

CĐ 5: SỐ NGUYÊN TỐ - HỢP SỐ

Dạng 1: Sử dụng các tính chất của phép chia số nguyên
Dạng 2: Áp dụng định lý Fermat
Dạng 3: Sử dụng phương pháp phân tích
Dạng 4: Giải phương trình nghiệm nguyên dựa vào tính chất số nguyên tố
Dạng 5: Các bài toán về hai số nguyên tố cùng nhau

Dạng 1. Sử dụng các tính chất của phép chia số nguyên

Câu 1. (HSG 7 huyện Bá Thước 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2021(c^2 + 3d^2)$. Chứng minh $a + b + c + d$ là hợp số.

Lời giải

Ta có: $a^2 + b^2 = 2021(c^2 + 3d^2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2022c^2 + 3064d^2$

Mà $(2022c^2 + 6064d^2) : 2$ nên $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) : 2$

Ta xét $[(a^2 - a + b^2 - b + c^2 - c + d^2 - d) + (a + b + c + d)] : 2$

Mà $(a^2 - a) = a(a - 1) : 2; b^2 - b = b(b - 1) : 2; c(c - 1) : 2; d(d - 1) : 2$

$(a + b + c + d) : 2$. Do $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$ nên $a + b + c + d > 2$

Vậy $a + b + c + d$ là hợp số.

Câu 2. (HSG 7 trường THCS Võ Thị Sáu 2022 - 2023)

Chứng minh rằng nếu $2^n - 1$ là số nguyên tố ($n > 2$) thì $2^n + 1$ là hợp số.

Lời giải

Ta có: $2^n - 1; 2^n; 2^n + 1$ là ba số tự nhiên liên tiếp nên một trong ba số sẽ chia hết cho 3 .

Mà $2^n - 1$ là số nguyên tố ($n > 2$) nên $2^n - 1$ không chia hết cho 3

Mặt khác: với $n > 2$ thì 2^n là số chẵn nên 2^n không chia hết cho 3

Suy ra: $2^n + 1$ chia hết cho 3

Vậy $2^n + 1$ là hợp số (đpcm).

Câu 3. (HSG 7 huyện Triệu Sơn 2022 - 2023)

Cho số nguyên tố p . Giả sử x, y là các số tự nhiên khác 0 , thỏa mãn điều kiện $\frac{x^2 + py^2}{xy}$

là các số tự nhiên. Chứng minh rằng $\frac{x^2 + py^2}{xy} = p + 1$.

Lời giải

Gọi ƯCLN $(x, y) = d (d \in \mathbb{N}^*)$, khi đó tồn tại các số tự nhiên a và b để $x = da$; $y = db$ và $(a; b) = 1$

$$\frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{d^2 a^2 + p d^2 b^2}{d^2 ab} = \frac{a^2 + pb^2}{ab} \in \mathbb{N}^*$$

Ta có:

$$(a^2 + pb^2); ab \Rightarrow (a^2 + pb^2); b \Rightarrow a^2; b$$

Do $(a; b) = 1$ nên ta suy ra được $b = 1$. Suy ra $(a^2 + p); a \Rightarrow p; a$

Do p là số nguyên tố nên ra được $a = 1$ hoặc $a = p$. Khi đó ta xét các trường hợp

- Với $a = 1$, khi đó ta được $x = y = d \Rightarrow \frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{d^2 + p d^2}{d^2} = p + 1$
- Với $a = p$, khi đó ta được $x = dp$; $y = d \Rightarrow \frac{x^2 + py^2}{xy} = \frac{d^2 p^2 + d^2 p}{d^2 p} = p + 1$

$$\frac{x^2 + py^2}{xy} = p + 1$$

Vậy ta luôn có

Câu 4 (HSG 7 huyện Thọ Xuân 2022 - 2023)

Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24 .

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2 (k \in \mathbb{N}^*)$

- Nếu $p = 3k + 1$ thì $(p+1)(p-1) = (3k+1+1)(3k+1-1) = (3k+2).3k; 3$

- Nếu $p = 3k + 2$

- Nếu $(p+1)(p-1) = (3k+2+1)(3k+2-1) = (3k+3).(3k+1) = 3.(k+1)(3k+1); 3$

Suy ra $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 3 (1)

Ta lại có: p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ

Do đó $p+1$ và $p-1$ là hai số chẵn liên tiếp

Suy ra $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 8 (2)

Mà 3 và 8 là hai số nguyên tố cùng nhau (3)

Từ (1) (2) và (3) suy ra $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24 .

Câu 5 (HSG 7 Diễn Châu Liên trường THCS 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3, biết $p+2$ cũng là số nguyên tố. Chứng tỏ rằng $p+1$ chia hết cho 6 .

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ, do đó $p+1$ chẵn
 $\Rightarrow (p+1):2$
 (1)

Cũng do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2$ ($k \in \mathbb{N}$)

Nếu $p=3k+1$ thì $p+2=3k+3=3(k+1):3$

$\Rightarrow p+2$ không là số nguyên tố nên $p=3k+1$ không xảy ra.

Do đó $p=3k+2 \Rightarrow p+1=3k+3=3(k+1):3$
 (2)

Vì $(2;3)=1$ nên từ (1) và (2) ta có $(p+1):6$

Câu 6. (HSG 7 Thị xã Thái Hòa 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố p và q sao cho $p^2 - 2q^2 = 17$

Lời giải

Từ gt: $p^2 - 2q^2 = 17 \Rightarrow p^2 - 17 = 2q^2$ suy ra p lẻ.

Với p lẻ $\Rightarrow p^2$ chia 4 dư 1 $\Rightarrow p^2 - 17$ chia hết cho 4 $\Rightarrow 2q^2$ chia hết cho 4 $\Rightarrow q = 2$
 vì q là số nguyên tố.

Với $q = 2$ ta có $p = 5$

Câu 7. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023)

Cho p và $2p+1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $5p+2$ là hợp số.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2$ với $k \in \mathbb{N}^*$

-Nếu $p=3k+1 \Rightarrow 2p+1=2(3k+1)+1=6k+3=3(2k+1)$

Khi đó $2p+1$ lớn hơn 3 và có ít nhất 3 ước là 1; 3; $2p+1$ trái với giả thiết $2p+1$ là số nguyên tố

Do đó p có dạng $3k+2$

Xét $5p+2=5.(3k+2)+2=15k+12=3(5k+4)$

Khi đó $5p+2$ lớn hơn 3 và có ít nhất 3 ước là 1; 3; $5p+2$ nên $5p+2$ là hợp số.

Vậy Cho p và $2p+1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3 thì $5p+2$ là hợp số (đpcm).

Câu 8. (HSG 7 huyện Lập Thạch 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên tố p sao cho $2^p + p^2$ là một số nguyên tố.

Lời giải

Với $p=2$ thì $2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ là hợp số

Với $p = 3$ thì $2^p + p^2 = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố

Với p là số nguyên tố và $p > 3$ nên $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$ với $k \in \mathbb{N}^*$

Ta có $2^p + p^2 = (2^p + 1) + (p^2 - 1)$ vì $(2^p + 1):3$ và $(p^2 - 1):3$ với mọi số nguyên tố p có dạng: $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Suy ra $2^p + p^2 = (2^p + 1) + (p^2 - 1)$ là hợp số.

Vậy Với $p = 3$ thì $2^p + p^2 = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố.

Câu 9. (HSG 7 huyện Thanh Trì; Hiệp Hòa 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố x, y thỏa mãn: $x^2 - 2y^2 = 1$

Lời giải

Xét $x^2 - 2y^2 = 1$ suy ra $x^2 = 2y^2 + 1$

- Nếu x chia hết cho 3 mà x là số nguyên tố nên $x = 3$

Thay vào tính được $y = 2$ là số nguyên tố (Chọn)

- Nếu x không chia hết cho 3, thì x chia cho 3 dư 1 hoặc dư 2

$\Rightarrow x^2$ chia cho 3 dư 1

$\Rightarrow (x^2 - 1):3$

Suy ra $2y^2$ chia hết cho 3 mà $(2, 3) = 1$ nên y^2 chia hết cho 3 mà 3 là số nguyên tố nên y chia hết cho 3

Mà y là số nguyên tố nên $y = 3$

Thay vào tính được $x^2 = 19$ (loại)

Vậy có duy nhất cặp số $(x, y) = (2, 3)$ thỏa mãn bài toán.

Câu 10. (HSG 7 huyện Ninh Giang 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn $10p + 1$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng: $(5p + 1):6$

Lời giải

Ta có p là số nguyên tố lớn hơn 3

Xét ba số tự nhiên liên tiếp $10p$; $10p + 1$; $10p + 2$ trong đó có một số chia hết cho 2, một số chia hết cho 3

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 và $10p + 1$ là số nguyên tố nên p và $10p + 1$ không chia hết cho 2 và cho 3.

mà 3 và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $10p \not\equiv 3, 10p + 1 \not\equiv 3$ do đó $(10p + 2):3 \Rightarrow 2(5p + 1):3 \Rightarrow (5p + 1):3$

p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ $\Rightarrow 5p+1$ chẵn $\Rightarrow (5p+1):2$
 Vì $(5p+1):3$ và $(5p+1):2$ mà 2 và 3 là hai số nguyên tố cùng nhau nên $(5p+1):6$
 Vậy p là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn $10p+1$ cũng là số nguyên tố thì $(5p+1):6$.

Câu 11. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố p sao cho $2p+1$ và $4p+1$ đều là số nguyên tố.

Lời giải

- Xét $p=2$ thì $4p+1=9$ là hợp số (loại)
- Xét $p=3$ thì $2p+1=7$; $4p+1=13$ đều là số nguyên tố
- Nếu $p > 3$ thì $p \not\equiv 3$ nên $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2$ ($k \in \mathbb{N}^*$)
- Xét được $p=3k+1$ thì $2p+1$ là hợp số (loại)
- Xét được $p=3k+2$ thì $4p+1$ là hợp số (loại)
- Kết luận: $p=3$ thì $2p+1=7$; $4p+1=13$ đều là số nguyên tố

Câu 12. (HSG 7 huyện Hà Trung 2 2022 - 2023)

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 - 2b^2 = 3(c^2 - 5d^2 - b^2)$. Chứng minh:
 $a+b+c+d$ là hợp số.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} a^2 - 2b^2 &= 3(c^2 - 5d^2 - b^2) \Rightarrow a^2 - 2b^2 + 3b^2 + c^2 + d^2 = 3(c^2 - 5d^2 - b^2) + 3b^2 + c^2 + d^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &= 3(c^2 - 5d^2 - b^2) + 3b^2 + c^2 + d^2 = 4c^2 - 14d^2 = 2(2c^2 - 7d^2); 2 \\ &\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2 + d^2):2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d) = a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1)$$

Xét hiệu: $a(a-1)$; $b(b-1)$; $c(c-1)$; $d(d-1)$ đều là các tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2

$$\text{Suy ra: } \left[(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d) \right] : 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $(a+b+c+d):2$ mà $a+b+c+d > 2$ nên $a+b+c+d$ là hợp số.

Câu 13. (HSG 7 huyện Lang Chánh 2022 - 2023)

Cho các số nguyên tố p và q thỏa mãn: $p^2 - 2q^2 = 17$. Tính $(p+q)^4 + 15$

Lời giải

Ta có:

$$p^2 - 2q^2 = 17$$

$$\Rightarrow p^2 - 1 = 2q^2 + 16$$

$$\Rightarrow (p-1)(p+1) = (2q^2 + 16) : 2$$

$$\Rightarrow (p-1)(p+1) : 2$$

$$\text{Mà } (p+1) - (p-1) = 2$$

$$\text{suy ra } p-1; p+1 \text{ là hai số chẵn liên tiếp } \Rightarrow (p-1)(p+1) : 8$$

$$\Rightarrow (2q^2 + 16) : 8 \text{ mà } 16 : 8 \Rightarrow 2q^2 : 8 \Rightarrow q^2 : 4 \Rightarrow q : 2$$

$$\text{Mà } q \text{ là số nguyên tố } \Rightarrow q = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 + 17 = 2 \cdot 2^2 + 17 = 25$$

$$\text{Mà } p \text{ là số nguyên tố } \Rightarrow p = 5$$

$$\text{Ta có: } (p+q)^4 + 15 = (5+2)^4 + 15 = 2416$$

$$\text{Vậy: } (p+q)^4 + 15 = 2416$$

Câu 14. (HSG 7 Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho $m; n; t$ là ba số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn: $m - n = n - t = a \quad (a \in \mathbb{N}^*)$. Chứng minh rằng a chia hết cho 6.

Lời giải

$$m - n = n - t = a \quad (a \in \mathbb{N}^*)$$

Ta có:

$$\text{Suy ra } n = t + a; m = n + a = t + 2a$$

Do đó ta có $t; t+a; t+2a$ là các số nguyên tố lớn hơn 3

Xét số dư của ba số nguyên tố $t; t+a; t+2a$ đã cho khi chia cho 3, số dư nhận được có thể là 1 hoặc 2. Do đó có ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 3 và hiệu của chúng chia hết cho 3.

$$\text{Mặt khác } (t+a) - t = a; (t+2a) - t = 2a; (t+2a) - (t+a) = a$$

$$\text{Suy ra } a \text{ hoặc } 2a \text{ chia hết cho } 3. \text{ Mà } (2; 3) = 1 \text{ nên } a : 3 \quad (1)$$

Vì m, n là các số nguyên tố lớn hơn 3 nên m, n là các số lẻ

$$\Rightarrow m - n \text{ Từ } (1) \text{ và } (2) \text{ kết hợp với } (2; 3) = 1 \text{ ta có } a : 6$$

Câu 15. (HSG 7 Huyện Quốc Oai 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn $10p+1$ cũng là số nguyên tố. Chứng minh rằng $5p+1$ chia hết cho 6.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ $\Rightarrow 5p$ là số lẻ

$$5p+1 \text{ là số chẵn } \Rightarrow (5p+1) : 2 \quad (1)$$

Xét ba số tự nhiên liên tiếp $10p$; $10p+1$; $10p+2$ luôn tồn tại một số chia hết cho 3

Mà $10p+1$ là số nguyên tố nên $(10p+1) \nmid 3$

p là số nguyên tố lớn hơn $3 \Rightarrow p \nmid 3$ và ƯCLN $(10; 3) = 1 \Rightarrow 10p \nmid 3$

Do đó $(10p+2) \nmid 3 \Rightarrow 2(5p+1) \nmid 3$ mà ƯCLN $(2; 3) = 1 \Rightarrow (5p+1) \nmid 3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $5p+1$ chia hết cho 6

Câu 16. (HSG 7 TP Phúc Yên- Trường THCS Đồng Xuân 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 . Chứng minh rằng $(p^2 - 1) \vdots 24$.

Lời giải

Ta có $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$.

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ. Do đó $p-1$ và $p+1$ là hai số chẵn liên tiếp. Từ đó $(p-1)(p+1) \vdots 8$ (1).

Xét ba số tự nhiên liên tiếp $p-1$; p ; $p+1$. Ta có $(p-1)p(p+1) \vdots 3$.

Mà p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3 nên $(p-1)(p+1) \vdots 3$ (2).

Từ (1) và (2) kết hợp với $(3; 8) = 1$ và $3 \cdot 8 = 24$ ta suy ra $(p^2 - 1) \vdots 24$ (đpcm).

Câu 17. (HSG 7 (LDP) Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm một số có ba chữ số biết rằng số đó chia hết cho 72 , các chữ số của nó sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn tỷ lệ với 2 ; 3 ; 4

Lời giải

Gọi ba chữ số của số cần tìm là a, b, c . Điều kiện $a, b, c \in \mathbb{N}^*$; $a < b < c \leq 9$.

Theo bài ra: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và số có ba chữ số a, b, c chia hết cho 72 .

Ta có số có ba chữ số a, b, c chia hết cho 72 nên nó chia hết cho 9 , chia hết cho 8 .

Số có ba chữ số a, b, c chia hết cho 9

$\Rightarrow (a+b+c) \vdots 9$ mà $0 < a+b+c < 27$ nên $a+b+c \in \{9; 18\}$

Từ $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$, áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{2+3+4}$

+) Nếu $a+b+c=9 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{9}{9} = 1$

$\Rightarrow a=2$; $b=3$; $c=4$.

Ta được các số 234 ; 243 ; 324 ; 342 ; 423 ; 432 . Nhưng số cần tìm phải chia hết cho 8 nên chỉ có số 432 chia hết cho 72 (1)

+) Nếu $a+b+c=18 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{18}{9} = 2$
 $\Rightarrow a=4, b=6, c=8.$

Ta được các số $468, 486, 648, 684, 846, 864$. Nhưng số cần tìm phải chia hết cho 8 nên chỉ có số $648, 864$ chia hết cho 8 (2)

Từ (1) và (2) ta được các số cần tìm là: $432, 648, 864$

Câu 18. (HSG 7 huyện Nông Cống 2022 - 2023)

Cho số nguyên $n (n > 1)$ thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố. Chứng minh n chia hết cho 5 .

Lời giải

Với mọi số nguyên n thì n^2 chia cho 5 dư $0; 1$ hoặc 4 .

+ Nếu n^2 chia 5 dư 1 thì $n^2 = 5k + 1 (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n^2 + 4 = 5k + 1 + 4 = (5k + 5) : 5$.

Do đó nên $n^2 + 4$ không là số nguyên tố. Loại trừ trường hợp này.

+ Nếu n^2 chia 5 dư 4 thì $n^2 = 5k + 4 (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow n^2 + 16 = (5k + 20) : 5$.

Do đó $n^2 + 16$ không là số nguyên tố. Loại trừ trường hợp này.

Vậy $n^2 : 5$, suy ra $n : 5$.

Câu 19. (HSG 7 huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Cho m, n là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng: $mn - m - n + 1$ chia hết cho 192 .

Lời giải

Ta có: $192 = 16.12$

Do m, n là hai số chính phương lẻ liên tiếp nên ta có: $m = (2k - 1)^2$ và $n = (2k + 1)^2$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

Khi đó: $mn - m - n + 1 = (m - 1)(n - 1)$

$$= [(1k - 1)^2 - 1][(2k + 1)^2 - 1] = (4k^2 - 4k)(4k^2 + 4k)$$

$$= 16k^2(k - 1)(k + 1) : 16 \quad (1)$$

Ta có: $k(k - 1)(k + 1) : 3$ và $k(k - 1)k(k + 1) : 4$

Mà $(3, 4) = 1$ nên $k^2(k - 1)(k + 1) : 12$

$$\Rightarrow mn - m - n + 1 = 16k^2(k - 1)(k + 1) : 12 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $mn - m - n + 1 \vdots 192$ (đpcm)

Câu 20. (HSG 7 thành phố Thanh Hoá, 2022 - 2023; huyện Thanh Ba năm 2021 - 2022)

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Chứng minh rằng: $a + b + c + d$ là hợp số.

Lời giải

Ta có: $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d) = (a^2 - a) + (b^2 - b) + (c^2 - c) + (d^2 - d)$

$= a(a - 1) + b(b - 1) + c(c - 1) + d(d - 1)$ chia hết cho 2.

Mà $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ nên $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 2(b^2 + d^2)$ chia hết cho 2

$\Rightarrow a + b + c + d$ chia hết cho 2.

Mặt khác, a, b, c, d là các số nguyên dương $\Rightarrow a + b + c + d \geq 4$.

Vậy $(a + b + c + d)$ là hợp số.

Câu 21. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy năm 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in \mathbb{N}^*$ và $f(5) - f(4) = 2022$.

Chứng minh $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Lời giải

Ta có: $f(5) - f(4) = (125a + 25b + 5c + d) - (64a + 16b + 4c + d) = 2022$

$\Rightarrow 61a + 9b + c = 2022$

$f(7) - f(2) = (343a + 49b + 7c + d) - (8a + 4b + 2c + d) = 335a + 45b + 5c$

$= 305a + 45b + 5c + 30a = 5(61a + 9b + c) + 30a = 5 \cdot 2022 + 30a = 10(1011 + 3a)$

Vì a nguyên dương nên $10(1011 + 3a) \vdots 10$ và $10(1011 + 3a) > 10$

nên $10(1011 + 3a)$ là hợp số.

Vậy $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Câu 22. (HSG 7 huyện Kinh Môn 2020 - 2021)

Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ chia hết cho 2. Chứng minh rằng: $a + b + c + d$ là hợp số.

Lời giải

Ta có:

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - a - b - c - d = (a^2 - a) + (b^2 - b) + (c^2 - c) + (d^2 - d)$

$$= a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)+d(d-1)$$

Do a, b, c, d là các số nguyên dương, nên a và $a-1$; b và $b-1$; c và $c-1$; d và $d-1$ là hai số nguyên liên tiếp. Suy ra:

$$\begin{cases} a(a-1):2 \\ b(b-1):2 \\ c(c-1):2 \\ d(d-1):2 \end{cases} \Rightarrow \left[(a^2+b^2+c^2+d^2) - (a+b+c+d) \right] :2$$

$$\text{Mà } (a^2+b^2+c^2+d^2):2 \Rightarrow (a+b+c+d):2 \quad (1)$$

$$\text{Vì } a, b, c, d \text{ là các số nguyên dương} \Rightarrow a+b+c+d > 2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow a+b+c+d$ là hợp số.

Vậy $a+b+c+d$ là hợp số.

Câu 23. (HSG 7 huyện Giao Thủy 2016 - 2017)

Cho các số nguyên dương $a; b; c; d; e$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ chia hết cho 2 . Chứng tỏ rằng $a+b+c+d+e$ là hợp số

Lời giải

$$\text{Đặt } A=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2; B=a+b+c+d+e$$

$$\text{Xét: } A+B=(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)+(a+b+c+d+e)$$

$$=(a^2+a)+(b^2+b)+(c^2+c)+(d^2+d)+(e^2+e)$$

$$=a(a+1)+b(b+1)+c(c+1)+d(d+1)+e(e+1)$$

Với n là số nguyên thì tích 2 số nguyên liên tiếp chia hết cho 2 nên $A+B$ chia hết cho 2 .

Theo đề bài A chia hết cho 2 nên B chia hết cho 2 và $B > 2$

Vậy B là hợp số.

Câu 24. (HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012 - 2013)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 . Chứng minh rằng p^2+2012 là hợp số.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $p=3k \pm 1$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 1$)

+ Với $p=3k+1$ ta có:

$$p^2+2012=(3k+1)^2+2012=9k^2+6k+2013 \Rightarrow (p^2+2012):3$$

+ Với $p=3k-1$ ta có

$$p^2+2012=(3k-1)^2+2012=9k^2-6k+2013 \Rightarrow (p^2+2012):3$$

Vậy $p^2 + 2012$ là hợp số

Câu 25. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn 2018 - 2019)

Một số nguyên tố p chia cho 42 có số dư r là hợp số. Tìm hợp số r

Lời giải

Vì p chia cho 42 có số dư là r nên $p = 42k + r (0 < r < 42, r \in \mathbb{N})$

Hay $p = 2 \cdot 3 \cdot 7k + r$

Vì p là số nguyên tố nên r không chia hết cho $2, 3, 7$

$\Rightarrow r$ là hợp số không chia hết cho $2, 3, 7$ và $r < 42$, Vậy hợp số $r = 25$

Câu 26. (HSG 7 huyện Hương Sơn 2017-2018)

Cho $m, n \in \mathbb{N}^*$ và p là số nguyên tố thỏa mãn: $\frac{p}{m-1} = \frac{m+n}{p} (1)$. Chứng minh rằng: $p^2 = n + 2$

Lời giải

+ Nếu $m+n$ chia hết cho $p \Rightarrow p \mid (m-1)$ do p là số nguyên tố và $m, n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow m = 2$ hoặc $m = p+1$ khi đó từ (1) ta có: $p^2 = n + 2$

Nếu $m+n$ không chia hết cho p , từ (1) $\Rightarrow (m+n)(m-1) = p^2$

Do p là số nguyên tố và $m, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m-1 = p^2$ và $m+n = 1$

$\Rightarrow m^2 = p^2 + 1$ và $n = -p^2 < 0$ (loại)

Vậy $p^2 = n + 2$

Câu 27. (HSG 7 huyện Kim Thành, 2022 - 2023)

Cho biết a, b là các số nguyên tố thỏa mãn: $a^2 - b^2 - 4 = 113$. Chứng minh rằng $a+b$ cũng là một số nguyên tố.

Lời giải

$$a^2 - b^2 - 4 = 113$$

$$a^2 - b^2 = 117 (*)$$

Nếu a và b cùng tính chẵn lẻ thì $(a^2 - b^2) : 2$ mà $117 \not\vdots 2$ nên $(*)$ vô lý.

Do đó trong hai số a, b phải có một số chẵn

Mà a, b có một số nguyên tố nên $a = 2$ hoặc $b = 2$.

Nếu $a = 2$ thì $4 - b^2 = 117$

$$b^2 = -113 \text{ (Vô lý)}$$

Nếu $b = 2$ thì $a^2 - 4 = 117$

$$a^2 = 121$$

$$a = 11$$

$$a + b = 11 + 2 = 13 \text{ là số nguyên tố (đpcm)}$$

Câu 28. (HSG 7 huyện Triệu Sơn, tỉnh Thanh Hoá, 2017 - 2018)

Tìm số nguyên tố p để $p+2$, $p+6$, $p+8$, $p+14$ cũng là các số nguyên tố.

Lời giải

Nếu $p=2$ thì $p+2=4$, là hợp số $\Rightarrow$ loại

Nếu $p=3$ thì $p+6=9$, là hợp số $\Rightarrow$ loại

Nếu $p=5$ thì $p+2=7$, $p+6=11$, $p+8=13$, $p+14=19$ đều là các số nguyên tố.

Nếu $p > 5$, vì p là số nguyên tố nên p không chia hết cho 5

$\Rightarrow p$ có dạng $5k+1$ hoặc $5k+2$ hoặc $5k+3$ hoặc $5k+4$ ($k \in \mathbb{N}$)

- Nếu $p=5k+1$ thì $p+14=5k+1+14=5k+15=5(k+3):5$, mà $p+14 > 5$

nên $p+14$ là hợp số

- Nếu $p=5k+2$ thì $p+8=5k+2+8=5k+10=5(k+2):5$, mà $p+8 > 5$

nên $p+8$ là hợp số

- Nếu $p=5k+3$ thì $p+2=5k+3+2=5k+5=5(k+1):5$, mà $p+2 > 5$

nên $p+2$ là hợp số

- Nếu $p=5k+4$ thì $p+6=5k+4+6=5k+10=5(k+2):5$, mà $p+6 > 5$

nên $p+6$ là hợp số

Vậy p chỉ có 1 giá trị duy nhất là $p=5$

Câu 29. (HSG 7 huyện Thanh Sơn, tỉnh, trường 2022-2023)

Tìm các số nguyên tố x, y thỏa mãn $(x-1)(x+1)=6y^2$

Lời giải

+ Vì $6y^2 : 2 \Rightarrow (x-1)(x+1) : 2$

+ Vì $(x-1)+(x+1)=2x : 2$ nên $x-1; x+1$ cùng tính chẵn lẻ

Suy ra $x-1; x+1$ là hai số chẵn liên tiếp.

Do đó $(x-1)(x+1) : 8$

$$\Rightarrow 6y^2 : 8 \Rightarrow 3y^2 : 4 \Rightarrow y^2 : 4 \Rightarrow y : 2$$

Mà y là số nguyên tố nên $y=2$

- Thay $y=2$ vào $(x-1)(x+1)=6y^2 \Rightarrow (x-1)(x+1)=24 \Rightarrow (x-1)(x+1)=4.6$

$$\Rightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$(x; y) = (5; 2)$$

Vậy

Câu 30. (HSG 7 Tây Hồ, 2022 - 2023)

Tìm cặp số nguyên tố p, q thỏa mãn $p^q \cdot q^p = (2p + q + 1) \cdot (2q + p + 1)$

Lời giải

Ta có: $p^q \cdot q^p = (2p + q + 1) \cdot (2q + p + 1)$ (1)

TH1: p, q có một số là số chẵn

Giả sử p là số chẵn

Do p là số nguyên tố

$$\Rightarrow p = 2$$

Từ (1) $\Rightarrow 2^q \cdot q^2 = (4 + q + 1)(2q + 2 + 1) = (q + 5) \cdot (2q + 3)$ (*)

$$\Rightarrow (q + 5)(2q + 3) : 2 \text{ mà } 2q + 3 \text{ là số lẻ nên } (q + 5) : 2 \Rightarrow q \text{ lẻ} \Rightarrow q \geq 3$$

Do (*) suy ra $(q + 5)(2q + 3) : q$

$$\Rightarrow \begin{cases} q + 5 : q \\ 2q + 3 : q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 : q \\ 3 : q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = q \\ 3 = q \end{cases} \text{ (do } q \text{ là số nguyên tố)}$$

Thử lại ta nhận $q = 5; p = 2$

TH2: p, q là số nguyên tố lẻ $\Rightarrow p \geq 3; q \geq 3$

$$\Rightarrow 2p + q + 1; 2q + p + 1 \text{ là những số chẵn}$$

$$\Rightarrow (2p + q + 1)(2q + p + 1) : 4 \text{ mà } p^q \cdot q^p \text{ là số lẻ nên vô lí}$$

$$(p; q) \in \{(2; 3); (3; 2)\}$$

Vậy

Dạng 2: Áp dụng định lý Fermat

Câu 1. (HSG 7 quận Hà Đông 2022 - 2023)

Cho $A = 2^{2^{10n+1}} + 19$. Chứng minh rằng A là hợp số

Lời giải

Theo định lý Fermat bé, do 11 là số nguyên tố nên ta có $2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10n} \equiv 1 \pmod{11}$

$$\Rightarrow 2^{10n+1} = 2 \cdot 2^{10n} \equiv 2 \pmod{22} \Rightarrow 2^{10n+1} = 22k + 2 \quad (k \in \mathbb{N})$$

Do 23 là số nguyên tố nên $2^{22} \equiv 1 \pmod{23} \Rightarrow 2^{2^{10n+1}} = 2^{22k+2} = 4 \cdot 2^{22k} \equiv 4 \pmod{23}$

$$\Rightarrow 2^{2^{10n+1}} + 19 \equiv 4 + 19 \equiv 0 \pmod{23} \text{ . Nên } A : 23 \text{ mà } A > 23 \text{ với } \forall n \geq 1 \text{ nên } A \text{ là hợp số.}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc-Tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Cho hai số nguyên tố khác nhau p và q . Chứng minh rằng: $p^{q-1} + q^{p-1} - 1$ chia hết cho $p \cdot q$

Lời giải

Vì p, q nguyên tố cùng nhau và p khác q nên: $(p, q) = 1$.

Áp dụng định lí Fermat ta có: $p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ và $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

$\Rightarrow (p^{q-1} - 1) : q$ và $(q^{p-1} - 1) : p$ mặt khác $p^{q-1} : p$ và $q^{p-1} : q$

nên ta có: $(p^{q-1} + q^{p-1} - 1) : q$; $(p^{q-1} + q^{p-1} - 1) : p$ mà $(p, q) = 1$

nên: $(p^{q-1} + q^{p-1} - 1) : p \cdot q$

Câu 3. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy – Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh $a + b + c + d$ chia hết cho 3

Lời giải

Ta có $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3c^3 - 15d^3$

Mà $(3c^3 - 15d^3) : 3$ nên $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) : 3$ (1)

Dư trong phép chia a cho 3 là $\{0; \pm 1\}$ suy ra dư trong phép chia a^3 cho 3 cũng là $\{0; \pm 1\}$
hay $a \equiv a^3 \pmod{3}$

Tương tự ta có $b \equiv b^3 \pmod{3}$; $c \equiv c^3 \pmod{3}$; $d \equiv d^3 \pmod{3}$

$a + b + c + d \equiv a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \pmod{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a + b + c + d$ chia hết cho 3 .

Câu 4. (HSG 7 huyện Tam Dương 2016 - 2017)

Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + p^2$ là các số nguyên tố

Lời giải

Với $p = 2$ thì $2^p + p^2 = 4 + 4 = 8$ không là số nguyên tố

Với $p = 3$ thì $2^p + p^2 = 8 + 9 = 17$ là số nguyên tố

Với $p > 3$ thì p là số nguyên tố nên p lẻ nên $2^p = 2^{2k+1} \equiv 2 \pmod{3}$

Và $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ nên $2^p + p^2 \equiv 3$

Mà $2^p + p^2 > 3$ nên $2^p + p^2$ là hợp số

Vậy với $p = 3$ thì $2^p + p^2$ là hợp số

Vậy với $p=3$ thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Câu 5. (HSG 7 huyện Phú Lý 2018 - 2019)

Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + p^2$ là các số nguyên tố.

Lời giải

Với $p=2$ thì $2^p + p^2 = 4 + 4 = 8$ không là số nguyên tố

Với $p=3$ thì $2^p + p^2 = 8 + 9 = 17$ là số nguyên tố

Với $p > 3$ thì p là số nguyên tố nên p lẻ nên $2^p = 2^{2k+1} \equiv 2 \pmod{3}$

Và $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$ nên $(2^p + p^2) \equiv 3 \pmod{3}$

Mà $2^p + p^2 > 3$ nên $2^p + p^2$ là hợp số

$\Rightarrow$ với $p > 3$ thì $2^p + p^2$ là hợp số

Vậy với $p=3$ thì $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Dạng 3: Phương pháp phân tích

Câu 1. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố $\overline{ab}$ để $\overline{ab} - \overline{ba}$ là số chính phương $a > b > 0$

Lời giải

$$A = \overline{ab} - \overline{ba} = 9a - 9b = 9(a - b)$$

Để là số chính phương thì $a - b$ là số chính phương

$$\text{Mà } 1 \leq a - b \leq 8 \Rightarrow a - b \in \{1; 4\}$$

$$\text{TH1: Với } a - b = 1 \Rightarrow \overline{ab} \in \{21; 32; 43; 54; 65; 76; 87; 98\}$$

Thấy có 43 là số nguyên tố

$$\text{TH2: Với } a - b = 4 \Rightarrow \overline{ab} \in \{51; 62; 73; 84; 95\}$$

Có 73 là số nguyên tố

Vậy số nguyên tố $\overline{ab}$ bằng 43 hoặc 73

Câu 2. (HSG 7 Bắc Giang 2022 - 2023)

Cho đa thức bậc ba $Q(x)$ với hệ số x^3 là một số nguyên dương và $Q(5) - Q(4) = 2023$.

Chứng minh rằng $Q(7) - Q(2)$ là hợp số.

Lời giải

Đa thức bậc ba $Q(x)$ với hệ số x^3 là một số nguyên dương nên

$$Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \in \mathbb{N}^*)$$

$$Q(5) = 125a + 25b + 5c + d; \quad Q(4) = 64a + 16b + 4c + d$$

Ta có:

$$\Rightarrow Q(5) - Q(4) = 61a + 9b + c = 2023 \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } Q(7) = 343a + 49b + 7c + d; \quad Q(2) = 8a + 4b + 2c + d$$

$$\Rightarrow Q(7) - Q(2) = 335a + 45b + 5c \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } Q(7) - Q(2) = 30a + (305a + 45b + 5c) = 30a + 10115$$

$$\Rightarrow [Q(7) - Q(2)] : 5 \quad (a \in \mathbb{N}^*); \quad \text{Mà } Q(7) - Q(2) > 5$$

Do vậy $Q(7) - Q(2)$ là hợp số.

Câu 3. (HSG 7 huyện Nghĩa Đàn 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số nguyên tố x và y thỏa mãn: $3x^2 + 1 = 19y^2$

Lời giải

$$\text{Ta có } 3x^2 + 1 = 19y^2 \Rightarrow 19y^2 - 3x^2 = 1$$

Vì 1 là số lẻ nên $19y^2 - 3x^2$ là số lẻ $\Rightarrow 19y^2$ và $3x^2$ phải không cùng tính chẵn lẻ.

Do 19 và 3 đều là số lẻ nên x và y không cùng tính chẵn lẻ.

*) Trường hợp 1: y lẻ và x chẵn

Vì x và y các số nguyên tố nên x là số nguyên tố chẵn $\Rightarrow x = 2$

$$\text{Khi đó theo đề bài ta có: } 3 \cdot 2^2 + 1 = 19y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{13}{19} \quad (\text{loại})$$

*) Trường hợp 2: y chẵn và x lẻ

Vì x và y các số nguyên tố nên y là số nguyên tố chẵn $\Rightarrow y = 2$

$$\text{Khi đó theo đề bài ta có: } 3x^2 + 1 = 19 \cdot 2^2 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5 \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$\text{Vậy } x = 5; \quad y = 2$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Yên Bái – Yên Bình 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Biết $p+2$ cũng là số nguyên tố. Chứng tỏ rằng $p+1$ chia hết cho 6.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ, do đó $p+1$ chẵn

$$\Rightarrow (p+1) : 2 \quad (1)$$

Cũng do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p = 3k+1$ hoặc $p = 3k+2, (k \in \mathbb{N})$

Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1); 3$
 $\Rightarrow p + 2$ không là số nguyên tố nên $p = 3k + 1$ không xảy ra.

Do đó $p = 3k + 2 \Rightarrow p + 1 = 3k + 3 = 3(k + 1); 3$ (2)

Vì $(2, 3) = 1$ nên từ (1) và (2) ta có $(p + 1); 6$

Câu 5. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2020 - 2021)

Cho đa thức: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in \mathbb{N}^*$ và $f(5) - f(4) = 2022$. Chứng minh:
 $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Lời giải

Xét đa thức: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với $a \in \mathbb{N}^*$

Ta có: $f(5) - f(4) = (a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + d) - (a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d)$

$$\Rightarrow f(5) - f(4) = (125a + 25b + 5c + d) - (64a + 16b + 4c + d)$$

$$\Rightarrow f(5) - f(4) = 61a + 9b + c$$

$$\text{Mà } f(5) - f(4) = 2022 \Rightarrow 61a + 9b + c = 2022 \quad (1)$$

Lại có: $f(7) - f(2) = (a \cdot 7^3 + b \cdot 7^2 + c \cdot 7 + d) - (a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d)$

$$\Rightarrow f(7) - f(2) = (343a + 49b + 7c + d) - (8a + 4b + 2c + d)$$

$$\Rightarrow f(7) - f(2) = 335a + 45b + 5c$$

$$\Rightarrow f(7) - f(2) = 5(67a + 9b + c) = 5(6a + 61a + 9b + c) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $f(7) - f(2) = 5 \cdot (6a + 2022)$ là hợp số.

Vậy $f(7) - f(2)$ là hợp số.

Câu 6. (HSG 7 huyện Tiền Hải 2021 - 2022)

Cho 2022 số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2021}, a_{2022}$ là các số tự nhiên khác 0 thỏa mãn:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2021}} + \frac{1}{a_{2022}} = 1$$

. Chứng minh rằng: Tồn tại ít nhất một số trong 2022 số đã cho là số chẵn.

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{2021}} + \frac{1}{a_{2022}} = 1$$

$$\Rightarrow a_2 a_3 \dots a_{2022} + a_1 a_2 \dots a_{2021} = a_1 a_2 \dots a_{2022} \quad (*)$$

Giả sử các số $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2021}, a_{2022}$ đều là số lẻ, khi đó vế trái của (*) là tổng của 2022 số lẻ nên vế trái là số chẵn, mà vế phải là số lẻ (mâu thuẫn) $\Rightarrow$ Điều giả sử sai.

Vậy do đó tồn tại ít nhất một số trong 2022 số đã cho là số chẵn (đpcm).

Câu 7. (HSG 7 Trường THCS Nguyễn Trung Trực 2018-2019)

Chứng minh rằng nếu m và n là các số tự nhiên thì số: $A = (5m + n + 1)(3m - n + 4)$ là số chẵn.

Lời giải

Ta xét hiệu $(5m + n + 1) - (3m - n + 4) = 5m + n + 1 - 3m + n - 4 = 2m + 2n - 3$

Với $m, n \in \mathbb{N}$ thì $2m + 2n - 3$ là một số lẻ.

Do đó trong hai số $5m + n + 1$ và $3m - n + 4$ phải có một số chẵn.

Suy ra tích của chúng là một số chẵn.

Vậy A là số chẵn.

Câu 8. (HSG 7 trường Nguyễn Trung Trực 2017 - 2018)

Cho a, b, c đôi một khác nhau và $\neq 0$. Biết $\overline{ab}$ là số nguyên tố và $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{b}{c}$. Tìm $\overline{abc}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

Do $\overline{ab}$ là 1 số nguyên tố có hai chữ số nên $b \in \{1; 3; 7; 9\}$

Do $ac = b^2$ ta xét các trường hợp

+ $b = 1 \Rightarrow a = c = 1$ (loại do $a \neq c$)

+ $b = 3 \Rightarrow ac = 9 = 1.9$ (do $a \neq c$) $\Rightarrow \overline{ab} = 13$ (do 9^3 không là nguyên tố)

Có $\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}} = \frac{13}{39} = \frac{1}{3} = \frac{3}{9} = \frac{b}{c}$ (tm)

+ $b = 7; b = 9$ đều bị loại do dẫn đến $a = c$

Vậy $\overline{abc} = 139$.

Câu 9. (HSG 7 huyện Thanh Miện, tỉnh Hải Dương, 2022- 2023)

Tìm các số nguyên tố p thỏa mãn $2^p + p^2$ là số nguyên tố.

Lời giải

Nếu $p = 2 \Rightarrow 2^p + p^2 = 8$ không là số nguyên tố (loại).

Nếu $p = 3 \Rightarrow 2^p + p^2 = 17$ là số nguyên tố (chọn).

Nếu $p > 3$ thì P là số lẻ $\Rightarrow p = 2k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) $\Rightarrow 2^p = 2^{2k+1} = 2 \cdot 4^k$ chia cho 3 dư 2.

Lại có p^2 là số chính phương lớn hơn 3 nên chia cho 3 dư 1. Suy ra $2^p + p^2$ chia hết cho 3 (loại).

Vậy $p = 3$.

Câu 10. (HSG 7 thành phố Lào Cai, 2022 - 2023)

Chứng minh $n \in \mathbb{N}^*$ thì $n^3 + n + 2$ không thể là số nguyên tố.

Lời giải

Ta có: $n^3 + n + 2 = n^3 + 1 + n + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1) + (n+1) = (n+1)(n^2 - n + 2)$

Do $\forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $n+1 > 1$ và $n^2 - n + 2 > 1$

Vậy $(n+1)(n^2 - n + 2)$ là hợp số hay $n^3 + n + 2$ không thể là số nguyên tố.

Câu 11. (HSG 7 huyện Phù Cát 2017 - 2018; Hoài Nhơn 2014 - 2015)

Cho P là số nguyên tố. Tìm tất cả các số nguyên a thỏa mãn: $a^2 + a - p = 0$

Lời giải

Từ $a^2 + a - p = 0 \Rightarrow p = a^2 + a = a(a+1)$

Với $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow p = a(a+1); 2; p$ là số nguyên tố $\Rightarrow p = 2$

$\Rightarrow a(a+1) = 2 = 1 \cdot 2 = (-1) \cdot (-2) \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -2 \end{cases}$

Câu 12. (HSG 7 trường Nguyễn Trực 2017 - 2018)

Tìm x, y biết: $x^2 - 6y^2 + 1 = 2$ (x, y là nguyên tố)

Lời giải

$x^2 - 6y^2 + 1 = 2 \Rightarrow x^2 = 6y^2 + 1$

vì x, y là nguyên tố nên $x > 0; y > 0; y < x$

Do đó y là số chẵn $\Rightarrow y = 2$

$\Rightarrow x^2 = 6 \cdot 2^2 + 1 = 25 \Rightarrow x = 5$

Vậy $x = 5; y = 2$.

Dạng 4: Giải phương trình nghiệm nguyên dựa vào tính chất số nguyên tố

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Miện năm 2021 - 2022)

Tìm số nguyên tố P sao cho $P+2$ và $P+4$ đều là số nguyên tố.

Lời giải

Nếu $p = 2$ thì $p+2 = 4$ là hợp số (loại).

Nếu $p = 3$ thì $p+2 = 5, p+4 = 7$ đều là số nguyên tố. Thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nếu $p > 3$ thì $p = 3k+1$ hoặc $p = 3k+2$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

+ Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow p + 2 = 3k + 1 + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1)$ chia hết cho 3 .

Mà $p > 3$ nên $p + 2$ là hợp số (loại).

+ Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow p + 4 = 3k + 2 + 4 = 3k + 6 = 3(k + 2)$ chia hết cho 3 .

Mà $p > 3$ nên $p + 4$ là hợp số (loại).

Vậy $p = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Sơn năm 2021 - 2022)

Tìm số nguyên tố P sao cho $2p + 1$ và $4p + 1$ đều là số nguyên tố.

Lời giải

Với $p = 2 \Rightarrow 4p + 1 = 9$ không là số nguyên tố $\Rightarrow p = 2$ không thỏa mãn.

Với $p = 3$ thì $2p + 1 = 7$ là số nguyên tố và $4p + 1 = 13$ là số nguyên tố. Thỏa mãn.

Với $p > 3$ thì vì P là số nguyên tố nên $p \not\equiv 3$. Ta có 2 trường hợp:

+ Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow 2p + 1 = (6k + 3):3$. Mà $6k + 3 > 3 \Rightarrow 2p + 1$ không là số nguyên tố.

+ Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow 4p + 1 = (12k + 9):3$. Mà $12k + 9 > 3 \Rightarrow 4p + 1$ không là số nguyên tố.

Vậy $p = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 3.

Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 - y^3 = 7$.

Lời giải

* Chứng minh mệnh đề: Giả sử a và b nguyên tố cùng nhau thì mọi ước số nguyên tố lẻ của $a^2 + b^2$ chỉ có dạng $4m + 1$ (mà không có dạng $4m + 3$) trong đó m là số nguyên dương.

Xét số nguyên tố $p = 4m + 3 = 2(2m + 1) + 1$

Nếu P là ước số nguyên tố của $a^2 + b^2$ thì P là ước chung của a và b

Mà a và b nguyên tố cùng nhau nên $p = 1$ không là số nguyên tố

Vậy khi P lẻ, P chỉ có dạng $4m + 1$.

$$x^2 - y^3 = 7 \Rightarrow x^2 + 1 = y^3 + 2^3$$

$$\Rightarrow x^2 + 1 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$$

Nếu y chẵn thì $(y + 2)(y^2 - 2y + 4)$ cho 4

$\Rightarrow x$ lẻ, $x = 2t + 1 \Rightarrow x^2 + 1 = 4t^2 + 4t + 2$ không chia hết cho 4 (mâu thuẫn)

Do đó y là số lẻ, $y = 2k + 1$

$\Rightarrow y^2 - 2y + 4 = 4k^2 + 3$ phải có ước số nguyên tố lẻ dạng $4m + 3$ (vì tích các số dạng $4m + 1$ có dạng $4k + 1$)

$\Rightarrow x^2 + 1$ có ước số nguyên tố dạng $4m + 3$ (trái với mệnh đề trên)

Vậy không có cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $x^2 - y^3 = 7$.

Câu 4.

Tìm các số nguyên dương x, y sao cho $\frac{x^2 + y^2}{x - y} = k$ là số nguyên dương và là ước của 1995.

Lời giải

Giả sử $\frac{x^2 + y^2}{x - y} = k$ nguyên dương và k là ước số của $1995 = 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19 = 5n$ với $n = 3 \cdot 7 \cdot 19$

Các số nguyên tố $3; 7; 19$ đều có dạng

Gọi ước chung lớn nhất của x, y là $d = (x, y)$ thì $x = du, y = dv$ với $(u, v) = 1$

$$\frac{x^2 + y^2}{x - y} = k \Rightarrow x^2 + y^2 = k(x - y)$$

Theo giả thiết

$$\Rightarrow d(u^2 + v^2) = k(u - v) \quad (1)$$

+ TH1: Nếu k là ước của $n \Rightarrow k$ có ước nguyên tố dạng $4m + 3$

Có $(u, v) = 1$ nên $u^2 + v^2$ không chứa các ước số nguyên tố của k

Nên k là ước của $d \Rightarrow d = kt$

$$\Rightarrow t(u^2 + v^2) = u - v$$

Khi đó (1)

Do đó $u^2 < u^2 + v^2 \leq u - v \Rightarrow (1)$ vô nghiệm

+ TH2: Nếu $k = 5m$ với m là ước của n

Có $(u, v) = 1$ nên $u^2 + v^2$ không chứa các ước số nguyên tố của m

Nên m là ước của $d \Rightarrow d = mt$

$$\Rightarrow t(u^2 + v^2) = 5(u - v)$$

Khi đó (1)

$$\Rightarrow u^2 + v^2 \leq 5(u - v) \Rightarrow A = u^2 + v^2 - 5(u - v) \leq 0 \quad (2)$$

Mặt khác: $4A = 4u^2 - 20u + 25 + 4v^2 + 20v + 25 - 50$

$$= (2u - 5)^2 + (2v + 5)^2 - 50 \geq 1^2 + 7^2 - 50$$

$$\Rightarrow 4A \geq 0 \Rightarrow A \geq 0 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow A = 0$ khi đó $\begin{cases} 2u - 5 = \pm 1 \\ 2v + 5 = 7 \end{cases}$

Giải ra ta được: $\begin{cases} u = 2 \\ v = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} u = 3 \\ v = 1 \end{cases}$. Khi đó $t = 1 \Rightarrow d = m$.

Ta tìm được các số x, y là: $\begin{cases} x=3m \\ y=m \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=2m \\ y=m \end{cases}$ trong đó m là ước của $n=3.7.19$
 Nghĩa là $m \in \{1; 3; 7; 19; 21; 57; 133; 399\}$

$$(x; y) \in \left\{ (3;1), (2;1), (9;3), (6;3), (21;7), (14;7), (57;19), (38;19), (63;21), (42;21), (171;57), (114;57), (399;133), (266;133), (1197;399), (798;399) \right\}$$

Vậy

Dạng 5. Các bài toán về hai số nguyên tố cùng nhau

Câu 1. (HSG 7 huyện Nga Sơn - Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố p sao cho $p+2$, $p+6$, $p+8$, $p+14$ cũng là số nguyên tố.

Lời giải

Giả sử với $p=2$ là số nguyên tố $\Rightarrow p+2=4:2$ là hợp số $\Rightarrow p=2$ (loại).

+ Với $p=3$ là số nguyên tố $\Rightarrow p+6=9:3$ là hợp số $\Rightarrow p=3$ (loại).

+ Với $p=5$ là số nguyên tố $\Rightarrow p+2=7$, $p+6=11$, $p+8=13$, $p+14=19$ đều là số nguyên tố.

+ Với $p > 5 \Rightarrow p=5k+1$, $p=5k+2$, $p=5k+3$, $p=5k+4$, ($k \in \mathbb{N}$)

- Nếu $p=5k+1 \Rightarrow p+14=5k+1+14=(5k+15):5$ và lớn hơn 5 $\Rightarrow p+14$ là hợp số $\Rightarrow p=5k+1$ (loại).

- Nếu $p=5k+2 \Rightarrow p+8=5k+10=5(k+2):5$ và lớn hơn 5 $\Rightarrow p+8$ là hợp số $\Rightarrow p=5k+2$ (loại).

- Nếu $p=5k+3 \Rightarrow p+2=(5k+5):5$ và lớn hơn 5 $\Rightarrow p+2$ là hợp số $\Rightarrow p=5k+3$ (loại).

- Nếu $p=5k+4 \Rightarrow p+6=5k+4+6=(5k+10):5$ và lớn hơn 5 $\Rightarrow p+6$ là hợp số $\Rightarrow p=5k+4$ (loại).

Vậy $p=5$ là số nguyên tố cần tìm.

Câu 2. (HSG 7 huyện Sông Lô – Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố p sao cho p^2+4 và p^2-4 đều là số nguyên tố.

Lời giải

Với $p=2 \Rightarrow p^2+4=8$; $p^2-4=0 \Rightarrow p^2+4$ và p^2-4 là hợp số.

Vậy $p=2$ (không thỏa mãn)

Với $p=3 \Rightarrow p^2+4=13$; $p^2-4=5 \Rightarrow p^2+4$ và p^2-4 là số nguyên tố.

Vậy $p=3$ (thỏa mãn).

Với p là số nguyên tố và $p > 3 \Rightarrow p$ chia 3 dư 1 hoặc 2 $\Rightarrow p^2$ chia 3 dư 1 $\Rightarrow (p^2-4):3$

Mà $p^2 - 4 > 3 \Rightarrow p^2 - 4$ là hợp số (không thỏa mãn).

Vậy $p = 3$ thì $p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ cũng là các số nguyên tố.

Câu 3. (HSG 7 huyện Yên Thế - BG 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố thỏa mãn $p - 2$ và $p + 2$ đều là số nguyên tố. Hỏi $3p + 2$ là số nguyên tố hay hợp số.

Lời giải

Xét $p = 2$ thì $p - 2 = 0$ và $p + 2 = 4$ không phải là số nguyên tố (KTM);

Xét $p = 3$ thì $p - 2 = 1$ không phải là số nguyên tố (KTM).

Xét $p = 5$ thì $p - 3 = 3$ và $p + 2 = 7$ là các số nguyên tố (TM)

Khi đó $3p + 2 = 17$ là số nguyên tố.

Xét $p > 5$ thì p có dạng $3k + 1$ hoặc $3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$).

+) Với $p = 3k + 1$ thì $p + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1) : 3$, mà $p > 5 \Rightarrow p$ là hợp số (KTM).

+) Với $p = 3k + 2$ thì $p - 2 = 3k : 3$, mà $p > 5 \Rightarrow p$ là hợp số (KTM).

Vậy khi $p = 5$; $p - 2 = 3$; $p + 2 = 7$ đều là số nguyên tố thì $3p + 2 = 17$ cũng là số nguyên tố.

Câu 4. (HSG 7 huyện Quảng Trạch năm 2021 - 2022)

Chứng minh rằng: Với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $2n + 1$ và $\frac{n(n+1)}{2}$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Lời giải

Gọi d là ước chung lớn nhất của $\frac{n(n+1)}{2}$ và $2n + 1$. Khi đó $\frac{n(n+1)}{2} : d$ và $(2n + 1) : d$.

Vì $\frac{n(n+1)}{2} : d \Rightarrow n(n+1) : d \Rightarrow n : d$ hoặc $(n+1) : d$.

+ Nếu $n : d \Rightarrow 2n : d$, kết hợp với $(2n + 1) : d$ ta có $1 : d \Rightarrow d = 1$.

+ Nếu $(n+1) : d \Rightarrow 2(n+1) : d \Rightarrow (2n+2) : d$, kết hợp với $(2n+1) : d$ ta có $1 : d \Rightarrow d = 1$.

Trong mọi trường hợp ta đều có $d = 1$. Vậy với mọi $n \in \mathbb{N}$ thì $2n + 1$ và $\frac{n(n+1)}{2}$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Câu 5. (HSG 7 năm 2021 - 2022)

Cho hai đa thức $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{2009} + x^{2010}$

và $Q(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots - x^{2009} + x^{2010}$.

Giá trị của biểu thức $P\left(\frac{1}{2}\right) + Q\left(\frac{1}{2}\right)$ có dạng biểu thức hữu tỉ là $\frac{a}{b}; a, b \in \mathbb{N}; a, b$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $a \vdots 5$.

Lời giải

Đặt
$$A = P\left(\frac{1}{2}\right) + Q\left(\frac{1}{2}\right) = 2 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2009} \quad (1)$$

Suy ra
$$4A = 10 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{2007} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra
$$3A = 8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2009} \Rightarrow A = \frac{8 - \frac{1}{2^{2009}}}{3} = \frac{2^{2012} - 1}{3 \cdot 2^{2009}} = \frac{a}{b}$$

Ta thấy: $2^{2012} - 1 = 4^{1006} - 1 \vdots 3$;

$2^{2012} - 1$ và 2^{2009} là hai số nguyên tố cùng nhau nên $2^{2012} - 1 = 3a$.

Ta có: $3a = 2^{2012} - 1 = 16^{503} - 1$.

Vì 16^{503} có chữ số tận cùng là 6 nên $3a$ có chữ số tận cùng là 5, suy ra $3a$ chia hết cho 5.

Mà 3 và 5 nguyên tố cùng nhau nên $a \vdots 5$.

Vậy $a \vdots 5$

Câu 6. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Cho $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng $(a^{2007}, b^{2006}) = 1$

Lời giải

Giả sử a^{2007} và b^{2006} đều chia hết cho số nguyên tố $d \Rightarrow a \vdots d$ và $b \vdots d$

Mà $(a, b) = 1$

$\Rightarrow d = 1$ (vô lý).

Vậy $(a^{2007}, b^{2006}) = 1$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>