

ĐỀ 40(19/8/2022)

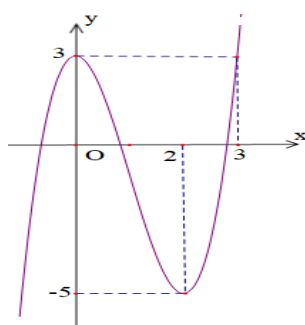
Câu 1: (6,0 điểm) a) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)(x-3)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Tìm khoảng nghịch biến của hàm số $g(x) = f(x^3 + x) + 5$

b) Tìm m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt: $\sqrt[3]{2m + \sqrt[3]{x+m}} = x - m$.

Câu 2: (2,5 điểm) Cô giáo có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Lý, 3 quyển sách Hóa và tất cả các quyển sách này khác nhau. Hỏi cô có bao nhiêu cách cho bạn Nam một số quyển sách sao cho số sách Nam nhận được có đủ 3 môn?

Câu 3: (2,0 điểm) Cho hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị (C) như hình vẽ.



Tìm tất cả các số thực m để đồ thị hàm số $y = -3mx^2 + m(2m+9)x + 3 - 6m^2$ cắt đồ thị (C) tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 và x_3 thỏa mãn

$$2(x_1 + 1)^3 + 2(x_2 + 1)^3 + 2(x_3 + 1)^3 = 132 - 9m$$

Câu 4: (4,5 điểm) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, $AB = a, AD = 2a$ và $\angle BAD = 60^\circ$. Biết hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên $(ABCD)$ là trung điểm H của BC , O và K lần lượt là trung điểm SA và HB . Gọi $SH = x$.

a) Cho $x = a$. Tính khoảng cách giữa SK và BO .

b) Tìm x để góc giữa hai mặt phẳng $(SAB), (SAD)$ bằng 60° .

Câu 5: (3,5 điểm) Cho tam giác ABC có cạnh a nằm trong mặt phẳng α . Điểm O là điểm thay đổi không thuộc mặt phẳng α .

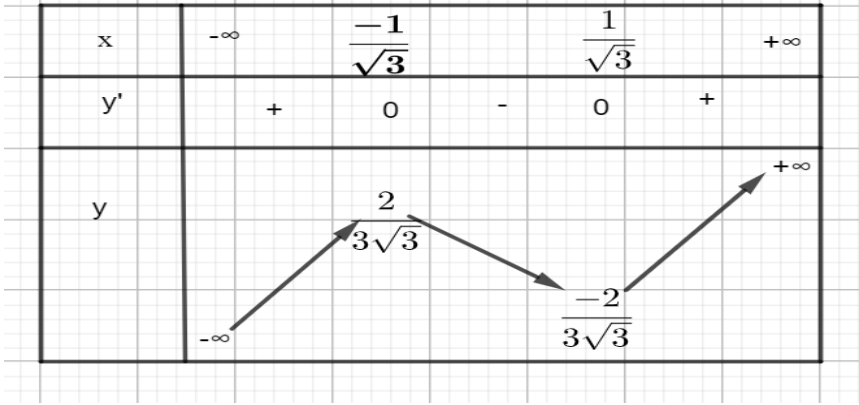
a) Gọi E, F lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, ABO . Điểm G nằm trên đoạn OE sao cho

$$OG = 3GE. \text{ Xác định tỉ số } \frac{V_{BEGF}}{V_{OABC}}.$$

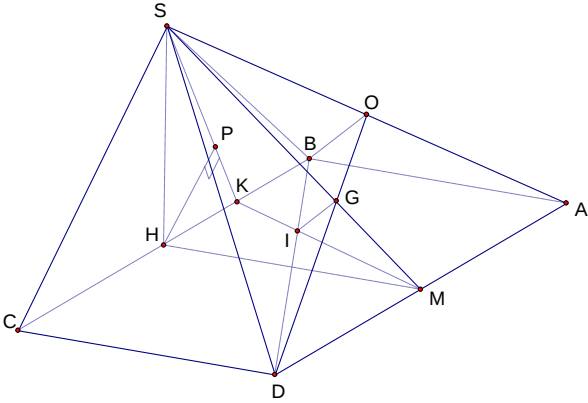
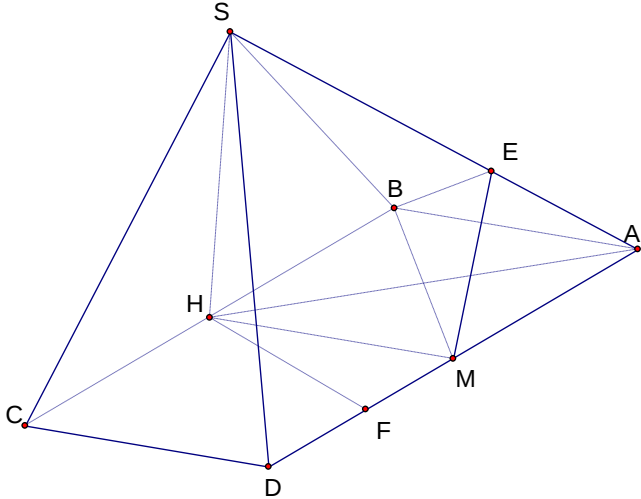
b) Biết $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = OA \cdot OB \cdot OC$.

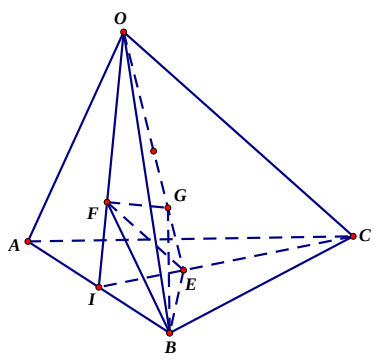
Câu 6: (1,5 điểm) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^4 + y^4 + z^4 = 3$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất

$$\text{của biểu thức } P = \frac{1}{x\sqrt{x^4 + 3y^4}} + \frac{1}{y\sqrt{y^4 + 3z^4}} + \frac{1}{z\sqrt{z^4 + 3x^4}} + \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

	Nội dung	Điểm
Câu 1a (3,0 điểm)	Ta có $g'(x) = (3x^2 + 1)f'(x^3 + x)$ $g'(x) < 0 \Leftrightarrow (3x^2 + 1)f'(x^3 + x) < 0 (*)$	1,0
	Mặt khác ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)^2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$	0,5
	Do $3x^2 + 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (*) \Leftrightarrow f'(x^3 + x) < 0$	0,5
	$\Leftrightarrow x^3 + x < 2 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x + 2) < 0 \Leftrightarrow x < 1.$ Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.	1,0
Câu 1b (3,0 điểm)	$\sqrt[3]{2m + \sqrt[3]{x+m}} = x - m$ $\Leftrightarrow 2m + \sqrt[3]{x+m} = (x-m)^3$ $\Leftrightarrow x + m + \sqrt[3]{x+m} = (x-m)^3 + x - m (1)$	0,5
	Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ trên R $f'(t) = 3t^2 + 1 \geq 0; \forall t \in R$ nên hàm số đồng biến trên R . (1) $\Leftrightarrow f(\sqrt[3]{x+m}) = f(x-m) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x+m} = x-m$ $\Leftrightarrow \sqrt[3]{x+m} = x+m-2m \Leftrightarrow 2m = x+m-\sqrt[3]{x+m}$	0,5
	Đặt $\sqrt[3]{x+m} = u$, pt trở thành: $2m = u^3 - u (2)$ Xét hàm số: $g(u) = u^3 - u$ trên R $g'(u) = 3u^2 - 1; g'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\lim_{u \rightarrow +\infty} g(u) = +\infty; \lim_{u \rightarrow -\infty} g(u) = -\infty$	0,5
		0,5
	Số nghiệm pt (1) bằng số nghiệm của pt (2) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $g(u) = u^3 - u$ và đường thẳng $y = 2m$	0,5

	PT có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \frac{-2}{3\sqrt{3}} < 2m < \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{-1}{3\sqrt{3}} < m < \frac{1}{3\sqrt{3}}$	0,5
Câu 2 (2,5 điểm)	- Số cách cho sách Toán là chính là số tập con khác rỗng của 5 phần tử: $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5 - 1 = 31$. - Số cách cho sách Lý là: $C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 - 1 = 15$. - Số cách cho sách Hóa là: $C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3 - 1 = 7$. Vậy số cách để cô giáo cho bạn Nam một số quyển sách có đủ 3 môn là: $31.15.7 = 3255$ cách.	
		1,0
		1,0
		0,5
Câu 3 (2,0 điểm)	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ Đồ thị hàm số có các điểm cực trị $(0; 3)$ và $(2; -5)$ nên ta có hệ $\begin{cases} d = 3 \\ 8a + 4b + 2c + d = -5 \\ c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -6 \\ c = 0 \\ d = 3 \end{cases}$ Hàm số bậc 3 là $y = 2x^3 - 6x^2 + 3$.	0,5
	Phương trình hoành độ giao điểm $2x^3 - 6x^2 + 3 = -3mx^2 + m(2m+9)x + 3 - 6m^2 \Leftrightarrow (x-3)(2x^2 + 3mx - 2m^2) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2m \\ x = \frac{m}{2} \end{cases}$	0,5
	Để có 3 giao điểm phân biệt thì $\begin{cases} -2m \neq 3 \\ -2m \neq \frac{m}{2} \\ \frac{m}{2} \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \notin \left\{ 0; 6; -\frac{3}{2} \right\} \quad (1).$	0,25
	$2(x_1+1)^3 + 2(x_2+1)^3 + 2(x_3+1)^3 = 132 - 9m$ $\Leftrightarrow 128 + 2(-2m+1)^3 + 2\left(\frac{m}{2}+1\right)^3 = 132 - 9m$ $\Leftrightarrow -63m^3 + 102m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{34}{21} \end{cases}$	0,5

	Đổi chiếu (1) thì ta được $m = \frac{34}{21}$.	0,25
Câu 4a (2,5 điểm)		0,5
	Gọi M là trung điểm của AD, G là trọng tâm của tam giác SAD, $KM \cap BD = I$. Do $BMDH$ là hình thoi cạnh a nên I là trọng tâm tam giác BHM. $\frac{DI}{DB} = \frac{DG}{DO} = \frac{2}{3} \quad \text{nên} \quad IG // BO.$ $d(SK; BO) = d(BO; (SKM)) = d(B; (SKM)) = d(H; (SKM))$	1,0
	Kẻ $HP \perp SK$. Từ $\frac{1}{HP^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HK^2}$, ta tính được $d(H; (SKM)) = HP = \frac{a\sqrt{5}}{5}$	1,0
Câu 4b (2,0 điểm)		
	Gọi M là trung điểm của AD ta có $ABHM$ là hình thoi cạnh a Kẻ $BE \perp SA$. Do $BM \perp (SHA)$ nên $BM \perp SA$. Từ đó suy ra $ME \perp SA$ và góc của 2 mặt phẳng $(SAB); (SAD)$ là góc giữa BE và ME và bằng 60°.	0,5
	Đễ thấy $\Delta SBA = \Delta SMA \Rightarrow BE = ME$ Suy ra $\left \cos BEM \right = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left \frac{BE^2 + ME^2 - BM^2}{2 \cdot BE \cdot ME} \right = \frac{1}{2}$	0,5

	$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{BE^2 + ME^2 - BM^2}{2 \cdot BE \cdot ME} = \frac{1}{2} \\ \frac{BE^2 + ME^2 - BM^2}{2BE \cdot ME} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BE^2 + ME^2 - BM^2 = BE \cdot ME \\ BE^2 + ME^2 - BM^2 = -BE \cdot ME \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2BE^2 - BM^2 = BE^2 \\ 2BE^2 - BM^2 = -BE^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BE^2 = BM^2 \\ 3BE^2 = BM^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BE = BM = a \\ BE = \frac{BM}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} \end{cases}$ Trường hợp $BE = BM = a$ loại do trong tam giác vuông BEA thì $BE < BA = a$. Vậy $BE = ME = \frac{a}{\sqrt{3}}$.	0,5
	Kẻ $HF \perp AD \Rightarrow SF \perp AD$ có $HF = HA \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ Diện tích tam giác SMA là $\frac{1}{2} SF \cdot AM = \frac{1}{2} ME \cdot SA$ $\Leftrightarrow \sqrt{SH^2 + HF^2} \cdot a = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{SH^2 + HA^2}$ $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + \frac{3a^2}{4}} \cdot a = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{x^2 + 3a^2} \Leftrightarrow x^2 + \frac{3a^2}{4} = \frac{1}{3}(x^2 + 3a^2)$ $\Leftrightarrow \frac{2}{3}x^2 = \frac{1}{4}a^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{4}$	0,5
Câu 5a (2,0 điểm)	Ta có $\frac{V_{GBEF}}{V_{OBEF}} = \frac{GE}{OE} = \frac{1}{4}$ 1 	0,5
	$\frac{V_{OBEF}}{V_{OBEI}} = \frac{OF}{OI} = \frac{2}{3}$ 2	0,5
	$\frac{V_{OBEI}}{V_{OABC}} = \frac{S_{\triangle BEI}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{6}$ 3	0,5
	Từ 1, 2, 3 ta có $\frac{V_{GBEF}}{V_{OABC}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$	0,5
Câu 5b (1,5 điểm)	+) Đặt $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$ Trước hết ta chứng minh $16GO^2 = 3x^2 + y^2 + z^2 - 3a^2$ Thật vậy: Gọi E là trọng tâm của tam giác ABC	0,5

	Vì G là trọng tâm của tứ diện $OABC$ nên $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$ $\Rightarrow \overrightarrow{GO} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{OE} \Rightarrow 16GO^2 = 9OE^2 \text{ (I)}$ Mà $OA^2 = \overrightarrow{OA}^2 = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EA}^2$ $\Rightarrow x^2 = OE^2 + EA^2 + 2\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{EA}$ Tương tự $y^2 = OE^2 + EB^2 + 2\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{EB}$ $z^2 = OE^2 + EC^2 + 2\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{EC}$ $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 3OE^2 + EA^2 + EB^2 + EC^2$ $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 3OE^2 + a^2$ $\Rightarrow 9OE^2 = 3x^2 + y^2 + z^2 - 3a^2 \text{ (II)}$ Từ (I) và (II) suy ra: $16GO^2 = 3x^2 + y^2 + z^2 - 3a^2$ Chứng minh tương tự ta cũng có $16GA^2 = 3x^2 - y^2 - z^2 + 5a^2$ $16GB^2 = 3y^2 - z^2 - x^2 + 5a^2$ $16GC^2 = 3z^2 - x^2 - y^2 + 5a^2$	
	Mặt khác: $\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = 0$ $\Leftrightarrow (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})^2 - \overrightarrow{GA}^2 - \overrightarrow{GB}^2 - \overrightarrow{GC}^2 = 0$ $\Leftrightarrow (-\overrightarrow{OG})^2 = \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$ $\Leftrightarrow 16GO^2 = 16GA^2 + 16GB^2 + 16GC^2$ $\Leftrightarrow 3x^2 + y^2 + z^2 - 3a^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 15a^2$ Hay $x^2 + y^2 + z^2 = 9a^2$	0,5
	$P^2 = OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2 \leq \left(\frac{OA^2 + OB^2 + OC^2}{3} \right)^3 = 3a^2 \cdot 3 = 27a^6$ Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $P = 3\sqrt{3}a^3$, xảy ra khi $OA = OB = OC = a\sqrt{3}$	0,5
Câu 6 (1,5 điểm)	Ta chứng minh bổ đề: $\forall x, y > 0 \text{ ta luôn có: } \frac{1}{x\sqrt{x^4 + 3y^4}} \geq \frac{1}{x^3 + y^3} \text{ (1).}$ Thật vậy, $\forall x, y > 0$ thì $(1) \Leftrightarrow (x^3 + y^3)^2 \geq x^2(x^4 + 3y^4)$ $\Leftrightarrow 2x^3y^3 + y^6 \geq 3x^2y^4 \text{ (*)}.$	0,5

	Bất đẳng thức (*) luôn đúng vì theo bất đẳng thức AM-GM ta có: $2x^3y^3 + y^6 = x^3y^3 + x^3y^3 + y^6 \geq 3x^2y^4.$ Vậy $\frac{1}{x\sqrt{x^4+3y^4}} \geq \frac{1}{x^3+y^3}$ (1). Chứng minh tương tự ta được: $\frac{1}{y\sqrt{y^4+3z^4}} \geq \frac{1}{y^3+z^3} \quad (2); \quad \frac{1}{z\sqrt{z^4+3x^4}} \geq \frac{1}{z^3+x^3} \quad (3).$	
	Mặt khác: $\frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{4} \sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} = \frac{1}{4} \sqrt{(x^4+y^4+z^4)(x^2+y^2+z^2)}$ $\stackrel{CBS}{\geq} \frac{1}{4} (x^3+y^3+z^3) \quad (4). \text{ Từ (1),(2),(3),(4) suy ra:}$ $P \geq \frac{1}{x^3+y^3} + \frac{1}{y^3+z^3} + \frac{1}{z^3+x^3} + \frac{1}{4} (x^3+y^3+z^3)$ $\stackrel{CBS}{\geq} \frac{9}{2(x^3+y^3+z^3)} + \frac{1}{4} (x^3+y^3+z^3).$	0,5
	Đặt $t = x^3 + y^3 + z^3$. Theo giả thiết: $3 = x^4 + y^4 + z^4 \stackrel{CBS}{\geq} \frac{1}{3} (x^2 + y^2 + z^2)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$ $\Rightarrow 9 \geq (x^4 + y^4 + z^4)(x^2 + y^2 + z^2) \stackrel{CBS}{\geq} (x^3 + y^3 + z^3)^2$ $\Rightarrow 0 < x^3 + y^3 + z^3 \leq 3 \Rightarrow 0 < t \leq 3.$ $\Rightarrow P \geq \frac{9}{2t} + \frac{t}{4} = \left(\frac{9}{4t} + \frac{t}{4} \right) + \frac{9}{4t} \stackrel{Am-Gm}{\geq} 2\sqrt{\frac{9}{16}} + \frac{9}{4.3} = \frac{9}{4}. \Rightarrow P \geq \frac{9}{4}. \text{ Vậy min } P = \frac{9}{4}.$ Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.	0,5

----- HẾT -----