

ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 9 - PHÂN SỐ

CHỦ ĐỀ 3: SO SÁNH HAI PHÂN SỐ

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. SO SÁNH HAI PHÂN SỐ CÙNG MẪU

Trong hai phân số có cùng mẫu dương, phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn.

2. SO SÁNH HAI PHÂN SỐ KHÔNG CÙNG MẪU

Muốn so sánh hai phân số không cùng mẫu số, ta viết chúng dưới dạng hai phân số cùng mẫu dương rồi so sánh các tử số với nhau.

Tuy nhiên, nhiều bài toán sẽ gặp khó khăn khi quy đồng mẫu số các phân số. Bởi vậy, có rất nhiều cách khác nhau để so sánh các phân số, ta sẽ đi tìm hiểu ở phần sau.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: So sánh hai phân số cùng mẫu

I. Phương pháp giải

Trong hai phân số có cùng mẫu dương, phân số nào có tử lớn hơn thì lớn hơn.

II. Bài toán

Bài 1: Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần: $\frac{7}{36}, \frac{24}{36}, \frac{13}{36}, \frac{1}{36}, \frac{43}{36}, \frac{36}{36}$

Lời giải:

Vì các phân số trên đều có cùng mẫu số nên ta được:

$$\frac{1}{36} < \frac{7}{36} < \frac{13}{36} < \frac{24}{36} < \frac{36}{36} < \frac{43}{36}$$

Bài 2: Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự giảm dần: $\frac{-5}{48}, \frac{11}{-48}, \frac{-7}{48}, \frac{13}{-48}, \frac{9}{-48}, \frac{-27}{48}$.

Lời giải:

Viết lại các phân số dưới dạng mẫu dương:

$$\frac{11}{-48} = \frac{-11}{48}; \frac{13}{-48} = \frac{-13}{48}; \frac{9}{-48} = \frac{-9}{48}.$$

$$\frac{-27}{48} < \frac{-13}{48} < \frac{-11}{48} < \frac{-9}{48} < \frac{-7}{48} < \frac{-5}{48}$$

Vì $-27 < -13 < -11 < -9 < -7 < -5$ nên

Vậy các phân số được sắp xếp theo thứ tự giảm dần là:

$$\frac{-5}{48}; \frac{-7}{48}; \frac{-9}{48}; \frac{-11}{48}; \frac{-13}{48}; \frac{-27}{48}.$$

Bài 3: Sắp xếp các phân số sau theo thứ tự tăng dần: $\frac{-15}{24}, \frac{-36}{24}, \frac{2}{24}, \frac{-7}{24}, \frac{1}{24}, \frac{-72}{24}, \frac{-97}{24}$.

Lời giải:

Vì $-97 < -72 < -36 < -15 < -7 < 1 < 2$ nên $\frac{-97}{24} < \frac{-72}{24} < \frac{-36}{24} < \frac{-15}{24} < \frac{-7}{24} < \frac{1}{24} < \frac{2}{24}$

Vậy các phân số được sắp xếp theo thứ tự giảm dần là:

$$\frac{-97}{24}; \frac{-72}{24}; \frac{-36}{24}; \frac{-15}{24}; \frac{-7}{24}; \frac{1}{24}; \frac{2}{24}$$

Bài 4: Viết các phân số dương nhỏ hơn hoặc bằng 1 mà có mẫu là 7. Sắp xếp các phân số đó theo thứ tự tăng dần.

Lời giải:

Các phân số dương nhỏ hơn hoặc bằng 1 mà có mẫu là 7 là:

$$\frac{1}{7} < \frac{2}{7} < \frac{3}{7} < \frac{4}{7} < \frac{5}{7} < \frac{6}{7} < \frac{7}{7}$$

Bài 5: Viết các phân số dương nhỏ hơn hoặc bằng 2 mà có mẫu là 4. Sắp xếp các phân số đó theo thứ tự tăng dần.

Lời giải:

Các phân số dương nhỏ hơn hoặc bằng 2 mà có mẫu là 4 là:

$$\frac{1}{4} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4} < \frac{4}{4} < \frac{5}{4} < \frac{6}{4} < \frac{7}{4} < \frac{8}{4}$$

Bài 6: Viết các phân số lớn hơn hoặc bằng -1 và nhỏ hơn hoặc bằng 2 mà có mẫu là 7. Sắp xếp các phân số đó theo thứ tự giảm dần.

Lời giải:

Các phân số lớn hơn hoặc bằng -1 và nhỏ hơn hoặc bằng 2 mà có mẫu là 7 là:

$$\frac{14}{7} > \frac{13}{7} > \frac{12}{7} > \frac{11}{7} > \frac{10}{7} > \frac{9}{7} > \frac{8}{7} > \frac{7}{7} > \frac{6}{7} > \frac{5}{7} > \frac{4}{7} > \frac{3}{7} > \frac{2}{7} > \frac{1}{7} > \frac{0}{7} > \frac{-1}{7} > \frac{-2}{7} > \frac{-3}{7} > \frac{-4}{7} > \frac{-5}{7} > \frac{-6}{7} > \frac{-7}{7}$$

Bài 7: Điền số thích hợp vào chỗ chấm: $\frac{-9}{11} < \frac{\dots}{11} < \frac{\dots}{11} < \frac{\dots}{11} < \frac{\dots}{11} < \frac{-4}{11}$.

Lời giải:

Do các phân số đều có cùng mẫu (dương) nên ta sẽ điền tử số là dãy các số nguyên tăng dần.

$$\frac{-9}{11} < \frac{-8}{11} < \frac{-7}{11} < \frac{-6}{11} < \frac{-5}{11} < \frac{-4}{11}$$

Vậy ta điền được kết quả là:

Bài 8: Điền số thích hợp vào chỗ trống

a) $\frac{-11}{13} < \frac{\dots}{13} < \frac{\dots}{13} < \frac{\dots}{13} < \frac{-7}{13}$

$$b) \frac{-8}{34} < \frac{\dots}{34} < \frac{\dots}{34} < \frac{\dots}{34} < \frac{-4}{34}$$

Lời giải:

$$a) \frac{-11}{13} < \frac{-10}{13} < \frac{-9}{13} < \frac{-8}{13} < \frac{-7}{13}$$

$$b) \frac{-8}{34} < \frac{-7}{34} < \frac{-6}{34} < \frac{-5}{34} < \frac{-4}{34}$$

Bài 9: Tìm số x nguyên thỏa mãn:

$$a) \frac{1}{7} < \frac{x}{7} < \frac{4}{7}$$

$$b) \frac{-11}{15} < \frac{x}{15} < \frac{-8}{15}$$

$$c) \frac{3}{7} < \frac{x}{21} < \frac{2}{3}$$

Lời giải:

$$a) \frac{1}{7} < \frac{x}{7} < \frac{4}{7} \Rightarrow x \in \{2; 3\}$$

$$b) \frac{-11}{15} < \frac{x}{15} < \frac{-8}{15} \Rightarrow x \in \{-10; -9\}$$

$$c) \frac{3}{7} < \frac{x}{21} < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{9}{21} < \frac{x}{21} < \frac{14}{21} \Rightarrow x \in \{10; 11; 12; 13\}$$

Dạng 2: So sánh hai phân số không cùng mẫu bằng cách quy đồng mẫu dương

I. Phương pháp giải

Quy đồng mẫu dương rồi so sánh các tử: Tử nào lớn hơn thì phân số đó lớn hơn

II. Bài toán

Bài 1: So sánh hai phân số bằng cách quy đồng mẫu: a) $\frac{1}{3}$ và $\frac{5}{6}$ b) $\frac{4}{5}$ và $\frac{3}{7}$

Lời giải:

$$a) \text{Ta có } \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \text{ mà } \frac{2}{6} < \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{1}{3} < \frac{5}{6}$$

$$b) \text{Ta có } \frac{4}{5} = \frac{28}{35}; \frac{3}{7} = \frac{15}{35} \text{ mà } \frac{28}{35} > \frac{15}{35} \Rightarrow \frac{4}{5} > \frac{3}{7}.$$

Bài 2: So sánh hai phân số bằng cách quy đồng mẫu:

$$a) \frac{-3}{11} \text{ và } \frac{-4}{13}$$

$$b) \frac{-5}{6} \text{ và } \frac{63}{-70}$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có } \frac{-3}{11} = \frac{-39}{143}; \frac{-4}{13} = \frac{-44}{143} \text{ mà } \frac{-39}{143} > \frac{-44}{143} \Rightarrow \frac{-3}{11} > \frac{-4}{13}$$

$$\text{b) Ta có } \frac{-5}{6} = \frac{-50}{60}; \frac{63}{-70} = \frac{-9}{10} = \frac{-54}{60} \text{ mà } \frac{-50}{60} > \frac{-54}{60} \Rightarrow \frac{-5}{6} > \frac{63}{-70}.$$

Bài 3: So sánh hai phân số bằng cách quy đồng mẫu:

$$\text{a) } \frac{1}{2} \text{ và } \frac{5}{6}$$

$$\text{b) } \frac{4}{7} \text{ và } \frac{5}{9}$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } \frac{1}{2} = \frac{3}{6}. \text{ Vì } 3 < 5 \text{ nên } \frac{3}{6} < \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{5}{6}$$

$$\text{b) Ta có: } \frac{4}{7} = \frac{36}{63}; \frac{5}{9} = \frac{35}{63}. \text{ Vì } 36 > 35 \text{ nên } \frac{36}{63} > \frac{35}{63} \Rightarrow \frac{4}{7} > \frac{5}{9}$$

Bài 4: So sánh các phân số sau:

$$\text{a) } \frac{45}{105} \text{ và } \frac{84}{147};$$

$$\text{b) } \frac{39}{52} \text{ và } \frac{98}{112};$$

Lời giải:

$$\text{a) } \frac{45}{105} = \frac{3}{7}; \frac{84}{147} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{45}{105} < \frac{84}{147}.$$

$$\text{b) } \frac{39}{52} = \frac{3}{4}; \frac{98}{112} = \frac{7}{8}; \frac{3}{4} = \frac{6}{8} < \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{39}{52} < \frac{98}{112}.$$

Bài 5: So sánh các phân số :

$$\text{a) } \frac{20}{19} \text{ và } \frac{21}{20}$$

$$\text{b) } \frac{12}{129} \text{ và } \frac{21}{172}$$

$$\text{c) } \frac{63}{81} \text{ và } \frac{103}{135}$$

Lời giải:

$$\text{a) Vì } (19, 20) = 1 \text{ nên mẫu chung là } 19 \cdot 20.$$

$$\frac{20}{19} = \frac{20 \cdot 20}{19 \cdot 20} = \frac{400}{380}; \frac{21}{20} = \frac{21 \cdot 19}{20 \cdot 19} = \frac{399}{380}$$

Ta có :

$$\text{Vì } 400 > 399 \text{ nên } \frac{20}{19} > \frac{21}{20}.$$

$$\text{b) Ta rút gọn các phân số trước : } \frac{12}{129} = \frac{4}{43}$$

Chú ý là $172 = 43 \cdot 4$, nên ta viết $\frac{4}{43} = \frac{4 \cdot 4}{4 \cdot 43} = \frac{16}{172}$

Do $\frac{16}{172} < \frac{21}{172}$ nên $\frac{4}{43} < \frac{21}{172}$ hay $\frac{12}{129} < \frac{21}{172}$

c) Ta có : $\frac{63}{81} = \frac{7}{9}$ và $135 = 15 \cdot 9$ nên ta biến đổi như sau :

$\frac{7}{9} = \frac{7 \times 15}{9 \times 15} = \frac{105}{135}$, do $105 > 103$ nên $\frac{105}{135} > \frac{103}{135} \Rightarrow \frac{63}{81} > \frac{103}{135}$

$$\frac{42}{105}, \frac{144}{192}, \frac{435}{290}, \frac{1950}{910}, \frac{25025}{24024}$$

Bài 6: Cho các phân số:

1. Quy đồng mẫu của các phân số ấy.
2. Sắp xếp các phân số theo thứ tự tăng dần.

Lời giải:

1) Quy đồng mẫu chung, ta được các phân số tương ứng là:

$$\frac{336}{840}, \frac{630}{840}, \frac{1260}{840}, \frac{1800}{840}, \frac{875}{840}.$$

2) Sau khi so sánh, ta xếp được các số theo thứ tự tăng dần như sau:

$$\frac{42}{105}, \frac{144}{192}, \frac{25025}{24024}, \frac{435}{290}, \frac{1950}{910}.$$

Bài 7: Tìm số nguyên dương x sao cho $\frac{1}{5} < \frac{x}{30} < \frac{1}{4}$.

Lời giải:

Trước tiên ta sẽ quy đồng mẫu số các phân số:

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 12}{5 \cdot 12} = \frac{12}{60}, \frac{x}{30} = \frac{x \cdot 2}{30 \cdot 2} = \frac{2x}{60}, \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 15}{4 \cdot 15} = \frac{15}{60}$$

$$\frac{1}{5} < \frac{x}{30} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{12}{60} < \frac{2x}{60} < \frac{15}{60}$$

Vì $\frac{12}{60} < \frac{2x}{60} < \frac{15}{60}$ Suy ra $2x = 13$ hoặc $2x = 14$

Mà x là số nguyên dương $\Rightarrow 2x = 14 \Rightarrow x = 7$.

Bài 8: Tìm số nguyên dương x , biết:

$$\text{a) } \frac{3}{x} \geq 1; \quad \text{b) } 1 < \frac{4}{x} \leq 2; \quad \text{c) } \frac{6}{x} < \frac{x}{3} < \frac{13}{x}.$$

Lời giải:

$$a) \frac{3}{x} \geq 1 \Rightarrow \frac{3}{x} \geq \frac{x}{x} \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow x \in [1; 3].$$

$$b) 1 < \frac{4}{x} \leq 2 \Rightarrow \frac{x}{x} < \frac{4}{x} \leq \frac{2x}{x} \Rightarrow x < 4 \leq 2x \Rightarrow 2 \leq x < 4 \Rightarrow x \in [2; 4).$$

$$c) \frac{6}{x} < \frac{x}{3} < \frac{13}{x} \Rightarrow \frac{18}{3x} < \frac{x^2}{3x} < \frac{39}{3x} \Rightarrow 18 < x^2 < 39 \Rightarrow x^2 \in (18; 39)$$

$$\Rightarrow x \in (5; 6) \text{ (vì } x > 0).$$

Bài 9: Tìm $a, b \in \mathbb{Z}$ sao cho $\frac{9}{56} < \frac{a}{8} < \frac{b}{7} < \frac{13}{28}$.

Lời giải:

$$\text{Từ } \frac{9}{56} < \frac{a}{8} < \frac{b}{7} < \frac{13}{28} \text{ suy ra } \frac{9}{56} < \frac{7a}{56} < \frac{8b}{56} < \frac{26}{56} \Rightarrow 9 < 7a < 8b < 26.$$

Vì $a, b \in \mathbb{Z}$, từ đó ta tìm được $a = 2, b = 2; a = 2, b = 3; a = 3, b = 3$.

Bài 10: Tìm ba phân số có mẫu khác nhau, các phân số này lớn hơn $\frac{1}{4}$ và nhỏ hơn $\frac{1}{3}$.

Lời giải:

Quy đồng các phân số với mẫu số chung là 48, ta được:

$$\frac{1}{4} = \frac{1.12}{4.12} = \frac{12}{48}; \quad \frac{1}{3} = \frac{1.16}{3.16} = \frac{16}{48}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{12}{48} < \frac{13}{48} < \frac{14}{48} < \frac{15}{48} < \frac{16}{48}$$

$$\text{Rút gọn các phân số trên ta được: } \frac{1}{4} < \frac{13}{48} < \frac{7}{24} < \frac{5}{16} < \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy ba phân số cần tìm là: } \frac{13}{48}, \frac{7}{24} \text{ và } \frac{5}{16}.$$

Bài 11: Tìm hai phân số có mẫu khác nhau, các phân số này lớn hơn $\frac{1}{5}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{1}{4}$.

Lời giải:

Quy đồng hai phân số $\frac{1}{5}$ và $\frac{1}{4}$ với mẫu số chung là 60, ta được:

$$\frac{1}{5} = \frac{1.12}{5.12} = \frac{12}{60}; \quad \frac{1}{4} = \frac{1.15}{4.15} = \frac{15}{60}.$$

$$\frac{12}{60} < \frac{13}{60} < \frac{14}{60} < \frac{15}{60}$$

Ta có:

$$\frac{1}{5} < \frac{13}{60} < \frac{7}{30} < \frac{1}{4}$$

Rút gọn các phân số trên ta được:

$$\frac{13}{60} \quad \frac{7}{30}$$

Vậy hai phân số cần tìm là: và .

Bài 12: Tìm hai phân số có mẫu số khác nhau, các phân số này lớn hơn $\frac{1}{3}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Chọn mẫu chung là 18, ta có: $\frac{1}{3} = \frac{6}{18}; \frac{1}{2} = \frac{9}{18}$.

$$\text{Ta có } \frac{6}{18} < \frac{7}{18} < \frac{8}{18} < \frac{9}{18}$$

Rút gọn các phân số này ta được: $\frac{1}{3} < \frac{7}{18} < \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$.

Ta tìm được hai phân số $\frac{7}{18}$ và $\frac{4}{9}$ có mẫu khác nhau, lớn hơn $\frac{1}{3}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.

Nhận xét:

Có nhiều cặp phân số thỏa mãn yêu cầu của đề bài. Chẳng hạn, chọn mẫu chung là 120,

$$\text{ta có: } \frac{1}{3} = \frac{40}{120}; \quad \frac{1}{2} = \frac{60}{120}.$$

Trong các phân số từ $\frac{41}{120}$ đến $\frac{59}{120}$ ta có thể chọn các cặp như: $\frac{41}{120}$ và $\frac{42}{120} = \frac{21}{60}$ hoặc $\frac{44}{120} = \frac{11}{30}$ và $\frac{45}{120} = \frac{15}{40}$... đều thỏa mãn bài toán.

Bài 13: Tìm các phân số có mẫu số là 5 và nhỏ hơn $\frac{1}{2}$, lớn hơn $\frac{1}{3}$

Lời giải:

$$\frac{1}{3} < \frac{a}{5} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{10}{30} < \frac{6a}{30} < \frac{15}{30}$$

Phân số có dạng :

$$6a = 12 \Rightarrow a = 2$$

Suy ra

$$\frac{2}{5}$$

Vậy phân số cần tìm là:

Bài 14: Tìm ba phân số mà lớn hơn $\frac{-1}{3}$ và nhỏ hơn $\frac{-1}{4}$.

Lời giải:

$$\frac{a}{b} \quad (a, b \in \mathbb{N}, b \neq 0)$$

Gọi phân số cần tìm

$$-\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{16}{48} < \frac{a}{b} < -\frac{12}{48}$$

Ta có:

Lấy $b = 48$ và $a \in \{-13, -14, -15\}$ ta được các phân số: $\frac{-13}{48}, \frac{-14}{48}, \frac{-15}{48}$.

Bài 15: Hãy tìm các phân số, thỏa mãn mỗi điều kiện sau

a) Có mẫu là $\frac{30}{17}$, lớn hơn $\frac{5}{17}$ và nhỏ hơn $\frac{6}{17}$:

b) Có mẫu là $\frac{5}{-3}$, lớn hơn $\frac{2}{-3}$ và nhỏ hơn $\frac{1}{-6}$;

Trong mỗi trường hợp trên hãy sắp xếp các phân số theo thứ tự từ nhỏ đến lớn

Lời giải:

a) Gọi phân số cần tìm là $\frac{a}{30}$. trong đó $a \in \mathbb{Z}$, ta có: $\frac{5}{17} < \frac{a}{30} < \frac{6}{17}$

$$\frac{150}{510} < \frac{17a}{510} < \frac{180}{510}$$

Quy đồng mẫu chung của ba phân số, ta được:

Suy ra $150 < 17a < 180$, do đó $\frac{150}{17} < a < \frac{180}{17}$, mà $a \in \mathbb{Z}$, nên $a \in \{9; 10\}$.

$$\frac{9}{30} = \frac{3}{10} \quad \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

Có hai phân số phải tìm là : $\frac{3}{10}$ và $\frac{1}{3}$.

$$\frac{5}{17} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3} < \frac{6}{17}$$

Sắp xếp các phân số theo thứ tự từ nhỏ đến lớn:

$$\frac{b}{5} (b \in \mathbb{Z}) \quad \frac{2}{-3} < \frac{b}{5} < \frac{1}{-6}$$

b) Gọi phân số phải tìm là , ta có:

$$\frac{-2}{3} < \frac{b}{5} < \frac{-1}{6}$$

Biến đổi các phân số đã cho sao cho có mẫu dương, ta được:

$$\frac{-20}{30} < \frac{6b}{30} < \frac{-5}{30}, \text{ suy ra } -20 < 6b < -5$$

Quy đồng mẫu các phân số:

$$-3\frac{1}{3} < b < -\frac{5}{6}$$

Do đó , mà $b \in \mathbb{Z}$, nên $b = -3 : -2$ và -1 .

$$\frac{-3}{5}; \frac{-2}{5} \quad \frac{-1}{5}$$

Ba số phải tìm là : và .

$$\frac{-2}{3} < \frac{-3}{5} < \frac{-2}{5} < \frac{-1}{5} < \frac{-1}{6}$$

Sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn:

$$\frac{1}{6} \quad \frac{2}{3}$$

Bài 16: Cho hai phân số và . Hãy tìm :

a) Năm phân số có tử và mẫu cùng là số dương, sao cho các phân số đó lớn hơn $\frac{2}{6}$ và nhỏ hơn $\frac{2}{3}$;

b) Hai mươi phân số có tử và mẫu cùng là số dương, sao cho các phân số lớn hơn $\frac{1}{6}$ và nhỏ hơn $\frac{2}{3}$;

c) Có nhận xét gì về số các phân số có tử và mẫu cùng là số dương, sao cho phân số đó lớn hơn $\frac{1}{6}$ và nhỏ hơn $\frac{2}{3}$.

Lời giải:

$$\frac{1}{6} \quad \frac{2}{3}$$

a) Quy đồng mẫu chung hai phân số và , chú ý chọn mẫu sao cho xen giữa hai phân số này có 5 phân

$$\frac{1}{6} < \frac{3}{12} < \frac{4}{12} < \frac{5}{12} < \frac{6}{12} < \frac{7}{12} < \frac{8}{12}$$

số. Ta có: ;

$$\frac{8}{42}, \frac{9}{42}, \frac{10}{42}, \dots, \frac{25}{42}, \frac{26}{42}, \frac{27}{42}.$$

b) Tương tự a), chọn mẫu chung là 42. Các phân số cần tìm là:

c) Có nhiều phân số thoả mãn đề bài. Các phân số cần tìm phụ thuộc vào cách tìm mẫu chung. Nếu mẫu chung càng lớn thì số các phân số cần tìm càng lớn. Chẳng hạn chọn mẫu chung là 120, khi đó

va $\frac{2}{3} = \frac{80}{120}$, vì thế xen giữa hai phân số $\frac{20}{120}$ và $\frac{80}{120}$ có 59 phân số là: $\frac{21}{120}, \frac{22}{120}, \frac{23}{120}, \dots, \frac{77}{120}, \frac{78}{120}, \frac{79}{120}$.

$$A = \frac{10^{19} + 1}{10^{20} + 1} \quad B = \frac{10^{20} + 1}{10^{21} + 1}$$

Bài 17: So sánh hai phân số sau: và

Lời giải:

$$MC: (10^{20} + 1)(10^{21} + 1)$$

Quy đồng mẫu hai phân số với , ta có :

$$A = \frac{(10^{19} + 1)(10^{21} + 1)}{(10^{20} + 1)(10^{21} + 1)} = \frac{10^{40} + 10^{21} + 10^{19} + 1}{(10^{20} + 1)(10^{21} + 1)};$$

$$B = \frac{(10^{20} + 1)(10^{20} + 1)}{(10^{20} + 1)(10^{21} + 1)} = \frac{10^{40} + 10^{20} + 10^{20} + 1}{(10^{20} + 1)(10^{21} + 1)}$$

Hãy chứng tỏ rằng $10^{21} + 10^{19} > 10^{20} + 10^{20}$ để suy ra $10^{40} + 10^{21} + 10^{19} + 1 > 10^{40} + 10^{20} + 10^{20} + 1$.

Từ đó có $A > B$.

Dạng 3: So sánh hai phân số không cùng mẫu bằng cách quy đồng tử

I. Phương pháp giải

Quy đồng tử dương rồi so sánh các mẫu: Mẫu nào lớn hơn thì phân số đó nhỏ hơn

II. Bài toán

Bài 1: So sánh hai phân số bằng cách quy đồng tử.

a) $\frac{3}{4}$ và $\frac{6}{7}$

b) $-\frac{17}{21}$ và $-\frac{51}{31}$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ mà $\frac{6}{8} < \frac{6}{7} \Rightarrow \frac{3}{4} < \frac{6}{7}$

b) Ta có $\frac{17}{-21} = \frac{51}{-63}$ mà $\frac{51}{-63} > \frac{51}{-31} \Rightarrow \frac{17}{-21} > \frac{51}{-31}$.

Bài 2: So sánh hai phân số bằng cách quy đồng tử.

a) $\frac{-4}{9}$ và $\frac{-3}{13}$

b) $\frac{-4}{-11}$ và $\frac{-6}{-19}$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{-4}{9} = \frac{-12}{27}$; $\frac{-3}{13} = \frac{-12}{52}$ mà $\frac{-12}{27} < \frac{-12}{52} \Rightarrow \frac{-4}{9} < \frac{-3}{13}$

b) Ta có $\frac{-4}{-11} = \frac{12}{33}$; $\frac{-6}{-19} = \frac{12}{38}$ mà $\frac{12}{33} > \frac{12}{38} \Rightarrow \frac{-4}{-11} > \frac{-6}{-19}$.

Bài 3: So sánh hai phân số bằng cách quy đồng tử.

a) $\frac{2}{5}$ và $\frac{5}{7}$

b) $\frac{-3}{4}$ và $\frac{-6}{7}$

c) $\frac{101}{506}$ và $\frac{707}{3534}$

Lời giải:

a) Ta có: $\frac{2}{5} = \frac{10}{25}$ và $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$; Vì $\frac{10}{25} < \frac{10}{14} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{5}{7}$

b) Ta có: $\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4} = \frac{6}{-8}$ và $\frac{-6}{7} = \frac{6}{-7}$; Vì $\frac{6}{-8} > \frac{6}{-7} \Rightarrow \frac{-3}{4} > \frac{-6}{7}$.

c) Ta có: $\frac{101}{506} = \frac{101 \times 7}{506 \times 7} = \frac{707}{3542}$

Hai phân số $\frac{707}{3542}$ và $\frac{707}{3534}$ có tử bằng nhau, nhưng $3542 > 3534$ nên $\frac{707}{3542} < \frac{707}{3534}$ hay $\frac{101}{506} < \frac{707}{3534}$.

Bài 4: So sánh các phân số sau: $A = \frac{2489 - 36}{7467 - 108}$; $B = \frac{2929 - 303}{8787 + 1717}$.

Lời giải:

$$A = \frac{2489 - 36}{3 \cdot (2489 - 36)} = \frac{1}{3}; B = \frac{101 \cdot (29 - 3)}{101 \cdot (87 + 17)} = \frac{26}{104} = \frac{1}{4}.$$

Vì $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ nên $A > B$.

Bài 5: So sánh các phân số sau: $A = \frac{8056}{2012 \cdot 16 - 1982}$; $B = \frac{1 \cdot 2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \cdot 12 + 4 \cdot 8 \cdot 24 + 7 \cdot 14 \cdot 42}{1 \cdot 6 \cdot 9 + 2 \cdot 12 \cdot 18 + 4 \cdot 24 \cdot 36 + 7 \cdot 42 \cdot 63}$

Lời giải:

$$A = \frac{8056}{2012 \cdot 16 - 1982} = \frac{4 \cdot 2014}{2012 \cdot 15 + 2012 - 1982} = \frac{4 \cdot 2014}{2012 \cdot 15 + 30} = \frac{4 \cdot 2014}{15 \cdot (2012 + 2)} = \frac{4}{15}. \quad (1)$$

$$B = \frac{2.(1.2.3 + 2.4.6 + 4.8.12 + 7.14.21)}{9.(1.2.3 + 2.4.6 + 4.8.12 + 7.14.21)} = \frac{2}{9}. \quad (2)$$

Ta có: $\frac{2}{9} = \frac{4}{18} < \frac{4}{15}$ nên từ (1) và (2) suy ra $A > B$.

Bài 6: Tìm số tự nhiên y sao cho: $\frac{5}{8} < \frac{4}{y} < \frac{5}{7}$.

Lời giải:

Trước tiên ta sẽ quy đồng tử số các phân số:

$$\frac{5}{8} = \frac{5.4}{8.4} = \frac{20}{32}, \frac{4}{y} = \frac{4.5}{y.5} = \frac{20}{5y}, \frac{5}{7} = \frac{5.4}{7.4} = \frac{20}{28}$$

$$\frac{5}{8} < \frac{4}{y} < \frac{5}{7} \Rightarrow \frac{20}{32} < \frac{20}{5y} < \frac{20}{28}$$

Vì Suy ra $5y = 31, 5y = 30$ hoặc $5y = 29$

Mà y là số tự nhiên $\Rightarrow 5y = 30 \Rightarrow y = 6$.

Bài 7: Tìm số $x \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn:

$$\text{a) } \frac{7}{6} < \frac{7}{x} < \frac{7}{3} \quad \text{b) } \frac{17}{-5} < \frac{-17}{x} < \frac{17}{-10} \quad \text{c) } \frac{2}{3} < \frac{10}{x} < \frac{5}{6}$$

Lời giải:

$$\text{a) } \frac{7}{6} < \frac{7}{x} < \frac{7}{3} \Rightarrow 3 < x < 6 \Rightarrow x \in \{5; 4\}$$

$$\frac{17}{-5} < \frac{-17}{x} < \frac{17}{-10} \Rightarrow \frac{17}{-5} < \frac{17}{-x} < \frac{17}{-10} \Rightarrow 10 > x > 5 \Rightarrow x \in \{9; 8; 7; 6\}$$

b)

$$\text{c) } \frac{2}{3} < \frac{10}{x} < \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{10}{15} < \frac{10}{x} < \frac{10}{12} \Rightarrow 12 < x < 15 \Rightarrow x \in \{14; 13\}$$

Bài 8: Tìm phân số có tử số là 4 và lớn hơn $\frac{1}{7}$, nhỏ hơn $\frac{1}{5}$.

Lời giải:

$$\frac{1}{7} < \frac{4}{b} < \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{4}{28} < \frac{4}{b} < \frac{4}{20}$$

Phân số cần tìm có dạng :

$$20 < b < 28 \Rightarrow b \in \{21; 22; 23; 24; 25; 26; 27\}$$

Suy ra:

$$\frac{4}{21}; \frac{4}{22}; \frac{4}{23}; \frac{4}{24}; \frac{4}{25}; \frac{4}{26}; \frac{4}{27}$$

Ta có 7 phân số:

Dạng 4: So sánh hai phân số bằng cách so sánh phần bù (hoặc phần hơn) với 1.

I. Phương pháp giải

+ Định nghĩa: Cho phân số $\frac{a}{b} < 1$, ta gọi *phần bù đến đơn vị* của phân số $\frac{a}{b}$ là hiệu $1 - \frac{a}{b}$, tức là $\frac{b-a}{b}$.

+ Nếu $\frac{a}{b} - M = 1; \frac{c}{d} - N = 1$ mà $M > N$ thì $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

- M, N là phần thừa so với 1 của 2 phân số đã cho.
- Phân số nào có phần thừa lớn hơn thì phân số đó lớn hơn.

+ Nếu $\frac{a}{b} + M = 1; \frac{c}{d} + N = 1$ mà $M > N$ thì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

- M, N là phần thiếu hay phần bù đến đơn vị của 2 phân số đó.
- Phân số nào có phần bù lớn hơn thì phân số đó nhỏ hơn.

II. Bài toán

Bài 1: So sánh các phân số sau mà không quy đồng mẫu số và tử số:

a) $\frac{47}{57}$ và $\frac{66}{76}$

b) $\frac{23}{32}$ và $\frac{39}{48}$

Lời giải:

a) Nhận thấy hai phân số này đều lớn hơn 0 và nhỏ hơn 1 nên ta sẽ sử dụng phần bù đến đơn vị.

Ta có: $1 - \frac{47}{57} = \frac{57}{57} - \frac{47}{57} = \frac{10}{57}$, $1 - \frac{66}{76} = \frac{76}{76} - \frac{66}{76} = \frac{10}{76}$

Có $\frac{10}{57} > \frac{10}{76} \Rightarrow \frac{47}{57} < \frac{66}{76}$.

b) Ta có: $1 - \frac{23}{32} = \frac{32}{32} - \frac{23}{32} = \frac{9}{32}$, $1 - \frac{39}{48} = \frac{48}{48} - \frac{39}{48} = \frac{9}{48}$

Có $\frac{9}{32} > \frac{9}{48} \Rightarrow \frac{23}{32} < \frac{39}{48}$.

Bài 2: So sánh hai phân số bằng cách so sánh phần bù (hoặc phần hơn) với 1.

a) $\frac{26}{27}$ và $\frac{96}{97}$

b) $\frac{102}{103}$ và $\frac{103}{105}$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{26}{27} + \frac{1}{27} = 1$; . . . mà $\frac{1}{27} > \frac{1}{97} \Rightarrow \frac{26}{27} < \frac{96}{97}$.

b) Ta có $\frac{102}{103} + \frac{1}{103} = 1$; $\frac{103}{105} + \frac{2}{105} = 1$ mà $\frac{1}{103} = \frac{2}{206} < \frac{2}{105} \Rightarrow \frac{102}{103} > \frac{103}{105}$.

Bài 3: So sánh các phân số sau:

a) $\frac{-37}{47}$ và $\frac{-56}{66}$;

b) $\frac{-29}{38}$ và $\frac{-13}{22}$.

Lời giải:

a) Ta có: $\frac{37}{47} = \frac{47-10}{47} = 1 - \frac{10}{47}$ (1)

$$\frac{56}{66} = \frac{66-10}{66} = 1 - \frac{10}{66} \quad (2)$$

Vì $\frac{10}{47} > \frac{10}{66}$ nên từ (1) và (2) suy ra $\frac{37}{47} < \frac{56}{66}$.

Do đó $\frac{-37}{47} > \frac{-56}{66}$.

b) Làm tương tự câu a) ta có: $\frac{-29}{38} < \frac{-13}{22}$.

Bài 4: So sánh hai phân số bằng cách so sánh phần bù (hoặc phần hơn) với 1.

a) $\frac{2020}{2019}$ và $\frac{2019}{2018}$

b) $\frac{73}{64}$ và $\frac{51}{45}$

Lời giải:

a) Ta có $\frac{2020}{2019} - \frac{1}{2019} = 1$; $\frac{2019}{2018} - \frac{1}{2018} = 1$ mà $\frac{1}{2019} < \frac{1}{2018} \Rightarrow \frac{2020}{2019} < \frac{2019}{2018}$.

b) Ta có $\frac{73}{64} - \frac{9}{64} = 1$; $\frac{51}{45} - \frac{6}{45} = 1$ mà $\frac{9}{64} = \frac{18}{128} > \frac{6}{45} = \frac{18}{135} \Rightarrow \frac{73}{64} > \frac{51}{45}$.

Bài 5: So sánh: a) $\frac{19}{18}$ và $\frac{2005}{2004}$

b) $\frac{72}{73}$ và $\frac{98}{99}$

Lời giải:

a) Ta có: $\frac{19}{18} - \frac{1}{18} = 1$ và $\frac{2005}{2004} - \frac{1}{2004} = 1$; Vì $\frac{1}{18} > \frac{1}{2004} \Rightarrow \frac{19}{18} > \frac{2005}{2004}$

b) Ta có: $\frac{72}{73} + \frac{1}{73} = 1$ và $\frac{98}{99} + \frac{1}{99} = 1$; Vì $\frac{1}{73} > \frac{1}{99} \Rightarrow \frac{72}{73} < \frac{98}{99}$.

Bài 6: So sánh các phân số sau bằng cách hợp lí nhất:

a) $\frac{13}{19}$ và $\frac{47}{53}$;

b) $\frac{41}{91}$ và $\frac{411}{911}$.

Lời giải:

a) $\frac{13}{19} = \frac{19-6}{19} = 1 - \frac{6}{19}$; $\frac{47}{53} = \frac{53-6}{53} = 1 - \frac{6}{53}$.

$$\text{Vì } \frac{6}{19} > \frac{6}{53} \text{ suy ra } \frac{13}{19} < \frac{47}{53}.$$

$$\text{d) } \frac{41}{91} = \frac{410}{910} = \frac{910 - 500}{910} = 1 - \frac{500}{910} \quad (1)$$

$$\frac{411}{911} = \frac{911 - 500}{911} = 1 - \frac{500}{911} \quad (2)$$

$$\text{Vì } \frac{500}{910} > \frac{500}{911} \text{ nên từ (1) và (2) suy ra } \frac{41}{91} < \frac{411}{911}.$$

Bài 7: So sánh các biểu thức sau: $A = \frac{100^{10} + 1}{100^{10} - 1}; \quad B = \frac{100^{10} - 1}{100^{10} - 3}$

Lời giải:

$$A = \frac{100^{10} + 1}{100^{10} - 1} = 1 + \frac{2}{100^{10} - 1} \quad (1)$$

$$B = \frac{100^{10} - 1}{100^{10} - 3} = 1 + \frac{2}{100^{10} - 3} \quad (2)$$

$$\text{Vì } \frac{2}{100^{10} - 1} < \frac{2}{100^{10} - 3} \text{ nên từ (1) và (2) suy ra } A < B.$$

Bài 8: So sánh: $A = \frac{2003.2004 - 1}{2003.2004}$ và $B = \frac{2004.2005 - 1}{2004.2005}$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } A = \frac{2003.2004 - 1}{2003.2004} = \frac{2003.2004}{2003.2004} - \frac{1}{2003.2004} = 1 - \frac{1}{2003.2004}$$

$$B = \frac{2004.2005 - 1}{2004.2005} = \frac{2004.2005}{2004.2005} - \frac{1}{2004.2005} = 1 - \frac{1}{2004.2005}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2003.2004} > \frac{1}{2004.2005} \text{ nên } A < B.$$

Bài 9: So sánh phân số sau bằng cách nhanh nhất:

$$\text{a) } \frac{2012}{2013} \text{ và } \frac{2013}{2014} \qquad \text{b) } \frac{1006}{1007} \text{ và } \frac{2013}{2015}$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta có: } 1 - \frac{2012}{2013} = \frac{1}{2013}; \quad 1 - \frac{2013}{2014} = \frac{1}{2014}.$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2013} > \frac{1}{2014} \text{ nên } \frac{2012}{2013} < \frac{2013}{2014}$$

b) Ta có: $1 - \frac{1006}{1007} = \frac{1}{1007} = \frac{2}{2014}; \quad 1 - \frac{2013}{2015} = \frac{2}{2015}.$

$$\text{Vì } \frac{2}{2014} > \frac{2}{2015} \text{ nên } \frac{1006}{1007} < \frac{2013}{2015}.$$

Bài 10: Hãy so sánh bốn phân số:

a) $A = \frac{222221}{222222};$ b) $B = \frac{444443}{444445};$ c) $C = \frac{666664}{666667};$ d) $D = \frac{888885}{888889}$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{222222 - 1}{222222} = 1 - \frac{1}{222222} \Rightarrow 1 - A = \frac{1}{222222} \Rightarrow \frac{1}{1 - A} = 222222$$

$$B = \frac{444445 - 2}{444445} = 1 - \frac{2}{444445} \Rightarrow 1 - B = \frac{2}{444445} \Rightarrow \frac{1}{1 - B} = 222222 + \frac{1}{2}$$

$$C = \frac{666667 - 3}{666667} = 1 - \frac{3}{666667} \Rightarrow 1 - C = \frac{3}{666667} \Rightarrow \frac{1}{1 - C} = 222222 + \frac{1}{3}$$

$$D = \frac{888889 - 4}{888889} = 1 - \frac{4}{888889} \Rightarrow 1 - D = \frac{4}{888889} \Rightarrow \frac{1}{1 - D} = 222222 + \frac{1}{4}$$

Suy ra $\frac{1}{1 - A} < \frac{1}{1 - D} < \frac{1}{1 - C} < \frac{1}{1 - B} \Rightarrow A < D < C < B$ (Do đó $A, B, C, D < 1$).

Dạng 6: So sánh hai phân số bằng cách dùng số trung gian

I. Phương pháp giải

1. Dùng số 0; 1 làm trung gian:

a) Nếu $\frac{a}{b} > 0$ và $0 > \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

b) Nếu $\frac{a}{b} > 1$ và $1 > \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

2. Dùng 1 phân số hoặc số xấp xỉ làm trung gian: (Phân số này có tử là tử của phân số thứ nhất, có mẫu là mẫu của phân số thứ hai)

*Nhận xét: Trong hai phân số, phân số nào vừa có tử lớn hơn, vừa có mẫu nhỏ hơn thì phân số đó lớn hơn (điều kiện các tử và mẫu đều dương).

*Tính bắc cầu: $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ và $\frac{c}{d} > \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{m}{n}$

II. Bài toán

Bài 1: So sánh hai phân số bằng cách dùng số trung gian.

$$a) \frac{7}{9} \text{ và } \frac{19}{17}$$

$$b) \frac{311}{256} \text{ và } \frac{199}{203}$$

Lời giải:

$$a) \text{ Ta có } \frac{7}{9} < 1 < \frac{19}{17} \Rightarrow \frac{7}{9} < \frac{19}{17}$$

$$c) \text{ Ta có } \frac{311}{256} > 1 > \frac{199}{203} \Rightarrow \frac{311}{256} > \frac{199}{203}$$

Bài 2: So sánh hai phân số bằng cách dùng số trung gian.

$$a) \frac{-16}{19} \text{ và } \frac{15}{17}$$

$$b) \frac{419}{-723} \text{ và } \frac{-699}{-692}$$

Lời giải:

$$a) \text{ Ta có } \frac{-16}{19} < 0 < \frac{15}{17} \Rightarrow \frac{-16}{19} < \frac{15}{17}$$

$$b) \text{ Ta có } \frac{419}{-723} < 0 < \frac{-699}{-692} \Rightarrow \frac{419}{-723} < \frac{-699}{-692}$$

Bài 3: So sánh hai phân số sau:

$$a) \frac{-371}{459} \text{ và } \frac{-371}{-459}$$

$$b) \frac{-29}{73} \text{ và } \frac{-80}{49} .$$

Lời giải:

$$a) \frac{-371}{459} < 0 < \frac{-371}{-459} \Rightarrow \frac{-371}{459} < \frac{-371}{-459} .$$

$$b) \frac{-29}{73} > \frac{-73}{73} = -1. \quad (1)$$

$$\frac{-80}{49} < \frac{-49}{49} = -1. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{-29}{73} > \frac{-80}{49} .$$

Bài 4: So sánh hai phân số bằng cách dùng số trung gian.

$$a) \frac{18}{31} \text{ và } \frac{15}{37}$$

$$b) \frac{72}{73} \text{ và } \frac{58}{99}$$

Lời giải:

$$\text{a) Vì } \frac{18}{31} > \frac{18}{37} \text{ và } \frac{18}{37} > \frac{15}{37} \Rightarrow \frac{18}{31} > \frac{15}{37}$$

$$\text{b) Cách 1: Vì } \frac{72}{73} > \frac{72}{99} \text{ và } \frac{72}{99} > \frac{58}{99} \Rightarrow \frac{72}{73} > \frac{58}{99}$$

$$\text{Cách 2: Vì } \frac{72}{73} > \frac{58}{73} \text{ và } \frac{58}{73} > \frac{58}{99} \Rightarrow \frac{72}{73} > \frac{58}{99}$$

Bài 5: So sánh các phân số sau:

$$\text{a) } \frac{3}{121} \text{ và } \frac{6}{241};$$

$$\text{b) } \frac{31}{67} \text{ và } \frac{29}{73}.$$

Lời giải:

$$\text{a) Quy đồng tử số ta được: } \frac{3}{121} = \frac{6}{242}.$$

$$\text{Rõ ràng } \frac{6}{242} < \frac{6}{241} \text{ tức là } \frac{3}{121} < \frac{6}{241}.$$

$$\text{b) Chọn phân số trung gian là } \frac{31}{73} \text{ ta có:}$$

$$\frac{31}{67} > \frac{31}{73} > \frac{29}{73} \text{ do đó } \frac{31}{67} > \frac{29}{73}.$$

$$\text{Bài 6: So sánh: } \frac{n}{n+3} \text{ và } \frac{n+1}{n+2}; (n \in \mathbb{N}^*)$$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } \frac{n}{n+3} < \frac{n}{n+2} \text{ và } \frac{n}{n+2} < \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow \frac{n}{n+3} < \frac{n+1}{n+2}; (n \in \mathbb{N}^*)$$

Bài 7: So sánh hai phân số bằng cách dùng số xấp xỉ làm trung gian.

$$\text{a) } \frac{12}{47} \text{ và } \frac{19}{77}$$

$$\text{b) } \frac{11}{32} \text{ và } \frac{16}{49}$$

$$\text{c) } \frac{12}{37} \text{ và } \frac{19}{54}$$

Lời giải:

$$\text{a) Ta thấy cả hai phân số đã cho đều xấp xỉ với phân số trung gian là } \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ta có: } \frac{12}{47} > \frac{12}{48} = \frac{1}{4} \text{ \& } \frac{19}{77} < \frac{19}{76} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{12}{47} > \frac{19}{77}.$$

b) Ta thấy cả hai phân số đã cho đều xấp xỉ với phân số trung gian là $\frac{1}{3}$.

$$\text{Ta có: } \frac{11}{32} > \frac{11}{33} = \frac{1}{3} \text{ \& } \frac{16}{49} < \frac{16}{48} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{11}{32} > \frac{16}{49}.$$

c) Ta thấy cả hai phân số đã cho đều xấp xỉ với phân số trung gian là $\frac{1}{3}$.

$$\text{Ta có: } \frac{12}{37} < \frac{12}{36} = \frac{1}{3} \text{ \& } \frac{19}{54} > \frac{18}{54} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{12}{37} < \frac{19}{54}.$$

Bài 8: So sánh: $A = \frac{3535.232323}{353535.2323}$; $B = \frac{3535}{3534}$; $C = \frac{2323}{2322}$

Lời giải:

$$A = \frac{3535.232323}{353535.2323} = \frac{35.101.23.10101}{35.10101.23.101} = 1$$

$$B = \frac{3535}{3534} = 1 + \frac{1}{3534}$$

$$C = \frac{2323}{2322} = 1 + \frac{1}{2322}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{3534} < \frac{1}{2322} \text{ nên } A < B < C$$

Bài 9: So sánh: $A = \frac{5(11.13 - 22.26)}{22.26 - 44.52}$ và $B = \frac{138^2 - 690}{137^2 - 540}$

Lời giải:

$$A = \frac{5(11.13 - 22.26)}{22.26 - 44.52} = \frac{5.11.13(1.1 - 2.2)}{22.26(1.1 - 2.2)} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

$$B = \frac{138^2 - 690}{137^2 - 540} = \frac{138(138 - 5)}{137(137 - 4)} = \frac{138}{137} = 1 + \frac{1}{137}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{4} > \frac{1}{137} \text{ nên } A > B$$

Bài 10: So sánh $A = \frac{2004^{2003} + 1}{2004^{2004} + 1}$ và $B = \frac{2004^{2002} + 1}{2004^{2003} + 1}$

Lời giải:

$$2004A = \frac{2004^{2004} + 2004}{2004^{2004} + 1} = 1 + \frac{2003}{2004^{2004} + 1}$$

Ta có:

$$2004B = \frac{2004^{2003} + 2004}{2004^{2003} + 1} = 1 + \frac{2003}{2004^{2003} + 1}$$

$$\text{Vi } \frac{2003}{2004^{2004} + 1} < \frac{2003}{2004^{2003} + 1} \Rightarrow 1 + \frac{2003}{2004^{2004} + 1} < 1 + \frac{2003}{2004^{2003} + 1}$$

$$\Rightarrow 2004A < 2004B$$

$$\Rightarrow A < B$$

Vậy $A < B$.

Dạng 7: So sánh hai phân số bằng cách dùng tính chất phân số.

I. Phương pháp giải

1. Tính chất 1: Với $m \neq 0$ ta có :

$$*\frac{a}{b} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$$

$$*\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+m}{b+m}.$$

$$*\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$$

$$*\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

2. Tính chất 2: Với các số nguyên dương a, b, c, d :

$$\text{Nếu } \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \text{ thì } \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

II. Bài toán

Bài 1: Tìm 3 phân số mà: lớn hơn $\frac{-1}{3}$ và nhỏ hơn $\frac{-1}{4}$.

Lời giải:

$$\text{Vi } -\frac{1}{3} < -\frac{1}{4} \text{ nên } -\frac{1}{3} < \frac{-1-1}{3+4} < -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{2}{7} < -\frac{1}{4}$$

$$\text{Vi } -\frac{1}{3} < -\frac{2}{7} < -\frac{1}{4} \text{ nên } -\frac{1}{3} < \frac{-1+(-2)}{3+7} < -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{3}{10} < -\frac{1}{4}$$

$$\text{Vi } -\frac{1}{3} < -\frac{3}{10} < -\frac{1}{4} \text{ nên } -\frac{1}{3} < \frac{-1+(-3)}{3+10} < -\frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{3} < -\frac{4}{13} < -\frac{1}{4}$$

$$-\frac{2}{7}, -\frac{3}{10}, -\frac{4}{13}$$

Ta có ba phân số cần tìm là:

Bài 2: Tìm ba phân số khác nhau, các phân số này lớn hơn $\frac{1}{4}$ nhưng nhỏ hơn $\frac{1}{3}$.

Lời giải:

$$\text{Từ } \frac{1}{4} < \frac{1}{3} \text{ suy ra } \frac{1}{4} < \frac{1+1}{4+3} < \frac{1}{3} \text{ hay } \frac{1}{4} < \frac{2}{7} < \frac{1}{3}.$$

$$\text{Từ } \frac{1}{4} < \frac{2}{7} \text{ suy ra } \frac{1}{4} < \frac{1+2}{4+7} < \frac{2}{7} \text{ hay } \frac{1}{4} < \frac{3}{11} < \frac{2}{7}.$$

$$\text{Từ } \frac{2}{7} < \frac{1}{3} \text{ suy ra } \frac{2}{7} < \frac{2+1}{7+3} < \frac{1}{3} \text{ hay } \frac{2}{7} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy, ta có } \frac{1}{4} < \frac{3}{11} < \frac{2}{7} < \frac{3}{10} < \frac{1}{3}.$$

$$\text{Bài 3: So sánh } \frac{-387}{386} \text{ và } \frac{-592}{591}$$

Lời giải:

$$\frac{387}{386} > 1 \Rightarrow \frac{387}{386} > \frac{387+205}{386+205} = \frac{592}{591}$$

$$\text{Ta có: } \frac{387}{386} > \frac{592}{591} \text{ nên } \frac{-387}{386} < \frac{-592}{591}.$$

$$\text{Bài 4: So sánh hai phân số sau: } A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1} \text{ và } B = \frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1}$$

Lời giải:

$$\text{Ta có: } A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1} < 1 \text{ (vì tử nhỏ hơn mẫu)}$$

$$\Rightarrow A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1} < \frac{(10^{11} - 1) + 11}{(10^{12} - 1) + 11} = \frac{10^{11} + 10}{10^{12} + 10} = \frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1} = B$$

$$\text{Vậy } A < B.$$

$$\text{Bài 5: So sánh hai phân số sau: } A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}; \quad B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$$

Lời giải:

$$\text{Vì } \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < 1 \text{ (vì tử nhỏ hơn mẫu)}$$

$$\text{nên } A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < \frac{17^{18} + 1 + 16}{17^{19} + 1 + 16} = \frac{17^{18} + 17}{17^{19} + 17} = \frac{17 \cdot (17^{17} + 1)}{17 \cdot (17^{18} + 1)} = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1} = B$$

Vậy $A < B$.

Bài 6: So sánh hai phân số sau: $A = \frac{98^{89} + 1}{98^{99} + 1}$ và $B = \frac{98^{88} + 1}{98^{98} + 1}$.

Lời giải:

Ta thấy $A = \frac{98^{89} + 1}{98^{99} + 1} < 1$ (vì tử nhỏ hơn mẫu) nên:

$$A = \frac{98^{89} + 1}{98^{99} + 1} < \frac{98^{89} + 1 + 97}{98^{99} + 1 + 97} = \frac{98^{89} + 98}{98^{99} + 98} = \frac{98 \cdot (98^{88} + 1)}{98 \cdot (98^{98} + 1)} = \frac{98^{88} + 1}{98^{98} + 1} = B$$

Vậy $A < B$.

Bài 7: So sánh hai phân số sau: $C = \frac{15^{16} + 1}{15^{17} + 1}$ và $D = \frac{15^{15} + 1}{15^{16} + 1}$.

Lời giải:

Ta thấy $C = \frac{15^{16} + 1}{15^{17} + 1} < 1$ (vì tử nhỏ hơn mẫu) nên:

$$C = \frac{15^{16} + 1}{15^{17} + 1} < \frac{15^{16} + 1 + 14}{15^{17} + 1 + 14} = \frac{15^{16} + 15}{15^{17} + 15} = \frac{15 \cdot (15^{15} + 1)}{15 \cdot (15^{16} + 1)} = \frac{15^{15} + 1}{15^{16} + 1} = D$$

Vậy $C < D$.

Bài 8: So sánh hai phân số sau: $M = \frac{2004}{2005} + \frac{2005}{2006}$ và $N = \frac{2004 + 2005}{2005 + 2006}$

Lời giải:

Ta có :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{2004}{2005} > \frac{2004}{2005 + 2006} \\ \frac{2005}{2006} > \frac{2005}{2005 + 2006} \end{array} \right\} \text{ Cộng theo vế ta có kết quả } M > N.$$

Bài 9: So sánh hai phân số sau: $\frac{37}{39}$ và $\frac{3737}{3939}$?

Lời giải:

$$\frac{37}{39} = \frac{3700}{3900} = \frac{3700 + 37}{3900 + 39} = \frac{3737}{3939} \quad \left(\text{áp dụng } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \right).$$

$$\frac{37}{39} = \frac{3737}{3939}.$$

Bài 10: So sánh hai phân số : $A = \frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1}$ và $B = \frac{100^{99} + 1}{100^{89} + 1}$.

Lời giải:

$$A = \frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1} > 1 \quad \frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1} > \frac{(100^{100} + 1) + 99}{(100^{90} + 1) + 99}$$

Vì nên

$$\Rightarrow \frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1} > \frac{100^{100} + 100}{100^{90} + 100} \Rightarrow \frac{100^{100} + 1}{100^{90} + 1} > \frac{100(100^{99} + 1)}{100(100^{89} + 1)} = B$$

Vậy $A > B$.

Bài 11: So sánh hai phân số: $A = \frac{2003^{2003} + 1}{2003^{2004} + 1}$ và $B = \frac{2003^{2002} + 1}{2003^{2003} + 1}$

Lời giải:

Để thấy $A < 1$ nên:

$$A = \frac{2003^{2013} + 1}{2003^{2004} + 1} < \frac{2003^{2003} + 1 + 2002}{2003^{2004} + 1 + 2002}$$

$$= \frac{2003^{2003} + 2003}{2003^{2004} + 2003} = \frac{2003 \cdot (2003^{2002} + 1)}{2003(2003^{2003} + 1)}$$

$$= \frac{2003^{2002} + 1}{2003^{2003} + 1} = B$$

Vậy $A < B$

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG. (Khoảng 15 bài)

Bài 1. So sánh P và Q biết $P = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2013}$ và $Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013}$

Lời giải:

Ta có:

$$Q = \frac{2010 + 2011 + 2012}{2011 + 2012 + 2013} = \frac{2010}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2011}{2011 + 2012 + 2013} + \frac{2012}{2011 + 2012 + 2013}$$

Lần lượt so sánh từng phân số của P và Q với các tử là: $2010; 2011; 2012$ thấy được các phân số của P đều lớn hơn các phân số của Q .

Vậy $P > Q$

So sánh không qua quy đồng: $A = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}; B = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Bài 2:

Lời giải:

Ta có

$$A = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$B = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$$

$$\frac{-8}{10^{2006}} > \frac{-8}{10^{2005}} \Rightarrow A > B$$

Ta thấy

Bài 3: Không quy đồng mẫu số hãy so sánh:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}}; B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}}$$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-19}{10^{2011}} = \frac{-9}{10^{2010}} + \frac{-10}{10^{2011}} + \frac{-9}{10^{2011}}$$

$$B = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-19}{10^{2010}} = \frac{-9}{10^{2011}} + \frac{-10}{10^{2010}} + \frac{-9}{10^{2010}}$$

Ta thấy $\frac{-10}{10^{2011}} > \frac{-10}{10^{2010}} \Rightarrow A > B$

Bài 4: Cho $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$.

So sánh A với $\frac{3}{4}$?

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{1}{1+3} + \frac{1}{1+3+5} + \frac{1}{1+3+5+7} + \dots + \frac{1}{1+3+5+7+\dots+2017}$

$$A = \frac{1}{\frac{(1+3).2}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+5).3}{2}} + \frac{1}{\frac{(1+7).4}{2}} + \dots + \frac{1}{\frac{(1+2017).1009}{2}}$$

$$= \frac{2}{2.4} + \frac{2}{3.6} + \frac{2}{4.8} + \dots + \frac{2}{1009.2018} = \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \dots + \frac{1}{1009.1009}$$

$$A < \frac{1}{2.2} + \left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{1008.1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1008} - \frac{1}{1009} \right)$$

$$A < \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1009} \right) \Rightarrow A < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Bài 5: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013.2014 - 1}{2013.2014}$ và $B = \frac{2014.2015 - 1}{2014.2015}$

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{2013.2014 - 1}{2013.2014} = 1 - \frac{1}{2013.2014}$$

$$B = \frac{2014.2015 - 1}{2014.2015} = 1 - \frac{1}{2014.2015}$$

Vì $\frac{1}{2013.2014} > \frac{1}{2014.2015}$ nên $A < B$.

Bài 6: Cho: $A = \frac{10^{2001} + 1}{10^{2002} + 1}$; $B = \frac{10^{2002} + 1}{10^{2003} + 1}$. Hãy so sánh A và B .

Lời giải:

Ta có: $10A = \frac{10^{2002} + 10}{10^{2002} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2002} + 1} \quad (1)$

Tương tự: $10B = \frac{10^{2003} + 10}{10^{2003} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2003} + 1} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta thấy: $\frac{9}{10^{2002} + 1} > \frac{9}{10^{2003} + 1} \Rightarrow 10A > 10B \Rightarrow A > B$.

Bài 7: So sánh $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}}$ và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$.

Lời giải:

Xét: $N = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-15}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2006}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Và $M = \frac{-15}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}} = \frac{-7}{10^{2005}} + \frac{-8}{10^{2005}} + \frac{-7}{10^{2006}}$

Ta có: $\frac{-8}{10^{2006}} > \frac{-8}{10^{2005}}$

Vậy $N > M$

Bài 8: So sánh: $N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}}$ và $M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}}$.

Lời giải:

$N = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{11}{10^{2006}} = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{6}{10^{2006}} + \frac{5}{10^{2006}}$

Và $M = \frac{11}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}} = \frac{5}{10^{2005}} + \frac{6}{10^{2005}} + \frac{5}{10^{2006}}$

Ta có: $\frac{6}{10^{2006}} < \frac{6}{10^{2005}}$

Vậy $N < M$.

Bài 9: So sánh A và B biết:

$A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1}, \quad B = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1}$

Lời giải:

$A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < 1 \Rightarrow A = \frac{17^{18} + 1}{17^{19} + 1} < \frac{17^{18} + 1 + 16}{17^{19} + 1 + 16} = \frac{17 \cdot (17^{17} + 1)}{17 \cdot (17^{18} + 1)} = \frac{17^{17} + 1}{17^{18} + 1} = B$

Vì

Bài 10: Chứng tỏ rằng: $\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$

Lời giải:

Ta thấy: $\frac{1}{41}$ đến $\frac{1}{80}$ có 40 phân số.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \\ \text{Vậy} & \\ = & \left(\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{59} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{61} + \frac{1}{62} + \dots + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{41} > \frac{1}{42} > \dots > \frac{1}{60} \text{ và } \frac{1}{61} > \frac{1}{62} > \dots > \frac{1}{80} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{60} + \frac{1}{60} + \dots + \frac{1}{60} + \frac{1}{60} \right) + \left(\frac{1}{80} + \frac{1}{80} + \dots + \frac{1}{80} + \frac{1}{80} \right) \\ \text{Ta có} & \\ = & \frac{20}{60} + \frac{20}{80} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{12} = \frac{7}{12} \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (1), (2), (3) Suy ra:

$$\frac{1}{41} + \frac{1}{42} + \frac{1}{43} + \dots + \frac{1}{78} + \frac{1}{79} + \frac{1}{80} > \frac{7}{12}$$

Bài 11: Không quy đồng mẫu hãy so sánh hai phân số sau: $\frac{37}{67}$ và $\frac{377}{677}$.

Lời giải:

$$\frac{300}{670} > \frac{300}{677} \text{ mà } \frac{300}{670} = \frac{30}{67} \Rightarrow \frac{30}{67} > \frac{300}{677} \quad (1)$$

$$\text{Ta có : } 1 - \frac{37}{67} = \frac{30}{67} \text{ và } 1 - \frac{377}{677} = \frac{300}{677} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{377}{677} > \frac{37}{67}.$$

Bài 12: So sánh: $A = \frac{2005^{2005} + 1}{2005^{2006} + 1}$ và $B = \frac{2005^{2004} + 1}{2005^{2005} + 1}$.

Lời giải:

$$A = \frac{2005^{2005} + 1}{2005^{2006} + 1} < \frac{2005^{2005} + 1 + 2004}{2005^{2006} + 1 + 2004} = \frac{2005(2005^{2004} + 1)}{2005(2005^{2005} + 1)} = \frac{2005^{2004} + 1}{2005^{2005} + 1} = B.$$

Vậy $A < B$.

13: So sánh: $A = \frac{2006^{2006} + 1}{2007^{2007} + 1}$ và $B = \frac{2006^{2005} + 1}{2006^{2006} + 1}$.

Bài

Lời giải:

Ta có nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+n}{b+n} (n \in \mathbb{N}^*)$

$$A = \frac{2006^{2006} + 1}{2006^{2007} + 1} < \frac{2006^{2006} + 1 + 2005}{2006^{2007} + 2005 + 1} = \frac{2006^{2006} + 2006}{2006^{2007} + 2006} = \frac{2006(2006^{2005} + 1)}{2006(2006^{2006} + 1)} = \frac{2006^{2005} + 1}{2006^{2006} + 1} = B$$

Vậy $A < B$.

Bài 14: So sánh các biểu thức: $A = \frac{121212}{171717} + \frac{2}{17} - \frac{404}{1717}$ với $B = \frac{10}{17}$.

Lời giải:

$$A = \frac{121212}{171717} + \frac{2}{17} - \frac{404}{1717} = \frac{121212:10101}{171717:10101} + \frac{2}{17} - \frac{404:101}{1717:101}$$

$$\Rightarrow A = \frac{12}{17} + \frac{2}{17} - \frac{4}{17} = \frac{12+2-4}{17}$$

$$A = \frac{10}{17} \quad A = B = \frac{10}{17}$$

Vậy hay

Bài 15: Cho: $A = \frac{10^{2020} + 1}{10^{2021} + 1}$; $B = \frac{10^{2021} + 1}{10^{2022} + 1}$. Hãy so sánh A và B .

Lời giải:

Ta có: $10A = \frac{10^{2021} + 10}{10^{2021} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2021} + 1}$ (1)

Tương tự: $10B = \frac{10^{2022} + 10}{10^{2022} + 1} = 1 + \frac{9}{10^{2022} + 1}$ (2)

Từ (1) và (2) ta thấy: $\frac{9}{10^{2021} + 1} > \frac{9}{10^{2022} + 1} \Rightarrow 10A > 10B \Rightarrow A > B$.

Bài 16: a) So sánh phân số: $\frac{15}{301}$ với $\frac{25}{499}$

b) So sánh tổng $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots + \frac{2007}{2^{2007}}$ với 2. ($n \in \mathbb{N}^*$)

Lời giải:

a) So sánh phân số: $\frac{15}{301}$ với $\frac{25}{499}$

$$\frac{15}{301} < \frac{15}{300} = \frac{1}{20} = \frac{25}{500} < \frac{25}{499} \quad \frac{15}{301} < \frac{25}{499}$$

. Vậy

b) So sánh tổng $S = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \dots + \frac{2007}{2^{2007}}$ với 2. ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n+2}{2^n}$$

Ta có :

$$VP = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n+2}{2^n} = \frac{2(n+1)}{2^n} - \frac{n+2}{2^n} = \frac{2n+2-n-2}{2^n} = \frac{n}{2^n} = VT \quad (\text{đpcm})$$

Với $\forall n \geq 2$ ta có: $\frac{n}{2^n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} - \frac{n+2}{2^n}$. Từ đó ta có:

$$S = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{2^2}\right) + \left(\frac{4}{2^2} - \frac{5}{2^3}\right) + \dots + \left(\frac{2008}{2^{2006}} - \frac{2009}{2^{2007}}\right) = 2 - \frac{2009}{2^{2007}} < 2$$

. Vậy $S < 2$

Bài 17: Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn điều kiện: $\frac{11}{17} < \frac{a}{b} < \frac{23}{29}$ và $8b - 9a = 31$

Lời giải:

$$8b - 9a = 31 \Rightarrow b = \frac{31+9a}{8} = \frac{32-1+8a+a}{8} \in \mathbb{N} \Rightarrow (a-1):8 \Rightarrow a = 8q+1 (q \in \mathbb{N})$$

$$b = \frac{31+9(8q+1)}{8} = 9q+5 \Rightarrow \frac{11}{17} < \frac{8q+1}{9q+5} < \frac{23}{29}$$

$$11(9q+5) < 17(8q+1) \Rightarrow 37q > 38 \Rightarrow q > 1$$

$$29(8q+1) < 23(9q+5) \Rightarrow 25q < 86 \Rightarrow q < 4 \Rightarrow q \in \{2, 3\}$$

$$q=2 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{23}{17}; q=3 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{32}{25}$$

Bài 18: So sánh: $M = \frac{1999^{1999} + 1}{1999^{2000} + 1}$ và $N = \frac{1999^{1989} + 1}{1999^{2009} + 1}$.

(Đề thi HSG 6 trường THCS Lê Ngọc Hân năm học 1997-1998)

Lời giải:

Ta có : $1999^{1999} + 1 > 1999^{1989} + 1$

$$1999^{2000} + 1 < 1999^{2009} + 1$$

$$\Rightarrow \frac{1999^{1999} + 1}{1999^{2000} + 1} > \frac{1999^{1989} + 1}{1999^{2009} + 1}$$

Vậy $M > N$.

Bài 19: Hãy so sánh hai phân số sau bằng tất cả các cách có thể được:

a) $\frac{1999}{2000}; \frac{19992000}{20002000}$

b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} > 2$

(Đề thi HSG 6_ Quận Hai Bà Trưng 1999 - 2000)

Lời giải:

a) Cách 1 : Quy đồng mẫu số rồi so sánh tử.

$$\frac{1999}{2000} = \frac{19991999}{20002000} < \frac{19992000}{20002000}$$

Cách 2:

$$\frac{1999}{2000} + \frac{1}{2000} = \frac{19992000}{20002000} + \frac{10000}{20002000} = 1$$

Cách 3: Ta có:

$$\frac{1}{2000} = \frac{10000}{20000000} > \frac{10000}{20002000} \Rightarrow \frac{1999}{2000} < \frac{19992000}{20002000}$$

b) $\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} = \frac{4n-1}{4n^2-2n} > \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}; n \geq 2)$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{32} > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{8} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2$$

Bài 20: Thực hiện so sánh:

a) $A = \frac{2009^{2008} + 1}{2009^{2009} + 1}$ với $B = \frac{2009^{2009} + 1}{2009^{2010} + 1}$

b) $C = 1.3.5.7.....99$ với $D = \frac{51}{2} \cdot \frac{52}{2} \cdot \frac{53}{2} \cdot \dots \cdot \frac{100}{2}$

(HSG 2013 – 2014)

Lời giải:

a) Thực hiện qui đồng mẫu số:

$$A = \frac{(2009^{2008} + 1)(2009^{2010} + 1)}{(2009^{2009} + 1)(2009^{2010} + 1)} = \frac{2009^{4018} + 2009^{2010} + 2009^{2008} + 1}{(2009^{2009} + 1)(2009^{2010} + 1)}$$

$$B = \frac{(2009^{2009} + 1)(2009^{2009} + 1)}{(2009^{2010} + 1)(2009^{2009} + 1)} = \frac{2009^{4018} + 2009^{2009} + 2009^{2009} + 1}{(2009^{2010} + 1)(2009^{2009} + 1)}$$

Vì $2009^{2010} + 2009^{2008} = 2008(2009^2 + 1)$

$$2009^{2009} + 2009^{2009} = 2009^{2008} (2009 + 2009)$$

Do $2009^2 + 1 > 2009 + 2009$ nên $A > B$.

(Có thể chứng tỏ $A - B > 0$ để kết luận $A > B$).

Cách khác: Có thể so sánh $2009A$ với $2009B$ trước.

$$C = 1.3.5.7 \dots 99 = \frac{1.3.5.7 \dots 99.2.4.6 \dots 100}{2.4.6 \dots 100} = \frac{1.3.5.7 \dots 99.2.4.6 \dots 100}{(1.2)(2.2)(3.2)(4.2) \dots (50.2)}$$

b)

$$= \frac{1.2.3 \dots 50.51.52.53 \dots 100}{1.2.3 \dots 50.2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{51}{2} \cdot \frac{52}{2} \cdot \frac{53}{2} \cdot \dots \cdot \frac{100}{2} = D$$

50 cs 2

Vậy $C = D$.

$$\text{Bài 21: So sánh: } \frac{2013^{2012} + 1}{2013^{2013} + 1} \quad \text{với} \quad B = \frac{2013^{2013} + 1}{2013^{2014} + 1}.$$

(HSG THANH OAI 2013 – 2014)

Lời giải:

$$A = \frac{(2013^{2012} + 1)(2013^{2014} + 1)}{(2013^{2013} + 1)(2013^{2014} + 1)} = \frac{2013^{4026} + 2013^{2012} + 2013^{2014} + 1}{(2013^{2013} + 1)(2013^{2014} + 1)}$$

$$B = \frac{(2013^{2013} + 1)(2013^{2013} + 1)}{(2013^{2014} + 1)(2013^{2013} + 1)} = \frac{2013^{4026} + 2013^{2013} + 2013^{2013} + 1}{(2013^{2014} + 1)(2013^{2013} + 1)}$$

$$2013^{2014} + 2013^{2012} = 2013^{2012} (2013^2 + 1)$$

$$2013^{2013} + 2013^{2013} = 2013^{2012} (2013 + 2013)$$

Do $2013^2 + 1 > 2013 + 2013$ nên $A > B$.

(Có thể chứng tỏ $A - B > 0$ để kết luận $A > B$).

Cách khác: Có thể so sánh $2013A$ với $2013B$ trước.

Bài 22: So sánh $A = \frac{2012^{37} + 37^{2012} + 1}{2012^{38}}$ với $B = \frac{2012^{38} + 37^{2012} + 2}{2012^{39}}$

Lời giải:

Thực hiện qui đồng mẫu số:

$$A = \frac{2012^{37} + 37^{2012} + 1}{2012^{38}} = \frac{2012^{76} + 37^{2012} \cdot 2012^{39} + 2012^{39}}{2012^{39} \cdot 2012^{38}}$$

$$B = \frac{2012^{38} + 37^{2012} + 2}{2012^{39}} = \frac{2012^{76} + 37^{2012} \cdot 2012^{38} + 2 \cdot 2012^{38}}{2012^{39} \cdot 2012^{38}}$$

Ta có: $37^{2012} \cdot 2012^{39} + 2012^{39} = 2012^{38} (37^{2012} \cdot 2012 + 2012)$

$$37^{2012} \cdot 2012^{38} + 2 \cdot 2012^{38} = 2012^{38} \cdot (37^{2012} + 2)$$

mà $37^{2012} \cdot 2012 + 2012 > 37^{2012} + 2$. Từ đó suy ra $A > B$.

Bài 23: So sánh: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1}$ và $F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1}$

(Đề thi HSG 6 Kinh Môn 2017 - 2018)

Lời giải:

Ta có: $E = \frac{2018^{99} - 1}{2018^{100} - 1} \Rightarrow 2018E = \frac{2018^{100} - 2018}{2018^{100} - 1} \Rightarrow 2018 \cdot E = 1 - \frac{2017}{2018^{100} - 1}$

$$F = \frac{2018^{98} - 1}{2018^{99} - 1} \Rightarrow 2018 \cdot F = \frac{2018^{99} - 2018}{2018^{99} - 1} \Rightarrow 2018 \cdot F = 1 - \frac{2017}{2018^{99} - 1}$$

Vì $\frac{2017}{2018^{100} - 1} < \frac{2017}{2018^{99} - 1} \Rightarrow 1 - \frac{2017}{2018^{100} - 1} > 1 - \frac{2017}{2018^{99} - 1}$

Hay $2018E > 2018F \Rightarrow E > F$

Vậy $E > F$.

Bài 24: So sánh các phân số sau: $\frac{23}{99}$; $\frac{23232323}{99999999}$; $\frac{2323}{9999}$; $\frac{232323}{999999}$

Lời giải:

Ta có:

$$\frac{23}{99} = \frac{23 \cdot 101}{99 \cdot 101} = \frac{2323}{9999}$$

$$\frac{23}{99} = \frac{23 \cdot 10101}{99 \cdot 10101} = \frac{232323}{999999}$$

$$\frac{23}{99} = \frac{23 \cdot 1010101}{99 \cdot 1010101} = \frac{23232323}{99999999}$$

$$\Rightarrow \frac{23}{99} = \frac{2323}{9999} = \frac{232323}{999999} = \frac{23232323}{99999999}$$

Bài 25: So sánh A và B biết: $A = \frac{2013 \cdot 2014 - 1}{2013 \cdot 2014}$ và $B = \frac{2014 \cdot 2015 - 1}{2014 \cdot 2015}$

(Đề thi HSG 6 huyện Bạch Thông 2018-2019)

Lời giải:

Ta có: $A = \frac{2013 \cdot 2014 - 1}{2013 \cdot 2014} = 1 - \frac{1}{2013 \cdot 2014}$

$$B = \frac{2014.2015 - 1}{2014.2015} = 1 - \frac{1}{2014.2015}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2013.2014} > \frac{1}{2014.2015} \text{ nên } A < B$$

Bài 26: So sánh A và B biết: $A = \frac{2010}{2011} + \frac{2011}{2012} + \frac{2012}{2010}$ và $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{17}$

(Đề thi HSG 6 huyện Lý Nhân 2018-2019)

Lời giải:

$$A = \left(1 - \frac{1}{2011}\right) + \left(1 - \frac{1}{2012}\right) + \left(1 + \frac{2}{2010}\right)$$

$$A = 3 + \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2011}\right) + \left(\frac{1}{2010} - \frac{1}{2012}\right)$$

$$\Rightarrow A > 3$$

$$B = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{17}\right)$$

$$B < \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{5} \cdot 5 + \frac{1}{8} \cdot 8 \Rightarrow B < 3$$

Từ đó suy ra $A > B$.

$$\frac{1}{7} < \frac{a}{b} < \frac{2}{3}$$

Bài 27: Cho 2 phân số

Tìm 10 phân số có dạng $\frac{a}{b}$ sao cho $\frac{1}{7} < \frac{a}{b} < \frac{2}{3}$

Có thể tìm được bao nhiêu phân số $\frac{a}{b}$ thỏa mãn điều kiện trên ?

(Đề HSG Toán 6_Đặng Chánh Kỳ_2018-2019)

Lời giải:

a) $\frac{3}{21} < \frac{a}{b} < \frac{14}{21} \Rightarrow 10$ phân số $\frac{a}{b}$ thỏa mãn là: $\frac{4}{21}, \frac{5}{21}, \dots, \frac{13}{21}$

b) Có vô số phân số thỏa mãn điều kiện trên vì các phân số cần tìm phụ thuộc vào mẫu chung. Nếu mẫu chung càng lớn thì phân số càng nhiều

Bài 28: Cho biết $S = \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{130}$. Chứng minh rằng $\frac{1}{4} < S < \frac{91}{330}$

(Đề HSG Toán 6 huyện Thanh Oai 2013-2014)

Lời giải:

$$S < \frac{91}{330}$$

+) Chứng minh

$$S = \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \dots + \frac{1}{110} \right) + \left(\frac{1}{111} + \dots + \frac{1}{120} \right) + \left(\frac{1}{121} + \dots + \frac{1}{130} \right)$$

$$S < \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100} \right) + \left(\frac{1}{110} + \dots + \frac{1}{110} \right) + \left(\frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{120} \right)$$

$$S < \frac{1}{100} \cdot 10 + \frac{1}{110} \cdot 10 + \frac{1}{120} \cdot 10 = \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}$$

$$S < \frac{66 + 60 + 55}{660}$$

$$S < \frac{181}{660} < \frac{182}{660} \quad S < \frac{91}{330} \quad \text{hay} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} < S$$

+) Chứng minh

$$S > \left(\frac{1}{110} + \dots + \frac{1}{110} \right) + \left(\frac{1}{120} + \dots + \frac{1}{120} \right) + \left(\frac{1}{130} + \dots + \frac{1}{130} \right)$$

$$S > \frac{1}{110} \cdot 10 + \frac{1}{120} \cdot 10 + \frac{1}{130} \cdot 10 = \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}$$

$$S > \frac{156 + 143 + 132}{1716}$$

$$S > \frac{431}{1716} > \frac{429}{1716} \quad \text{Hay} \quad S > \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} < S < \frac{91}{330}$$

Từ (1) và (2) ta có

♥ HẾT

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>