

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN CAO BẰNG
NĂM HỌC 2018 – 2019
Môn: Toán Lớp: 12

ĐỀ BÀI

Câu 1: (4 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C) .

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng có phương trình $y = -3x + 1$.

b) Gọi A, B là các điểm cực trị của (C) . Tìm tọa độ điểm M thuộc Parabol $(P): y = x^2$ sao cho tam giác AMB vuông tại M .

Câu 2: (4 điểm)

a) Tìm tập xác định của hàm số $y = \ln \left(\frac{2x-1}{x+3} - 3 \right)$.

b) Giải phương trình: $\sin 2x + 1 = 6 \sin x + \cos 2x$.

Câu 3: (3 điểm) Một đội ngũ cán bộ khoa học gồm 8 nhà Toán học nam, 5 nhà Vật lý nữ và 3 nhà Hóa học nữ. Người ta chọn ra từ đó 4 người để đi công tác, tính xác suất sao cho trong 4 người được chọn phải có nữ và có đủ ba bộ môn.

Câu 4: (3 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có phương trình cạnh $AB: x - y - 2 = 0$, phương trình cạnh $AC: x + 2y - 5 = 0$. Biết trọng tâm tam giác $G(3; 2)$. Xác định tọa độ điểm A và viết phương trình cạnh BC .

Câu 5: (4 điểm) Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a\sqrt{3}$, $\angle ACB = 60^\circ$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm của tam giác ABC , gọi E là trung điểm AC biết $SE = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) .

Câu 6: (2 điểm) Một khách sạn có 50 phòng. Nếu mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá lên 20 ngàn đồng thì có thêm hai phòng bỏ trống không có người thuê. Hỏi giám đốc khách sạn phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất?

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: (4 điểm) Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ có đồ thị (C) .

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng có phương trình $y = -3x + 1$.

b) Gọi A, B là các điểm cực trị của (C) . Tìm tọa độ điểm M thuộc Parabol $(P): y = x^2$ sao cho tam giác AMB vuông tại M .

Lời giải

a) Ta có $y' = 3x^2 - 6x$.

Vì tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y = -3x + 1$ nên hoành độ tiếp điểm là nghiệm của phương trình: $3x^2 - 6x = -3 \Leftrightarrow x = 1$.

Với $x = 1 \Rightarrow y = 2$. Phương trình tiếp tuyến: $y = -3(x - 1) + 2$ hay $y = -3x + 5$ (thỏa mãn song song với đường thẳng $y = -3x + 1$).

b)
$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có các điểm cực trị của (C) là: $A(0; 4)$ và $B(2; 0)$.

Gọi $M(x; x^2)$ thuộc (P) . Khi đó: $AM = (x; x^2 - 4)$ và $BM = (x - 2; x^2)$. Vì A, B không thuộc (P) nên

tam giác AMB vuông tại $M \Leftrightarrow AM \cdot BM = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) + x^2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - 3x - 2) = 0$

$$\Leftrightarrow x(x + 1)^2(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Vậy có ba điểm thuộc (P) để tam giác AMB vuông tại M là $M_1(0; 0)$, $M_2(-1; 1)$, $M_3(2; 4)$.

Câu 2: (4 điểm)

a) Tìm tập xác định của hàm số $y = \ln\left(\frac{2x - 1}{x + 3} - 3\right)$.

b) Giải phương trình: $\sin 2x + 1 = 6 \sin x + \cos 2x$.

Lời giải

a) Hàm số $y = \ln\left(\frac{2x - 1}{x + 3} - 3\right)$ xác định khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{2x - 1}{x + 3} - 3 > 0 \\ x + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-x - 10}{x + 3} > 0 \Leftrightarrow -10 < x < -3$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = (-10; -3)$.

b) Ta có:

$$\sin 2x + 1 = 6 \sin x + \cos 2x \Leftrightarrow 2 \sin x \cdot \cos x + 1 = 6 \sin x + 1 - 2 \sin^2 x \Leftrightarrow 2 \sin x (\cos x + \sin x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x + \cos x = 3 \text{ (VNo)} \end{cases} \Leftrightarrow x = k\pi. \text{ Vậy nghiệm phương trình đã cho là } x = k\pi.$$

Câu 3: (3 điểm) Một đội ngũ cán bộ khoa học gồm 8 nhà Toán học nam, 5 nhà Vật lý nữ và 3 nhà Hóa học nữ. Người ta chọn ra từ đó 4 người để đi công tác, tính xác suất sao cho trong 4 người được chọn phải có nữ và có đủ ba bộ môn.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên 4 nhà khoa học trong 16 nhà khoa học có C_{16}^4 cách.

Chọn 4 người đi công tác thỏa mãn yêu cầu bài toán có các trường hợp sau:

Chọn 2 nhà Toán học nam, 1 nhà Vật lý nữ, 1 nhà Hóa học nữ có $C_8^2 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1$ cách.

Chọn 1 nhà Toán học nam, 2 nhà Vật lý nữ, 1 nhà Hóa học nữ có $C_8^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1$ cách.

Chọn 1 nhà Toán học nam, 1 nhà Vật lý nữ, 2 nhà Hóa học nữ có $C_8^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^2$ cách.

Số cách chọn đoàn công tác là $C_8^2 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 + C_8^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 + C_8^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^2$ cách.

$$P = \frac{C_8^2 \cdot C_5^1 \cdot C_3^1 + C_8^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^1 + C_8^1 \cdot C_5^1 \cdot C_3^2}{C_{16}^4} = \frac{3}{7}$$

Vậy, xác suất cần tìm là:

Câu 4: (3 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có phương trình cạnh $AB: x - y - 2 = 0$, phương trình cạnh $AC: x + 2y - 5 = 0$. Biết trọng tâm tam giác $G(3; 2)$. Xác định tọa độ điểm A và viết phương trình cạnh BC .

Lời giải

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - y - 2 = 0 \\ x + 2y - 5 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $\begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$. Do đó: $A(3; 1)$.

Gọi $B(b; b - 2) \in AB$, $C(5 - 2c; c) \in AC$

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên:
$$\begin{cases} 3 + b + 5 - 2c = 9 \\ 1 + b - 2 + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - 2c = 1 \\ b + c = 7 \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} b = 5 \\ c = 2 \end{cases}$ Hay $B(5; 3); C(1; 2)$

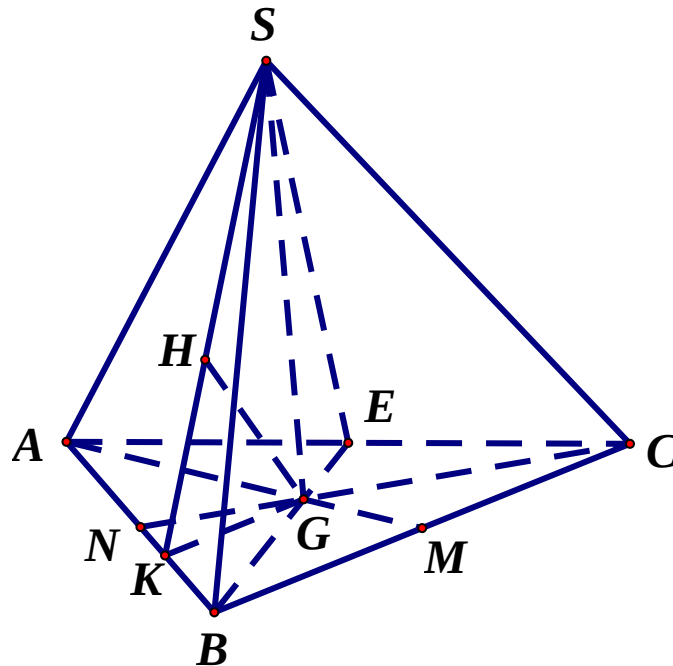
Một vectơ chỉ phương của cạnh BC là $u = \overrightarrow{BC} = (-4; -1)$

Phương trình cạnh BC là: $x - 4y + 7 = 0$

Câu 5: (4 điểm) Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a\sqrt{3}$, $\angle ACB = 60^\circ$, hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm của tam giác ABC , gọi E là

trung điểm AC biết $SE = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) .

Lời giải



Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , M, N lần lượt là trung điểm của BC và AB .

Theo giả thiết có: $SG \perp (ABC)$.

a) Xét tam giác ABC là tam giác vuông tại B có:

$$AC = \frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2a, \quad BC = \frac{AB}{\tan \angle ACB} = a, \quad GE = \frac{BE}{3} = \frac{a}{3}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}.$$

Xét tam giác SGE vuông tại G có: $SG = \sqrt{SE^2 - GE^2} = \sqrt{3a^2 - \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{26}}{3}.$

Khi đó: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SG \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{26}}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{78}}{18} \text{ (đvtt)}.$

b) Ta có: $\frac{d(C, (SAB))}{d(G, (SAB))} = \frac{CN}{GN} = 3 \Rightarrow d(C, (SAB)) = 3 \cdot d(G, (SAB)).$

Đựng $GK \parallel BM$ với $K \in AB$. Ta có: $\begin{cases} AB \perp SG \\ AB \perp GK \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SGK).$

Trong (SGK) dựng $GH \perp SK$ với $H \in SK$. Ta có: $\begin{cases} GH \perp AB \\ GH \perp SK \end{cases} \Rightarrow GH \perp (SAB).$

Suy ra $d(G, (SAB)) = GH$. Do đó $d(C, (SAB)) = 3.GH$.

Ta có: $GK \parallel BM \Rightarrow \frac{GK}{BM} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3} \Rightarrow GK = \frac{2}{3}.BM = \frac{2}{3} \cdot \frac{BC}{2} = \frac{a}{3}$.

Tam giác SGK vuông tại G và có đường cao GH nên:

$$\frac{1}{GH^2} = \frac{1}{GS^2} + \frac{1}{GK^2} = \frac{9}{26a^2} + \frac{9}{a^2} = \frac{243}{26a^2} \Rightarrow GH = \frac{a\sqrt{78}}{27}$$

Vậy: $d(C, (SAB)) = 3.GH = \frac{a\sqrt{78}}{9}$.

Câu 6: (2 điểm) Một khách sạn có 50 phòng. Nếu mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá lên 20 ngàn đồng thì có thêm hai phòng bỏ trống không có người thuê. Hỏi giám đốc khách sạn phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất?

Lời giải

Gọi x (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra, $x \geq 400$.

Giá thuê phòng chênh lệch sau khi tăng là: $x - 400$ (ngàn đồng).

Số lượng phòng cho thuê giảm đi khi chọn mức giá thuê phòng mới là:

$$\frac{x - 400}{20} \cdot 2 = \frac{x - 400}{10} \text{ (phòng)}.$$

Số phòng cho thuê với giá x là: $50 - \frac{x - 400}{10} = \frac{900 - x}{10}$.

Tổng doanh thu trong ngày là: $x \cdot \frac{900 - x}{10} = -\frac{x^2}{10} + 90x$.

Xét hàm số $f(x) = -\frac{x^2}{10} + 90x$ với $x \geq 400$.

$$f'(x) = -\frac{x}{5} + 90 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 450$$

x	400	450	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Qua bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 450$.

Vậy nếu thuê với giá 450 ngàn đồng thì khách sạn có doanh thu cao nhất trong ngày.