Một Phương Pháp Giải Phương Trình Vô Tỉ

I / Giới thiệu:

Ý tưởng chính của phương pháp xuất phát từ biểu thức sau:

$f^n(x)+b=a\sqrt[n]{af(x)-b}$, trong đó $a,b\in R$ (1).

Giải:

Với các bài toán phương trình khi đã đưa về được dạng trên thì chúng ta có thể xử lý bằng phương pháp đặt ẩn phụ và dùng hệ đối xứng:

Đặt $g(x)=(\sqrt[n]{af(x)-b})\Rightarrow g^n(x)+b=af(x)$ (2).

Khi đó từ (1) ta cũng có : $f^n(x)+b=ag^n(x)$ (3)

Từ (2) và (3) ta có hệ: $\begin{cases} g^n(x)+b=af(x) \\ f^n(x)+b=ag(x) \end{cases}$

Đến đây ta giải quyết dễ dàng bằng cách trừ hai vế và đặt ẩn phụ.

II/ Ví dụ áp dụng:

Dựa vào phương pháp trên chúng ta hoàn toàn có thể có các phương trình khác nhau thậm chí một số bài là rất khó nếu chưa biết dạng bài toán trên. Tuy nhiên không phải mọi bài toán đều dễ dàng như dạng tổng quát đòi hỏi chúng ta phải biết khôn khéo và biến đổi đôi chút. Các ví dụ dưới đây sẽ giúp các bạn hiểu rõ:

Bài 1: Giải phương trình : $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$.

Giải:

Dễ nhận thấy $a=2,b=1,\ f(x)=x$. Do đó đặt:

$y=\sqrt[3]{2x-1}\Leftrightarrow y^3+1=2x$.

Vậy ta có hệ phương trình : $\begin{cases} x^3+1=2y \\ y^3+1=2x \end{cases}$. Trừ hai phương trình của hệ:

$x^3-y^3=2(y-x)\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+2)=0\Leftrightarrow x=y$

(Do $x^2+xy+y^2+2=(x+\frac{y}{2})^2+\frac{3}{4}y^2+2>0$) Thay vào hệ ta có:

$\Leftrightarrow x^3+1=2x\Leftrightarrow x^3-2x+1=0\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. Vậy phương trình có ba nghiệm: $x=1; x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Bài 2: Giải phương trình : $2x^2+4x=\sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$

Giải:

Nhận xét bài toán này chúng ta không dễ dàng thấy các hệ số $a, b, f(x)$ như bài 1. Và cũng chú ý rằng nếu chúng ta tìm ra được một đại lượng và phân tích theo phương trình tổng quát thì ta sẽ tìm ra ngay hai đại lượng còn lại và đó thường là hàm số $f(x)$.

Trở lại bài toán. Do vế phải là căn bậc 2 do đó ta dự đoán $f(x)$ là biểu thức bậc 2.

Ta phân tích vế trái như sau: $2x^2+4x=2(x^2+2x)=2x^2+4x=2(x^2+2x+1)-2=2(x+1)^2-2$.

từ đây dự đoán $f(x)=(x+1)$.

Ta tiếp tục phân tích vế phải để có xuất hiện $f(x)$ như phương trình tổng quát:

$$2(x+1)^2-2=\sqrt{\frac{(x+1)+2}{2}} \Leftrightarrow (x+1)^2-1=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{2}+1}$$.

Đến đây đã thấy $a=\dfrac{1}{2}, b=1$.

Đặt $t=x+1; y=\sqrt{\dfrac{x+1}{2}+1}=\sqrt{\dfrac{t}{2}+1} \Rightarrow \begin{cases} y^2-1=\dfrac{t}{2} \\ y\geq 0 \end{cases}$.

Ta có hệ : $\begin{cases} t^2-1=\dfrac{1}{2}y \\ y^2-1=\dfrac{1}{2}t \end{cases} \Rightarrow (t-y)(t+y+\dfrac{1}{2})=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=y \\ y=-t-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

* $t=y \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-1=\dfrac{t}{2} \\ t=y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t^2-t-2=0 \\ t\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t=\dfrac{1+\sqrt{17}}{4} \Leftrightarrow x=\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$ (thỏa $x\geq -3$).

* $y=-t-\frac{1}{2}\Rightarrow\begin{cases}(t+\frac{1}{2})^2-1=\frac{t}{2}\\ t\le-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4t^2+2t-3=0\\ t\le-\frac{1}{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow t=\frac{-1-\sqrt{13}}{4}\Leftrightarrow x=\frac{-5-\sqrt{13}}{4}$ (thỏa đk $x\ge-3$).

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x=\frac{-3+\sqrt{17}}{4};x=\frac{-5-\sqrt{13}}{4}$.

Bài 3: Giải phương trình: $x^2-x-1000\sqrt{1+8000x}=1000$.

Giải:

ĐK: $x\ge-\frac{1}{8000}$

Đầu tiên ta biến đổi:

$x^2-x-1000=1000\sqrt{1+8000x}$.

Như ở ví dụ trên ta sẽ dự đoán và đi tìm $f(x)$. Mặt khác thấy rằng nếu nhân hai vế với 4 thì vế trái có thể biểu diễn dưới dạng bình phương.

Cụ thể:

PT $\Leftrightarrow 4x^2-4x-4000=4000\sqrt{4000(2x-1)-3999}$

$\Leftrightarrow(2x-1)^2-4001=4000\sqrt{4000(2x-1)+4001}$ (Khi đó $f(x)=2x-1,a=4000,b=4001$).

Đặt $u=2x-1;\ v=\sqrt{1+8000x}$; $v\ge0,u\ge-\frac{4001}{4000}$, ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}u^2-4001=4000v\\ v^2-4001=4000u\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2-4001=4000v\\ u^2-v^2=4000(v-u)\end{cases}$$

$\Leftrightarrow\begin{cases}u^2-4001=4000v & (1)\\ (u-v)(u+v+4000)=0 & (2)\end{cases}$. Do $u+v+4000>0$ nên Từ (2) ta có:

$u=v$ thay vào (1) ta được: $\begin{cases}u^2-4000u-4001=0\\ u\ge0\end{cases}$

$\Leftrightarrow u = 4001 \Leftrightarrow x = 2001$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x = 2001$.

Ở ba ví dụ trên chúng ta chỉ sử dụng các phép biến đổi đơn giản để tìm $a, b, f(x)$.

Các bài toán dưới đây các đại lượng a, b sẽ thay bằng biểu thức theo x do đó sẽ gây rất nhiều khó khăn cho chúng ta trong quá trình phân tích đòi hỏi sự tinh tế và khéo léo trong biến đổi.

Bài 4: Giải phương trình : $4x^2 + 7x + 1 = 2\sqrt{x+2}$.

Giải:

Vẫn như các ví dụ trên ta phân tích khéo léo và tìm cho ra $f(x)$ (đã có a =2).

$4x^2 = (2x)^2$, dự đoán $f(x) = (2x+c)^2$, thử c =1 (lưu ý chúng ta hãy thử với những số đơn giản nhất).

Ta phân tích và viết lại phương trình theo $f(x)$ xem như thế nào.

$(2x+1)^2 + 3x = 2\sqrt{2(2x+1) - 3x}$. Thật may mắn ! Dự đoán chúng ta thành công.

Đến đây thật đơn giản:

Đặt $t = 2x + 1; y = \sqrt{2t - 3x} \Rightarrow y^2 + 3x = 2t$ và $y \geq 0$.

Ta có : $\begin{cases} t^2 + 3x = 2y \\ y^2 + 3x = 2t \end{cases} \Rightarrow (t-y)(t+y+2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = t \\ y = -t - 2 \end{array} \right.$.

* $y = t \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 2t + 3x = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 3x - 1 = 0 \\ x \geq -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

* $y = -t - 2 \Rightarrow \begin{cases} t^2 + 3x + 2(t+2) = 0 \\ t \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 11x + 7 = 0 \\ x \leq -\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\dfrac{7}{4}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm: $x = -\dfrac{7}{4}; x = \dfrac{1}{4}$.

Bài 5: Giải phương trình : $4x^2 - 11x + 10 = (x-1)\sqrt{2x^2 - 6x + 2}$.

Giải:

Vẫn tương tự như bài toán đầu tiên ta dự đoán $f(x) = (2x+c)^2$.

Đến đây ta đồng nhất hệ số tìm c:

$4x^2+4cx+c^2+(-11-4c)x+10-c^2=(x-1)\sqrt{(x-1)(2x+c)-(-11-4c)x-10+c^2}$

$b=(11-4c)x+10-c^2$.

Đối chiếu với bài toán ta đồng nhất các hệ số suy ra $c=-3$.

Khi đó phương trình ta có thể viết lại:

PT $\Leftrightarrow (2x-3)^2+x+1=(x-1)\sqrt{(x-1)(2x-3)-x-1}$

Đặt $u=2x-3;\ v=\sqrt{(x-1)(2x-3)-x-1}$,

Ta có hệ phương trình : $\begin{cases} u^2+x+1=(x-1)v \\ v^2+x+1=(x-1)u \end{cases}$

$\Rightarrow u^2-v^2=(x-1)(v-u)\Leftrightarrow (u-v)(u+v+x-1)=0$

* $u=v\Rightarrow u^2+x+1=(x-1)u\Leftrightarrow (2x-3)^2+x+1=(x-1)(2x-3)$

$\Leftrightarrow 2x^2-6x+7=0$ phương trình vô nghiệm.

* $u+v+x-1=0\Leftrightarrow 2x-3+\sqrt{2x^2-6x+2}+x-1=0$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-6x+2}=4-3x\Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{4}{3} \\ 7x^2-18x+14=0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 6: Giải phương trình: $3x^3-6x^2-3x-17=3\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}$.

Giải:

Ví dụ trên là một câu phương trình trong đề thi thử đại học 2011 số 1 của tạp chí Mathvn.com.

Cũng giống như bài toán trên nhìn vào biểu thức chúng ta có thể dự đoán $f(x)=(3x+c)\vee f(x)=x+c$
Ở đây chọn $f(x)=(3x+c)$.

PT $\Leftrightarrow 27x^3-54x^2-27x-153=27\sqrt[3]{9(-3x^2+21x+5)}$. (*)

Tuy nhiên đến đây nếu ta áp dụng cách cân bằng hệ số như các ví dụ trên thì có lẽ hơi phức tạp. Hãy chú ý một chi tiết nhỏ sau. Rõ ràng nếu chúng ta tìm ra được biểu thức $f(x)$ phù hợp thì biểu thức b cần tìm sẽ có bậc cao nhất là 2. Và đặc biệt hơn là khi ta áp dụng $af(x) - b$ cho biểu thức trong căn thì hệ số của bậc 2 trong biểu thức b giữ nguyên chỉ thay đổi bậc nhất và hạng tử tự do (do $af(x) = a(3x + c)$ chỉ cho các hạng tử bậc nhất $3ax$ và hệ số tự do ac). Từ đó ta thấy $27x^2$ sẽ chắc chắn có trong biểu thức b Vậy hạng tử bậc 2 trong $f(x) = -81x^2$. Mặt khác khi khai triển $f(x)$ thì hệ số của hạng tử bậc 2 là $27x^2c$ vậy $c = -3$. Hay dự đoán $f(x) = 3x - 3$.

Ta phân tích kiểm tra:

$$(3x-3)^3 + (27x^2 - 126 - 108x) = 27\sqrt[3]{9(-3x^2 + 21x + 5)} = 27\sqrt[3]{27(3x-3) - (27x^2 - 126 - 108x)}.$$

Rất chính xác dự đoán chúng ta thành công.

Đến đây đặt: $u = 3x - 3; v = \sqrt[3]{27(3x-3) - (27x^2 - 126 - 108x)}$.

Ta được hệ: $\begin{cases} u^3 + (27x^2 - 126 - 108x) = 27v \\ v^3 + (27x^2 - 126 - 108x) = 27u \end{cases}$

Phần còn lại xin nhường cho bạn đọc tự giải quyết.

Với kỹ thuật tương tự như trên các bạn hãy giải quyết bài toán dưới đây.

Bài 7: Giải phương trình : $x^3 - x^2 - 10x - 2 = \sqrt[3]{7x^2 + 23x + 12}$.

Giải:

Ở đây như nhận xét trên chúng ta phân tích được $f(x) = (x+2)^3; b = -7x^2 - 22x - 10, a = 1$.

Đặt $u = x + 2; v = \sqrt[3]{7x^2 + 23x + 12} = \sqrt[3]{(x+2) - (-7x^2 - 22x - 10)}$.

Ta có hệ:

$$\begin{cases} u^3 - 7x^2 - 22x - 10 = v \\ v^3 - 7x^2 - 22x - 10 = u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = v - u$$

$$\Leftrightarrow (u - v)(u^2 + v^2 + uv + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v \\ u^2 + v^2 + uv + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+2) = \sqrt[3]{7x^2 + 23x + 12} (*) \\ (u + \frac{v}{2})^2 + \frac{3}{4}v^2 + 1 = 0 (**) \end{array}\right.$$

$(*) \Leftrightarrow x^3+5x^2-11x-4=0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2+3x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

(**) Dễ thấy phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm: $x=4; x=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}; x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

Tác giả xin trình bày thêm một lời giải rất hay của bạn *Đặng Triển Thuyên* như sau.

Đầu tiên ta nhẩm nghiệm phương trình có $x = 4$.

Chúng ta cần đặt $t = \alpha+\sqrt[3]{7x^2+23x+12}$ sao cho sau khi biến đổi có thể đưa về hệ đối xứng.

Do đưa về hệ đối xứng nên $t=x=4$. Thay 4 vào biểu thức $\sqrt[3]{7x^2+23x+12}=6= t-\alpha$, do $t=4$

$\Rightarrow \alpha=-2$. Vậy đặt $t=-2+\sqrt[3]{7x^2+23x+12}$.

Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} t^3+6t^2+12t-7x^2-23x=4 \\ x^3-x^2-10x-t=4 \end{cases}$.

$$\Rightarrow t^3-x^3+6t^2-6x^2-13x+13t=0 \Leftrightarrow (t-x)(t^2+x^2+tx+6t+6x+13)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=x \\ t^2+x^2+tx+6t+6x+13=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=\sqrt[3]{7x^2+23x+12} \\ (t+3)^2+x(t+3)+x^2+3x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x+2)^3=7x^2+23x+12(*) \\ [(t+3)+\dfrac{x}{2}]+\dfrac{3}{4}x^2+3x+4=0(**) \end{array}\right.$$

$(*) \Leftrightarrow x^3+5x^2-11x-4=0 \Leftrightarrow (x-4)(x^2+3x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

(**) Dễ thấy phương trình trong trường hợp này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm $x=4; x=\dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}; x=\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$.

Nhận xét: Cả hai cách giải đều cho ta cùng một đáp số nhưng với cách giải thứ hai chúng ta có thể thấy rỏ ưu điểm là nếu chỉ cần nhẩm được một nghiệm thì những dạng như trên đều giải quyết nhẹ nhàng ngay cả khi đề bài cho thêm biểu thức a là một hàm theo x phức tạp.Tuy nhiên nếu giả sử phương trình chúng ta có nghiệm "xấu" thì cách giải 1 là con đường tối ưu.

Ta tiếp tục các ví dụ dưới đây trong đó biểu thức a trước dấu căn khá "khó chịu" đòi hỏi chút biến đổi.

Bài 8: Giải phương trình : $8x^2-13x+7=(1+\dfrac{1}{x})\sqrt[3]{3x^2-2}$.

Giải:

Nhận xét căn của vế phải là biểu thức bậc 3 do đó ta biến đổi vế trái cũng là biểu thức bậc 3.

Phương trình $\Leftrightarrow 8x^3-13x^2+7x=(x+1)\sqrt[3]{3x^2-2}$. (*)

Tiếp tục dự đoán $f(x)=(2x+1)$ v $(2x-1)$. (ở đây vẫn có thể áp dụng cách đặt tham số c như bài 5 tuy nhiên trong một số bài toán đơn giản ta có thể dự đoán).

Chọn $f(x)=(2x-1)$, khi đó ta dễ dàng phân tích (*) :

$(*) \Leftrightarrow (2x-1)^3-(x^2-x-1)=(x+1)\sqrt[3]{(x+1)(2x-1)+x^2-x-1}$

Đặt $u=2x-1;\ v=\sqrt[3]{3x^2-2}$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} u^3-(x^2-x-1)=(x+1)v \\ v^3-(x^2-x-1)=(x+1)u \end{cases} \Rightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+x+1)=0$$

* $u = v \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt[3]{3x^2 - 2} \Leftrightarrow 8x^3 - 15x^2 + 6x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(8x^2 - 7x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \dfrac{-1}{8} \end{array}\right.$$

* $u^2 + uv + v^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow (v + \frac{u}{2})^2 + \frac{3}{4}(2x-1)^2 + x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4(v + \frac{u}{2})^2 + 12x^2 - 8x + 7 = 0$

$\Leftrightarrow 4(v + \frac{u}{2})^2 + 4x^2 + 2(2x-1)^2 + 5 = 0$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm: $x = 1;\ x = -\frac{1}{8}$.

Nhận xét một lần nữa việc dự đoán và tìm biểu thức $f(x)$ như là "ngòi nổ" giúp chúng ta giải quyết bài toán.

Bài 9: Giải phương trình : $7x^2 - 13x + 8 = 2x^2.\sqrt[3]{x(1 + 3x - 3x^2)}$.

Giải:

Giống như các bài toán trước chúng ta vẫn có thể giải và tìm hàm $f(x)$ bình thường bằng phương pháp hệ số bất định. Tuy nhiên vẫn còn cách xử lý khá nhanh mà chúng ta nên lưu ý. Chia 2 vế cho x^2. Phương trình chúng ta khi đó là:

$$\frac{7}{x} - \frac{13}{x^2} + \frac{8}{x^3} = 2\sqrt[3]{\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 3}.\ (*)$$

Đặt $\frac{1}{x} = t$. Ta viết lại (*) : $8t^3 - 13t^2 + 7t = 2\sqrt[3]{t^2 + 3t - 3}$.

$\Leftrightarrow (2t-1)^3 - (t^2 - t - 1) = 2\sqrt[3]{2(2t-1) + t^2 - t - 1}$.

Đặt $u = 2t - 1,\ v = \sqrt[3]{2(2t-1) + t^2 - t - 1}$, ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} u^3 - t^2 + t + 1 = 2v \\ v^3 - t^2 + t + 1 = 2u \end{cases} \Rightarrow u^3 - v^3 = 2v - 2u \Leftrightarrow (u-v)(u^2 + uv + v^2 + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow 2t - 1 = \sqrt[3]{t^2 + 3t - 3} \Leftrightarrow 8t^3 - 13t^2 + 3t + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(8t^2 - 5t - 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ 8t^2 - 5t - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{5 \pm \sqrt{89}}{16} \end{array}\right. .$$

Thử lại ta thấy ba nghiệm này thỏa phương trình.

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: $x = 1;\ x = \dfrac{16}{5 \pm \sqrt{89}}$.

Tuy nhiên phương pháp này vẫn còn một hạn chế khá lớn là những khi chúng ta cân bằng hệ số mà việc tìm ra hệ số c rất khó khăn thì giải quyết như thế nào ? Trong các bài toán như vậy ta thường chọn biểu thức $f(x)$ và đặt là t, sau đó cố gắng biến đổi phương trình đã có theo t. Có nhiều trường hợp xảy ra có thể sau khi biến đổi ta có một phương trình theo ẩn t giải đơn giản, đôi khi sau biến đổi ta tiến hành giải phương trình bậc 2 với t tham số x là biến và đặc biệt nhất là một số bài có thể đưa về dạng hệ đối xứng rất đẹp. Các bạn theo dõi các ví dụ dưới đây.

Bài 10: Giải phương trình : $2x^2 + 2x + 1 = (4x-1)\sqrt{1+x^2}$.

Giải:

Tập xác định R. Đặt $\sqrt{1+x^2} = t \geq 1 \Rightarrow x^2 = t^2 - 1 (*)$. Phương trình trở thành:

$2(t^2 - 1) + 2x + 1 = (4x-1)t \Leftrightarrow 2t^2 - (4x-1)t + 2x - 1 = 0$. (**)

Xem (**) như là phương trình bậc 2 ẩn ta có:

$$\Delta = (4x-1)^2 - 8(2x-1) = (4x-3)^2$$

Ta có : $$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{4x - 1 - 4x + 3}{4} = \dfrac{1}{2} < 1 \\ t_2 = \dfrac{4x - 1 + 4x - 3}{4} = 2x - 1 \end{cases}$$

Loại t_1 do (*). Trường hợp $t = t_2$ ta có:

$$t = 2x - 1, \sqrt{1+x^2} = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 1 \\ 1 + x^2 = (2x-1)^2 \end{cases}$$

với

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 3x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}.$$

Nhận xét thông thường việc đặt ẩn t thường là biểu thức chứa căn. Sau khi biến đổi ta thường sử dụng kĩ thuật giải phương trình bậc 2 nếu trước căn thường có thêm một đại lượng là hàm theo x. Ở đây hàm đó là ($4x$ - 1). Bài tập dưới đây áp dụng kĩ thuật tương tự.

Bài 11: Giải phương trình : $3x^2-5x+6=2x\sqrt{x^2+x-3}$.

Đáp số: x =3.

Bài 12: Giải phương trình: $2x^2-6x+7=5\sqrt{x^2-3x+5}$.

Giải: Đặt $t=\sqrt{x^2-3x+5}$; $t\geq 0$.

PT $\Leftrightarrow 2t^2-5t-3=0$. $\Leftrightarrow t=3$. Khi đó: $\sqrt{x^2-3x+5}=3 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=4$.

Ví dụ trên minh họa cụ thể cho việc đặt t và sau phép biến đổi ta đưa về được phương trình mới theo toàn bộ t.

❖ Lưu ý: Các bạn vẫn có thể giải theo cách 2 của bài 7.

Bài 13: Giải phương trình $x^2+6x-14=\sqrt{98-35x-6x^2}$

Giải:

Đặt

$$t=\sqrt{98-35x-6x^2}=x^2+6x-14$$
$$\Leftrightarrow t^2=-6x^2-35x+98=x-6t+14 \Leftrightarrow t^2+6t-14=x.$$

Khi đó ta có hệ: $\begin{cases} x^2-6x+14=t \\ t^2-6t+14=x \end{cases}$.

Đến đây ta có thể giải quyết dễ dàng.

Nhận xét: Bài toán trên là ví dụ cho cách làm sau khi đặt ẩn t ta biến đổi về được hệ đối xứng x,t. Qua các ví dụ trên các bạn đã hình dung một cách tổng quan các phương trình vô tỉ có dạng như trên. Sau đây là một số bài tập để các bạn luyện tập. Chúc thành công.

Bài 14: Giải phương trình : $8x^3-4x-1=\sqrt[3]{6x+1}$.

Gợi ý: Có sử dụng phương trình bậc ba trong việc giải phương trình trong các hệ quả (có thể dùng máy tính bỏ túi ghi ra kết quả).
Đáp số:

$x = \cos\frac{\pi}{9}; x = \cos\frac{5\pi}{9}; x = \cos\frac{7\pi}{9}$.

Bài 15: Giải phương trình : $x^3 + 1 = 3\sqrt[3]{3x-1}$.

Đáp số: $2\cos\frac{2\pi}{3}; 2\cos\frac{4\pi}{3}; 2\cos\frac{8\pi}{3}$.

Bài 16: Giải phương trình : $2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x+3}{2}}, x \geq -1$.

Đáp số: $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$

Bài 17: Giải phương trình: $x^2 - 4x + 2 = \sqrt{x+2} + 2$.

Đáp số: $x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$.

Bài 18: Giải phương trình: $4x^2 + \sqrt{3x+1} + 5 = 13x$.

Đáp số: $x \in \left\{\frac{15-\sqrt{97}}{8}; \frac{11+\sqrt{73}}{8}\right\}$.

Bài 19: Giải phương trình : $-2x^3 + 10x^2 - 17x + 8 = 2x^2\sqrt[3]{5x - x^3}$

Bài 20: Giải phương trình: $x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x}{4}\sqrt[3]{4x^2 - 2x^2 - 7}$.

Bài 21: Giải phương trình $32x^2 + 32x = \sqrt{2x+15} + 20$. (Gợi ý: $f(x) = (4x + 2)$).

Đáp số: $x \in \left\{\frac{1}{2}; -\frac{9+\sqrt{221}}{16}\right\}$.

Các bài đặc biệt:

Bài 14: Giải phương trình : $10x^2 - x + 6 = 2(2x+1)\sqrt{2x^2 - x + 4}$

Đáp số: $x = \frac{17+\sqrt{97}}{12}; x = \frac{17-\sqrt{97}}{12}$.

Bài 15: Giải phương trình : $x^2 + 2x + 12 = 6\sqrt{2x^2 + 2x + 4}$

Đáp số: S= { -8;-2; 0; 6}

Bài 16: Giải phương trình: $2x^2-2x-5=\sqrt{\dfrac{4x^2-3x-5}{2}}$.

Đáp số: S= { $\dfrac{5}{2};\dfrac{1-3\sqrt{5}}{4}$ }.

Bài 17: Giải phương trình: $2x^2-6x+5=3\sqrt[3]{x^2-3x+2}$.

Đáp số: S = { $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ **}.**

Theo sự góp ý của một số bạn, thì trong các phương trình trên, ta đã đặt thêm một ẩn phụ để đưa về hệ phương trình 2 ẩn. Vậy câu hỏi đặt ra là: *Có thể giải phương trình vô tỉ bằngcách đặt thêm nhiều hơn một ẩn phụ được hay không?!"*Các bạn theo dõi ví dụ sau:

$$x^2-2011=\sqrt{2011+\sqrt{2011+\sqrt{2011+x}}}$$

Hướng giải: Đặt $\begin{cases} y=\sqrt{2011+\sqrt{2011+\sqrt{2011+x}}} \\ z=\sqrt{2011+\sqrt{2011+x}} \\ t=\sqrt{2011+x} \end{cases}$

Ta được hệ: $\begin{cases} x^2-2011=y \\ y^2-2011=z \\ z^2-2011=t \\ t^2-2011=x \end{cases}$. Đến đây, các bạn có thể giải quyết dễ dàng.

Vấn đề còn có thể mở rộng theo rất nhiều hướng, tác giả mong nhận được sự trao đổi từ các bạn.

Mọi ý kiến đóng góp xin gửi về: Minhduy_k16_THD@yahoo. com. Thân ái!