạn khoảng 6 câu)

Câu 1. [NB] Cho biểu thức $A = (\sqrt{x} - 1)^2 - 32$ với $x \geq 0$. GTNN của A là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: - 32

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

Với $x \geq 0$, ta có: $(\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1)^2 - 32 \geq -32$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 1$

Câu 2. [NB] Cho biểu thức $B = 10 - (\sqrt{x} - 2)^2$ với $x \geq 0$. GTLN của B là bao nhiêu?
Lời giải

Đáp án: 10

Với $x \geq 0$, ta có: $-(\sqrt{x} - 2)^2 \leq 0 \Rightarrow 10 - (\sqrt{x} - 2)^2 \leq 10$. Dấu “=” xảy ra khi $x = 4$

Câu 3. [TH] Cho biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}}{x + \sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0$. Giá trị lớn nhất của B là bao nhiêu?
Lời giải

Đáp án: $\frac{1}{3}$

* Với $x = 0$ thì $B = 0$

* Với $x > 0$ thì $B > 0 \Rightarrow \frac{1}{B} = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$

Áp dụng bất đẳng thức Cawchy ta có: $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow \frac{1}{B} \geq 3 \Rightarrow B \leq \frac{1}{3}$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 1$

Vậy GTLN của B là $\frac{1}{3}$ khi $x = 1$.

Câu 4. [TH] Cho biểu thức $P = a - 2\sqrt{a}$ với $a \geq 0$. Biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất khi $a = a_0$. Giá trị của $E = a_0^2 + 1$ là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 2

Ta có: $P = a - 2\sqrt{a} = a - 2\sqrt{a} + 1 - 1 = (\sqrt{a} - 1)^2 - 1$. Dấu “=” xảy ra khi $a = 1$.

Biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất khi $a_0 = 1$. Khi đó giá trị của $E = a_0^2 + 1 = (-1)^2 + 1 = 2$.

Câu 5. [VD] Cho biểu thức $C = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{x - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$ với $x > 0, x \neq 1$. Giá trị nhỏ nhất của C là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $2\sqrt{2}$

$$C = \frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} = \frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \frac{(x+2)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(x+2)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(x-1)}$$

Ta có:

Do $x > 0$, áp dụng BĐT Cauchy cho 2 số dương, ta có:

$$\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}}} = 2\sqrt{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 2$.

Giá trị nhỏ nhất của C là $2\sqrt{2}$ khi $x = 2$.

Câu 6. [VDC] Cho hai số không âm a và b thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = a^2 + b^2$ là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: GTLN của P là 1 khi $\begin{cases} a=0; b=1 \\ a=1; b=0 \end{cases}$, GTNN của P là $\frac{1}{8}$ khi $a=b=\frac{1}{4}$

*) Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Chứng minh được bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$ (*), dấu bằng xảy ra khi $x=y$

Áp dụng (*) ta có $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ (1), dấu bằng xảy ra khi $a=b$

Áp dụng (*) ta có $a+b \geq \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{2} = \frac{1}{2}$ (2), dấu bằng xảy ra khi $a=b=\frac{1}{4}$

Từ (1) và (2) có $P \geq \frac{1}{8}$, dấu bằng xảy ra khi $a=b=\frac{1}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{1}{8}$ đạt được khi $a=b=\frac{1}{4}$

*) Tìm giá trị lớn nhất của P

Do a, b không âm mà $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$ nên

$$P - (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a^2 - \sqrt{a} + b^2 - \sqrt{b} = \sqrt{a}(\sqrt{a}-1) + \sqrt{b}(\sqrt{b}-1) \leq 0$$

(do $0 \leq a, b \leq 1$)

hay $P - 1 \leq 0$

Do đó $P \leq 1$, dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} a=0; b=1 \\ a=1; b=0 \end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1 đạt được khi $\begin{cases} a=0; b=1 \\ a=1; b=0 \end{cases}$

Phương pháp giải:

Rút gọn biểu thức

Nhận dạng bài toán

$$+) \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+a} \geq a \text{ với } a > 0, \text{ khi đó } -\frac{1}{\sqrt{x+a}} \leq -\frac{1}{a}; -x + \sqrt{x} \geq 0$$

$$+) [f(x)]^2 \geq 0 \Rightarrow [f(x)]^2 + a \geq a. \text{ Với } a > 0 \text{ thì } \frac{1}{[f(x)]^2 + a} \leq \frac{1}{a}$$

$$+) -[f(x)]^2 \leq 0 \Rightarrow -[f(x)]^2 + a \leq a$$

$$+) \text{ Bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương } x \text{ và } y: x + y \geq 2\sqrt{xy}; \text{ dấu "}" xảy ra } \Leftrightarrow x = y$$

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} \text{ và } B = \frac{3}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+5}{x-1} \text{ với } x \geq 0, x \neq 1$$

a) Rút gọn biểu thức B

b) Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $P = \frac{2A}{B} - 6\sqrt{x} + 5$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$a) B = \frac{3}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}+5}{x-1} = \frac{3(\sqrt{x}+1) - \sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{2\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{2(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{2}{\sqrt{x}+1}$$

$$b) \text{ Với } x \geq 0, x \neq 1, P = \frac{2A}{B} - 6\sqrt{x} + 5 = (\sqrt{x}+1)^2 - 6\sqrt{x} + 5 = (\sqrt{x}-2)^2 + 2$$

$$\text{Vì } (\sqrt{x}-2)^2 \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{x}-2)^2 + 2 \geq 2 \text{ với } x \geq 0, x \neq 1$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=2$

Vậy $x=2$ thì P đạt giá trị nhỏ nhất là 2.

Ví dụ 2 [TH]: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} - \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

a) Rút gọn B

$$x \geq 0, x \neq 1$$

b) Với $x \geq 0, x \neq 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = A.B$.

Lời giải

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Ta có: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1}$

Do $x \in \mathbb{N}, x \geq 1$ nên chỉ xảy ra $x=0$ và $x=2$ $x \in \mathbb{N}^*$

Trường hợp 1: Nếu $x=0$ thì $P=0$

Trường hợp 2: Nếu:

$$x \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x}-1 \geq \sqrt{2}-1 > 0 \Rightarrow P = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 2 + \sqrt{2}$$

Từ đó giá trị lớn nhất của P là $2 + \sqrt{2}$ đạt được khi $x=2$

Ví dụ 3 [TH]:

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \quad B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$$

Cho hai biểu thức và

a) Rút gọn biểu thức B

b) Với $x \in \mathbb{N}$ và $x \geq 1$, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = A.B$

Lời giải

a) Điều kiện $x \geq 0, x \neq 1 \Rightarrow B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

b) Ta có $P = A.B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1}$. Vì $x \in \mathbb{N}$ và $x \geq 1$ ta xét:

- Với $x=0$ thì $P=0$

- Với $x \geq 2 \Rightarrow \sqrt{x}-1 \geq \sqrt{2}-1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1} \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \Rightarrow P = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \leq 2 + \sqrt{2}$

Dấu “=” xảy ra khi $x=2$. Vậy $P_{\max} = 2 + \sqrt{2}$ khi $x=2$.

Ví dụ 4 [VD]:

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} - \frac{x-6\sqrt{x}+2}{2x+5\sqrt{x}-3}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{x+8}$ với $x \geq 0, x \neq \frac{1}{4}$

a) Rút gọn biểu thức A

b) Tìm giá trị lớn nhất của $P = A.B$

Lời giải

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$x \geq 0, x \neq \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 3}$$

a) Điều kiện

$$P = A.B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 3} \cdot \frac{\sqrt{x} + 3}{x + 8} = \frac{\sqrt{x} - 1}{x + 8}$$

b) Ta có

$$0 \leq x \leq 1; x \neq \frac{1}{4} \Rightarrow P \leq 0$$

- Trường hợp 1: Xét

$$P = \frac{\sqrt{x} - 1}{(x - 1) + 9} = \frac{1}{(\sqrt{x} - 1) + \frac{9}{(\sqrt{x} - 1)} + 2}$$

- Trường hợp 2: Xét $x > 1 \Rightarrow \sqrt{x} - 1 > 0$, ta xét

$$(\sqrt{x} - 1); \frac{9}{(\sqrt{x} - 1)}$$

Áp dụng bất đẳng thức côsi cho hai số dương ta được:

$$(\sqrt{x} - 1) + \frac{9}{(\sqrt{x} - 1)} \geq 2\sqrt{(\sqrt{x} - 1) \cdot \frac{9}{(\sqrt{x} - 1)}} = 6 \Rightarrow (\sqrt{x} - 1) + \frac{9}{(\sqrt{x} - 1)} + 2 \geq 8$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{(\sqrt{x} - 1) + \frac{9}{(\sqrt{x} - 1)} + 2} \leq \frac{1}{8}$$

Từ trường hợp 1 và trường hợp 2 ta có: $P \leq \frac{1}{8}$ với mọi $x \geq 0, x \neq \frac{1}{4}$. Dấu “=” xảy ra

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = \frac{9}{\sqrt{x} - 1} \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 16 \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy $P_{\max} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow x = 16.$

$$P = 1: \frac{x + 2\sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \quad \text{với } x > 0$$

a) Rút gọn P

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Hướng dẫn

$$P = 1: \frac{x + 2\sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

a) Với $x \geq 0$ thì

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$= 1: \frac{x+2\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{x+2\sqrt{x}-2-x+1+x-\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

Vậy với $x > 0$ thì

$$P = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$$

e)

Vì $x > 0$ nên $\sqrt{x} > 0; \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số dương $\sqrt{x}; \frac{1}{\sqrt{x}}$ ta được:

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2$$

$$\hat{=} \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \hat{=} x = 1$$

Dấu "=" xảy ra (thỏa mãn $x > 0$)

$\Rightarrow P \geq 2 - 1 = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 1$ khi $x = 1$

$$A = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \cdot \frac{x^2-2x+1}{2}$$

Bài 2. [TH] Cho biểu thức

a) Rút gọn biểu thức A ;

b) Tìm x để $A \geq 0$;

b) Tìm giá trị lớn nhất của A .

Hướng dẫn

a) Điều kiện $x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow A = -x + \sqrt{x}$

b) Ta có

$$A \geq 0 \hat{=} -x + \sqrt{x} \geq 0 \hat{=} x - \sqrt{x} \leq 0 \hat{=} \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \leq 0 \hat{=} 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \hat{=} \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \neq 0; x \neq 1 \end{cases} \hat{=} 0 \leq x < 1$$

$$A = -x + \sqrt{x} = -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \quad x \in \sqrt{x} - \frac{1}{2} = 0 \hat{=} x = \frac{1}{4} \Rightarrow GTLN A = \frac{1}{4} \hat{=} x = \frac{1}{4}$$

c)

$$P = \frac{3\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} - \frac{2\sqrt{x} - 3}{3 - \sqrt{x}} - \frac{3(3\sqrt{x} - 5)}{x - 2\sqrt{x} - 3}$$

Bài 3. [VD] Cho biểu thức

a) Rút gọn P;

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Lời giải

ĐKXD: $x \geq 0; x \neq 9$

$$P = \frac{3\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3(3\sqrt{x} - 5)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)}$$

a)

$$= \frac{(3\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 3) + (2\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 1) + 3(3\sqrt{x} - 5)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{3x - 9\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 6 + 2x + 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 3 - 9\sqrt{x} + 15}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{5x - 17\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{5x - 15\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 6}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{(5\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{5\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1}$$

$$P = \frac{5\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 1} = \frac{5\sqrt{x} + 5 - 7}{\sqrt{x} + 1}$$

c) Ta có

$$P = 5 - \frac{7}{\sqrt{x} + 1}$$

Vì $\frac{7}{\sqrt{x} + 1} > 0$ nên P có giá trị nhỏ nhất $\hat{U} \frac{7}{\sqrt{x} + 1}$ lớn nhất $\hat{U} \sqrt{x} + 1$ nhỏ nhất $\hat{U} x = 0$

Khi đó min $P = 5 - 7 = -2$

$$A = \frac{\sqrt{x} + 2}{2x + 5} \quad B = \frac{x + 4}{x - 4} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} - \frac{2\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Bài 4. [VD] . Cho hai biểu thức

và

a) Rút gọn biểu thức B;

$$Q = A.B$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

Hướng dẫn

$$x > 0; x \neq 4 \Rightarrow B = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2}$$

a) Điều kiện

$$Q = AB = \frac{\sqrt{x} + 2}{2x + 5} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x + 5}$$

b) Ta có

- Trường hợp 1: Xét $0 < x < 4 \Rightarrow Q \leq 0$

$$Q = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x + 5} = \frac{1}{2(\sqrt{x} - 2) + \frac{13}{\sqrt{x} - 2} + 8}$$

- Trường hợp 2: Xét $x > 4 \Rightarrow \sqrt{x} - 2 > 0$, ta xét

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương $2(\sqrt{x} - 2); \frac{13}{\sqrt{x} - 2}$ ta có:

$$2(\sqrt{x} - 2) + \frac{13}{\sqrt{x} - 2} \geq 2\sqrt{2(\sqrt{x} - 2) \cdot \frac{13}{\sqrt{x} - 2}} = 2\sqrt{26} \Rightarrow Q = \frac{1}{2(\sqrt{x} - 2) + \frac{13}{\sqrt{x} - 2} + 8} \leq \frac{1}{2\sqrt{26} + 8}$$

Từ 2 trường hợp ta có: $Q \leq \frac{1}{2\sqrt{26} + 8}$ với mọi $x > 0; x \neq 4$. Dấu “=” xảy ra

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{x} - 2) = \frac{13}{\sqrt{x} - 2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} - 2 = \sqrt{\frac{13}{2}} \Rightarrow x = \left(\sqrt{\frac{13}{2}} + 2\right)^2 \quad (\text{thoả mãn}).$$

Vậy $Q_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{26} + 8} \quad \text{ở } x = \left(\sqrt{\frac{13}{2}} + 2\right)^2$

Bài 5. [VD] . Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 3}$ và $B = \frac{x}{x - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$ với

$x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$

a) Rút gọn biểu thức B

b) Với $x \in \mathbb{Z}$, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = A(B - 1)$

Hướng dẫn

$$B = \frac{x}{x - 1} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2}$$

a) Ta có

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$P = A(B - 1) = \frac{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x-2}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{x-3}}$$

b)

$$\text{Với } \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq x < 9, x \neq 4 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x-3} < 0 \Rightarrow P < 0$$

$$\text{Với } \begin{cases} x \in \mathbb{Z} \\ x \geq 10 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x-3} \geq \sqrt{10-3} \Rightarrow P = \frac{2}{\sqrt{x-3}} \leq \frac{2}{\sqrt{10-3}} = 6 + 2\sqrt{10}$$

Vậy $P \leq 6 + 2\sqrt{10}$ với mọi $x \in \mathbb{Z}, x \geq 0, x \neq 4, x \neq 1$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 10$

Khi đó $P_{\max} = 6 + 2\sqrt{10}$ ở $x = 10$

Bài 6 [VD]

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-1}}{2\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$

1/ Rút gọn B

2/ Với $x \in \mathbb{R}$ và $x \neq 1$ hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = A.B$

Hướng dẫn

1/ Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có:

$$B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}+1}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}+1}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \text{ (Với } x \geq 0, x \neq 1)$$

$$2/\text{Ta có: } P = A.B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Với $x \neq 1$ và $x \neq -1$ ta xét các trường hợp sau:

TH1: $x = 0$ thì $P = 0$

TH2: $x \neq 0$ thì $\sqrt{x} - 1 \neq \sqrt{2} - 1$

Do đó
$$P = 1 + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \neq 1 + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2} + 1)}{2 - 1} = 2 + \sqrt{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 2$.

So sánh các trường hợp của P , ta thấy: $\max P = 2 + \sqrt{2}$ khi và chỉ khi $x = 2$.

Bài 7. [VD] . Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$ và $B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3x + 3}{x - 9}$ $x \geq 0, x \neq 9$

1) Rút gọn biểu thức $P = B : A$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Lời giải

1/ Với $x \geq 0, x \neq 9$ ta có:

$$B = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3} - \frac{3x + 3}{x - 9} = \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) + \sqrt{x}(\sqrt{x} + 3) - (3x + 3)}{x - 9}$$

$$= \frac{2x - 6\sqrt{x} + x + 3\sqrt{x} - 3x - 3}{x - 9} = \frac{-3\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \frac{-3(\sqrt{x} + 1)}{x - 9}$$

$$P = B : A = \frac{-3(\sqrt{x} + 1)}{x - 9} : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3} = \frac{-3(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 1} = \frac{-3}{\sqrt{x} + 3}$$

2/ Với $x \geq 0, x \neq 9$ ta có: $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{-3}{\sqrt{x} + 3} \geq -1 \Rightarrow P \geq -1$

Dấu bằng xảy ra khi $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (TMĐK)

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là -1 khi $x = 0$.

DẠNG 6: RÚT GỌN VÀ TÌM GIÁ TRỊ CỦA THAM SỐ ĐỂ PHƯƠNG TRÌNH HOẶC BẤT PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM.

1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN (soạn khoảng 12 câu theo các mức độ**NB: 4 câu; TH: 4 câu; VD: 3 câu; VDC: 1 câu)**

Câu 1. [NB] Cho biểu thức $P = \sqrt{x} - 1$ với $x \geq 0$. Các giá trị của m để $P = m$ có nghiệm là:
A. $m \geq 0$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $m \geq -1$. **D.** $m \leq -1$.

Lời giải**Chọn C**

Với $x \geq 0$, để $P = m \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 = m \Leftrightarrow \sqrt{x} = m + 1$, để $P = m$ có nghiệm thì $m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$

Câu 2. [NB] Cho biểu thức $Q = \frac{\sqrt{x} + 1}{2}$ với $x \geq 0$. Các giá trị của m để $P = m$ có nghiệm là:
A. $m \geq 0$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $m \geq \frac{1}{2}$. **D.** $m \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải**Chọn C**

Với $x \geq 0$, $P = m \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{2} = m \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2m - 1$. Để $P = m$ có nghiệm thì $2m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$

Câu 3. [NB] Cho biểu thức $M = \sqrt{x}$ với $x \geq 0$. Các giá trị của m để có các giá trị của x thỏa mãn: $P > m$ là:
A. $m \geq 0$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $m > 0$. **D.** $m < 0$.

Lời giải**Chọn D**

Với $x \geq 0$, $P > m \Leftrightarrow \sqrt{x} > m$. Vậy để có các giá trị của x thỏa mãn: $P > m$ thì $m < 0$.

Câu 4. [NB] Cho biểu thức $M = \sqrt{x}$ với $x \geq 0$. Các giá trị của m để có các giá trị của x thỏa mãn: $M > m - 1$ là:

A. $m \geq 1$. **B.** $m \leq 1$. **C.** $m > 1$. **D.** $m < 1$.

Lời giải**Chọn D**

Với $x \geq 0$, để $M > m - 1$ thì $\sqrt{x} > m - 1$ thì $m - 1 < 0 \Leftrightarrow m < 1$

Câu 5. [TH] Cho biểu thức $A = \frac{2}{\sqrt{x} - 1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$. Các giá trị của m để có các giá trị của x thỏa mãn: $mA = \sqrt{x} + 1$ là:

A. $m \geq 1$. **B.** $m \geq 0$. **C.** $m \geq \frac{1}{2}; m \neq 0$. **D.** $m \geq \frac{1}{2}; m \neq 0$.

Chọn C

Với $x \geq 0; x \neq 1$. Ta có:
$$mA = \sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow \frac{2m}{\sqrt{x} - 1} = \sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow 2m = x - 1 \Leftrightarrow x = 2m + 1$$

Do đó:
$$\begin{cases} 2m + 1 \geq 0 \\ 2m + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -\frac{1}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Câu 6. [TH] Cho biểu thức $A = \frac{3}{\sqrt{x} - 4}$ với $x \geq 0; x \neq 16$. Các giá trị của m để có các giá trị của x thỏa mãn:

$mA = \frac{-1}{4}$ là:

- A. $m^3 \leq 0$ B. $m \in \left[\frac{1}{3}; m^3 \leq 0\right]$ C. $m^3 \leq \frac{1}{3}; m^3 \leq 0$ D. $m^3 \leq \frac{1}{3}; m > 0$

Lời giải

Chọn B

Với $x \geq 0; x \neq 1$. Ta có:
$$mA = \frac{-1}{4} \Leftrightarrow \frac{3m}{\sqrt{x} - 4} = \frac{-1}{4} \Leftrightarrow 12m = -\sqrt{x} + 4 \Leftrightarrow \sqrt{x} = -12m + 4$$

Để tìm được x thỏa mãn $mA = \frac{-1}{4}$ thì:
$$\begin{cases} -12m + 4 \geq 0 \\ -12m + 4 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{3} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Câu 7. [TH] Cho biểu thức $A = \frac{3}{\sqrt{x} + 4}$ với $x \geq 0; x \neq 16$. Các giá trị của m để $mA < \frac{-1}{4}$ là:

- A. $m^3 \leq 0$ B. $m^3 \leq 0$ C. $m > \frac{1}{3}$ D. $m < \frac{1}{3}$

Lời giải

Chọn D

$$mA < \frac{-1}{4} \Leftrightarrow \frac{3m}{\sqrt{x} + 4} < \frac{-1}{4} \Leftrightarrow \frac{3m}{\sqrt{x} + 4} + \frac{1}{4} < 0 \Leftrightarrow \frac{12m + \sqrt{x} + 4}{4(\sqrt{x} + 4)} < 0$$

Ta có:

$$\text{Suy ra } 12m + \sqrt{x} + 4 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < -12m - 4$$

$$\text{Với } x \geq 0; x \neq 16 \text{ để } \sqrt{x} < -12m - 4 \text{ thì } -12m - 4 > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{1}{3}$$

Câu 8. [TH] Cho biểu thức $P = \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$. Với $x > 1$, các giá trị của m để $\frac{1}{P} > m + \sqrt{x}$ là:

- A. $m^3 \leq 0$. B. $m \notin 0$. C. $m \notin \frac{1}{2}$; D. $m^3 \geq \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{1}{P} > m + \sqrt{x} \Leftrightarrow x - \sqrt{x} > 2m - 1$

Với $x > 1$, ta có $x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) > 0$ nên để $x - \sqrt{x} > 2m - 1$ thì $2m - 1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$

Câu 9. [VD] Cho biểu thức $A = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$ và $A = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$ với $x \geq 0$. Các giá trị của m để $A - B = m$ có nghiệm là:

- A. $-1 < m \leq 0$. B. $m \notin 0$. C. $-1 \leq m \leq 0$.
D. $-1 < m < 0$

Lời giải

Chọn A

Với $x \geq 0$, $A - B = m \Leftrightarrow (m + 1)\sqrt{x} = -m$

TH1: $m = -1$: PT vô nghiệm

TH2: $m \neq -1$: PT có dạng: $\sqrt{x} = \frac{-m}{m+1}$. PT có nghiệm thỏa mãn $x \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-m}{m+1} \geq 0$

Giải ra ta được: $-1 < m \leq 0$

Câu 10. [VD] Cho biểu thức $S = \frac{-3}{\sqrt{x} + 3}$, giá trị của m để phương trình $\sqrt{x} \cdot S = m$ có nghiệm duy nhất:

- A. $-3 < m \leq 0$. B. $-3 < m \leq 0$ và $m \neq \frac{-3}{2}$
C. $-3 < m < 0$ và $m \neq \frac{-3}{2}$. D. $-3 \leq m \leq 0$ và $m \neq \frac{-3}{2}$

Lời giải

Chọn B

$$\sqrt{x} \cdot S = m \Rightarrow \sqrt{x} \cdot \frac{-3}{\sqrt{x} + 3} = m \Rightarrow -3 + \frac{9}{\sqrt{x} + 3} = m \Rightarrow \sqrt{x} + 3 = \frac{9}{m + 3}$$

Xét

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Theo ĐKXD là $x \geq 0 ; x \neq 9$

$$x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 3 \geq 3 \Rightarrow \frac{9}{m+3} \geq 3 \Rightarrow \frac{-3m}{m+3} \geq 0 \Rightarrow -3 < m \leq 0$$

Với

$$x \neq 9 \Rightarrow \sqrt{x} + 3 \neq 6 \Rightarrow \frac{9}{m+3} \neq 6 \Rightarrow \frac{9}{m+3} \neq 6 \Rightarrow m \neq \frac{-3}{2}$$

Với

: Để thỏa mãn đề bài thì $-3 < m \leq 0$ và $m \neq \frac{-3}{2}$
 Kết luận

Câu 11. [VD] Cho hai biểu thức : $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$. Các giá trị của m để có giá trị của x thỏa mãn $2A + mB = 0$ là :

- A. $m > 0$. B. $m^1 - 2$. C. $m > 0$ hoặc $m < -2$; D. $-2 < m < 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $2A + mB = 0 \Leftrightarrow 2x + m(x-1) = 0 \Leftrightarrow x(2+m) = m$ (*)

Nếu $m = -2$ thì không tìm được x thỏa mãn (*)

Vậy $m \neq -2$ thì $x = \frac{m}{m+2}$. Để có giá trị x thỏa mãn $2A + mB = 0$ thì $\begin{cases} \frac{m}{m+2} > 0 \\ \frac{m}{m+2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < -2 \end{cases}$

$$P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

Câu 12. [VDC] Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ ($x \geq 0$). Giá trị của m để phương trình

$$(\sqrt{x}+1)P = m - x$$

có nghiệm x là:

- A. $m = \frac{-5}{4}$. B. $m > \frac{-5}{4}$. C. $m > -1$. D. $m^3 - 1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $(\sqrt{x}+1)P = m - x \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - (m+1) = 0$

Đặt $\sqrt{x} = t (t \geq 0) \Rightarrow t^2 + t - (m+1) = 0 (*)$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

PT có nghiệm kép $\Leftrightarrow m = \frac{5}{4}$ Khi đó (*) trở thành $t^2 + t + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$ (Không thỏa mãn ĐK)

PT (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > \frac{5}{4}$ (do $t_1 + t_2 = -1$)

Khi đó PT (*) không thể có hai nghiệm cùng dương, (*) có nghiệm $t \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (Soạn khoảng 4 câu): Các khẳng định đúng sai được sắp xếp theo thứ tự từ dễ đến khó, các khẳng định về cùng một nội dung hỏi.

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Cho $P = x^2 - 2x + 4$. Các câu sau đúng hay sai?

a) Phương trình $P = m$ có nghiệm khi: $m = 0$

b) Phương trình $P = m$ có nghiệm khi: $m = 2$

c) Phương trình $P = m$ có nghiệm khi: $m = 3$

d) Phương trình $P = m$ có nghiệm khi: $m \geq 3$

Lời giải

a) S

b) S

c) S

d) Đ

$$x^2 - 2x + 4 = m \Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 - m = 0$$

$$\Delta' = (-1)^2 - (4 - m) = m - 3$$

Phương trình $P = m$ có nghiệm khi :

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m - 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$$

Vậy Phương trình $P = m$ có nghiệm khi $m \geq 3$

Đáp án D đúng

Câu 2. Cho $P = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$). Các câu sau đúng hay sai?

a) $P = m$ có nghiệm khi $m = -2$

b) $P = m + 1$ có nghiệm khi $m = -4$

c) $P = m - 1$ có nghiệm khi $m \geq 1$

d) $P = m + 3$ có nghiệm khi $m + 3 \geq 0$

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) Đ

$$a) \sqrt{x} = m \quad (m \geq 0)$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

Đáp án A sai

$$b) \sqrt{x} = m + 1 \Leftrightarrow m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$$

Phương trình $P = m + 1$ có nghiệm khi $m \geq -1$

Đáp án B sai

$$c) \sqrt{x} = m - 1 \Leftrightarrow m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 1$$

Phương trình $P = m - 1$ có nghiệm khi $m \geq 1$

Đáp án C đúng

$$d) \sqrt{x} = m + 3 \Leftrightarrow m + 3 \geq 0$$

Phương trình $P = m + 3$ có nghiệm khi $m + 3 \geq 0$

Đáp án D đúng

Câu 3. Cho $P = 2\sqrt{x} + 1$ ($x \geq 0$). Các câu sau đúng hay sai?

a) $P = m$ có nghiệm khi $m < 1$

b) $P = m$ có nghiệm khi $m = 0$

c) $P = m$ có nghiệm khi $m \geq 1$

d) $P = m + 1$ có nghiệm khi $m \geq 0$

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) Đ

$$a) 2\sqrt{x} + 1 = m \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = m - 1$$

Phương trình $P = m$ có nghiệm khi $m - 1 \geq 0 \Rightarrow m \geq 1$

Đáp án A sai

$$b) 2\sqrt{x} + 1 = m \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = m - 1$$

Phương trình $P = m$ có nghiệm khi $m - 1 \geq 0 \Rightarrow m \geq 1$

Đáp án B sai

$$c) 2\sqrt{x} + 1 = m \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = m - 1$$

Phương trình $P = m$ có nghiệm khi $m - 1 \geq 0 \Rightarrow m \geq 1$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Đáp án C đúng

$$d) 2\sqrt{x} + 1 = m + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} = m$$

Phương trình $P = m$ có nghiệm khi $m \geq 0$

Đáp án D đúng

Câu 4. Cho $P = \frac{3}{\sqrt{x} + 2} \quad (x \geq 0)$. Các câu sau đúng hay sai?

a) $P.(\sqrt{x} + 2) = m + \sqrt{x}$ có nghiệm khi $m > 3$

b) $P.(\sqrt{x} + 2) = m + \sqrt{x}$ có nghiệm khi $m \leq 3$

c) $P = m$ có nghiệm khi $0 < m \leq \frac{3}{2}$

d) $P = m$ có nghiệm khi $m < 0$

Lời giải

a) S

b) Đ

c) Đ

d)

$$a) P.(\sqrt{x} + 2) = m + \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 2} . (\sqrt{x} + 2) = m + \sqrt{x} \Leftrightarrow 3 = m + \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 - m$$

Phương trình $P.(\sqrt{x} + 2) = m + \sqrt{x}$ có nghiệm khi $3 - m \geq 0 \Rightarrow m \leq 3$

Đáp án A sai

$$b) P.(\sqrt{x} + 2) = m + \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 2} . (\sqrt{x} + 2) = m + \sqrt{x} \Leftrightarrow 3 = m + \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 - m$$

Phương trình $P.(\sqrt{x} + 2) = m + \sqrt{x}$ có nghiệm khi $3 - m \geq 0 \Rightarrow m \leq 3$

Đáp án B đúng

c) $P = m$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 2} = m \quad (m > 0) \Leftrightarrow m\sqrt{x} + 2m = 3 \Leftrightarrow m\sqrt{x} = 3 - 2m$$

Nếu $m = 0$ thì $0 = 3$ (vô lí)

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Nếu $m \neq 0$ thì $\sqrt{x} = \frac{3-2m}{m}$

Vì $m > 0$ nên để có nghiệm x thì $3-2m \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{3}{2}$

Vậy phương trình $P=m$ có nghiệm khi $0 < m \leq \frac{3}{2}$

Đáp án C đúng

c) $P=m \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}+2}=m \ (m>0) \Leftrightarrow m\sqrt{x}+2m=3 \Leftrightarrow m\sqrt{x}=3-2m$

Nếu $m=0$ thì $0=3$ (vô lí)

Nếu $m \neq 0$ thì $\sqrt{x} = \frac{3-2m}{m}$

Vì $m > 0$ nên để có nghiệm x thì $3-2m \geq 0 \Rightarrow m \leq \frac{3}{2}$

Vậy phương trình $P=m$ có nghiệm khi $0 < m \leq \frac{3}{2}$

Đáp án D sai

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN (soạn khoảng 6 câu)

Câu 1. [NB] Cho hai biểu thức $B = \frac{\sqrt{x}-2}{3}$ và $A = \frac{\sqrt{x}-2}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x^3 \geq 0, x^1 \geq 1$.

Cho $P = B : A$, tìm giá trị của m để $P > m + \sqrt{x}$ có nghiệm đúng với mọi giá trị của $x > 4$.

Lời giải

$$m \in \frac{1}{3}$$

Đáp án:

$$P = \frac{x+\sqrt{x}+1}{3}$$

$$P > m + \sqrt{x} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^2 > 3m$$

Với $x > 4$ thì $(\sqrt{x}-1)^2 > 1$

Do đó (*) nghiệm đúng với mọi $x > 4$ khi $3m \leq 1 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{3}$.

Câu 2. [NB]

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-4}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$ ($x \geq 0; x \neq 16$). Tìm m để phương trình $\frac{A}{B} = m+1$ có nghiệm.

Lời giải

Đáp án: $m > 0; m \neq \frac{3}{4}$

Ta có
$$B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-4} + \frac{5\sqrt{x}+12}{x-16} = \frac{x - \sqrt{x} - 12 + 5\sqrt{x} + 12}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4}$$

$$\frac{A}{B} = m+1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-4} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-4} = m+1 \quad (x > 0; x \neq 16)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = m+1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{3}{\sqrt{x}} = m+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}} = m \quad (*)$$

Để phương trình $\frac{A}{B} = m+1$ có nghiệm phương trình (*) có nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{m} > 0 \\ \frac{3}{m} \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Câu 3. [TH] Cho hai biểu thức $A = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{x-4}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ ($x \geq 0; x \neq 4$)

Tìm $m \in \mathbb{Z}$ để phương trình $\frac{A}{B} = \frac{m}{2}$ có nghiệm

Lời giải

Đáp án:

Ta có
$$\frac{A}{B} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow \frac{4(\sqrt{x}+1)}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+2} = \frac{m}{2} \Leftrightarrow m\sqrt{x} = 8 - 2m$$

*) Xét $m=0 \Rightarrow 0 \cdot \sqrt{x} = 8$ (Loại)

*) Xét $m \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{8-2m}{m}$

Do $x \geq 0; x \neq 4$ nên phương trình đã cho có nghiệm khi $\frac{8-2m}{m} \geq 0; \frac{8-2m}{m} \neq 2$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$\frac{8-2m}{m} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8-2m \geq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 4 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 4$$
$$\frac{8-2m}{m} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8-2m \leq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m < 0 \end{cases}$$

*) Giải

*) Giải $\frac{8-2m}{m} \neq 2 \Leftrightarrow 8-2m \neq 2m \Leftrightarrow m \neq 2$

Như vậy $0 < m \leq 4; m \neq 2; m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 3; 4\}$

Vậy $m \in \{1; 3; 4\}$ là giá trị cần tìm

$$A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \quad \text{và} \quad B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} \quad (x > 0; x \neq 1)$$

Câu 4. [TH] Cho hai biểu thức

Cho $C = \frac{A}{B}$, tìm các giá trị m để nghiệm x thỏa mãn bất phương trình $-\sqrt{x} \cdot C > \sqrt{x} + m - 3$

Lời giải

Đáp án: T

$$C = \frac{A}{B} = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{x-\sqrt{x}} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}-1} = \frac{x+2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} (\sqrt{x}-1) = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$$

Ta có

$$-\sqrt{x} \cdot C > \sqrt{x} + m - 3 \Rightarrow -x - \sqrt{x} + 1 - m > 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 1 + m < 0$$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} + \frac{1}{4} - \frac{5}{4} + m < 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{5}{4} - m$$

$$\text{Vì } x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} > 0 \Rightarrow \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2 > \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} < \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)^2 < \frac{5}{4} - m \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{5}{4} - m \Rightarrow m < 1$$

Câu 5. [VD] Cho hai biểu thức

$$A = \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} \quad \text{và} \quad B = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \quad (x \geq 0; x \neq 1)$$

Đặt $P = A + B$. Tìm m để có x thỏa mãn $P(\sqrt{x}+3) = m$

Lời giải

Đáp án:

$$\text{Ta có } P = A + B = \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} + \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$$

$$P = \frac{(-3\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} + \frac{15\sqrt{x}-11}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

$$P = \frac{-3x - 7\sqrt{x} + 6 + 15\sqrt{x} - 11 - 2x - \sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$P = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 1$ thì $P = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}$

Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có $m = P(\sqrt{x}+3) = \frac{-5\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} \cdot (\sqrt{x}+3) = -5\sqrt{x}+2$

Với $x \geq 0 \Rightarrow -5\sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow -5\sqrt{x}+2 \leq 0+2 \Rightarrow m \leq 2$ (1)

Mặt khác $x \neq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Rightarrow -5\sqrt{x} \neq -5 \Rightarrow -5\sqrt{x}+2 \neq -5+2 \Rightarrow m \neq -3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $m \leq 2; m \neq -3$

Vậy với $m \leq 2; m \neq -3$ thì có x thỏa mãn $P(\sqrt{x}+3) = m$

PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải:

Rút gọn biểu thức đã cho

Biến đổi về phương trình hoặc bất phương trình chứa tham số

Phân tích điều kiện tồn tại phân thức $\frac{A}{B}$; căn thức bậc hai $\sqrt{A}$ hoặc điều kiện có nghiệm của phương trình, bất phương trình để tìm tham số.

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1 [NB]: Cho $P = \left[\frac{x+3\sqrt{x}}{x-25} + \frac{1}{\sqrt{x}+5} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2} \quad (x \geq 0, x \neq 25)$

1. Rút gọn P;

2. Tìm m để phương trình $P(\sqrt{x}+2) = m$ có nghiệm.

Lời giải

a) Ta có: $P = \left[\frac{x+3\sqrt{x}}{x-25} + \frac{1}{\sqrt{x}+5} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2} \quad (x \geq 0, x \neq 25)$

$$P = \left[\frac{x+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} + \frac{\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} \right] \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2}$$

$$P = \frac{x+4\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$P = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2} \quad P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$$

b) Phương trình $P \cdot (\sqrt{x}+2) = m$ có nghiệm khi $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \cdot (\sqrt{x}+2) = m$ có nghiệm

Ta có: $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \cdot (\sqrt{x}+2) = m \Rightarrow \sqrt{x}-1 = m \Leftrightarrow \sqrt{x} = m+1$

Phương trình $P \cdot (\sqrt{x}+2) = m$ có nghiệm khi $\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 \geq 0 \\ m+1 \neq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \neq 4 \end{cases}$

Vậy $m \geq -1; m \neq 4$ thỏa mãn đề bài

Ví dụ 2 [TH]: Cho $P = \frac{6}{x-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{\sqrt{x}-1} \quad (x \geq 0; x \neq 1)$

1. Rút gọn P

2. Tìm m để phương trình $\frac{1}{P} \cdot (\sqrt{x}-3) = m-3$ có nghiệm.

Lời giải

1. $P = \frac{6}{x-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{3}{\sqrt{x}-1} \quad (x \geq 0; x \neq 1)$

$$P = \frac{6}{(\sqrt{x}+1) \cdot (\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1) \cdot (\sqrt{x}-1)} - \frac{3 \cdot (\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1) \cdot (\sqrt{x}-1)}$$

$$P = \frac{6+x-\sqrt{x}-3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1) \cdot (\sqrt{x}-1)}$$

$$P = \frac{x-4\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+1) \cdot (\sqrt{x}-1)}$$

$$P = \frac{(\sqrt{x}-3) \cdot (\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1) \cdot (\sqrt{x}-1)}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$$

2. Tìm m để phương trình $\frac{1}{P} \cdot (\sqrt{x}-3) = m-3$ có nghiệm.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$\frac{1}{P}(\sqrt{x} - 3) = m - 3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}(\sqrt{x} - 3) = m - 3 \quad (x \geq 0; x \neq 1; x \neq 9)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = m - 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = m - 4$$

Để phương trình $\frac{1}{P}(\sqrt{x} - 3) = m - 3$ có nghiệm thì

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 1 \\ x \neq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 4 \geq 0 \\ m - 4 \neq 1 \\ m - 4 \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \neq 5 \\ m \neq 7 \end{cases}$$

Vậy $m \geq 4; m \neq 5; m \neq 7$ thỏa mãn đề bài

$$C = \left(\frac{x + 2\sqrt{x}}{x + 4\sqrt{x} + 4} + \frac{2x}{4 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x}} \right) \quad (x > 0; x \neq 4; x \neq 9)$$

Ví dụ 3 [TH]: Cho

1. Rút gọn biểu thức C
2. Tìm m để phương trình $C = m$ có nghiệm

Lời giải

1. Ta có:

$$C = \left(\frac{x + 2\sqrt{x}}{x + 4\sqrt{x} + 4} + \frac{2x}{4 - x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x}} \right) \quad (x > 0; x \neq 4; x \neq 9)$$

$$C = \left(\frac{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} + 2)^2} - \frac{2x}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x} - 2)} - \frac{2(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \right)$$

$$C = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} - \frac{2x}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right)$$

$$C = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{2x}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} - \frac{2(\sqrt{x} - 2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \right)$$

$$C = \frac{x - 2\sqrt{x} - 2x}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} : \frac{\sqrt{x} - 1 - 2\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}$$

$$C = \frac{-\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)}{-(\sqrt{x} - 3)}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$C = \frac{x}{\sqrt{x} - 3}$$

Vậy $C = \frac{x}{\sqrt{x} - 3} (x > 0; x \neq 4; x \neq 9)$

2. Xét phương trình $\frac{x}{\sqrt{x} - 3} = m \quad (1) \quad (x > 0; x \neq 4; x \neq 9)$

Cách 1: $\frac{x}{\sqrt{x} - 3} = m \Leftrightarrow x - m\sqrt{x} + 3m = 0 \Leftrightarrow t^2 - mt + 3m = 0 (t > 0; t \neq 2; t \neq 3)$

Có $\Delta = m^2 - 12m = (m - 6)^2 - 36$

Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow (m - 6)^2 \geq 36 \Rightarrow \begin{cases} m \geq 12 \\ m \leq 0 \end{cases}$

Vì $t \neq 2 \Rightarrow m \neq -4$

$t \neq 3 \Rightarrow 9 \neq 0$ (đúng với mọi m)

- Phương trình có hai nghiệm dương khi $m > 0 \Rightarrow m \geq 12$

- Phương trình có hai nghiệm trái dấu khi $m < 0 \Rightarrow m < 0; m \neq -4$

Cách 2: Biến đổi $\frac{x}{\sqrt{x} - 3} = \sqrt{x} - 3 + \frac{9}{\sqrt{x} - 3} + 6$

- Nếu $\sqrt{x} - 3 > 0 \Rightarrow x > 9 \Rightarrow C \geq 12 \Rightarrow m \geq 12$

- Nếu $\sqrt{x} - 3 < 0 \Rightarrow 0 < x < 9; x \neq 4 \Rightarrow C = 6 - \left[(3 - \sqrt{x}) + \frac{9}{3 - \sqrt{x}} \right] \Leftrightarrow m < 0; m \neq -4$

Kết luận: $m < 0; m \neq -4$ hoặc $m \geq 12$

Ví dụ 4 [VD]: Cho $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{3\sqrt{x} + 1}{x - 1} (x \geq 0; x \neq 1)$

1. Rút gọn biểu thức A

2. Tìm m để phương trình $mA = \sqrt{x} - 2$ có hai nghiệm phân biệt

Lời giải

1. $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{3\sqrt{x} + 1}{x - 1} (x \geq 0; x \neq 1)$

$$A = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} + \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} - \frac{3\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$A = \frac{x + 2\sqrt{x} + 1 + x - 2\sqrt{x} + 1 - 3\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$A = \frac{2x - 3\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$A = \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

2.

$$mA = \sqrt{x} - 2 \Leftrightarrow m \cdot \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} = \sqrt{x} - 2 \Leftrightarrow 2m\sqrt{x} - m = x - \sqrt{x} - 2 \Leftrightarrow x - (2m+1)\sqrt{x} + m + 2 = 0$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x} (t \geq 0; t \neq 1) \Rightarrow (1) \Leftrightarrow t^2 - (2m+1)t + m - 2 = 0 (*)$$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 1 và

$$t_2 > t_1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ P \geq 0 \\ S > 0 \\ a+b+c \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [-(2m+1)]^2 - 4.(m-2) > 0 \\ m-2 \geq 0 \\ 2m+1 > 0 \\ 1 - (2m+1) + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + > 0 \forall m \\ m \geq 2 \\ m > -\frac{1}{2} \\ m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2$$

Vậy điều kiện là $m \geq 2$

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - x + \sqrt{x} - 1} \right) : \left(\frac{x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{x+1} \right) \quad (\text{với } x \geq 0; x \neq 1)$$

)

a) Rút gọn biểu thức P .

c) Tìm m để có x thỏa mãn $(\sqrt{x} + 1)P = m - x$.

Hướng dẫn

Lời giải

a) Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có:

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - x + \sqrt{x} - 1} \right) : O 10 - 2024 - GV 142 \left(\frac{x + \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{x+1} \right)$$

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1) - (x+1)} \right) : O 10 - 2024 - GV 142 \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(x+1) + (x+1)} + \frac{1}{x+1} \right)$$

$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x} - 1)} \right) : O 10 - 2024 - GV 142 \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(x+1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{1}{x+1} \right)$$

$$P = \frac{x+1-2\sqrt{x}}{(x+1)(\sqrt{x}-1)}; O 10-2024-GV 142 \frac{\sqrt{x}+1}{x+1} P = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(x+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}+1} P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \text{ Vậy } P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$$

$$x \geq 0; x \neq 1$$

Với

$$x \geq 0; x \neq 1 \quad (\sqrt{x}+1)P = m - x \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1) \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = m - x \Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = m - x$$

b) Với ta có:

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} = m + 1 \quad x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$$

Có

$$x \neq 1 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1} \neq m + 1 \Leftrightarrow m \neq 1$$

Có

$$m \geq -1; m \neq 1 \quad x \quad (\sqrt{x}+1)P = m - x$$

Vậy với

thì có thỏa mãn

Bài 2. [TH]

Cho các biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \text{ và } B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) \cdot \frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} \text{ (với } x \geq 0; x \neq 1)$$

1) Rút gọn biểu thức B .

3) Cho $P = A.B$ Tìm m để $(\sqrt{x}-1)P > m+1$.

Hướng dẫn

$$1) \text{ Với } x \geq 0; x \neq 1 \text{ ta có: } B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) \cdot \frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$$

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}+1}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \text{ với } x \geq 0; x \neq 1$$

$$2) \text{ Ta có: } P = A.B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

Với $x \geq 0; x \neq 1$ Ta có: $(\sqrt{x} - 1)^P > m + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} > m + 1$

Vậy để $(\sqrt{x} - 1)^P > m + 1$ thì $m + 1 < 0 \Rightarrow m < -1$

Bài 3. [VD] Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} - 3}$ và $B = \frac{4}{\sqrt{x} + 3} + \frac{2x - \sqrt{x} - 13}{x - 9} + \frac{\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 9$

1) Đặt $P = \frac{B}{A}$. Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 3}$.

2) Tìm tất cả các giá trị của m thỏa mãn $m\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} + 3).P$.

Hướng dẫn

$$1) \quad P = \frac{B}{A} = \left[\frac{4}{\sqrt{x} + 3} + \frac{2x - \sqrt{x} - 13}{x - 9} + \frac{\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} \right] : \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} - 3} = \frac{4\sqrt{x} - 12 + 2x - \sqrt{x} - 13 - x - 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} : \frac{\sqrt{x} + 5}{\sqrt{x} - 3}$$

$$= \frac{x - 25}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 5} = \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 3}$$

Vậy $P = \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 3}$

2) Với $x \geq 0; x \neq 9$, ta có: $m\sqrt{x} + 1 = (\sqrt{x} + 3).P \Leftrightarrow \sqrt{x} - 5 = m\sqrt{x} + 1 \Leftrightarrow \sqrt{x}(1 - m) = 6$ (*)

Nếu $m = 1$ thì (*) vô nghiệm. Vậy $m \neq 1$, Khi đó: $\sqrt{x} = \frac{6}{1 - m}$

Để tìm được x thì $\frac{6}{1 - m} > 0 \Leftrightarrow 1 - m > 0 \Leftrightarrow m < 1$

Vậy $m < 1$

Bài 4 [VD] Cho các biểu thức $A = \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ và $B = \frac{2}{\sqrt{x} - 2} + \frac{3}{\sqrt{x} + 2} - \frac{x - 5\sqrt{x} + 2}{4 - x}$.

a) Rút gọn B .

b) Cho $P = A.B$ Tìm m để có các giá trị của x thỏa mãn: $mP = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn

a) $B = \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{x-5\sqrt{x}+2}{4-x}$ (với $x \geq 0; x \neq 4$).

$$B = \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{\sqrt{x}+2} + \frac{x-5\sqrt{x}+2}{x-4} = \frac{2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{3(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{x-5\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$B = \frac{2\sqrt{x}+4+3\sqrt{x}-6+x-5\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x}{x-4}$$

b) Với $x \geq 0; x \neq 4$ ta có: $P = A.B = \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{x}{x-4} = \frac{x}{\sqrt{x}-2}$.

Ta có: $mP = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{mx}{\sqrt{x}-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2mx - \sqrt{x} + 2 = 0$ (*)

Để có các giá trị của x thỏa mãn: $mP = \frac{1}{2}$ thì phương trình (*) phải có nghiệm.

+ Với $m = 0$ ta tìm được $x = 4$ (Loại)

+ Với $m \neq 0$, đặt $\sqrt{x} = t$ ($t \geq 0$), ta có phương trình: $2mt^2 - t + 2 = 0$ (**)

Để phương trình (*) có nghiệm thì phương trình (**) phải có nghiệm dương, khi đó:

$$\begin{cases} \Delta_t \geq 0 \\ t_1 + t_2 > 0 \\ t_1 \cdot t_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - 16m \geq 0 \\ \frac{1}{2m} > 0 \\ \frac{2}{2m} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{16} \\ m > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < m \leq \frac{1}{16}$$

Vậy $x \geq 0; x \neq 4$

$$P = 1: \frac{x+2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \text{ với } x > 0$$

Bài 5 [VD] Cho biểu thức

a) Rút gọn P

b) Tính giá trị của P biết $x = 7 - 4\sqrt{3}$

c) Tìm x để $P = 2\sqrt{x} - 1$

d) Tìm m để có giá trị x thỏa mãn $P = m$

e) Tìm giá trị nhỏ nhất của P

Hướng dẫn

a) Với $x^3 > 0$ thì

$$P = 1: \frac{x+2\sqrt{x}-2}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= 1: \frac{x+2\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{x+2\sqrt{x}-2-x+1+x-\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

Vậy với $x > 0$ thì $P = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

b) Với $x = 7 - 4\sqrt{3} = 4 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + 3 = (2 - \sqrt{3})^2$ thỏa mãn điều kiện $x > 0$

Đ $\sqrt{x} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$ (vì $2 > \sqrt{3}$)

Đ $P = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{7-4\sqrt{3}-2-\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}} = \frac{6-3\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 3$

Vậy với $x = 7 - 4\sqrt{3}$ thì $P = 3$

c) $P = 2\sqrt{x} - 1 \hat{=} \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} - 1 \hat{=} x - \sqrt{x} + 1 = 2x - \sqrt{x} \hat{=} x = 1$ (thỏa mãn $x > 0$)

Vậy với $x = 1$ thì $P = 2\sqrt{x} - 1$

d) $P = \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = m \hat{=} x - \sqrt{x} + 1 = m\sqrt{x} \hat{=} x - (m+1)\sqrt{x} + 1 = 0$ (1)

Vì $1^1 > 0$ nên (1) là phương trình bậc hai.

Đặt $t = \sqrt{x} (t > 0)$

(1) trở thành $t^2 - (m+1)t + 1 = 0$ (2)

Ta có $D = (m+1)^2 - 4 = m^2 + 2m - 3 = m^2 - m + 3m - 3$
 $= m(m-1) + 3(m-1) = (m-1)(m+3)$

Phương trình (1) có nghiệm $\cup$ Phương trình (2) có nghiệm dương

TH1: Phương trình (2) có 2 nghiệm dương

$\hat{=} 1^1 > 0$

$$\hat{=} D = (m-1)(m+3) > 0 \hat{=} \begin{cases} m-1 > 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \hat{=} \begin{cases} m > 1 \\ m > -1 \end{cases} \hat{=} m > 1$$

$$\hat{=} S = m+1 > 0$$

$$\hat{=} P = 1 > 0$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

TH2: Phương trình (2) có 2 nghiệm trái dấu

$$U \cdot S = 1 < 0 \text{ (vô lý) } \Rightarrow \text{Loại}$$

TH3: Phương trình (2) có 1 nghiệm dương và 1 nghiệm bằng 0

Với $t = 0$ thay vào (2) ta được $0^2 - (m+1) \cdot 0 + 1 = 0 \Rightarrow 1 = 0$ (vô lý) $\Rightarrow$ Loại

Vậy $m^3 - 1$ là giá trị cần tìm.

$$e) \quad P = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1$$

Vì $x > 0$ nên $\sqrt{x} > 0; \frac{1}{\sqrt{x}} > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô si cho hai số dương $\sqrt{x}; \frac{1}{\sqrt{x}}$ ta được:

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = 1$$

Dấu "=" xảy ra (thỏa mãn $x > 0$)

$\Rightarrow P^3 - 1 = 1$. Vậy giá trị nhỏ nhất của $P = 1$ khi $x = 1$

CHUYÊN ĐỀ:

Tên file: DA<Mã tài liệu><CD...><DẠNG..><Tên DẠNG><Tên GV><Số điện thoại> (Viết không dấu)

Ví dụ: **DA HPT1 CD 1 HE PHUONG TRINH BAC NHAT HAI AN MAI NGOC 0965456243**

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

(ghi lại nội dung chính của bài/ của chương: dạng liệt kê, bảng hoặc sơ đồ tư duy)

1.

...

2.

...

B. BÀI TẬP

DẠNG 1: Căn cứ vào từng dạng toán GV đưa ra bộ câu hỏi trắc nghiệm phù hợp, cố gắng đáp ứng được ở mỗi dạng như sau

PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN (soạn khoảng 12 câu theo các mức độ

NB: 4 câu; TH: 4 câu; VD: 3 câu; VDC: 1 câu)

Câu 1. [NB]

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

Câu 2. [NB]

Câu 3. [NB]

Câu 4. [NB]

Câu 5. [TH] Kết quả của phép tính $\sqrt{49a^2} + 3a$ với $a \geq 0$ là

- A. $10a$. B. $4a$. C. $-4a$. D. $52a$.

Lời giải

Chọn A

Với $a \geq 0$. Ta có: $\sqrt{49a^2} + 3a = \sqrt{(7a)^2} + 3a = |7a| + 3a = 7a + 3a = 10a$.

Câu 6. [TH]

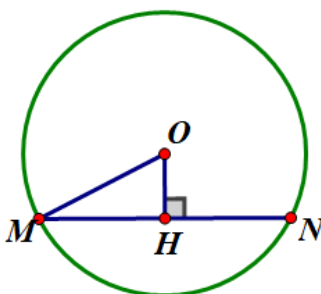
Câu 7. [TH]

Câu 8. [TH]

Câu 9. [VD] Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $MN = R\sqrt{3}$. Kẻ OK vuông góc với MN tại K . Số đo cung nhỏ MN là

- A. 60° . B. 240° . C. 30° . D. 120° .

Lời giải



Chọn D

Kẻ $OH \perp MN$ tại H , khi đó H là trung điểm của MN (theo mối quan hệ vuông góc giữa đường kính

và dây) nên $MH = \frac{MN}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác MOH vuông tại H , có

$$\sin \widehat{MOH} = \frac{MH}{MO} = \frac{R\sqrt{3}}{2R} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ do đó } \widehat{MOH} = 60^\circ$$

Xét tam giác MON cân tại O (Do $OM = ON = R$)

lại có OH là đường cao nên OH đồng thời là đường phân giác của $\widehat{MON}$

$$\text{nên } \widehat{MON} = 2\widehat{MOH} = 2.60^\circ = 120^\circ$$

Xét (O) có $s\widehat{MN} = \widehat{MON} = 120^\circ$ (góc ở tâm chắn cung $\widehat{MN}$)

Câu 10. [VD]

Câu 11. [VD]

Câu 12. [VDC] Cho biểu thức $A = \sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots}}}$ (có vô hạn số $\sqrt{4}$). Giá trị của biểu thức A là

- A. $\frac{1 - \sqrt{17}}{2}$. B. $\frac{1 + \sqrt{17}}{2}$. C. $\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$. D. $\frac{1 + \sqrt{17}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $x = \sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{4}}}}$. Ta có: $x > 0$.

Khi đó: $x^2 = 4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \sqrt{4 + \dots + \sqrt{4}}}}$ p $x^2 = 4 + x$ $\hat{U}$ $x^2 - x - 4 = 0$.

$D = (-1)^2 - 4.1(-4) = 17 > 0$ p Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Vì $x > 0$ suy ra $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$.

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (Soạn khoảng 4 câu): Các khẳng định đúng sai được sắp xếp theo thứ tự từ dễ đến khó, các khẳng định về cùng một nội dung hỏi.

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Một cuộc thi bắn cung có 20 người tham gia. Trong lần bắn đầu tiên có 18 người bắn trúng mục tiêu. Trong lần bắn thứ hai có 15 người bắn trúng mục tiêu. Trong lần bắn thứ ba chỉ có 10 người bắn trúng mục tiêu.

- a) Số người bắn trượt mục tiêu lần đầu là 2.
b) Số người bắn trượt mục tiêu lần thứ hai là 6.
c) Số người bắn trượt mục tiêu trong lần bắn thứ nhất và thứ hai là 8.
d) Số người bắn trúng mục tiêu trong cả ba lần bắn ít nhất là 3.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) S

d) Đ

- Trong lần bắn đầu tiên có 18 người bắn trúng mục tiêu nên a đúng.

- Trong lần bắn thứ hai có 15 người bắn trúng mục tiêu nên số người bắn trượt mục tiêu lần thứ hai là 5. Do đó b sai.

- Trong lần bắn thứ nhất và thứ hai có nhiều nhất 7 người bắn trượt mục tiêu nên c sai.

- Trong cả ba lần bắn nếu số người bắn trượt là các người khác nhau, thì có tối đa 17 người bắn trượt, mỗi người chỉ bắn trượt một lần. Do đó d đúng.

Câu 2.

Câu 3.

Câu 4.

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN (soạn khoảng 6 câu)

Câu 1. [NB]

Câu 2. [NB]

Câu 3. [TH]

Câu 4. [TH]

Câu 5. [VD] Cho đường thẳng $(d): y = (m+2)x + m$ với m là tham số. Các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt các trục tọa độ tại hai điểm A và B sao cho diện tích tam giác $OAB = \frac{1}{2}$ là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $m \in \{-1; 2\}$

Để đường thẳng $(d): y = (m+2)x + m$ cắt trục $Ox; Oy$ thì tại 2 điểm tạo thành một tam giác

là:
$$\begin{pmatrix} m+2 & 0 \\ m & 0 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} m^1 & -2 \\ m^1 & 0 \end{pmatrix}$$

+ Với $x = 0$ thì $y = m$ ta được $B(0; m)$ khi đó $OB = |m|$

+ Với $y = 0$ thì $x = -\frac{m}{m+2}$ ta được $A(-\frac{m}{m+2}; 0)$ khi đó $OA = \left| \frac{m}{m+2} \right|$

Ta có:
$$S_{OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} |m| \cdot \left| \frac{m}{m+2} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{m^2}{m+2} \right| = 1$$

Khi đó $\frac{m^2}{m+2} = 1$ hoặc $\frac{m^2}{m+2} = -1$

* $\frac{m^2}{m+2} = 1$

$m^2 - m - 2 = 0$

$m = -1$ (thỏa mãn) hoặc $m = 2$ (thỏa mãn)

* $\frac{m^2}{m+2} = -1$

$m^2 + m + 2 = 0$ (phương trình vô nghiệm)

Vậy $m \in \{-1; 2\}$.

PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải:

Ví dụ 1 [NB]:

Nội dung

Lời giải

Ví dụ 2 [TH]:

Nội dung

Lời giải

Ví dụ 3 [TH]:

Nội dung

Lời giải

Ví dụ 4 [VD]:

Nội dung

Lời giải

.....

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. [NB] Nội dung

Hướng dẫn

Bài 2. [TH] Nội dung

Hướng dẫn

Bài 3. [VD] Nội dung

Bài [VD] Nội dung

Tên file: DA<Mã tài liệu> <CD...> <DẠNG..> <Tên DẠNG> <Tên GV> <Số điện thoại>
(Viết không dấu)

Ví dụ: **DA HPT1 CD 1 HE PHUONG TRINH BAC NHAT HAI AN MAI NGOC 0965456243**

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Định nghĩa căn bậc hai:

Cho số thực a không âm. Số thực x thỏa mãn $x^2 = a$ được gọi là một căn bậc hai của a .

Định nghĩa căn thức bậc hai:

Với A là biểu thức đại số, ta gọi $\sqrt{A}$ là căn thức bậc hai của A , còn A được gọi là biểu thức lấy căn hoặc biểu thức dưới dấu căn.

2. Các công thức về căn bậc hai:

1) Với biểu thức A bất kì, ta có $\sqrt{A^2} = |A|$, nghĩa là:

$$\sqrt{A^2} = A \text{ khi } A \geq 0 \text{ (tức là } A \text{ nhận giá trị không âm);}$$

$$\sqrt{A^2} = -A \text{ khi } A < 0 \text{ (tức là khi } A \text{ nhận giá trị âm)}$$

2) Với hai biểu thức $A; B$ nhận giá trị không âm, ta có: $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$.

3) Với hai biểu thức $A; B$ mà $B \geq 0$, ta có: $\sqrt{A^2 \cdot B} = |A| \sqrt{B}$.

4) Với hai biểu thức $A; B$ nhận giá trị không âm và $B \neq 0$, ta có: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$.

5) Với hai biểu thức $A; B$ thỏa mãn $AB \geq 0, B \neq 0$, ta có: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{AB}{B^2}} = \frac{\sqrt{AB}}{\sqrt{B^2}} = \frac{\sqrt{AB}}{|B|}$.

6) Với hai biểu thức $A; B$ mà $B > 0$, ta có: $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B}$.

7) Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0$ và $A \neq B^2$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A+B}} = \frac{C(\sqrt{A}-B)}{A-B^2}; \quad \frac{C}{\sqrt{A-B}} = \frac{C(\sqrt{A}+B)}{A-B^2}.$$

8) Với các biểu thức A, B, C mà $A \geq 0, B \geq 0$ và $A \neq B$, ta có:

$$\frac{C}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B}; \quad \frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}.$$

3. Định nghĩa căn bậc ba:

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

+ Cho số thức a . Số thực x thỏa mãn $x^3 = a$ được gọi là căn bậc ba của a .

+ Với A là một biểu thức đại số, ta gọi $\sqrt[3]{A}$ là căn thức bậc ba của A .

B. BÀI TẬP

DẠNG 1: Rút gọn và tính giá trị của biểu thức khi biết giá trị của biến.

PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN (soạn khoảng 12 câu theo các mức độ

NB: 4 câu; TH: 4 câu; VD: 3 câu; VDC: 1 câu)

Câu 1. [NB] Cho biểu thức $A = \frac{2x}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}+2}$, với $x > 0$.

Rút gọn biểu thức A .

- A.** $\sqrt{x}$ **B.** $\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$ **C.** $\frac{1}{(\sqrt{x}+2)}$
- D.** $\frac{1}{\sqrt{x}}$

Lời giải

Chọn A

với $x > 0$. Ta có: $A = \frac{2x}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}+2}$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{x}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{x}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \sqrt{x}$$

Vậy $A = \sqrt{x}$ với $x > 0$

Câu 2. [NB] Cho biểu thức $B = \left(\sqrt{a^2 \cdot \frac{3}{a}} + \sqrt{9 \cdot \frac{a}{3}} + \sqrt{12a^3} \right) : \sqrt{3a}$ với $a > 0$;

- A.** $1+2a$ **B.** $2-2a$
- C.** $2+2a$ **D.** $\frac{1-2a}{3}$

Lời giải

Chọn C

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$B = \left(\sqrt{a^2 \cdot \frac{3}{a}} + \sqrt{9 \cdot \frac{a}{3}} + \sqrt{12a^3} \right) : \sqrt{3a} \quad \text{với } a > 0;$$

$$B = \left(\sqrt{a^2 \cdot \frac{3}{a}} + \sqrt{9 \cdot \frac{a}{3}} + \sqrt{12a^3} \right) : \sqrt{3a}$$

$$B = (\sqrt{3a} + \sqrt{3a} + 2a\sqrt{3a}) : \sqrt{3a}$$

$$B = (2\sqrt{3a} + 2a\sqrt{3a}) : \sqrt{3a}$$

$$B = (\sqrt{3a} + \sqrt{3a} + 2a\sqrt{3a}) : \sqrt{3a}$$

Câu 3. [NB] Cho biểu thức: $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0, x \neq 4$.
Tính giá trị biểu thức A khi $x=6$.

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{-3}{2}$

C. $\frac{9\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{9}{2}$

Lời giải

Chọn D

Thay $x=6$ (TMĐKXĐ) vào biểu thức A , ta có: $A = \frac{6+3}{\sqrt{6}-2} = \frac{9}{\sqrt{4}} = \frac{9}{2}$

Câu 4. [NB] Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{a^4} + a^3\sqrt{a^3} + 1$

A. $2a+1$

B. a^2+a+1

C. $2a^2+1$

D. a^2+a^4+1

Lời giải

Chọn C

$$A = \sqrt{a^4} + a^3\sqrt{a^3} + 1 = a^2 + a^2 + 1 = 2a^2 + 1$$

Câu 5. [TH] Cho hai biểu thức $B = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$

Tính giá trị của biểu thức B khi $x=6-2\sqrt{5}$.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

A. $\frac{2\sqrt{5}-1}{5}$

B. $\frac{2\sqrt{5}-5}{5}$

C. $\frac{2-\sqrt{5}}{5}$

D. $2\sqrt{5}-5$

Lời giải

Chọn B

Với $x = 6 - 2\sqrt{5}$ (Thỏa mãn)

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2} = \sqrt{5} - 1$$

Thay vào A được: $A = \frac{1 - (\sqrt{5} - 1)}{1 + \sqrt{5} - 1} = \frac{2 - \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5} - 5}{5}$

Vậy với $x = 6 - 2\sqrt{5}$ thì $A = \frac{2\sqrt{5} - 5}{5}$

Câu 6. [TH] Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} (x \geq 0; x \neq 4)$ biết $|2x - 5| = 7$.

A. $P = \sqrt{6}$.

B. $P = 1$.

C. $\begin{cases} P = -\sqrt{6} \\ P = -1 \end{cases}$.

D. $\begin{cases} P = \sqrt{6} \\ P = 1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

Với $x \geq 0; x \neq 4$

Ta có: $|2x - 5| = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 = 7 \\ 2x - 5 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6(tm) \\ x = -1(ktm) \end{cases}$

Thay $x = 6$ (TMĐKXD) vào biểu thức, ta có: $P = \frac{6 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{6} - 2} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{6} - 2)}{\sqrt{6} - 2} = \sqrt{6}$

Câu 7. [TH] Tính giá trị biểu thức $A = \frac{x - 3}{\sqrt{x - 2} - 1} (x \geq 2; x \neq 11)$ tại $x = 5 - 2\sqrt{2}$

A. $A = \sqrt{2}$

B. $A = 1 - \sqrt{2}$.

C. $A = -\sqrt{2}$.

D. $A = 2 + 2$.

Lời giải

Chọn A

Thay $x = 5 - 2\sqrt{2}$ (thỏa mãn ĐKXD) vào biểu thức A , ta có:

$$A = \frac{5 - 2\sqrt{2} - 3}{\sqrt{5 - 2\sqrt{2}} - 1} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - 1} = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} - 1} = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{\sqrt{2} - 1 - 1} = \frac{2(1 - \sqrt{2})}{\sqrt{2}(1 - \sqrt{2})} = \sqrt{2}.$$

Câu 8. [TH] Tính giá trị biểu thức $D = \frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}} + \frac{1}{\sqrt{x-1}+3}$ ($x \geq 1$) biết $x=5$

- A. $D = \frac{2\sqrt{2}}{5}$. B. $D = 3\sqrt{2}$. C. $D = \frac{8}{15}$. D. $D = \sqrt{3} + 1$.

Lời giải

Chọn C

Thay $x=5$ (thỏa mãn ĐKXD) vào biểu thức D, ta có:

$$D = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{5-1}}} + \frac{1}{\sqrt{5-1}+3} = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{4}}} + \frac{1}{\sqrt{4}+3} = \frac{1}{\sqrt{5+4}} + \frac{1}{2+3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$$

Câu 9. [VD] Tính giá trị biểu thức $P = \frac{9\sqrt{x}-4x}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$ ($x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$) tại $x=5$.

- A. $\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$. B. $\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}+2}$. C. $\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$. D. $\frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$.

Lời giải

Chọn D

Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$, ta có: $P = \frac{9\sqrt{x}-4x}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+3}{3-\sqrt{x}}$

$$= \frac{9\sqrt{x}-4x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{(2\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{9\sqrt{x}-4x+x-2\sqrt{x}-3+2x-\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{-x+6\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{-(\sqrt{x}-3)^2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$$

Thay $x=5$ (thỏa mãn ĐKXD) vào biểu thức ta có: $P = \frac{-\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}-2}$

$$P = \left(\frac{2\sqrt{xy}}{x-y} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad (\text{với } x \geq 0; y \geq 0; x \neq y)$$

Câu 10. [VD] Tính giá trị biểu thức

biết $\frac{x}{y} = \frac{4}{25}$.

A. $\frac{7}{5}$.

B. $-\frac{10}{7}$.

C. $-\frac{20}{7}$.

D. $-\frac{7}{10}$.

Lời giải

Chọn B

với $x \geq 0; y \geq 0; x \neq y$, ta có:

$$P = \left(\frac{2\sqrt{xy}}{x-y} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2\sqrt{x} - 2\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$= \left(\frac{4\sqrt{xy}}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} - \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right) \cdot \frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$= \frac{4\sqrt{xy} - x - 2\sqrt{xy} - y}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \cdot \frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$= \frac{-(x - 2\sqrt{xy} + y)}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \cdot \frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$= \frac{-(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{2(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \cdot \frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$= \frac{-(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{2(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \cdot \frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$= \frac{-2\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

Ta có: $\frac{x}{y} = \frac{4}{25}$. (TMĐKXD) suy ra: $\begin{cases} x = 4t \\ y = 25t \end{cases} (t > 0)$ Thay vào biểu thức ta có:

$$P = \frac{-2\sqrt{25t}}{\sqrt{4t} + \sqrt{25t}} = \frac{-10\sqrt{t}}{2\sqrt{t} + 5\sqrt{t}} = \frac{-10\sqrt{t}}{7\sqrt{t}} = -\frac{10}{7}.$$

Câu 11. [VD] Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) : \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) (x \neq 1)$$

Tính giá trị của A khi $x = \sqrt{3} + \sqrt{8}$.

A. $A = -2\sqrt{3}$.

B. $A = -2\sqrt{2}$.

C. $A = -2$.

D.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) : \left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right) \\ &= \frac{x^2+2x+1 - x^2+2x-1}{(x-1)(x+1)} : \frac{2-x^2-1+x-1}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{4x}{(x-1)(x+1)} : \frac{-x^2+x}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{4x}{(x-1)(x+1)} : \frac{-x(x-1)}{(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{4x}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{-(x+1)}{x} \\ &= \frac{-4}{x-1} \end{aligned}$$

Ta có $x = \sqrt{3+\sqrt{8}}$. (thỏa mãn ĐKXD)

$$x = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1, \text{ thay vào biểu thức ta có: } A = \frac{-4}{\sqrt{2}+1-1} = \frac{-4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

Câu 12. [VDC] Cho biểu thức $P = \frac{x}{\sqrt{xy}+y} + \frac{y}{\sqrt{xy}-x} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}}$ ($xy > 0; x \neq \pm y$) với $x+y=7$ và $x.y=10$. Khi đó giá trị của biểu thức P là :

A. $P = \pm \frac{7}{3}$

B. $P = \frac{7}{5}$

C.

$P = \pm \frac{5}{3}$

D. $P = \frac{1}{5}$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} P &= \frac{x}{\sqrt{xy}+y} + \frac{y}{\sqrt{xy}-x} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \quad (xy > 0; x \neq \pm y) \\ &= \frac{x}{\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})} + \frac{y}{\sqrt{x}(\sqrt{y}-\sqrt{x})} - \frac{x+y}{\sqrt{xy}} \\ &= \frac{x\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y})}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} - \frac{y\sqrt{y}(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} - \frac{(x+y)(x-y)}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \\ &= \frac{x^2 - x\sqrt{xy} - y\sqrt{xy} - y^2 - x^2 + y^2}{\sqrt{xy}(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})} \\ &= \frac{-\sqrt{xy}(x+y)}{\sqrt{xy}(x-y)} \end{aligned}$$

$$= \frac{-(x+y)}{x-y}$$

Ta có: $\begin{cases} x+y=7 \\ x \cdot y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \text{ (t/m ĐKXD)} \text{ hoặc } \begin{cases} x=5 \\ y=2 \end{cases} \text{ (t/m ĐKXD)}$

Thay vào biểu thức ta có: $P = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$ hoặc $P = \frac{-7}{3} = -\frac{7}{3}$

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (Soạn khoảng 4 câu): Các khẳng định đúng sai được sắp xếp theo thứ tự từ dễ đến khó, các khẳng định về cùng một nội dung hỏi.

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

$$P = \sqrt{\left(6\sqrt{\frac{4}{25}} - \sqrt{\frac{9}{25}}\right) \cdot 15}.$$

Câu 1. Cho biểu thức Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Giá trị của biểu thức P là số nguyên.
- B. Giá trị của biểu thức P là số hữu tỉ.
- C. Giá trị của biểu thức P là số vô tỉ.
- D. Giá trị của biểu thức P là số nguyên dương.

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) S

$$P = \sqrt{\left(6\sqrt{\frac{4}{25}} - \sqrt{\frac{9}{25}}\right) \cdot 15} = \sqrt{\left(6 \cdot \frac{2}{5} - \frac{3}{5}\right) \cdot 15} = \sqrt{\left(\frac{12}{5} - \frac{3}{5}\right) \cdot 15} = \sqrt{\frac{9}{5} \cdot 15} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

Câu 2. Cho biểu thức $A = \frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x}$ (với $x \geq 0, x \neq 4$). Các câu sau Đúng hay Sai?

- a) Với $x \geq 0, x \neq 4$ A có giá trị là một số âm.
- b) Giá trị của A khi $x=4$ là 1.
- c) Giá trị của A khi $x=5$ là một số vô tỉ.
- d) Khi $x=0$ thì A có giá trị là số tự nhiên.

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) Đ

$$A = \frac{1}{2+\sqrt{x}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{4-x} = \frac{2-\sqrt{x}+2+\sqrt{x}-2\sqrt{x}}{(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})} = \frac{4-2\sqrt{x}}{(2+\sqrt{x})(2-\sqrt{x})} = \frac{2}{2+\sqrt{x}}$$

a) Với $x \geq 0, x \neq 4$ thì $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 > 0 \Rightarrow A = \frac{2}{2+\sqrt{x}} > 0$ (Sai)

b) Thay $x=4$ (thỏa mãn ĐKXD) vào biểu thức, ta có $A = \frac{2}{2+\sqrt{4}} = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ (Sai)

$$A = \frac{2}{2 + \sqrt{5}} = \frac{2(2 - \sqrt{5})}{4 - 5} = \frac{2 - 2\sqrt{5}}{-1} = 2\sqrt{5} - 2 \quad \text{là}$$

c) Thay $x = 5$ (thỏa mãn ĐKXĐ) vào biểu thức, ta có số vô tỉ (Đúng)

$$A = \frac{2}{2 + \sqrt{0}} = \frac{2}{2 + 0} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{là số tự nhiên (Đúng)}$$

Câu 3. Cho biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 4} + \frac{4}{\sqrt{x} - 4} \right) : \frac{x + 16}{x + 4\sqrt{x}}$ (với $x > 0; x \neq 16$). Các câu sau Đúng hay Sai?

a) Kết quả rút gọn của B là $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 4}$.

b) Giá trị của B khi $x = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ là $\frac{2\sqrt{3} - 1}{11}$.

c) Khi x là một số chính phương thì B có giá trị là một số hữu tỉ.

d) Khi $x > 16$ thì B có giá trị là một số dương.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) Đ

d) Đ

a) Với $x > 0; x \neq 16$, ta có:

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 4} + \frac{4}{\sqrt{x} - 4} \right) : \frac{x + 16}{x + 4\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 4) + 4(\sqrt{x} + 4)}{(\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 4)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 4)}{x + 16} \\ &= \frac{x + 16}{(\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 4)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 4)}{x + 16} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 4} \quad (\text{Đúng}) \end{aligned}$$

b) Thay $x = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ (thỏa mãn ĐKXĐ) vào biểu thức ta có:

$$B = \frac{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - 4} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}}{\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} - 4} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1 - 4} = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 5)}{2 - 25} = \frac{3 - 4\sqrt{2}}{23} \quad (\text{Sai})$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

c) Với $x > 0; x \neq 16$, ta có: $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 4}$

Khi x là một số chính phương thì $\sqrt{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \in \mathbb{Z} \\ \sqrt{x} - 4 \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow B \in \mathbb{Q}$. (Đúng)

d) Khi $x > 16$ thì $\begin{cases} \sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{x} - 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow B > 0$. (Đúng)

Câu 4. Cho biểu thức $D = 1: \left(\frac{x + 2\sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right)$ (với $x > 0$)

a) Với $x > 0$ thì $D > 0$.

b) Với $|x - 3| = 1$ thì $D \in \left\{ \frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{2} - 2}{2} \right\}$.

c) Với $x^2 + 3x + 2 = 0$ thì $D \in \left\{ -1; \frac{3\sqrt{2} - 2}{2} \right\}$.

d) Với $x \neq 1$ thì $D \geq 1$.

Lời giải

a) Đ

b) Đ

c) S

d) S

Với $x > 0$ ta có: $D = 1: \left(\frac{x + 2\sqrt{x} - 2}{x\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right)$

$$= 1: \left[\frac{x + 2\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)} - \frac{\sqrt{x} - 1}{x - \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right]$$

$$= 1: \frac{x + 2\sqrt{x} - 2 - x + 1 + x - \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{x + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{x - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

a) Với $x > 0$ thì $D = \frac{x - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}{\sqrt{x}} > 0$ (Đúng)

b) Ta có: $|x - 3| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 1 \\ x - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4(TM) \\ x = 2(TM) \end{cases}$

Với $x = 4$ thì $D = \frac{4 - \sqrt{4+1}}{\sqrt{4}} = \frac{4 - 2+1}{2} = \frac{3}{2}$

Với $x = 2$ thì $D = \frac{2 - \sqrt{2+1}}{\sqrt{2}} = \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2} - 2}{2}$.

Vậy $D \in \left\{ \frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{2} - 2}{2} \right\}$. (Đúng)

c) Với $x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1(KTM) \\ x = -2(KTM) \end{cases}$

Vậy $D \in \emptyset$ (Sai)

d) Với $x > 0$ ta có: $D = \frac{x - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} - 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) - 1$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có: $D = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) - 1 \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} - 1 = 2 - 1 = 1$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 1$ mà theo bài ra $x \neq 1$ nên $D > 1$. (Sai)

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN (soạn khoảng 6 câu)

Câu 1. [NB] Kết quả rút gọn biểu thức $A = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} - \sqrt{3}$ là:

Lời giải

Đáp án: $A = 2$

$$A = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} - \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2} - \sqrt{3} = |2+\sqrt{3}| - \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3} - \sqrt{3} = 2$$

Câu 2. [NB] Kết quả rút gọn biểu thức $B = \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{\sqrt{x}+2} - \frac{x-5\sqrt{x}+2}{4-x}$ là:
Lời giải

Đáp án: $B = \frac{x}{x-4}$

với $x \geq 0, x \neq 4$, ta có:

$$B = \frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{\sqrt{x}+2} + \frac{x-5\sqrt{x}+2}{x-4}$$
$$B = \frac{2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{3(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{x-5\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$
$$B = \frac{2(\sqrt{x}+2) + 3(\sqrt{x}-2) + x-5\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$
$$B = \frac{2\sqrt{x}+4+3\sqrt{x}-6+x-5\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$
$$B = \frac{x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x}{x-4}$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 4$ thì $B = \frac{x}{x-4}$

Câu 3. [TH] Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} - \frac{5}{x+\sqrt{x}-6} - \frac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

Giá trị của biểu thức A khi $x = 6 + 4\sqrt{2}$ là:

Lời giải

Đáp án: $A = 1 - \sqrt{2}$

với $x \geq 0; x \neq 4$

$$A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} - \frac{5}{x+\sqrt{x}-6} - \frac{1}{\sqrt{x}-2}$$
$$= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) - 5(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}$$
$$= \frac{x-4-5-\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{x - \sqrt{x} - 12}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 4)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2)}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} - 2}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$.

$$x = 6 + 4\sqrt{2} = (2 + \sqrt{2})^2 \quad (\text{TMĐKXĐ})$$

$$\sqrt{x} = 2 + \sqrt{2}$$

$$A = \frac{(2 + \sqrt{2}) - 4}{(2 + \sqrt{2}) - 2} = \frac{\sqrt{2} - 2}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2}$$

Thay vào biểu thức (*) ta có:

$$E = \frac{1 - a^2}{48} \sqrt{\frac{36}{(a - 1)^2}}; (a < 1).$$

Câu 4. [TH] Cho biểu thức

Sau khi rút gọn biểu thức, ta được kết quả là:

Lời giải

Đáp án: $E = \frac{1}{8}(1 + a).$

$$E = \frac{1 - a^2}{48} \sqrt{\frac{36}{(a - 1)^2}}; (a < 1).$$

$$= \frac{(1 - a)(1 + a)}{48} \cdot \frac{6}{1 - a}$$

$$= \frac{1 + a}{8} = \frac{1}{8}(1 + a)$$

Câu 5. [VD] Cho biểu thức: $A = \frac{x - 9}{\sqrt{x} + 3}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{2}{\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{x + 4}{\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Giá trị của biểu thức $C = A.B$ tại $x = 9$ là:

Lời giải

Đáp án: $C = 0$

$$B = \frac{x - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{x + 4}$$

Với $x \geq 0$; $x \neq 4$ ta có

$$= \frac{x + 4}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{x + 4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

$$C = A.B = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 2}$$

Với $x \geq 0$; $x \neq 4$ Tính được:

$$\text{Thay } x = 9 \text{ (thỏa mãn ĐKXĐ) vào biểu thức, ta có: } C = \frac{\sqrt{9} - 3}{\sqrt{9} + 2} = \frac{3 - 3}{3 + 2} = 0$$

Câu 6. [VD] Cho biểu thức: $P = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{3}{\sqrt{x}-1} + \frac{2\sqrt{x}+5}{1-x} \right)$ (với $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4$)

Giá trị của biểu thức P tại $x = \frac{8}{3 - \sqrt{5}}$ là:

Lời giải

Đáp án: $P = \frac{7+3\sqrt{5}}{4}$

$$P = \frac{2x+1 - \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{3(\sqrt{x}+1) - 2\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

Ta có:

$$P = \frac{2x+1 - x + \sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$P = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-2}$$

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \text{ . ĐKXĐ: } x \geq 0 \text{ và } x \neq 4 \text{ .}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$x = \frac{8(3+\sqrt{5})}{9-5} = 6+2\sqrt{5} = (\sqrt{5}+1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{5}+1 \quad (\text{thỏa mãn ĐKXD}).$$

Thay vào biểu thức P , ta có:

$$P = \frac{\sqrt{5}+1+1}{\sqrt{5}+1-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \frac{7+3\sqrt{5}}{4}$$

PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải:

BÀI TẬP MẪU

$$A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x}; \quad B = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} \quad \text{với } 0 \leq x, x \neq 9.$$

Ví dụ 1 [NB]: Cho hai biểu thức:

1. Tính giá trị B tại $x = 36$.
2. Rút gọn A .

Lời giải

1. Thay $x = 36$ (TMĐK), vào biểu thức B , ta được:

$$B = \frac{\sqrt{36}-3}{\sqrt{36}+2} = \frac{6-3}{6+2} = \frac{3}{8}$$

Vậy với $x = 36$ thì $B = \frac{3}{8}$

2. Với $0 \leq x, x \neq 9$, thì:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} + \frac{3-11\sqrt{x}}{9-x} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} - \frac{3-11\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} + \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} - \frac{3-11\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{2x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} + \frac{x+4\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} - \frac{3-11\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \end{aligned}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$= \frac{2x - 6\sqrt{x} + x + 4\sqrt{x} + 3 - 3 + 11\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{3x + 9\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$$

Vậy với $0 \leq x, x \neq 9$, thì $A = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$

Ví dụ 2 [TH]: Cho biểu thức: $P = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tính giá trị của P khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Lời giải

a. Với $x \geq 0$ và $x \neq 1$ ta có

$$P = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$= \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

Vậy với $x \geq 0$ và $x \neq 1$, thì $P = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$

b) Ta có $x = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$ (thỏa mãn ĐKXD)

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} - 1$$

Thay $x = 3 - 2\sqrt{2}$ và $\sqrt{x} = \sqrt{2} - 1$ vào P ta có

$$P = \frac{\sqrt{2} - 1}{3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} - 1 + 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{3 - \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{7}$$

KL : Vậy tại $x = 3 - 2\sqrt{2}$ thì $P = \frac{2\sqrt{2} - 1}{7}$

Ví dụ 3 [TH]:

$$A = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2} \quad \text{và} \quad B = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2} - \frac{3}{\sqrt{x} + 2} + \frac{12}{4 - x} \quad \text{với } x \geq 0, x \neq 4.$$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = \frac{1}{36}$

b) Chứng minh rằng: $B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2}$

Lời giải

a) $A = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2}$

Với $x = \frac{1}{36}$ (thỏa mãn với $x \geq 0, x \neq 4$)

Nên thay $x = \frac{1}{36}$ vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{\frac{1}{36}} + 2}{\sqrt{\frac{1}{36}} - 2} = \frac{\frac{1}{6} + 2}{\frac{1}{6} - 2} = -\frac{13}{11}$$

Vậy khi $x = \frac{1}{36}$ thì $A = -\frac{13}{11}$

b) Với $x \geq 0, x \neq 4$ ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2} - \frac{3}{\sqrt{x} + 2} + \frac{12}{4 - x}$$

$$B = \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{3(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{12}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$B = \frac{x + 4\sqrt{x} + 4 - 3\sqrt{x} + 6 - 12}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$B = \frac{x + \sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2}$$

$$B = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2}$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 4$ thì

Ví dụ 4 [VD]: Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 5}$ và $B = \frac{4}{\sqrt{x} + 3} + \frac{2x - \sqrt{x} - 13}{x - 9} + \frac{\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}}$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

a) Chứng minh $B = \frac{x - 25}{x - 9}$.

b) Tính giá trị của biểu thức $P = B.A$ khi x thỏa mãn phương trình $x - 7\sqrt{x} + 12 = 0$

Lời giải

a) Với $x \geq 0; x \neq 9$. ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{4}{\sqrt{x} + 3} + \frac{2x - \sqrt{x} - 13}{x - 9} + \frac{\sqrt{x}}{3 - \sqrt{x}} \\ &= \frac{4(\sqrt{x} - 3) + 2x - \sqrt{x} - 13 - \sqrt{x}(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \\ &= \frac{4\sqrt{x} - 12 + 2x - \sqrt{x} - 13 - x - 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)} \\ &= \frac{x - 25}{x - 9} \quad (\text{điều phải chứng minh}) \end{aligned}$$

b) Với $x \geq 0; x \neq 9$. ta có:

$$B = \frac{x - 25}{x - 9}$$

$$P = B.A = \frac{x - 25}{x - 9} \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 5} = \frac{(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} + 5)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 5} = \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 3}$$

Ta có: $x - 7\sqrt{x} + 12 = 0$

$$(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} - 3 = 0 \\ \sqrt{x} - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 9 (KTM) \\ x = 16 (TM) \end{cases}$$

Thay $x = 16$ vào biểu thức P , ta có: $P = \frac{\sqrt{16} - 5}{\sqrt{16} + 3} = \frac{4 - 5}{4 + 3} = \frac{-1}{7}$.

Vậy $P = \frac{-1}{7}$.

$$A = \frac{\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x} + 2}$$

. Tính giá trị của A khi $x = 36$.

b) Rút gọn biểu thức $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 4} + \frac{4}{\sqrt{x} - 4} \right) : \frac{x + 16}{\sqrt{x} + 2}$ (với $x \geq 0; x \neq 16$).

Hướng dẫn

a) Với $x = 36$ (TMĐKXD), thay $x = 36$ vào A

ta có: $A = \frac{\sqrt{36} + 4}{\sqrt{36} + 2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$

b) Với $x \geq 0, x \neq 16$ ta có:

$$B = \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 4)}{x - 16} + \frac{4(\sqrt{x} + 4)}{x - 16} \right) \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 16}$$

$$= \frac{(x + 16)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 16)(x + 16)}$$

$$= \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 16}$$

$$\frac{\sqrt{x} + 2}{x - 16}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 16}$ Với $x \geq 0, x \neq 16$

Bài 2. [TH] Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x} - 7}{x - 5\sqrt{x} + 6} + \frac{\sqrt{x} + 3}{2 - \sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$; với $x \geq 0; x \neq 4$ và $x \neq 9$

a) Rút gọn biểu thức A.

b) Tính A khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$.

Hướng dẫn

a) Với $x \geq 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$, ta có:
$$A = \frac{\sqrt{x}-7}{x-5\sqrt{x}+6} + \frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{x}-7}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{\sqrt{x}-7-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)+(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-7-x+9+2x-4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} \end{aligned}$$

b) Ta có $x = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2$ (Thoả mãn $x \geq 0$; $x \neq 4$; $x \neq 9$)

$$\Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} - 1$$

Thay $\sqrt{x} = \sqrt{2} - 1$ vào A ta có:
$$A = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-4} = \frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+4)}{(\sqrt{2}-4)(\sqrt{2}+4)} = \frac{2-3\sqrt{2}}{14}$$

$$P = \left(2 - \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-3} \right) : \left(\frac{6\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) \quad (x \geq 0; x \neq \frac{9}{4}).$$

Bài 3. [VD] Cho biểu thức

a) Rút gọn P.

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}$.

Hướng dẫn

$$a) \quad P = \left(2 - \frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}-3} \right) : \left(\frac{6\sqrt{x}+1}{2x-\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \right) \quad (x \geq 0; x \neq \frac{9}{4}).$$

$$= \frac{4\sqrt{x}-6-\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}-3} : \left(\frac{6\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-3)} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-3)} \right)$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$= \frac{3\sqrt{x} - 5}{2\sqrt{x} - 3} : \frac{6\sqrt{x} + 1 + 2x - 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{3\sqrt{x} - 5}{2\sqrt{x} - 3} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 3)}{2x + 3\sqrt{x} + 1}$$

$$= \frac{3\sqrt{x} - 5}{2\sqrt{x} - 3} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{3\sqrt{x} - 5}{2\sqrt{x} + 1}$$

b) $x = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{4}$. (thỏa mãn ĐKXĐ) suy ra: $\sqrt{x} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \Rightarrow P = \frac{6 - 13\sqrt{2}}{4}$

Bài 4 [VDC] Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{\sqrt{a-2} + 2}{3} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a-2}}{3 + \sqrt{a-2}} + \frac{a+7}{11-a} \right) : \left(\frac{3\sqrt{a-2} + 1}{a - 3\sqrt{a-2} - 2} - \frac{1}{\sqrt{a-2}} \right) \quad (a > 2; a \neq 11)$$

a) Rút gọn P .

b) Tính giá trị của biểu thức P khi $a = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{4}$

Hướng dẫn

a) Đặt $\sqrt{a-2} = x$, biểu thức có dạng:

$$P = \left(\frac{x+2}{3} \right) \cdot \left(\frac{x}{3+x} + \frac{x^2+2+7}{11-(x^2+2)} \right) : \left(\frac{3x+1}{x^2-3x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$P = \frac{x+2}{3} \cdot \left(\frac{x}{3+x} + \frac{x^2+9}{9-x^2} \right) : \frac{3x+1-(x-3)}{x(x-3)}$$

$$P = \frac{x+2}{3} \cdot \frac{x(3-x)+x^2+9}{(3+x)(3-x)} : \frac{2x+4}{x(x-3)}$$

$$P = \frac{x+2}{3} \cdot \frac{3x+9}{(3+x)(3-x)} \cdot \frac{x(x-3)}{2(x+2)}$$

$$P = \frac{(x+2) \cdot 3(x+3) \cdot x(x-3)}{3(3+x) \cdot (3-x) \cdot 2(x+2)}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$P = \frac{-x}{2}$$

Vậy $P = \frac{-\sqrt{a-2}}{2}$ Với $a > 2; a \neq 11$

b) Với $a > 2; a \neq 11$, ta có: $P = \frac{-\sqrt{a-2}}{2}$

Thay $a = 5 - 2\sqrt{2}$ (thỏa mãn ĐKXĐ) vào biểu thức, ta có:

$$P = \frac{-\sqrt{5-2\sqrt{2}-2}}{2} = \frac{-\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{2} = \frac{-\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}{2} = \frac{-\sqrt{2}+1}{2}$$

DẠNG 2: Rút gọn và giải phương trình, bất phương trình chứa biểu thức rút gọn.

PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN (soạn khoảng 12 câu theo các mức độ

NB: 4 câu; TH: 4 câu; VD: 3 câu; VDC: 1 câu)

Câu 1. [NB] Tìm x để biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2}$, với $x > 0$ có giá trị bằng -1 .

A. $x = \frac{1}{2}$

B. $x = \frac{1}{3}$

C. $x = \frac{1}{4}$

D. $x = 3$

Lời giải

Chọn C

$$A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} = -1$$

$$\sqrt{x}-3 = -\sqrt{x}-2$$

$$2\sqrt{x} = 1$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Câu 2. [NB] Tìm x để biểu thức $E = \sqrt{\frac{2x-3}{x-1}}$ (với $x \geq \frac{3}{2}$) có giá trị bằng 2 .

A. $x = -2$.

B. $x = \frac{1}{2}$.

C. $x = -\frac{1}{3}$.

D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn B

$$E = \sqrt{\frac{2x-3}{x-1}} = 2$$

$$\frac{2x-3}{x-1} = 4$$

$$2x-3 = 4x-4$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

Câu 3. [NB] Tìm x để biểu thức $B = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$; với $x > 0$ có giá trị bằng $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

A. $x = 3 + 2\sqrt{2}$

B. $x = \sqrt{2} - 1$

C. $x = 3 - 2\sqrt{2}$

D. $x = 3$

Lời giải

Chọn C

$$B = \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{x}+1 = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{2} - 1$$

$$x = 3 - 2\sqrt{2}$$

Câu 4. [NB] Rút gọn $N = \left(\frac{\sqrt{x}}{x-4} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{2}$ ta được kết quả $N = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$.

Với giá trị nào của x thì $N = \frac{3}{4}$?

A. $x = 4$.

B. $x = 1$.

C. $x = 9$.

D. Không tồn tại x .

Lời giải

Chọn A

$$N = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{3}{4}$$

$$4\sqrt{x}+4 = 3\sqrt{x}+6$$

$$\sqrt{x} = 2$$

$$x = 4$$

Câu 5. [TH] Cho $A = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)$.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Số các giá trị của x sao cho $A = 1 - \sqrt{x}$ là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Câu 6. [TH] Cho biểu thức: $Q = \left(\frac{\sqrt{y}}{x + \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{y}}{x - \sqrt{xy}} \right) : \frac{2\sqrt{xy}}{x - y}; x > 0, y > 0, x \neq y$

Tìm giá trị của x để $Q = 1$.

A. $x = 1$

B. $x = 2$

C. $x = -3$

D. $x = 3$

Lời giải

Chọn A

$x > 0, y > 0, x \neq y$ ta có:

Với

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{\sqrt{y}}{x + \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{y}}{x - \sqrt{xy}} \right) : \frac{2\sqrt{xy}}{x - y} \\ &= \left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \right) : \frac{2\sqrt{xy}}{x - y} \\ &= \frac{\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} : \frac{2\sqrt{xy}}{x - y} \\ &= \frac{\sqrt{xy} - y + \sqrt{xy} + y}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \cdot \frac{x - y}{2\sqrt{xy}} \\ &= \frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \cdot \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Vậy $Q = \frac{1}{\sqrt{x}}$, với $x > 0, y > 0, x \neq y$

Ta có $Q = \frac{1}{\sqrt{x}}$, với $x > 0, y > 0, x \neq y$

Để $Q = 1$ thì $\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (TMĐKXD)

- Câu 7. [TH]** Cho $M = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5} (x \geq 0; x \neq 25)$. Số các giá trị của x sao cho $|M| = \frac{1}{4}$ là:
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{aligned} M &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - \frac{10\sqrt{x}}{x-25} - \frac{5}{\sqrt{x}+5} (x \geq 0; x \neq 25) \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+5) - 10\sqrt{x} - 5(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\ &= \frac{x + 5\sqrt{x} - 10\sqrt{x} - 5\sqrt{x} + 25}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-5)^2}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5} \\ |M| = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow \left| \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5} \right| = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5} = \frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5} = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x}-20 = \sqrt{x}+5 \\ 4\sqrt{x}-20 = -\sqrt{x}-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x} = 25 \\ 5\sqrt{x} = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{625}{9} (TM) \\ x = 9 (TM) \end{cases} \end{aligned}$$

- Câu 8. [TH]** Cho $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{6\sqrt{x}-4}{x-1} (x \geq 0; x \neq 1)$. Giá trị của x để $P < \frac{1}{2}$ là:
- A. $\begin{cases} 0 < x \leq 9 \\ x \neq 1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} 0 < x < 9 \\ x \neq 1 \end{cases}$. C. $\begin{cases} 0 \leq x < 9 \\ x \neq 1 \end{cases}$. D. $\begin{cases} 0 \leq x \leq 9 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{6\sqrt{x}-4}{x-1} (x \geq 0; x \neq 1) \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) + 3(\sqrt{x}-1) - 6\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \end{aligned}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$= \frac{x + \sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 3 - 6\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$$

Đề $P < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} < \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{2(\sqrt{x} - 1) - \sqrt{x} - 1}{2(\sqrt{x} + 1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} - 2 - \sqrt{x} - 1}{2(\sqrt{x} + 1)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} - 3}{2(\sqrt{x} + 1)} < 0$$

(*)

Với $x \geq 0; x \neq 1 \Rightarrow 2(\sqrt{x} + 1) > 0$

Bpt (*) $\Leftrightarrow \sqrt{x} - 3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9$

Kết hợp với ĐKXD: $\begin{cases} 0 \leq x < 9 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Câu 9. [VD] Cho hai biểu thức: $A = \frac{x+7}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2x-\sqrt{x}-3}{9-x}$

Tìm x để biểu thức $P = \frac{1}{B} + A$ có giá trị bằng 6.

A. $x=1; x=16$

B. $x=1; x=4$

C. $x=-1; x=16$

D. $x=-1; -4$

Lời giải

Chọn A

Với $x \geq 0; x \neq 9$ ta có

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} + \frac{2x-\sqrt{x}-3}{9-x}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{2x-\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{x-3\sqrt{x}+2x+6\sqrt{x}-\sqrt{x}-3-2x+\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \frac{x+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$$

Vậy với $x \geq 0$; $x \neq 9$ thì $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

Với $x > 0$; $x \neq 9$ ta có $A = \frac{x+7}{\sqrt{x}}$; $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

Khi đó: $P = \frac{1}{B} + A = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} + \frac{x+7}{\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}$

Theo bài ra ta có:

$$P=6 \Leftrightarrow \frac{x+\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}=6 \Rightarrow x+\sqrt{x}+4=6\sqrt{x}$$

$$x-5\sqrt{x}+4=0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-4)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x}-1)=0 \\ (\sqrt{x}-4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(\text{TM}) \\ x=16(\text{TM}) \end{cases}$$

Vậy $x=1$; $x=16$ là các giá trị cần tìm.

Câu 10. [VD] Cho biểu thức $B = \left(\frac{3}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x} \right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + 1 \right)$ (với $0 \leq x < 1$). Tìm giá trị của x để biểu thức $B = \sqrt{3} - 1$.

A. $x = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$.

B. $x = 2 + \sqrt{3}$

C. $x = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

D. $x = 2\sqrt{3} - 3$

Lời giải

Chọn D

$$B = \left(\frac{3}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x} \right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + 1 \right) \quad (\text{với } 0 \leq x < 1).$$
$$= \frac{3+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}} : \frac{3+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$= \frac{3 + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}}{3 + \sqrt{1-x^2}}$$
$$= \sqrt{1-x}$$

Để biểu thức $B = \sqrt{3} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x} = \sqrt{3} - 1$

$$\Leftrightarrow 1-x = 4 - 2\sqrt{3}$$
$$\Leftrightarrow x = 2\sqrt{3} - 3$$

Câu 11. [VD] Cho biểu thức $Q = 3x - \sqrt{x^2 - 8x + 16}$. Tìm giá trị của x để biểu thức $Q = 5$.

A. $x \in \left\{ \frac{1}{2}; \frac{9}{4} \right\}$.

B. $x = \frac{9}{4}$.

C. $x = \frac{1}{2}$.

D. $x \in \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{9}{4} \right\}$.

Lời giải

Chọn A

Để $Q = 5 \Leftrightarrow Q = 3x - \sqrt{x^2 - 8x + 16} = 5$

$$\Leftrightarrow 3x - 5 = \sqrt{x^2 - 8x + 16} \text{ (đk : } x \geq \frac{5}{3} \text{)}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 5 = \sqrt{(x-4)^2}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 5 = |x - 4|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 3x - 5 \\ x - 4 = 5 - 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 1 \\ 4x = 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{1}{2}; \frac{9}{4} \right\}$.

$$A = \frac{\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{x^2-4}+x+2} \quad (x \geq 0, x \neq 4).$$

Câu 12. [VDC] Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{x^2-4}+x+2}$ ($x \geq 0, x \neq 4$). Tìm giá trị của x để biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

A. $x = \frac{24\sqrt{3}+10}{11}$.

B. $x = 3\sqrt{2} + 2$.

C. $x = 2\sqrt{3} - 1$.

D. $x = \frac{24\sqrt{3}-10}{11}$.

Lời giải

Chọn A

Với ($x \geq 0, x \neq 4$).

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$A = \frac{\sqrt{2x+2\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{x^2-4}+x+2} = \frac{\sqrt{(x+2)+2\sqrt{x^2-4}+(x-2)}}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})} = \frac{(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})^2}{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2})} = \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}$$

$$\text{Đề } A = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = \frac{\sqrt{3}-1-2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-2}{x+2}} = \frac{\sqrt{3}-3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x+2} = \frac{12-6\sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x-8=12x+24-6\sqrt{3}x-12\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (6\sqrt{3}-8)x=32-12\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{32-12\sqrt{3}}{6\sqrt{3}-8} = \frac{2(16-6\sqrt{3})}{2(3\sqrt{3}-4)} = \frac{(16-6\sqrt{3})(3\sqrt{3}+4)}{27-16} = \frac{48\sqrt{3}+64-54-24\sqrt{3}}{11} = \frac{24\sqrt{3}+10}{11} \quad (\text{th$$

ỏa mãn ĐKXD)

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (Soạn khoảng 4 câu): Các khẳng định đúng sai được sắp xếp theo thứ tự từ dễ đến khó, các khẳng định về cùng một nội dung hỏi.

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x-4}{x-3\sqrt{x}+2} + 1 \right) : \frac{1}{2x-3\sqrt{x}+1} \quad (x \geq 0; x \neq \frac{1}{4}; x \neq 1; x \neq 4)$. Tìm x để

$P = 2019$. Mệnh đề sau đây đúng hay sai.

a) $x \in \{1; 4\}$.

b) $x = 501$

c) $x = 505$

d) $x \in [2019; 2020]$.

Lời giải

a) S

b) S

c) Đ

d) S

$$P = \left(\frac{x-4}{x-3\sqrt{x}+2} + 1 \right) : \frac{1}{2x-3\sqrt{x}+1} \quad (x \geq 0; x \neq \frac{1}{4}; x \neq 1; x \neq 4)$$

$$= \frac{x-4+x-3\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} : \frac{1}{(\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}-1)}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$\begin{aligned} &= \frac{2x - 3\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} - 1)}{1} \\ &= \frac{(2\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{1}{1} \\ &= 4x - 1 \end{aligned}$$

$$\text{Đề } P = 2019 \Leftrightarrow 4x - 1 = 2019$$

$$\Leftrightarrow 4x = 2020$$

$$\Leftrightarrow x = 505$$

$$Q = \left(\frac{\sqrt{y}}{x + \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{y}}{x - \sqrt{xy}} \right) : \frac{2\sqrt{xy}}{x - y}; \quad x > 0, y > 0, x \neq y$$

Câu 2. Cho biểu thức $Q = \left(\frac{\sqrt{y}}{x + \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{y}}{x - \sqrt{xy}} \right) : \frac{2\sqrt{xy}}{x - y}; \quad x > 0, y > 0, x \neq y$. Mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Giá trị của x khi $Q = 1$ là 1.

b) Khi $Q \geq 1$ thì $0 < y < 1$.

c) Khi $Q = 2$ thì $x = 2; y = 1$.

d) Khi $Q \geq 2$ thì $0 < x \leq \frac{1}{4}$.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) S

d) Đ

$x > 0, y > 0, x \neq y$ ta có:

a) Với

$$\begin{aligned} Q &= \left(\frac{\sqrt{y}}{x + \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{y}}{x - \sqrt{xy}} \right) : \frac{2\sqrt{xy}}{x - y} \\ &= \left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \right) : \frac{2\sqrt{xy}}{x - y} \\ &= \frac{\sqrt{y}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + \sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} : \frac{2\sqrt{xy}}{x - y} \\ &= \frac{\sqrt{xy} - y + \sqrt{xy} + y}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \cdot \frac{x - y}{2\sqrt{xy}} \\ &= \frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} \cdot \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{2\sqrt{xy}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

a) Ta có $Q = \frac{1}{\sqrt{x}}$, với $x > 0, y > 0, x \neq y$

Để $Q = 1$ thì $\frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Kết hợp với điều kiện $x > 0, y > 0, x \neq y$ ta có $x = 1, y > 0, y \neq 1$

Vậy $x = 1, y > 0, y \neq 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. (Đúng)

b) $Q \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{x} \geq 0 \text{ (do } \sqrt{x} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$$

Kết hợp ĐKXD: $0 < x \leq 1, y > 0, y \neq 1$ (Sai)

c) Ta có $Q = \frac{1}{\sqrt{x}}$, với $x > 0, y > 0, x \neq y$

Để $Q = 2$ thì $\frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$

Kết hợp với điều kiện $x > 0, y > 0, x \neq y$ ta có $x = \frac{1}{4}, y > 0, y \neq 1$

Vậy $x = \frac{1}{4}, y > 0, y \neq 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. (Sai)

d) $Q \geq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geq 2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{x} \geq 0 \text{ (do } \sqrt{x} > 0)$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{4}$$

Kết hợp ĐKXD: $0 < x \leq \frac{1}{4}, y > 0, y \neq 1$ (Đúng)

$$M = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right)$$

Câu 3. Cho biểu thức (với $x > 0; x \neq 1$). Mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Giá trị của x để $M < 0$ là $0 < x < 1$.

b) Giá trị của x để $M > 0$ là $0 < x < 1; x \neq \frac{1}{2}$.

c) Giá trị của x để $M = 0$ là $x = \frac{1}{2}$.

d) Giá trị của x để $M = 8$ là $x = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

a) S

b) Đ

c) Đ

d) Đ

$$M = \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right)$$

$$= \left(\frac{2x-1}{2\sqrt{x}} \right)^2 \cdot \frac{x-2\sqrt{x}+1-x-2\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \left(\frac{2x-1}{2\sqrt{x}} \right)^2 \cdot \frac{-4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{2(2x-1)^2}{1-x}$$

a) Để $M < 0 \Leftrightarrow \frac{2(2x-1)^2}{1-x} < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x < 0 \text{ (do } 2(2x-1)^2 \geq 0) \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \text{ (Sai)}$$

b) Để $M > 0 \Leftrightarrow \frac{2(2x-1)^2}{1-x} > 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x > 0 \text{ (do } 2(2x-1)^2 \geq 0) \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Kết hợp ĐKXD: $0 < x < 1; x \neq \frac{1}{2}$. (Đúng)

c) Để $M = 0 \Leftrightarrow \frac{2(2x-1)^2}{1-x} = 0$

$$\Leftrightarrow 2(2x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn ĐKXD) (Đúng)}$$

d) Để $M = 8 \Leftrightarrow \frac{2(2x-1)^2}{1-x} = 8$

$$\Leftrightarrow 2(2x-1)^2 = 8(1-x)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4 - 4x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pm\sqrt{3}}{2} \text{ (thỏa mãn ĐKXD) (Đúng)}$$

Câu 4. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} \text{ (} x > 0; x \neq 1 \text{)}$. Cho $P = \frac{A}{B}$, tìm x để

$$\sqrt{P^2-1} = \sqrt{3P-1}.$$

a) $x \in [1; 9]$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

b) x có giá trị là một số tự nhiên.

c) x có giá trị là một số nguyên âm.

d) $x = 9$

a) S

b) Đ

Lời giải

c) S

d) Đ

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} (x > 0; x \neq 1)$$

$$= \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} \Rightarrow \sqrt{P^2-1} = \sqrt{3P-1} \Leftrightarrow \begin{cases} P^2-1=3P-1 \\ 3P-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=0 \\ P=3 \\ P \geq \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow P=3$$

$$P=3 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} = 3 \Leftrightarrow x=9(TM)$$

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN (soạn khoảng 6 câu)

Câu 1. [NB] Cho $P = \frac{x+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}-1} \left(0 \leq x \neq \frac{1}{9} \right)$. Giá trị x để $P = \frac{6}{5}$ là:

Lời giải

$$x \in \left\{ 4; \frac{9}{25} \right\}$$

Đáp án:

$$P = \frac{x+\sqrt{x}}{3\sqrt{x}-1} = \frac{6}{5} \Leftrightarrow 5x + 5\sqrt{x} = 18\sqrt{x} - 6$$

$$\Leftrightarrow 5x - 13\sqrt{x} + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x - 10\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 6 = 0$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)-3(\sqrt{x}-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-2)(5\sqrt{x}-3)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-2=0 \\ 5\sqrt{x}-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4(TM) \\ x=\frac{9}{25}(TM) \end{cases}$$

Câu 2. [NB] Cho biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}+x-2}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{1}{x\sqrt{x}-x} (x>0, x \neq 1)$. Tìm x để $P=2$.

Lời giải

Đáp án: $x=2$

$$P = \left(\frac{x\sqrt{x}+x-2}{x-1} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{1}{x\sqrt{x}-x} (x>0, x \neq 1)$$

$$= \frac{x\sqrt{x}+x-2-\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} : \frac{1}{x(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x(\sqrt{x}-1)}{1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(x-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x(\sqrt{x}-1)}{1}$$

$$= x^2 - x$$

$$P=2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1(ktm) \\ x=2(tm) \end{cases}$$

Câu 3. [TH] Cho $P = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2 (x>0; x \neq 1)$. Giá trị nào của x để $P > 2\sqrt{x}$ là:

Lời giải

Đáp án: $0 < x < \frac{1}{3}$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2 \quad (x > 0; x \neq 1)$$

$$= \frac{x - 2\sqrt{x} + 1 - x - 2\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}} \right)^2$$

$$= \frac{-4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(x-1)^2}{4x}$$

$$= \frac{1-x}{\sqrt{x}}$$

$$P > 2\sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{1-x}{\sqrt{x}} - \frac{2x}{\sqrt{x}} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-3x}{\sqrt{x}} > 0$$

$$\Leftrightarrow 1-3x > 0 \text{ (do } \sqrt{x} > 0 \text{)}$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$$

Kết hợp ĐKXD: $0 < x < \frac{1}{3}$

Câu 4. [TH] Cho $A = \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}} \quad (a > 0)$. Giá trị của a thỏa mãn $A \geq \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}} - \sqrt{a} + 1$ là:

Lời giải

Đáp án: $a \geq 1$

$$A \geq \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}} - \sqrt{a} + 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}} - \frac{\sqrt{a}+1}{2\sqrt{a}} + \sqrt{a} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} - 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow a \geq 1$$

Kết hợp ĐKXD: $a \geq 1$

Câu 5. [VD] Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ và $B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) \cdot \frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$ ($x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$). Tìm các giá trị nguyên của x để $A.B < 1$.

Lời giải

Đáp án: $x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

$$B = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x-1} \right) \cdot \frac{x-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} \quad (x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9)$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$$

$$A.B < 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x}-3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-3 < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < 3$$

$$\Leftrightarrow x < 9$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ và $x \geq 0, x \neq 1, x \neq 9$ nên $x \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$

Câu 6. [VD] Cho biểu thức: $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} - \frac{\sqrt{x}+1}{5-\sqrt{x}} - \frac{5-9\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0, x \neq 25$. Tìm tất cả các giá trị của x để $P < 1$.

Lời giải

Đáp án: $0 \leq x < 25$

Với $x \geq 0, x \neq 25$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} - \frac{\sqrt{x}+1}{5-\sqrt{x}} - \frac{5-9\sqrt{x}}{x-25} = \frac{\sqrt{x}(5-\sqrt{x}) - (\sqrt{x}+1)(5+\sqrt{x}) + (5-9\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+5)(5-\sqrt{x})}$$
$$= \frac{(5\sqrt{x}-x) - (x+6\sqrt{x}+5) + (5-9\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+5)(5-\sqrt{x})} = \frac{-2x-10\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+5)(5-\sqrt{x})} = \frac{-2\sqrt{x}(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+5)(5-\sqrt{x})} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5}$$

$$P < 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} < 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-5} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} - (\sqrt{x}-5)}{\sqrt{x}-5} < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}-5} < 0$$

$$\forall x \geq 0, x \neq 25 \Rightarrow \sqrt{x}+5 > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-5 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 5 \Leftrightarrow 0 \leq x < 25$$

$$\text{Vậy } 0 \leq x < 25$$

PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải:

BÀI TẬP MẪU

$$A = \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} \quad (x \geq 0).$$

Ví dụ 1 [NB]: Cho biểu thức: Tìm x để $A < 0$.

Lời giải

$$\text{Với } x \geq 0 \text{ để } A < 0 \Leftrightarrow \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} < 0$$

$$\Leftrightarrow x-4 < 0 \text{ (do } \sqrt{x}+2 > 0)$$

$$\Leftrightarrow x < 4$$

$$\text{Kết hợp ĐKXD: } 0 \leq x < 4$$

Ví dụ 2 [TH]: Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{9}$ và $B = \left(\frac{3\sqrt{x}-6}{x-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \right) : \frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$.

a) Chứng minh $B = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$.

b) Tìm giá trị của x thỏa mãn $A + B = \frac{2}{3}$.

Lời giải

a) Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$. Ta có:

$$B = \left(\frac{3\sqrt{x} - 6}{x - 4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} \right) : \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$$

$$= \left(\frac{3(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} \right) : \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$$

$$= \left(\frac{3}{(\sqrt{x} + 2)} + \frac{\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 2)} \right) : \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} - 3}$$

$$= \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 2} : (\sqrt{x} + 3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \text{ (Điều phải chứng minh)}$$

b) Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$. Ta có:

$$A + B = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x} + 2}{9} + \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{2}{3}$$

Ta có:

$$\frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{9(\sqrt{x} + 2)} + \frac{9}{9(\sqrt{x} + 2)} = \frac{6(\sqrt{x} + 2)}{9(\sqrt{x} + 2)}$$

$$x + 4\sqrt{x} + 4 + 9 = 6\sqrt{x} + 12$$

$$x + 4\sqrt{x} + 4 + 9 - 6\sqrt{x} - 12 = 0$$

$$x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$$

$$(\sqrt{x} - 1)^2 = 0$$

$$\sqrt{x} - 1 = 0$$

$$\sqrt{x} = 1$$

$$x = 1 \text{ (thỏa mãn ĐKXD)}$$

$$M = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \quad \text{với } x \geq 0; x \neq 1$$

Ví dụ 3 [TH]: Cho biểu thức

a) Rút gọn biểu thức M

b) Tìm x để $M = 2$

Lời giải

a)
$$M = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2} \quad \text{với } x \geq 0; x \neq 1$$

$$M = \frac{x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$M = \frac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$M = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1} = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$$

Vậy
$$M = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} \quad \text{với } x \geq 0; x \neq 1$$

b)
$$M = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} = 2 \Rightarrow x+\sqrt{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 0 \quad (\text{do } \sqrt{x}+1 > 0)$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad (\text{TMĐK})$$

Vậy $x = 0$

Ví dụ 4 [VD]: Cho biểu thức
$$A = \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} + \frac{3x+\sqrt{x}-4}{16-x} \right) \cdot \frac{x-16}{\sqrt{x}-2} \quad \text{với } x \geq 0; x \neq 4; x \neq 16.$$

1) Rút gọn biểu thức A.

3) Tìm x để $|A-1| > A-1$.

1) Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 16$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+4) + \sqrt{x}(\sqrt{x}-4) - 3x - \sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} \right) \cdot \frac{x-16}{\sqrt{x}-2} \\ &= \left(\frac{2x+7\sqrt{x}-4+x-4\sqrt{x}-3x-\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} \right) \cdot \frac{x-16}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 16$ thì $A = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

2) Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 16$.

$$\begin{aligned} \text{Để } |A-1| > A-1 &\Leftrightarrow A-1 < 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \text{ (vì } \sqrt{x}+2 > 0) \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2 \Leftrightarrow x < 4 \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 16$, ta có $0 \leq x < 4$.

Ví dụ 5 [VD]: Cho biểu thức: $P = \left(\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) - \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$ (Với $x > 0; x \neq 4$)

1. Rút gọn biểu thức P

2. Tìm các số a để có x thỏa mãn $(\sqrt{x}+1).P = \sqrt{x}+a$

Lời giải

1. Với $x > 0; x \neq 4$ ta có:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} + \frac{3}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) - \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$= \frac{\sqrt{x-4} + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} : \frac{x-4-x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{4\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} : \frac{-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{4(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{-4}$$

$$= 1 - \sqrt{x}$$

Vậy với $x > 0; x \neq 4$ thì $P = 1 - \sqrt{x}$

2. Với $x > 0; x \neq 4$ ta có:

$$(\sqrt{x}+1).P = \sqrt{x}+a \Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)(1-\sqrt{x}) = \sqrt{x}+a$$

$$\Leftrightarrow 1-x = \sqrt{x}+a \Leftrightarrow x+\sqrt{x}-1+a=0$$

Đặt $\sqrt{x}=y$ (ĐK $y > 0; y \neq 2$) ta có:

$$y^2+y-1+a=0 \quad (1)$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1-4.1.(-1+a) \geq 0$

$$\Leftrightarrow 1+4-4a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 5-4a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -4a \geq -5$$

$$\Leftrightarrow a \leq \frac{5}{4}$$

Với $a \leq \frac{5}{4}$, phương trình (1) có nghiệm:

$$y_1 = \frac{-1+\sqrt{5-4a}}{2}$$

$$y_1 = \frac{-1-\sqrt{5-4a}}{2} < 0 \quad (\text{loại})$$

$$\text{Xét } \begin{cases} y > 0 \\ y \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{5-4a}}{2} > 0 \\ \frac{-1+\sqrt{5-4a}}{2} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} a < 1 \\ a \neq -5 \end{cases} \Leftrightarrow -5 \neq a < 1$$

(TMĐK $a \leq \frac{5}{4}$)

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Vậy với $-5 \neq a < 1$ thì có x thỏa mãn điều kiện đề bài.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. [NB] Cho biểu thức: $B = \frac{2\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x} - 1}$ Với $x \geq 0; x \neq \frac{1}{4}$. Tìm x để $B < 0$

Hướng dẫn

Với $x \geq 0; x \neq \frac{1}{4}$ ta có :

$$B < 0 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x} + 3}{2\sqrt{x} - 1} < 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{x} - 1 < 0 \text{ (do } 2\sqrt{x} + 3 > 0)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{1}{4}$$

Vậy với $0 \leq x < \frac{1}{4}$ thì $B < 0$.

Bài 2. [TH] Cho $P = \left(\frac{2 - \sqrt{x}}{1 - x} - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{2}{(1 - x)^2}$ (với $x > 0; x \neq 1$)

1. Rút gọn P.

2. Tìm các giá trị của x để $P = -6$.

Hướng dẫn

1.
$$P = \frac{(2 - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1) - (\sqrt{x} + 2)(1 - \sqrt{x})}{(1 - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1)^2} : \frac{2}{(\sqrt{x} - 1)^2 (\sqrt{x} + 1)^2}$$

$$\frac{2\sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1)^2} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)^2 (\sqrt{x} + 1)^2}{2}$$

$$= \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$$

Vậy $x > 0; x \neq 1$ thì $P = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$

2. $P = -6 \Leftrightarrow \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) = -6 \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 6 = 0$

$$\sqrt{x} = t \text{ (} t \geq 0 \text{)}. \text{ Có: } t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow t = -2 \text{ (loại); } t = 3 \text{ (t/m)}$$

$$t = 3 \Rightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (thỏa mãn } x > 0; x \neq 1)$$

Vậy $x = 9$ là giá trị cần tìm

Bài 3. [VD] Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+4} : \left(\frac{x}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right)$, với $x > 0$.

1. Rút gọn biểu thức A .

2. Tính giá trị của A tại $x = 5$

3. Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$.

Hướng dẫn

1. Rút gọn biểu thức A

Ta có:
$$A = \frac{\sqrt{x}+1}{x+4\sqrt{x}+4} : \left(\frac{x}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)^2} : \left(\frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)^2} : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{x}{\sqrt{x}+2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+2)^2} : \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$$

2. Tính giá trị của A tại $x = 5$

Có $x = 5$ thỏa mãn $x > 0$. Thay $x = 5$ vào biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)}{5} = \frac{5-2\sqrt{5}}{5}$$

Tìm tất cả các giá trị của x để $A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}}$.

Với $x > 0$ ta có $A = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$ và $\sqrt{x} > 0$; $\sqrt{x}+2 > 0$.

$$A \geq \frac{1}{3\sqrt{x}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \geq \frac{1}{3\sqrt{x}} \Leftrightarrow \sqrt{x}+2 \leq 3$$

Khi đó

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 1. \text{ Kết hợp với điều kiện ta được: } 0 < x \leq 1.$$

Bài 4. [VDC] Cho $A = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}$ (với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$)

- a) Tìm x khi $A = \frac{1}{2}$
 b) Rút gọn biểu thức B
 c) Tìm số nguyên x để $\left| \frac{A}{B} \right| = -\frac{A}{B}$

Hướng dẫn

- a) ĐKXD: $x \geq 0$

$$A = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x}+1=2 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1$$

Đối chiếu ĐKXD ta có $x=1$ thỏa mãn bài ra

b) $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}$

$$= \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

Vậy với x thỏa mãn ĐKXD thì $B = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$

- c) Với $x \geq 0; x \neq 4; x \neq 9$ ta có $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+1 > 0 \Rightarrow A > 0$

Ta có $\left| \frac{A}{B} \right| = -\frac{A}{B} \Leftrightarrow \frac{A}{B} \leq 0 \Leftrightarrow B < 0$ (Vì $A > 0$)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-2} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}-2 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} < 2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x < 4. \text{ Mà } x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{0; 1; 2; 3\} \text{ (Thỏa mãn ĐKXD)}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

Vậy $x \in \{0; 1; 2; 3\}$

DẠNG 3: Rút gọn và so sánh giá trị của biểu thức với một số hoặc với một biểu thức khác.

PHẦN I. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. TRẮC NGHIỆM CHỌN ĐÁP ÁN (soạn khoảng 12 câu theo các mức độ

NB: 4 câu; TH: 4 câu; VD: 3 câu; VDC: 1 câu)

Câu 1. [NB] Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 2} (x \geq 0)$. So sánh P với 2?

- A.** $P > 2$. **B.** $P < 2$. **C.** $P \leq 2$.
D. $P \geq 2$.

Lời giải

Chọn B

Xét hiệu: $P - 2 = \frac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 2} - 2 = \frac{2\sqrt{x} - 3 - 2\sqrt{x} - 4}{\sqrt{x} + 2} = \frac{-7}{\sqrt{x} + 2} < 0$ (do $\sqrt{x} + 2 > 0$)

$$P - 2 < 0 \Leftrightarrow P < 2$$

Câu 2. [NB] Cho biểu thức $M = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} (x \geq 0)$. So sánh M với 0?

- A.** $M > 0$. **B.** $M < 0$. **C.** $M \leq 0$.
D. $M \geq 0$.

Lời giải

Chọn D

Với $x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \geq 0 \\ \sqrt{x} + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow M = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} \geq 0$

Câu 3. [NB] Cho biểu thức $Q = \frac{2 - 5\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} (x \geq 0)$. So sánh Q với $\frac{2}{3}$?

- A.** $Q > \frac{2}{3}$. **B.** $Q < \frac{2}{3}$. **C.** $Q \leq \frac{2}{3}$.
D. $Q \geq \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Xét hiệu: $Q - \frac{2}{3} = \frac{2 - 5\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} - \frac{2}{3} = \frac{6 - 15\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 6}{3(\sqrt{x} + 3)} = \frac{-17\sqrt{x}}{3(\sqrt{x} + 3)}$

$$\text{Với } x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \geq 0 \\ \sqrt{x} + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -17\sqrt{x} < 0 \\ \sqrt{x} + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow Q - \frac{2}{3} = \frac{-17\sqrt{x}}{3(\sqrt{x} + 3)} \leq 0$$

$$Q - \frac{2}{3} \leq 0 \Leftrightarrow Q \leq \frac{2}{3}$$

Câu 4. [NB] Cho $A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} (x \geq 0; x \neq 1)$. So sánh A với $\frac{1}{3}$?

A. $A > \frac{1}{3}$. **B.** $A < \frac{1}{3}$. **C.** $A \leq \frac{1}{3}$. **D.** $A \geq \frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

$$A = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1} (x \geq 0; x \neq 1).$$

$$= \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

$$A - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{3} = \frac{3\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{3(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{-x+2\sqrt{x}-1}{3(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{3\left[\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]} < 0$$

Xét hiệu:

Suy ra: $A - \frac{1}{3} < 0 \Leftrightarrow A < \frac{1}{3}$

Câu 5. [TH] Cho biểu thức: $H = \frac{15\sqrt{x}-11}{x+2\sqrt{x}-3} + \frac{3\sqrt{x}-2}{1-\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$ (với $x \geq 0; x \neq 1$). So sánh H với $\frac{2}{3}$?

A. $H > \frac{2}{3}$. **B.** $H < \frac{2}{3}$. **C.** $H \leq \frac{2}{3}$. **D.** $H \geq \frac{2}{3}$.

Chọn C

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{15\sqrt{x} - 11}{x + 2\sqrt{x} - 3} + \frac{3\sqrt{x} - 2}{1 - \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 3} \\
 &= \frac{15\sqrt{x} - 11}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{(3\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} - \frac{(2\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\
 &= \frac{15\sqrt{x} - 11 - 3x - 7\sqrt{x} + 6 - 2x - \sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\
 &= \frac{-5x + 7\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\
 &= \frac{-(\sqrt{x} - 1)(5\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} \\
 &= \frac{2 - 5\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3}
 \end{aligned}$$

$$H - \frac{2}{3} = \frac{2 - 5\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 3} - \frac{2}{3} = \frac{6 - 15\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 6}{3(\sqrt{x} + 3)} = \frac{-17\sqrt{x}}{3(\sqrt{x} + 3)}$$

Xét hiệu:

Với $x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} \geq 0 \\ \sqrt{x} + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -17\sqrt{x} < 0 \\ \sqrt{x} + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow H - \frac{2}{3} = \frac{-17\sqrt{x}}{3(\sqrt{x} + 3)} \leq 0$

$$H - \frac{2}{3} \leq 0 \Leftrightarrow H \leq \frac{2}{3}$$

Câu 6. [TH] Cho hai biểu thức: $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{3\sqrt{x}+6}{x-4} (x > 0, x \neq 4)$. So sánh $\frac{A}{B}$ với 3.

A. $\frac{A}{B} > 3.$

B. $\frac{A}{B} < 3.$

C. $\frac{A}{B} \leq 3.$

D. $\frac{A}{B} \geq 3.$

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{3\sqrt{x} + 6}{x - 4} (x > 0, x \neq 4) \\
 &= \frac{x + 5\sqrt{x} + 6 - 3\sqrt{x} - 6}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2} : \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$$

Xét $\frac{A}{B} - 3 = \frac{x+3}{\sqrt{x}} - 3 = \frac{x+3-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} - 3 \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{3}{\sqrt{x}}} - 3 = 2\sqrt{3} - 3 > 0$ (cauchy)

Suy ra $\frac{A}{B} > 3$

$$B = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}, \text{ với } x > 0; x \neq 1.$$

Câu 7. [TH] Cho biểu thức:

A. $0 < B < 2$
 $0 \leq B \leq 2.$

B. $0 < B \leq 2.$

C.

D. $1 \leq B < 2$

Lời giải

Chọn A

$$B = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$$

$$= \frac{x+2+x-\sqrt{x}-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{2}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{2}{x+\sqrt{x}+1}$$

Vì $x > 0; x \neq 1$ nên $B = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} > 0$

$$B = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} > 0$$

$$\text{Vì } x > 0; x \neq 1 \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 > 1 \Rightarrow B = \frac{2}{x + \sqrt{x} + 1} < 2$$

Câu 8. [TH] Cho biểu thức :
$$A = \left(\frac{x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} + \frac{1 + 2x - 2\sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}} \right) (x > 0; x \neq 1)$$
 . So sánh A với 0?

A. $A > 0$.

B. $A < 0$.

C.

$A \leq 0$.

D. $A \geq 0$.

Lời giải

Chọn A

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x - 2\sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} + \frac{1 + 2x - 2\sqrt{x}}{x^2 - \sqrt{x}} \right) (x > 0; x \neq 1) \\ &= \frac{x - 2\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} + \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(x + \sqrt{x} + 1)} + \frac{1 + 2x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} - 2x + x - 1 + 1 + 2x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{x\sqrt{x} + x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} + 1)} = \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Vì } x > 0; x \neq 1 \text{ nên } \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x} + 1} > 0$$

Câu 9. [VD] Cho
$$M = \left(\frac{\sqrt{x}}{x - 4} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{2}{\sqrt{x} - 2} (x \geq 0; x \neq 4).$$
 So sánh M và M^2 .

A. $M = M^2$

B. $M > M^2$.

C. $M < M^2$.

D. $M \geq M^2$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{\sqrt{x}}{x - 4} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{2}{\sqrt{x} - 2} (x \geq 0; x \neq 4) \\ &= \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 2}{2} \\ &= \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} \end{aligned}$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

Vì $x \geq 0; x \neq 4$ nên $M = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} > 0$

$$M = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}+2} < 1 \text{ (do } \frac{1}{\sqrt{x}+2} > 0 \text{)}$$

Suy ra $0 < M < 1 \Rightarrow M > M^2$

$$A = \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3\sqrt{x}+5}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left[\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{4\sqrt{x}} - 1 \right] \quad (x > 0; x \neq 1)$$

Câu 10. [VD] Cho

Đặt $B = (x - \sqrt{x} + 1)A$. So sánh B với 1.

A. $B = 1$.

B. $B > 1$.

C. $B < 1$.

D. $B \geq 1$.

Lời giải

Chọn B

$$A = \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3\sqrt{x}+5}{x\sqrt{x}-x-\sqrt{x}+1} \right) \cdot \left[\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{4\sqrt{x}} - 1 \right] \quad (x > 0; x \neq 1)$$

$$= \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3\sqrt{x}+5}{x(\sqrt{x}-1)-(\sqrt{x}-1)} \right) \cdot \frac{x+2\sqrt{x}+1-4\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x-1)} + \frac{3\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}-1)(x-1)} \right) \cdot \frac{x-2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}}$$

$$= \frac{4(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{4\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$B = (x - \sqrt{x} + 1)A = (x - \sqrt{x} + 1) \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow B - 1 = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}} > 0 \quad \forall x > 0, x \neq 1$$

Suy ra $B > 1$

Câu 11. [VD] Cho biểu thức: $P = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$. Biết $a > 1$ Hãy so sánh P với $|P|$

A. $P = |P|$

B. $P \leq |P|$

C. $P \geq |P|$

D. $P < |P|$

Lời giải

Chọn A

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$P = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1 = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)(a - \sqrt{a} + 1)}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a}(2\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a}} + 1$$

$$= a + \sqrt{a} - 2\sqrt{a} - 1 + 1 = a - \sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) > 0 \quad (\text{do } a > 1)$$

Do đó: $P = |P|$

$$B = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} \cdot \left(\frac{x - y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x - y} \right) \quad (x, y > 0, x \neq y)$$

Câu 12. [VDC] Cho biểu thức

$$\sqrt{B}$$

A. $B = \sqrt{B}$.

B. $B > \sqrt{B}$.

C. $B < \sqrt{B}$.

D. $B \leq \sqrt{B}$.

Lời giải

Chọn C

$$x, y > 0, x \neq y$$

$$B = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(x - \sqrt{xy} + y)} \cdot \left(\frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \right)$$

Ta có :

$$B = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - \sqrt{xy} + y} \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y} - \frac{x + \sqrt{xy} + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)$$

$$B = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - \sqrt{xy} + y} \cdot \frac{x + 2\sqrt{xy} + y - x - \sqrt{xy} - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$B = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - \sqrt{xy} + y} \cdot \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$$

$$B = \frac{\sqrt{xy}}{x - \sqrt{xy} + y}$$

$$x, y > 0 \Rightarrow \sqrt{xy} > 0 \quad \text{và} \quad x - \sqrt{xy} + y = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{y}}{2} \right)^2 + \frac{3y}{4} > 0, \forall x, y > 0$$

Nên $B > 0$ với mọi x, y thỏa mãn điều kiện đã cho

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x + y - \sqrt{xy} \geq \sqrt{xy}$$

Lại có:

$$\Rightarrow \frac{1}{x + y - \sqrt{xy}} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{xy}}{x + y - \sqrt{xy}} \leq \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}} = 1$$

Dấu “=” không xảy ra vì $x \neq y$

Vậy $0 < B < 1$, nên $\sqrt{B} > B$

2. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI (Soạn khoảng 4 câu): Các khẳng định đúng sai được sắp xếp theo thứ tự từ dễ đến khó, các khẳng định về cùng một nội dung hỏi.

Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, em chọn đúng hoặc sai

Câu 1. Cho biểu thức $M = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 2\sqrt{x} + 1} \quad (x > 0; x \neq 1)$, mệnh đề sau đây đúng hay sai?

A. $M < 1$

B. $M > 0$

C. $M > 2$

D. $M > -1$

Lời giải

a) Đ

b) S

c) S

d) S

$$M = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 2\sqrt{x} + 1} \quad (x > 0; x \neq 1)$$

$$= \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} < 1 \quad (\text{do } \sqrt{x} > 0)$$

Câu 2. Cho hai biểu thức $A = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}; B = \left(\frac{15 - \sqrt{x}}{x - 25} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5}$ với $x \geq 0; x \neq 25$. Mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai?

a) Biểu thức $M = A - B$ thì $0 \leq M < 1$.

b) Biểu thức $B < 0$.

c) Biểu thức $A \leq -1$.

d) $A + \sqrt{x} \cdot B > 0$.

a) Đ

b) S

c) S

d) Đ

a)

$$B = \left(\frac{15 - \sqrt{x}}{x - 25} + \frac{2}{\sqrt{x} + 5} \right) : \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 5} \quad (x \geq 0; x \neq 25)$$

$$= \frac{15 - \sqrt{x} + 2(\sqrt{x} - 5)}{(\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 5)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 1}$$

$$= \frac{15 - \sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 10}{(\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 5)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{x} + 5}{(\sqrt{x} + 5)(\sqrt{x} - 5)} \cdot \frac{\sqrt{x} - 5}{\sqrt{x} + 1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$M = B - A = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$$

$$M = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$\forall x \geq 0; x \neq 25 \text{ nên } \begin{cases} \sqrt{x} \geq 0 \\ \sqrt{x} + 1 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq M < 1 \quad (\text{Đúng})$$

$$\text{b) Ta có } B = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$\forall x \geq 0; x \neq 25 \text{ nên } \begin{cases} \sqrt{x} \geq 0 \\ \sqrt{x} + 1 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow B > 0 \quad (\text{khẳng định b Sai})$$

$$\text{c) Xét hiệu } A + 1 = \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} + 1 = \frac{1 - \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{2}{1 + \sqrt{x}} > 0$$

Suy ra $A > -1$. (Khẳng định c Sai)

$$\text{d) Xét hiệu } \sqrt{x} \cdot B + A = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} + 1} + \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} > 0. \quad (\text{Đúng})$$

$$P = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \quad \text{với } x > 0 \text{ và } x \neq 1$$

Câu 3. Cho biểu thức:

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$0 < P < \frac{1}{3}.$$

a) Biểu thức

b) Biểu thức $P \leq -1$.

$$P < \frac{1}{3}.$$

c) Biểu thức

d) Biểu thức $P < 0$.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) Đ

d) S

Với $x > 0$ và $x \neq 1$ ta có

$$P = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1}$$

$$= \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$= \frac{x+2}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} + \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} - \frac{x+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x+2+x-1-x-\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

Vậy với $x > 0$ và $x \neq 1$, thì $P = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$

$x > 0$ và $x \neq 1$ nên $\sqrt{x} > 0 \Rightarrow P > 0$

$$P = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{x}+1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \leq \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}}+1} = \frac{1}{3}$$

(BĐT cauchy)

Dấu “=” xảy ra khi $x=1$ mà ĐKXD: $x \neq 1$ nên $0 < P < \frac{1}{3}$.

Câu 4. Cho biểu thức: $B = \frac{2(x+4)}{x-3\sqrt{x}-4} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4}$ với $x \geq 0, x \neq 16$.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

- a) B có giá trị là một số không âm.
b) B có giá trị là một số dương.
c) B có giá trị nhỏ hơn 3.
d) B có giá trị lớn hơn 3.

Lời giải

a) Đ

b) S

c) Đ

d) S

Với $x \geq 0, x \neq 16$, thì:

$$\begin{aligned} B &= \frac{2(x+4)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-4)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{8}{\sqrt{x}-4} \\ &= \frac{2x+8+\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)-8(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-4)} \\ &= \frac{2x+8+x-4\sqrt{x}-8\sqrt{x}-8}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-4)} = \frac{3x-12\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-4)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-4)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \\ B &= \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 16$.

Dễ thấy $B \geq 0$ (vì $\sqrt{x} \geq 0$).

Lại có: $B = 3 - \frac{3}{\sqrt{x}+1} < 3$ (vì $\frac{3}{\sqrt{x}+1} > 0 \forall x \geq 0, x \neq 16$).

Suy ra: $0 \leq B < 3$

3. TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN (soạn khoảng 6 câu)

Câu 1. [NB] Cho biểu thức $P = \frac{2}{x+\sqrt{x}+1} (x \geq 0)$. So sánh P với 2.

Lời giải

Đáp án: $P \geq 2$.

Vì $x \geq 0$ nên $x+\sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow P \leq 2$

Câu 2. [NB] Cho biểu thức $Q = \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x}+2} (x \geq 0; x \neq 1)$. So sánh Q với 4.

Lời giải

Đáp án: $Q > 4$.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$Q - 4 = \sqrt{x} + \frac{9}{\sqrt{x} + 2} - 4 = \frac{x + 2\sqrt{x} + 9 - 4\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x} + 2} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x} + 2} > 0 \quad (\text{do } x \geq 0; x \neq 1)$$

Nên $Q > 4$.

Câu 3. [TH] Cho biểu thức
$$A = \frac{3(x+2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{6}{\sqrt{x}-2}$$
 với $x \geq 0, x \neq 4$. So sánh A với 4.

Lời giải

Đáp án: $A < 4$.

Với điều kiện $x \geq 0, x \neq 4$ ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{3(x+2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{6}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{3(x+2) + \sqrt{x}(\sqrt{x}-2) - 6(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{3x+6+x-2\sqrt{x}-6\sqrt{x}-6}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{4x-8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{4\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 4$ thì $A = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

Theo câu a) với $x \geq 0, x \neq 4$ thì $\sqrt{x} > 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{4}{\sqrt{x}+1} > 0$

Mặt khác
$$A = \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \frac{4\sqrt{x}+4-4}{\sqrt{x}+1} = 4 - \frac{4}{\sqrt{x}+1} < 4$$

Nên $A < 4$

Câu 4. [TH] Cho biểu thức:
$$A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{5}$$
 với $x \geq 0, x \neq 1$. So sánh A với 5.

Lời giải

Đáp án: $A \leq 5$.

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có: $A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{5}$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{-(x+\sqrt{x}+1)+x+2+\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{x\sqrt{x}-1} \cdot \frac{5}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-1} \cdot \frac{5}{\sqrt{x}-1} \\ &= \frac{5}{x+\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Với $x \geq 0$ ta có: $x+\sqrt{x}+1 \geq 1 \Rightarrow A = \frac{5}{x+\sqrt{x}+1} \leq 5$

Câu 5. [VD] Cho hai biểu thức: $A = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{3\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}}$ ($x > 0; x \neq 4$), với $P = A.B$. So sánh P với 2.

Lời giải

Đáp án: $P > 2$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} - \frac{3\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}} \quad (x > 0; x \neq 4) \\ &= \frac{x-\sqrt{x}-3\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT cauchy cho 2 số dương ta có:

$$P = A.B = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} = \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 = 3 > 2 \text{ (cauchy)}$$

Vậy $P > 2$

Câu 6. [VD] Cho $P = \left(\frac{2 - \sqrt{x}}{1 - x} - \frac{\sqrt{x} + 2}{x + 2\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{2}{(1 - x)^2}$ (với $x > 0; x \neq 1$). So sánh P với $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Đáp án: $P \leq \frac{1}{4}$.

$$P = \frac{(2 - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1) - (\sqrt{x} + 2)(1 - \sqrt{x})}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)^2} : \frac{2}{(\sqrt{x} - 1)^2 (\sqrt{x} + 1)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})(\sqrt{x} + 1)^2} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)^2 (\sqrt{x} + 1)^2}{2}$$

$$= \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) \quad P = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x})$$

. Vậy $x > 0; x \neq 1$ thì

$$P = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) = -\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow P \leq \frac{1}{4}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn $x > 0; x \neq 1$)

Vậy $P \leq \frac{1}{4}$

PHẦN II. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Phương pháp giải:

0

BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1 [NB]: Cho biểu thức: $P = \left(2 - \frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x} - 3} \right) : \left(\frac{6\sqrt{x} + 1}{2x - \sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right)$, với $x \geq 0, x \neq \frac{9}{4}$.

a) Rút gọn P.

b) So sánh P với $\frac{3}{2}$.

Lời giải

a) với $x \geq 0, x \neq \frac{9}{4}$. Ta có: $P = \left(2 - \frac{\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x} - 3} \right) : \left(\frac{6\sqrt{x} + 1}{2x - \sqrt{x} - 3} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right)$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10

$$= \frac{4\sqrt{x} - 6 - \sqrt{x} + 1}{2\sqrt{x} - 3} : \left(\frac{6\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 3)} + \frac{2x - 3\sqrt{x}}{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 3)} \right)$$

$$= \frac{3\sqrt{x} - 5}{2\sqrt{x} - 3} : \frac{2x + 3\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 3)}$$

$$= \frac{3\sqrt{x} - 5}{2\sqrt{x} - 3} \cdot \frac{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \frac{3\sqrt{x} - 5}{2\sqrt{x} + 1}$$

Vậy $P = \frac{3\sqrt{x} - 5}{2\sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0, x \neq \frac{9}{4}$.

$$P - \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{x} - 5}{2\sqrt{x} + 1} - \frac{3}{2} = \frac{6\sqrt{x} - 10 - 6\sqrt{x} - 3}{2(2\sqrt{x} + 1)} = \frac{-13}{2(2\sqrt{x} + 1)} < 0 (\forall x \geq 0, x \neq \frac{9}{4})$$

b) Xét hiệu:

Suy ra $P < \frac{3}{2}$.

Ví dụ 2 [TH]: Cho $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{3x + 4}{x - 4} (x \geq 0; x \neq 4)$.

a) Rút gọn B .

b) So sánh B với 2

Lời giải

a) $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{3x + 4}{x - 4} (x \geq 0; x \neq 4)$

$$= \frac{x - 2\sqrt{x} + 2x + 4\sqrt{x} - 3x - 4}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}$$

$$= \frac{2\sqrt{x} - 4}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}$$

$$= \frac{2(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 2)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x} + 2}$$

Vậy $B = \frac{2}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

b) Với $x \geq 0; x \neq 4$, ta có: $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 2 \geq 2 \Rightarrow B = \frac{2}{\sqrt{x} + 2} \leq 1$

Vậy $B < 2$

$$P = \frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1} - \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

Ví dụ 3 [TH]: Cho biểu thức:

a) Rút gọn biểu thức P

b) Chứng minh: $P < \frac{1}{3}$

Lời giải

a) ĐKXĐ: $x \geq 0; x \neq 1$, ta có:
$$P = \frac{x+2+(x-1)-(x+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{x-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 1$ thì $P = \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$

b) Ta có:
$$\frac{1}{3} - P = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} = \frac{x+\sqrt{x}+1-3\sqrt{x}}{3(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{3(x+\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{3(x+\sqrt{x}+1)}$$

Với $x \geq 0; x \neq 1$, ta có:
$$\begin{cases} (\sqrt{x} - 1)^2 > 0 \\ 3(x + \sqrt{x} + 1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot P = \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{3(x + \sqrt{x} + 1)} > 0$$

Vậy: $P < \frac{1}{3}$ Với $x \geq 0; x \neq 1$

$$P = \left(\frac{1}{1 - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2x + \sqrt{x} - 1}{1 - x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{1 + x\sqrt{x}} \right) \quad (\text{với } x > 0; x \neq 1)$$

Ví dụ 4 [VD]: Cho biểu thức:

a) Rút gọn P .

b) Chứng minh: $P > 1$.

Lời giải

a) Với $x > 0; x \neq 1$

$$P = \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(1 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{x} + x)} \right)$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{1 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1)}{1 - \sqrt{x} + x} \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{x} - 1}{(1 - \sqrt{x})\sqrt{x}} : \frac{2\sqrt{x} - 1}{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt{x} + x)}$$

$$= \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}}$$

Vậy $P = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 1$

b) $P = \frac{1 - \sqrt{x} + x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} - 1 \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x}} - 1 = 1$

(BĐT Cauchy)

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1$$

Vì đẳng thức xảy ra

không thỏa mãn điều kiện xác định nên $P > 1$

$$P = \frac{5\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1} \quad (\text{với } x \geq 0). \text{ So sánh } P \text{ với } 5.$$

$$P = \frac{5\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} + 1} = 5 - \frac{2}{\sqrt{x} + 1} > 5 \text{ (do } \sqrt{x} + 1 > 0 \text{)}$$

ĐS: $P < 5$

Bài 2. [TH] Cho biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2\sqrt{x} - 7}{x - \sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0; x \neq 4$

a) Chứng minh: $P = \frac{1}{\sqrt{x} + 1}$.

b) So sánh P với 1.

Hướng dẫn

a)
$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2\sqrt{x} - 7}{x - \sqrt{x} - 2} \\ &= \frac{\sqrt{x} + 1 - 2\sqrt{x} + 4 + 2\sqrt{x} - 7}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \text{ (dpcm)} \end{aligned}$$

b) Với $x \geq 0; x \neq 4 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} + 1 \geq 1 \Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \leq 1$

Vậy $P \leq 1$

Bài 3. [VD] (Đề thi vào 10 tỉnh Thái Bình năm 2018 - 2019)

$$P = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} - \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - y \text{ với } x \geq 0; y \geq 0; x \neq y$$

a) Rút gọn các biểu thức P .

b) Chứng minh rằng $P \leq 1$

Hướng dẫn

a)
$$P = \frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}} - \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 4\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - y$$

CHUYÊN ĐỀ ÔN THI VÀO 10.....

$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\sqrt{xy}} - \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} - y \\ &= \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{x} + \sqrt{y} - y \\ &= -y + 2\sqrt{y} \end{aligned}$$

b) $P = -y + 2\sqrt{y} = -(y - 2\sqrt{y} + 1) + 1 = -(\sqrt{y} - 1)^2 + 1 \leq 1$ (do $(\sqrt{y} - 1)^2 \geq 0$)

Bài 4 [VD] Cho biểu thức : $P = \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{y-x} \right) : \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ với $x \geq 0; y \geq 0; x \neq y$

a/ Rút gọn P .

b) Chứng minh $P \geq 0$.

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \left(\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}}{y-x} \right) : \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + \sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(x+\sqrt{xy}+y)}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y} \\ &= \left(\sqrt{x}+\sqrt{y} - \frac{x+\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y} \\ &= \frac{x+2\sqrt{xy}+y-x-\sqrt{xy}-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y} \\ &= \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y} \\ &= \frac{\sqrt{xy}}{x-\sqrt{xy}+y} \end{aligned}$$

$$\text{b) Với } x \geq 0; y \geq 0; x \neq y \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{xy} \geq 0 \\ x - \sqrt{xy} + y = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{y}}{2} \right)^2 + \frac{3y}{4} > 0 \end{cases} \Rightarrow P \geq 0$$

$$P = 1 + \left(\frac{2a + \sqrt{a} - 1}{1 - a} - \frac{2a\sqrt{a} - \sqrt{a} + a}{1 - a\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{a - \sqrt{a}}{2\sqrt{a} - 1} \text{ với}$$

Bài 5 [VD] Cho biểu thức:

$$a \geq 0; a \neq \frac{1}{4}; a \neq 1$$

a/ Rút gọn P .

b) So sánh P và $\frac{2}{3}$.

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad P &= 1 + \left(\frac{2a + \sqrt{a} - 1}{1 - a} - \frac{2a\sqrt{a} - \sqrt{a} + a}{1 - a\sqrt{a}} \right) \cdot \frac{a - \sqrt{a}}{2\sqrt{a} - 1} \\ &= 1 + \left(\frac{(\sqrt{a} + 1)(2\sqrt{a} - 1)}{(\sqrt{a} + 1)(1 - \sqrt{a})} - \frac{2a\sqrt{a} - \sqrt{a} + a}{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + a)} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{2\sqrt{a} - 1} \\ &= 1 + \left(\frac{(2\sqrt{a} - 1)(1 + \sqrt{a} + a)}{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + a)} - \frac{2a\sqrt{a} - \sqrt{a} + a}{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + a)} \right) \cdot \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{2\sqrt{a} - 1} \\ &= 1 + \frac{2\sqrt{a} + 2a + 2a\sqrt{a} - 1 - \sqrt{a} - a - 2a\sqrt{a} + \sqrt{a} - a}{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + a)} \cdot \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{2\sqrt{a} - 1} \\ &= 1 + \frac{2\sqrt{a} - 1}{(1 - \sqrt{a})(1 + \sqrt{a} + a)} \cdot \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)}{2\sqrt{a} - 1} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{a}}{1 + \sqrt{a} + a} \\ &= \frac{1 + \sqrt{a} + a + \sqrt{a}}{1 + \sqrt{a} + a} \\ &= \frac{a + 2\sqrt{a} + 1}{1 + \sqrt{a} + a} \\ \text{b)} \quad P - \frac{2}{3} &= \frac{a + 2\sqrt{a} + 1}{1 + \sqrt{a} + a} - \frac{2}{3} = \frac{3a + 3\sqrt{a} + 3 - 2 - 2\sqrt{a} - 2a}{3(1 + \sqrt{a} + a)} = \frac{a - \sqrt{a} + 1}{3(1 + \sqrt{a} + a)} > 0 \end{aligned}$$

b) Xét hiệu:

$$P > \frac{2}{3}$$

Vậy