

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

Ngày thi: 14/02/2023

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề thi gồm 05 câu, trong 01 trang

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:.....

Họ và tên, chữ ký: Giám thị thứ nhất:.....

Giám thị thứ hai:.....

Câu 1 (5,0 điểm)

1. Với $a \geq 0$ và $a \neq 1$, rút gọn biểu thức $P = \frac{a+\sqrt{a+1}}{a+\sqrt{a}-2} + \frac{1}{\sqrt{a+1}} + \frac{\sqrt{a}}{a+2\sqrt{a}}$.

2. Cho phương trình $(m+1)x + (3m-1)x^2 - x - 4m + 1 = 0$ (với m là tham số), Tìm m để phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt.

3. Cho đa thức $P(x) = (x-2)^{2021} = a_{2023}x^{2023} + a_{2022}x^{2022} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Tính giá trị của biểu thức $Q = (a_0 + a_2 + a_4 + a_{2020} + a_{2023})^2 - (a_1 + a_3 + a_5 + a_{2021} + a_{2023})^2$.

Câu 2 (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $2x^2 + 3x - 2 = (2x-1)\sqrt{2x^2 + x - 3}$.

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ 2x + 3y - \sqrt{x+y} = x^2 \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 điểm)

1. Tìm tất cả các số tự nhiên x, y thỏa mãn $x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1$.

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\frac{ab}{ab+3c}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+3a}} + \sqrt{\frac{ac}{ac+3b}}$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho 3 điểm phân biệt cố định A, B, C cùng nằm trên đường thẳng d (điểm B nằm giữa A và C), gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường tròn tâm O luôn đi qua hai điểm B và C (điểm O không thuộc d). Kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn tâm O (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng A cắt Od tại điểm E và cắt BC tại điểm K.

1. Chứng minh tứ giác OMNI nội tiếp và $AH.OA = AN^2$.

2. Khi đường tròn tâm O thay đổi, chứng minh MN luôn đi qua điểm K cố định.

3. Tia AO cắt đường tròn tâm O tại hai điểm P, Q (điểm P nằm giữa A và O). Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng H. Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với AD và cắt đường thẳng MP tại E. Chứng minh P là trung điểm của AE.

Câu 5

Cho một bảng ô vuông kích thước 10×10 gồm 100 ô vuông đơn vị (cạnh bằng 1).

1. Điền vào mỗi ô vuông đơn vị một trong cho số $-1; 0; 1$. Xét của tổng của tất cả các số đã điền trên mỗi hàng, mỗi cột và hai đường chéo của hàng đã cho. Hỏi các tổng đó có thể nhận bao nhiêu giá trị và chứng minh trong đó có hai tổng bằng nhau.

2. Điền vào mỗi ô vuông đơn vị một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai số ở hai ô chung cạnh hoặc chung đỉnh là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh trong bảng đã cho tồn tại một số được điền ít nhất 17 lần.

-----HẾT-----

Hướng dẫn giải

Câu 1: (5,0 điểm)

1. Với $a \geq 0$ và $a \neq 1$, rút gọn biểu thức

$$P = \frac{a + \sqrt{a} + 1}{a + \sqrt{a} - 2} + \frac{1}{\sqrt{a} + 1} + \frac{\sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a}}$$

2. Cho phương trình

$$(m+1)x + (3m-1)x^2 - x - 4m + 1 = 0$$

(với m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt

3. Cho đa thức

$$P(x) = (x-2)^{2021} = a_{2023}x^{2023} + a_{2022}x^{2022} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

. Tính giá trị của biểu thức

$$Q = (a_0 + a_2 + a_4 + a_{2020} + a_{2022})^2 - (a_1 + a_3 + a_5 + a_{2021} + a_{2023})^2$$

Lời giải:

1. Với $a \geq 0$ và $a \neq 1$, ta có:

$$P = \frac{a + \sqrt{a} + 1}{a + \sqrt{a} - 2} + \frac{1}{\sqrt{a} + 1} + \frac{\sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a}}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{a + \sqrt{a} + 1}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)} + \frac{1}{\sqrt{a} - 1} + \frac{+1}{\sqrt{a} + 2}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{a + 3\sqrt{a} + 2}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)} = \frac{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} + 2)}{(\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 1)} = \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1}$$

2)

$$(m+1)x + (3m-1)x^2 - x - 4m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+1)x^3 - (m+1)x^2 + 4mx^2 - 4m - \stackrel{!}{}$$

$$\Leftrightarrow (m+1)x^2(x-1) + 4m(x-1)(x+1) - \stackrel{!}{}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)[(m+1)x^2 + 4mx + 4m - 1] = \stackrel{!}{}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

$$(m+1)x^2 + 4mx + 4m - 1 = 0 \quad (2)$$

Để pt (1) có 3 nghiệm phân biệt thì pt (2) là pt bậc 2 có 2 nghiệm phân biệt khác 1

Điều kiện để pt (2) là pt bậc 2 có 2 nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} m+1 \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ 4m^2(m+1)(4m-1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ -3m+1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -1 \\ m < \frac{1}{3} \end{cases}$$

Thay $x = 1$ vào (2), ta có:

$$(m+1) \cdot 1^2 + 4m \cdot 1 + 4m - 1 = 0 \Leftrightarrow 9m = 0$$

Pt (2) là pt bậc 2 có 2 nghiệm phân biệt khác 1 khi và chỉ khi
$$\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq 0 \\ m < \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$3. a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2023} = P(1) = (1-2)$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{2023} = P(-1) = (-1-2)$$

$$Q = (a_0 + a_2 + a_4 + a_{2020} + a_{2022})^2 - a_1$$

$$\stackrel{!}{=} (a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_{2020} + a_{2022} + a_1 + a_3$$

$$+ a_{2022} - a_1 - a_3 - a_5 - \dots - a_{2021} - a_{2023}$$

$$\stackrel{!}{=} (-1) \cdot (-3^{2023})$$

$$\stackrel{!}{=} 3^{2023}$$

Vậy $Q \stackrel{!}{=} 3^{2023}$

Câu 2. (4 điểm)

1. Giải phương trình

$$2x^2 + 3x - 2 = (2x-1)\sqrt{2x^2+x-3}$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \\ 2x + 3y - \sqrt{x+y} = x^2 \end{cases}$$

Lời giải:

$$1. \text{ĐK: } 2x^2 + x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x+3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 = (2x-1)\sqrt{2x^2+x-3}$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x+2) = (2x-1)\sqrt{2x^2+x-3}$$

$$\text{TH1: } 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \text{ (loại)}$$

$$\text{TH2: } x+2=\sqrt{2x^2+x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3+\sqrt{37}}{2} (tm) \\ x=\frac{3-\sqrt{37}}{2} (tm) \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm

$$S = \left\{ \frac{3+\sqrt{37}}{2}; \frac{3-\sqrt{37}}{2} \right\}$$

2. ĐK $x+y > 0$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 \quad (1) \\ 2x + 3y - \sqrt{x+y} = x^2 \quad (2) \end{cases}$$

Đặt $S = x+y$, $P = xy$ ($S^2 \geq 4P$, $S > 0$)

$$(1) \Leftrightarrow S^2 - 2P + \frac{2P}{S} = 1 \Leftrightarrow S^3 - 2SP + 2P - \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Leftrightarrow S(S-1)(S+1) - 2P(S-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (S-1)(S^2+S-2P)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)(x^2+y^2+x+y)=0$$

Vì $x^2 \geq 0, y^2 \geq 0, x+y > 0$ nên $x^2+y^2+x+y > 0$

$\rightarrow x+y=1 \rightarrow y=1-x$, thay vào (2), ta có:

$$2x+3-3x-1=x^2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)=0$$

Vậy hệ phương trình có tập nghiệm

$$S=\{(-2;3);(1;0)\}$$

Câu 3. (3 điểm)

1. Tìm tất cả các số tự nhiên x, y thỏa mãn

$$x^2(y-1)+y^2(x-1)=1$$

2. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sqrt{\frac{ab}{ab+3c}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+3a}}+\sqrt{\frac{ac}{ac+3b}}$$

Lời giải:

1. Đặt

$$S=x+y, P=xy \quad (S \geq 0, P \geq 0, S^2 \geq 4P).$$

phương trình đã cho trở thành

$$SP-S^2+2P-1 \Leftrightarrow S^2-SP-2P+1$$

$$\Leftrightarrow (S+2)(S-2-P)=-5$$

$$\rightarrow S+2, S-2-P \in U(-5)=\{\pm 1; \pm 5\}$$

$$\text{Vì } S+2 \geq 2 \text{ nên } \begin{cases} S+2=5 \\ S-2-P=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=3 \\ P=2 \end{cases}$$

$$\rightarrow x, y \text{ là nghiệm của pt } x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)$$

$$\text{Vậy } (x; y) \in \{(1; 2); (2; 1)\}$$

$$2. P=\sum \sqrt{\frac{ab}{ab+3c}}=\sum \sqrt{\frac{ab}{ab+(a+b+c)c}}=\sum \sqrt{\frac{ab}{(c+a)(c+b)}} \leq \sum \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} \right) = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

(Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c=1$)

Câu 4 (6 điểm)

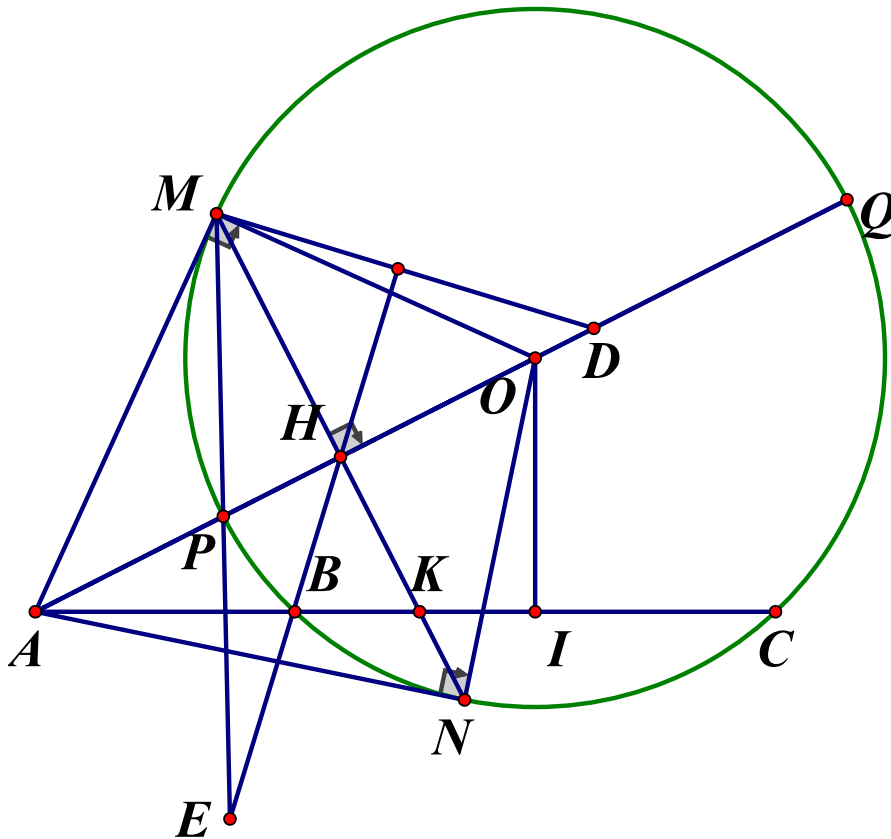
Cho 3 điểm phân biệt cố định A, B, C cùng nằm trên đường thẳng d (điểm B nằm giữa A và C), gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BC . Đường tròn tâm O luôn đi qua hai điểm B và C (điểm O không thuộc d). Kẻ các tiếp tuyến AM, AN với đường tròn tâm O (M, N là các tiếp điểm). Đường thẳng MN cắt OA tại điểm I và cắt BC tại điểm K

1. Chứng minh tứ giác $OMNI$ nội tiếp và $AH.OA=AN^2$

2. Khi đường tròn tâm O thay đổi. Chứng minh MN luôn đi qua điểm K cố định

3. Tia AO cắt đường tròn tâm O tại hai điểm P, Q (điểm P nằm giữa A và C). Gọi D là trung điểm của đoạn thẳng HQ . Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với MD và cắt đường thẳng MP tại E . Chứng minh P là trung điểm ME

Lời giải:



1). Vì $\angle AMO = \angle AIO = \angle ANO = 90^\circ$ nên 5 điểm

A, M, I, O, N cùng thuộc đường tròn đường kính AO

$\rightarrow$ OMNI nội tiếp

Vì $AM = AN$ (tc hai tiếp tuyến cắt nhau); $OM = ON (= R) \rightarrow AO$ là đường trung trực của MN $\rightarrow AO \perp MN$

Trong $\triangle ANO$ ($\angle ANO = 90^\circ$; $NH \perp AO$), ta có:

$$AH \cdot OA = AN^2$$

2)

$$\triangle AHK \sim \triangle AIO \text{ (g.g)} \rightarrow AK \cdot AI = AH \cdot AO = AM^2$$

$2 \rightarrow AK = AM$ (không đổi) $\rightarrow K$ cố định

Vậy MN luôn đi qua điểm K cố định

$$3) \triangle MHE \sim \triangle QDM \text{ (g.g)} \rightarrow \frac{ME}{MH} = \frac{QM}{QD}$$

$$\triangle MHP \sim \triangle QHM \text{ (g.g)} \rightarrow \frac{MP}{MH} = \frac{QM}{QH}$$

$$\frac{ME}{MH} = \frac{QM}{QD} = \frac{2QM}{2QD} = \frac{2MP}{MH} \rightarrow ME = 2MP$$

$\rightarrow E$ là trung điểm MP

Câu 5 (2 điểm)

Cho một bảng ô vuông kích thước 10×10 gồm 100 ô vuông đơn vị (cạnh bằng 1)

1. Điền vào mỗi ô vuông đơn vị một trong các số -1; 0; 1. Xét các tổng của tất cả các số đã điền trên mỗi hàng, mỗi cột và hai đường chéo của bảng đã cho. Hỏi các tổng đó có thể nhận bao nhiêu giá trị và chứng minh trong đó có hai tổng bằng nhau

2. Điền vào mỗi ô vuông đơn vị một số nguyên dương không vượt quá 10 sao cho hai số ở hai ô chung cạnh hoặc chung đỉnh là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh trong bảng đã cho tồn tại một số được điền ít nhất 17 lần

Lời giải:

1)

Vì bảng ô vuông kích thước 10×10 nên có 10 hàng, 10 cột, 2 đường chéo $\rightarrow$ Có 22 tổng

Mà khi điền vào mỗi ô các số $-1; 0; 1$ thì mỗi tổng nhận 1 trong 21 giá trị $-10, -9, -8, \dots, 10$

Theo nguyên lí Dirichlet, có ít nhất $\frac{22}{21} + 1 = 2$ tổng nhận cùng 1 giá trị

Hay hai tổng đó bằng nhau

2)

Xét bảng vuông 2×2 , vì các ô trong bảng vuông này đều chung cạnh hoặc chung đỉnh với các ô khác nên có tối đa 1 số chẵn, 1 số chia hết cho 3

$\rightarrow$ Trong bảng vuông 2×2 tồn tại ít nhất 2 số lẻ không chia hết cho 3

Chia bảng vuông 10×10 thành 25 bảng 2×2 thì có ít nhất 50 số lẻ không chia hết cho 3

Mà từ 1 đến 10 có 3 số lẻ không chia hết cho 3 là 1, 5, 7

Theo nguyên lí Dirichlet, tồn tại một số được điền ít nhất $\frac{50}{3} + 1 = 17$ lần