**TOÁN 9**

**CHUYÊN ĐỀ 2: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG**

**A – LÝ THUYẾT**

**I . *Hệ thức lượng về cạnh và đường cao trong tam giác vuông*:**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Ta có:  c’  A  H  C  h  B  c  b  b’  a | |
| (1) b2 = ab’; c2 = ac’.  (2) b2 + c2 = a2 (định lý Pitago)  (3) h2 = b’c’  (4) ah = bc  (5) |  |
| 2. Các hệ thức (1), (3), (4) và (5) ở trên có định lý đảo với điều kiện H nằm giữa B và C. | |
| 3. Đối với ΔABC bất kỳ, ta có:  (định lý Py-ta-go); | |

**II . *Tỉ số lượng giác của góc nhọn*:**

|  |  |
| --- | --- |
| **•** sinα = ; cosα = ;  tanα = ; cotα = .  • Nếu hai góc nhọn α và β có sinα = sinβ (hoặc cosα = cosβ, hoặc tanα = tanβ, hoặc cotα = cotβ) thì α = β. | A  C  Cạnh huyền  B  α    Cạnh kề  Cạnh đối |
| **•** Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng cos góc kia và tan góc này bằng cot góc kia.  Nếu α + β = 900 thì:  sinα = cosβ ; cosα = sinβ ;  tanα = cotβ ; cotα = tanβ . | |

**II . *Hệ thức lượng giữa các cạnh và các góc của một tam giác vuông*:**

|  |  |
| --- | --- |
| b = a . sinB = a . cosC  c = a . sinC = a . cosB  b = c . tanB = c . cotC  c = b . tanC = b . cotB | A    c  b  a  B  C |

**B – CÁC VÍ DỤ.**

**DẠNG 1: Vận dụng hệ thức về cạnh và đường cao để tính cạnh trong tam giác.**

**Ví dụ 1:** Tính diện tích hình thang ABCD có đường cao bằng 12cm, hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau, BD = 15cm.

*Giải*:

|  |  |
| --- | --- |
| Qua B vẽ đường thẳng song song với AC, cắt DC ở E. Gọi BH là đường cao của hình thang. Ta có BE // AC, AC ⊥ BD nên BE ⊥ BD.  Áp dụng định lý Pitago vào tam giác vuông BDH, ta có: BH2 + HD2 = BD2 | A  D  B  H  C  E |

⇒ 122 + HD2 = 152 ⇒ HD2 = 225 – 144 = 81 ⇒ HD = 9 (cm).

Xét tam giác BDE vuông tại B:

BD2 = DE . DH ⇒ 152 = DE . 9 ⇒ DE = 225 : 9 = 25 (cm).

Ta có: AB = CE nên AB + CD = CE + CD = DE = 25 (cm).

Do đó:  = 25 . 12 : 2 = 150 (cm2).

**Ví dụ 2:** Hình thang cân ABCD có đáy lớn CD = 10cm, đáy nhỏ bằng đường cao, đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính đường cao của hình thang.

|  |  |
| --- | --- |
| B  A    C  K  H  D | *Giải*:  Gọi AH, BK là đường cao của hình thang. Đặt AB = AH = BK = x. Dễ dàng chứng minh được DH = CK = . Do đó HC = |

Xét tam giác ADC vuông tại A, ta có AH = HD . HC. Do đó:



Từ đó x = cm. Vậy đường cao của hình thang bằng cm.

**Ví dụ 3:** Tính diện tích một tam giác vuông có chu vi 72cm, hiệu giữa đường trung tuyến và đường cao ứng với cạnh huyền bằng 7cm.

|  |  |
| --- | --- |
| *Giải*:  Kí hiệu như hình bên. Đặt AM = x, ta có BC = 2x, AH = x – 7.  Theo các hệ thức trong tam giác vuông: | A  x  B  H  M  C |

AB2 + AC2 = BC2 = 4x2 (1)

AB . AC = BC . AH = 2x(x – 7). (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

AB2 + AC2 + 2AB.AC = 4x2 + 4x(x – 7)

⇔ (AB + AC)2 = 8x2 – 28x ⇔ (72 – 2x)2 = 8x2 – 28x.

Đưa về phương trình x2 + 65x – 1296 = 0 ⇔ (x – 16)(x + 81) = 0.

Nghiệm dương của phương trình là x = 16. Từ đó BC = 32cm, AH = 9cm.

Vậy diện tích tam giác ABC là: 32 . 9 : 2 = 144 (cm2).

**DẠNG 2: Dựa vào các hệ thức đã học để làm các bài toán chứng minh.**

**Ví dụ 4:** Cho hình thang ABCD có , hai đường chéo vuông góc với nhau tại H. Biết rằng AB = cm; HA = 3cm. Chứng minh rằng:

1. HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8
2. 

*Giải*:

A

3



B

H

C

D

|  |  |
| --- | --- |
| a) Muốn chứng tỏ HA, HB, HC, HD tỉ lệ với 1, 2, 4, 8 trước tiên ta tính độ dài của các đoạn thẳng đó.  • Áp dụng hệ thức b2 = ab’ vào tam giác vuông BAC ta được |  |

AB2 = AC . AH

⇒ AC =  = 15cm ⇒ HC = 12cm.

• Áp dụng hệ thức h2 = b’c’ vào tam giác vuông BAC và tam giác vuông CBD ta được:

BH2 = HA . HC = 36 ⇒ BH = 6 (cm);

CH2 = HB . HD ⇒ HD =  = 24 (cm).

Vậy HA : HB : HC : HD = 3 : 6 : 12 : 24 = 1 : 2 : 4 : 8.

b) Áp dụng hệ thức  vào tam giác vuông BAC và CBD ta được:

; 

Trừ từng vế của hai đẳng thức ta được: 

***Nhận xét*:**

- Trong câu a, để tính HB ta có thể áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông HAB (vì đã biết cạnh huyền và một cạnh góc vuông).

- Trong câu b, điều gì gợi ý cho ta áp dụng hệ thức ? Đó là vì đẳng thức cần chứng minh có chứa các nghịch đảo bình phương của các cạnh góc vuông, của đường cao ứng với cạnh huyền. Vì vậy ta đã vận dụng hệ thức này vào các tam giác vuông thích hợp.

**DẠNG 3: Tính góc dựa vào tỉ số lượng giác.**

**Ví dụ 5:** Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Biết AB = 7,5cm; AH = 6cm.

1. Tính AC, BC;
2. Tính cosB, cosC.

*Giải*:

A

H

B

C

7,5

6

|  |  |
| --- | --- |
| a) Tam giác ABH vuông ở H, theo định lí Py-ta-go, ta có:  BH2 = AB2 – AH2 = 7,52 – 62 = 20,25  suy ra BH =  = 4,5 (cm).  Tam giác ABC vuông ở A, có AH ⊥ BC, theo hệ thức lượng trong tam giác vuông, ta có: |  |

AB2 = BH . BC, suy ra BC = = 12,5 (cm).

Lại áp dụng định lý Py-ta-go với tam giác vuông ABC, ta có:

AC2 = BC2 – AB2 = 12,52 – 7,52 = 156,25 – 56,25 = 100.

suy ra AC =  = 10 (cm)

Vậy AC = 10cm, BC = 12,5cm.

b) Trong tam giác vuông ABC, ta có:

cosB = = 0,6 ;

cosC = = 0,8 .

*Trả lời*: cosB = 0,6 ; cosC = 0,8.

**DẠNG 4: Sử dụng các tỉ số lượng góc đã học để làm các bài toán chứng minh.**

**Ví dụ 6:** Sử dụng định nghĩa các tỉ số lượng giác của một góc nhọn để chứng minh rằng: Với góc nhọn α tùy ý, ta luôn có:

|  |  |
| --- | --- |
| 1. ; 2. ; | b) tanα . cotα = 1 ;   1. . |

*Giải*:

|  |  |
| --- | --- |
| Xét tam giác ABC vuông ở A. Đặt , BC = a, CA = b, AB = c (h6). Theo định nghĩa tỉ số lượng giác của góc nhọn, ta có: | |
| ;  ;  ;  .  Vậy: | A  a  B  C  c  b  α |

a)  (vì b2 + c2 = a2)

b) .

c) .

d) .

**DẠNG 5: Vận dụng hệ thức giữa cạnh và góc để tính cạnh và góc trong tam giác.**

**Ví dụ 7:** Cho tam giác ABC vuông ở A, có AC = 15cm, . Hãy tính độ dài:

1. AB, BC ;
2. Phân giác CD.

*Giải*:

|  |  |
| --- | --- |
| a) Tam giác ABC vuông ở A, theo hệ thức lượng về cạnh và góc của tam giác vuông, ta có:  AB = AC.cotB = 15.cot500 ≈ 15 . 0.8391  ≈ 12,59 (cm).  AC = BC.sinB, suy ra | D  500  15  C  B  a  A |



Vậy AB ≈ 12,59 cm, BC ≈ 19,58 cm.

b) Tam giác ABC vuông ở A nên ,

suy ra .

CD là tia phân giác của góc C, ta có 

Trong tam giác vuông ACD vuông ở A, theo hệ thức lượng về cạnh và góc, ta có:

, suy ra:



*Trả lời*: CD ≈ 15,96cm.

**DẠNG 6: Dựa vào hệ thức giữa cạnh và góc để làm các bài toán chứng minh.**

**Ví dụ 8:** Cho tam giác ABC, hai đường cao BH, CK.

Chứng minh rằng nếu AB > AC thì BH > CK.

*Giải*:

|  |  |
| --- | --- |
| Giả sử AB > AC. Trong tam giác vuông AHB, ta có:  BH = AB.sinA (1)  Trong tam giác vuông AKC, ta có:  CK = AC.sin A (2)  Từ (1) và (2) suy ra:    (vì sinA > 0 và AB > AC), do đó BH > CK. | Capture2.PNG |

**C – BÀI TẬP ÁP DỤNG**

**DẠNG 1: Vận dụng hệ thức về cạnh và đường cao để tính cạnh trong tam giác.**

**Bài tập 1:** Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Biết AB : AC = 3 : 7, AH = 42cm. Tính BH, HC.

**Bài tập 2:** Biết tỉ số hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông là 5 : 6, cạnh huyền là 122cm. Tính độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền.

**Bài tập 3:** Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Biết BH : HC = 9 : 16, AH = 48cm. Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác.

**Bài tập 4:** Trong một tam giác vuông, tỉ số giữa đường cao và trung tuyến kẻ từ đỉnh góc vuông bằng 40 : 41. Tính độ dài các cạnh góc vuông của tam giác vuông đó, biết cạnh huyền bằng cm.

**Bài tập 5:** Cho tam giác ABC vuông ở A có cạnh AB = 6cm, AC = 8cm. Các đường phân giác trong và ngoài của góc B cắt AC lần lượt ở D và E. Tính các đoạn thẳng BD và BE.

**Bài tập 6:** Cho tam giác ABC vuông ở A, phân giác AD, đường cao AH. Biết CD = 68cm, BD = 51cm. Tính BH, HC

**Bài tập 7:** Cho tam giác nhọn ABC, hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi B1, C1 là hai điểm tương ứng trên các đoạn HB, HC. Biết . Tam giác AB1C1 là tam giác gì? Vì sao?

**Bài tập 8:** Cạnh huyền của một tam giác vuông lớn hơn một cạnh góc vuông của tam giác là 9cm, còn tổng hai cạnh góc vuông lớn hơn cạnh huyền là 6cm. Tính chu vi và diện tích của tam giác vuông đó.

**DẠNG 2: Dựa vào các hệ thức đã học để làm các bài toán chứng minh**

**Bài tập 9:** Cho hình vuông ABCD và điểm I nằm giữa A và B. Tia DI cắt BC ở E. Đường thẳng kẻ qua D vuông góc với DE cắt BC ở F.

1. Tam giác DIF là tam giác gì? Vì sao?
2. Chứng minh rằng  không đổi khi I chuyển động trên đoạn AB.

**Bài tập 10:** Cho tam giác ABC có , đường cao BH. Đặt BC = a, CA = b, AB = c, AH = c’, HC = b’. Chứng minh rằng: a2 = b2 + c2 – 2bc’

**Bài tập 11:** Cho tam giác ABC có , AC = 13cm và BC – BA = 7cm. Tính độ dài các cạnh AB, BC.

**Bài tập 12:** Cho tam giác ABC có , đường cao BH. Đặt BC = a, CA = b, AB = c, AH = c’, HC = b’. Chứng minh rằng: a2 = b2 + c2 + 2bc’

**Bài tập 13:** Cho tam giác ABC cân ở B và điểm D trên cạnh AC. Biết , AC = 3dm, DC = 8dm. Tính độ dài cạnh AB.

**DẠNG 3: Tính góc dựa vào tỉ số lượng giác.**

**Bài tập 14:** Biết , tính cosα, tanα, cotα.

**Bài tập 15:** Biết , tính sinα, cosα, cotα.

**Bài tập 16:** Cho tam giác ABC vuông tại A. Biết sinB = , tính tanC?

**Bài tập 17:** Tam giác ABC có đường trung tuyến AM bằng cạnh AC. Tính tanB : tanC.

**DẠNG 4: Sử dụng các tỉ số lượng góc đã học để làm các bài toán chứng minh.**

**Bài tập 18:** Cho tam giác nhọn ABC có BC = a, CA = b và AB = c.

Chứng minh rằng: 

**Bài tập 19:** Cho hai tam giác nhọn ABC, hai đường cao BD, CE.

Chứng minh: ΔADE ~ ΔABC.

**Bài tập 20:** Không dùng bảng số và máy tính bỏ túi, hãy tính:

1. ;
2. 

**Bài tập 21:**

1. Biết , tính A = .
2. Biết , tính B = .

**Bài tập 22:** Chứng minh rằng diện tích của một tam giác bằng một nửa tích của hai cạnh với sin của góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

**Bài tập 23:** Cho tam giác nhọn ABC, phân giác AD. Biết AB = c, AC = b. Tính độ dài AD theo b, c và .

**Bài tập 24:** Chứng minh rằng với góc nhọn α tùy ý, mỗi biểu thức sau không phụ thuộc vào α:

1. A = ;
2. B = 

**Bài tập 25:** Cho tam giác ABC có BC = a, Ca = b, AB = c và b + c = 2a. Chứng minh:

1. 2sinA = sinB + sinC ;
2. , trong đó ha, hb, hc lần lượt là chiều cao của tam giác ứng với các cạnh a, b, c.

**Bài tập 26:** Cho a, b, c lần lượt là độ dài các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC. Chứng minh rằng: 

**Bài tập 27:** Cho tam giác ABC và hai trung tuyến BN và CM vuông góc với nhau. Chứng minh: cotB + cotC ≥ 

**Bài tập 28:** Cho tam giác ABC vuông ở A,  (α < 450), trung tuyến AM, đường cao AH. Biết BC = a, CA = b, AH = h. Hãy biểu thị sinα, cosα, sin2α theo a, b, h rồi chứng minh hệ thức: sin2α = 2sinαcosα.

**DẠNG 5: Vận dụng hệ thức giữa cạnh và góc để tính cạnh và góc trong tam giác.**

**Bài tập 29:** Giải tam giác vuông ABC vuông ở A, biết:

1. a = 50cm;  ;
2. b = 21cm;  ;
3. c = 25cm;  .

**Bài tập 30:** Tam giác ABC có , , đường cao AH = 5cm. Tính các cạnh của tam giác.

**Bài tập 31:** Tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Biết HB = 12,5cm, HC = 32cm và . Tính AB, AC.

**Bài tập 32:** Cho tam giác ABC, hai đường cao BH, CK. Chứng minh rằng nếu AB > AC thì BH > CK.

**Bài tập 33:** Cho tam giác ABC có các cạnh dài 6cm, 7cm và 7cm. Tính các góc của tam giác này.

**Bài tập 34:** Tam giác ABC có AB = 16cm, AC = 14cm và .

1. Tính BC ;
2. Tính SABC.

**Bài tập 35:** Một hình bình hành có hai cạnh là 15cm và 18cm và góc tạo bởi hai cạnh đó bằng 1350. Tính diện tích của hình bình hành ấy.

**Bài tập 36:** Cho hình bình hành ABCD có , AB = BD = 18cm.

1. Tính AD.
2. Tính SABCD.

**DẠNG 6: Dựa vào hệ thức giữa cạnh và góc để làm các bài toán chứng minh.**

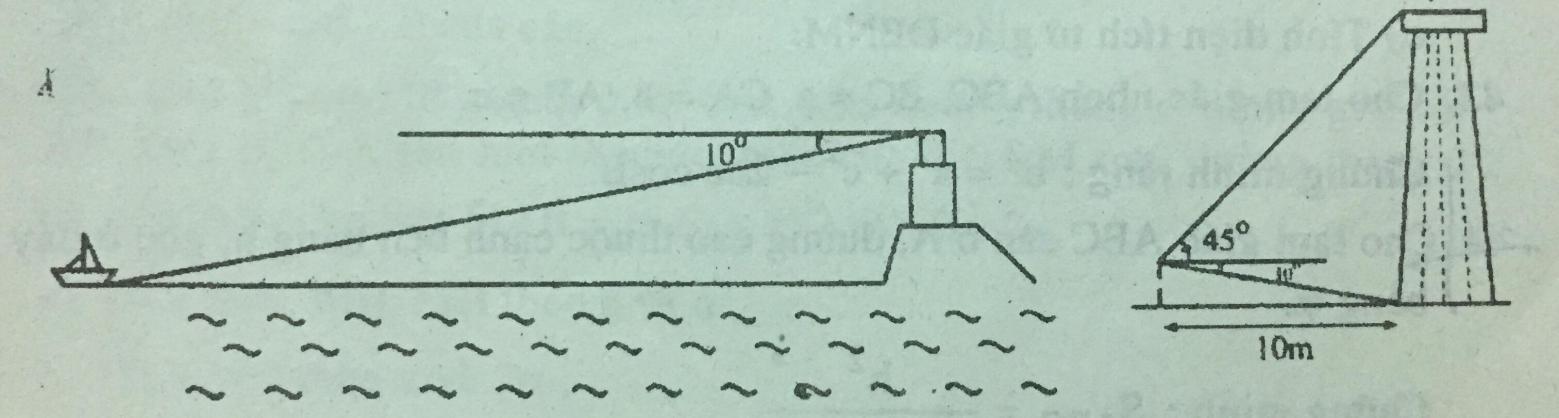
**Bài tập 37:** Cho tam giac ABC vuông ở A, đường cao AH. Đặt BC = a, CA = b và AB = c.

1. Chứng minh AH = asinBcosB ; BH = acos2B , CH = asin2B ;
2. Từ đó suy ra AB2 = BC . BH và AH2 = BH . HC.

**Bài tập 38:** Một khúc sông rộng khoảng 240m. Một chiếc đò chèo qua sông bị dòng nước đẩy phải chèo khoảng 300m mới tới bờ bên kia. Hỏi dòng nước đã đẩy chiếc đò đi một góc bằng bao nhiêu?

**Bài tập 39:** Một đài quan sát hải đăng cao 150m so với mặt nước biển, nhìn một chiếc tàu ở xa với góc α = 100. Hỏi khoảng cách từ tàu đến chân hải đăng là bao nhiêu mét?

**Bài tập 40:** Một người quan sát đứng cách một chiếc tháp 10m, nhìn thấy chiếc tháp dưới góc 550, được phân tích như hình bên. Tính chiều cao của tháp.



**D – Hướng dẫn – trả lời – đáp số:**

**Bài tập 1:**

|  |  |
| --- | --- |
| ΔABH ~ ΔCAH (g – g), ta có:  hay ,  Suy ra CH =  = 98 (cm).  Mặt khác BH . CH = AH2, do đó:  BH =  = 18 (cm). | A  42  H  B  C |

**Bài tập 2:**

|  |  |
| --- | --- |
| Giả sử tam giác ABC vuông tại A, có AB : AC = 5 : 6 và BC = 122cm.  Vì AB : AC = 5 : 6 nên ;  Suy ra AB = 5k, AC = 6k.  Tam giác ABC vuông ở A, theo định lý Py-ta-go, ta có:  AB2 + AC2 = BC2 hay | A  B  H  C |

(5k)2 + (6k)2 = 1222, suy ra 61k2 = 1222, do đó k2 = 244, suy ra k ≈ 15,62

Vậy AB ≈ 15,62 . 5 = 78,1 (cm)

AC ≈ 15,62 . 6 = 93,72 (cm).

Kẻ AH ⊥ BC. Theo hệ thức lượng về cạnh góc vuông với hình chiếu của nó trên cạnh huyền, ta có:

AB2 = BH . BC, suy ra BH =  ≈ 50 (cm)

AC2 = HC . BC, suy ra HC =  ≈ 72 (cm)

Vậy: Độ dài hình chiếu của các cạnh góc vuông trên cạnh huyền là:

BH ≈ 50cm; HC = 72cm.

**Bài tập 3:**

BH : CH = 9 : 16 nên , suy ra BH = 9k, CH = 16k.

Mặt khác BH . CH = AH2, do đó 9k . 16k = 482 hay (12k)2 = 482 nên k = 4.

Từ đó ta có BH = 36cm, HC = 64cm và BC = 100cm.

Tam giác AHB vuông ở H, ta có:

 = 60 (cm).

Tam giác AHC vuông ở H, ta có:

 = 80 (cm).

**Bài tập 4:** Giả sử tam giác ABC vuông ở A với đường cao AH trung tuyến AM và AH : AM = 40 : 41. Do đó nếu AH = 40a thì AM = 41a.

Tam giác AHM vuông ở H, ta có:

HM2 = AM2 – AH2 = (41a)2 – (40a)2 = 81a2, suy ra HM = 9a.

Từ đó CH = CM + MH = MA + MH = 50a.

ΔAHB ~ ΔCHA (g – g) nên:

|  |  |
| --- | --- |
| ,  suy ra . Do đó:  .  Suy ra: AB2 = 16, do đó AB = 4 (cm).  AC2 = 25, do đó AC = 5 (cm). | A  H  B  M  C |

**Bài tập 5:**

|  |  |
| --- | --- |
| Tam giác ABC vuông ở A:  BC2 = AB2 + AC2 = 62 + 82 = 100,  suy ra BC = 10 (cm).  BD là phân giác của góc ABC, ta có:    suy ra  hay  hay  do đó AD =  = 3 (cm). | E  A  D  C  B |

BD và BE theo thứ tự là phân giác trong và phân giác ngoài của góc B nên BD ⊥ BE.

Tam giác BDE vuông ở B, có BA ⊥ DE nên:

BA2 = AD . AE suy ra AE =  = 12 (cm).

Mặt khác với tam giác vuông BDE, ta lại có:

BD2 = AD . DE = 3 . 15 = 45, suy ra BD =  (cm).

BE2 = EA . ED = 12 . 15 = 180, suy ra BE =  (cm).

**Bài tập 6:** Đặt BC = a, CA = b, AB = c, BH = c’ và HC = b’

A

H

B

D

C

c

b

c’

b’

|  |  |
| --- | --- |
| Ta có: b2 = ab’ , c2 = ac’  suy ra  (1)  AD là phân giác của góc A nên:  (2) |  |

Từ (1) và (2) suy ra 

Do đó 

Suy ra b’ =  = 76,16 ; c’ =  = 42,84.

Vậy BH = 42,84cm, HC = 76,16cm.

**Bài tập 7:**

|  |  |
| --- | --- |
| Tam giác AB1C vuông ở B1, có B1D ⊥ AC  nên: AB12 = AD . AC (1)  Tam giác AC1B vuông ở C1, có C1E ⊥ AB  nên: AC12 = AE . AB (2)  Mặt khác ΔABD ~ ΔACE (g – g), ta có  hay AB . AE = AD . AC (3) | **Capture3.PNG**  B1  C1 |

Từ (1), (2) và (3) suy ra AB12 = AC12 suy ra AB1 = AC1

Vậy tam giác AB1C1 là tam giác cân tại A.

**Bài tập 8:** Giả sử tam giác vuông có cạnh huyền là a, hai cạnh góc vuông là b và c.

Giả sử a lớn hơn b là 9cm. Theo đề bài ta có:

a – b = 9 (1)

b + c – a = 6 (2)

b2 + c2 = a2 (3)

Từ (1) và (2) ta có c = 15.

Thay c = 15, b = a – 9 vào (3), ta được:

(a – 9)2 + 152 = a2 ⇔ a2 – 18a + 81 + 225 = a2

⇔ –18a + 306 = 0

⇔ a = 17.

Suy ra b = 17 – 9 = 8. Vậy a = 17cm, b = 8cm và c = 15cm.

A

B

D

C

F

I

E

**DẠNG 2: Dựa vào các hệ thức đã học để làm các bài toán chứng minh.**

**Bài tập 9:**

|  |  |
| --- | --- |
| a) ΔAID = ΔCFD (g.c.g) nên DI = DF. Vậy tam giác DIF là tam giác vuông cân ở D.  b) Tam giác EDF vuông ở D, có DC ⊥ EF  suy ra , mà DF = DI  do đó  không đổi. |  |

**Bài tập 10:**

|  |  |
| --- | --- |
| Capture4.PNG  b | Capture5.PNG  c’ |

Xét hai trường hợp: H nằm giữa A và C; H nằm trên tia đối của tia CA.

Cả hai trường hợp ta đều có:

HC2 = (AC – AH) 2 = (AH – AC) 2 = (b – HA) 2

Do đó:

BC2 = BH2 + HC2

= (AB2 – AH2) + (b – AH)2

Hay a2 = c2 – AH2 + b2 – 2.b.AH + AH2

= b2 + c2 – 2bc’.

**Bài tập 11:** Kẻ AH ⊥ BC.

Tam giác vuông AHB có  nên , suy ra BH =  AB.

|  |  |
| --- | --- |
| Trong tam giác ABC cạnh AC đối diện với góc nhọn nên theo bài 10, ta có:  AC2 = AB2 + BC2 – 2BC.BH (1)  Do BC – AB = 7 nên BC = 7 + AB.  Thay BC = 7 + AB và BH =  AB vào (1) ta được:  AB2 + 7AB – 120 = 0.  ⇔ (AB – 8)(AB + 15) = 0. | A  B  H  C  600 |

Vì AB + 15 > 0 nên AB – 8 = 0 ⇔ AB = 8, suy ra BC = 15.

Vậy AB = 8cm, BC = 15cm.

**Bài tập 12:**

|  |  |
| --- | --- |
| Ta có:  a2 = BH2 + HC2  = (c2 – HA2) + (b + HA)2  = c2 – c’2 + (b + c’)2  = c2 – c’2 + b2 + 2bc’ + c’2  = b2 + c2 + 2bc’ | Capture6.PNG  c’ |

**Bài tập 13:** Đặt AB = BC = x, BD = y.



|  |  |
| --- | --- |
| Trong tam giác ABD cạnh AB đối diện với góc tù nên theo bài 12, ta có:  AB2 = AD2 + BD2 + 2AD.DH (1)  Vì DH = HA – DA = AC – AD = 5,5 – 3 = 2,5.  Thay vào (1) ta được:  AB2 = AD2 + BD2 + 5AD,  Hay x2 = 32 + y2 + 15 (2) | Capture2.PNG |

Trong tam giác BCD cạnh BC đối diện với góc nhọn nên theo bài 10, ta có:

BC2 = BD2 + DC2 – 2DH.DC = BD2 + DC2 – BD.DC (vì DH = BD)

Hay x2 = 82 + y2 – 8y (3)

Từ (2) và (3) suy ra:

32 + y2 + 15 = 82 + y2 – 8y.

Từ đó tìm được y = 5, suy ra x = 7.

Vậy AB = 7 dm.

**DẠNG 3: Tính góc dựa vào tỉ số lượng giác.**

**Bài tập 14:**

Xét tam giác ABC vuông ở A, có .

Cách 1:

Vì ,

C

A

B

α

suy ra , do đó AB = 5k, BC = 15k.

Tam giác ABC vuông ở A, ta có:

AC2 = BC2 – AB2 = (13k) 2 – (5k) 2 = 144k,

Suy ra AC = 12k.

Vậy: 





Cách 2:

Vì , nên 

Do đó 





**Bài tập 15:**

Tương tự bài 14.

Đáp số: sinα = 0,28 ; cosα = 0,96 ; cotα ≈ 3,4286.

**Bài tập 16:**

 ⇒ cosC = sinB = .

.

tanC = .

**Bài tập 17:**

Vẽ đường cao AH. Do AM = AC nên CH = HM = . Do đó



**DẠNG 4: Sử dụng các tỉ số lượng góc đã học để làm các bài toán chứng minh.**

**Bài tập 18:**

Kẻ AH ⊥ BC.

Đặt AH = h. Xét hai tam giác vuông AHB và AHC, ta có:

|  |  |
| --- | --- |
| ;  Do đó ,  Suy ra  Tương tự  Vậy | Capture3.PNG |
| **Bài tập 19:**  Xét các tam giác vuông ADB và AEC,  ta có:  cosA = , cosA =  Suy ra =  Vậy ΔADE ~ ΔABC (c.g.c) | Capture4.PNG |

**Bài tập 20:**

a) A = 

= 

=



= 1 + 1 + 1 + 1 = 4 (vì ) (ví dụ 6)

b) B = 

= 

= 1 + 1 + 1 – 3 = 0.

**Bài tập 21:**

|  |  |
| --- | --- |
| a) Cách 1:  A =  =  =  =  (vì ) | Cách 2:  A =  = |

b) Biến đổi thành:

B = . Đáp số: B ≈ 2,78

**Bài tập 22:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Gọi α là góc tạo bởi hai đường thẳng AB và AC của tam giác ABC. Kẻ BH ⊥ AC, ta có:    Suy ra BH = AB . sinα | α  B  A  H  C | A  C  H  B  α |

Vậy 

**Bài tập 23:** Theo bài 22, ta có:





A

B

D

C

c

b

|  |  |
| --- | --- |
| Vậy    Mặt khác cũng theo bài 22 thì: |  |

Suy ra 

Do đó AD = 

**Bài tập 24:**

a) A = 2, không phụ thuộc vào α.

b) Đặt a = , b =  thì:

B = a3 + b3 + 3ab

= (a + b)3 – 3ab(a + b – 1)

= 13 – 3ab(1 – 1) = 1

**Bài tập 25:**

a) Theo bài 18, ta có:



|  |  |
| --- | --- |
| Suy ra  Hay 2a sinA = a(sinB + sinC), do đó  2sinA = sinB + sinC  b) Trên hình bên, ta có:  , ,  Khi đó từ câu a), ta suy ra:  (\*) | A  c  H  b  c  B  a  hb  hc  K |

Mặt khác  nên c = . Thay kết quả này vào (\*),

ta được: 

hay 

**Bài tập 26:** Gọi Ax là tia phân giác của góc BAC, kẻ BM ⊥ Ax, CN ⊥ Ax.

Từ hai tam giác vuông AMB và ANC, ta có:

,

|  |  |
| --- | --- |
| suy ra BM =  ,  suy ra CN =  Do đó: BM + CN =  Mặt khác, ta luôn có:  BM + CN ≤ BD + DC = BC = a,  vì thế  (vì )  Do  nên .  Suy ra | Capture5.PNG |

**Bài tập 27:**

|  |  |
| --- | --- |
| Gọi G là giao điểm của BN và CM, tia AG cắt BC ở D thì D là trung điểm của BC, ta có BC = 2GD, AD = 3GD.  Trong hai tam giác vuông AHB và AHC thì:  ;  Do đó  = | Capture7.PNG |

**Bài tập 28:**

|  |  |
| --- | --- |
| Trong các tam giác vuông AHC, ABC và AHM ta lần lượt có:  (1)  (2)  (3) | **Capture8.PNG**  a  2α  α |

Từ (1) và (2) suy ra 2sinα cosα =  (4)

Từ (3) và (4), ta có: 2sinα cosα = sin2α.

**DẠNG 5: Vận dụng hệ thức giữa cạnh và góc để tính cạnh và góc trong tam giác.**

**Bài tập 29:**

1. 

c = asinC = a . sin400 ≈ 50 . 0,6428 ≈ 32,14 (cm).

b = asinC = a . sin500 ≈ 50 . 0,7660 ≈ 38,30 (cm).

1. 

c = btanC = 21 . tan410 ≈ 21 . 0,8693 ≈ 18,26 (cm).

.

1. 

b = ctanB = 25 . tan320 ≈ 25 . 0,6249 ≈ 15,62 (cm).

.

**Bài tập 30:**

|  |  |
| --- | --- |
| Tam giác AHB vuông ở H.  AH = AB.sinB  nên AB =  ≈ 5,32 (cm).  Tam giác AHC vuông ở H.  AH = AC.sinC | Capture9.PNG |

nên AC = 

Ta lại có:

BH = AH . cotB = AH . cot700 ≈ 5 . 0,3640 ≈ 1,82 (cm)

CH = AH . cotC = AH . cot350 ≈ 5 . 1,4281 ≈ 7,14 (cm)

Vậy BC = BH + CH ≈ 1,82 + 7,14 = 8,96 (cm).

**Bài tập 31:**

Ta có:

AH2 = BH . HC = 12,5 . 32 ≈ 400, suy ra AH = 20 (cm).

AB = BC . cosB = (12,5 + 32) . cos650 ≈ 44,5 . 0,42260 ≈ 18,81 (cm).

AC = BC . sinC = (12,5 + 32) . sin650 ≈ 44,5 . 0,9063 ≈ 40,33 (cm).

**Bài tập 32:**

|  |  |
| --- | --- |
| Giả sử AB > AC. Trong tam giác vuông AHB, ta có:  BH = AB.sinA (1)  Trong tam giác vuông AKC, ta có:  CK = AC.sinA (2)  Từ (1) và (2) suy ra:    (vì sinA > 0 và AB > AC), do đó BH > CK. | Capture10.PNG |

**Bài tập 33:** Giả sử tam giác ABC cân ở A, thế thì AB = AC = 7cm, còn BC = 6cm.

|  |  |
| --- | --- |
| Kẻ AH ⊥ BC thì HB = HC = 3cm.  Tam giác AHB vuông ở H, ta có:  BH = AB . cosB, suy ra:  cosB = , do đó  , suy ra  Vậy | Capture11.PNG |

**Bài tập 34:**

a) Trong tam giác vuông AHB, ta có:

BH = AB . cosB = 16 . cos600 = 16 . 0,5 = 8 (cm).

Trong hai tam giác vuông AHB và AHC, theo định lý Py-ta-go, ta có:

|  |  |
| --- | --- |
| AH2 = AB2 – HB2  AH2 = AC2 – HC2  Suy ra AB2 – HB2 – AC2 – HC2  Hay 162 – 82 = 142 – HC2,  Do đó HC2 = 4 nên HC = 2 (cm)  Vậy BC = BH + HC = 8 + 2 = 10 (cm).  b) Cách 1:    ≈ 80 . 0,8660 ≈ 69,28 (cm2)  Cách 2: Trong tam giác vuông AHB, ta có:  AH = AB . sinB = 16.sin600  = 80 . sin600 ≈ 80 . 0,8660 ≈ 69,28 (cm2). | Capture12.PNG |

**Bài tập 35:**

Giả sử hình bình hành ABCD có AB = 15cm, AD = 18cm và .

|  |  |
| --- | --- |
| Khi đó CD = 15cm  và    =  ≈  ≈ 95,46 (cm2) | B  C  A  D  15  18  1350 |



**Bài tập 36:**

|  |  |
| --- | --- |
| a) BA = BD nên tam giác ABD cân ở B. Kẻ BH ⊥ AD thì H là trung điểm của AD.  Trong tam giác vuông AHB, ta có:  BH = AB . sinA = 18 . sin450  = 18 .  =  (cm) | Capture13.PNG |

AH = AB . cosA = 18 . cos450 = = (cm).

Suy ra AD = 2AH =  (cm)

b)  (cm2).

Có thể tính như sau:



= AB . AD . sin450 =  (cm2)

**DẠNG 6: Dựa vào hệ thức giữa cạnh và góc để làm các bài toán chứng minh.**

**Bài tập 37:**

|  |  |
| --- | --- |
| a) Trong tam giác vuông AHB, ta có:  AH = AB . sinB  BH = AB . cosB  Trong tam giác vuông AHC, ta có:  CH = AC . cosC = AC . sinB.  Trong tam giác vuông ABC, ta có:  AB = BC . cosB = a . cosB  AC = BC . sinB = a . sinB.  Do đó:  AH = asinB . cosB  BH = acosB . cosB = acos2B  CH = asinB . sinB = asin2B. | Capture14.PNG |

b) Từ câu a suy ra:

BC . BH = a . acos2B = (acosB)2 = AB2

BH . HC = acos2b . asin2B = (asinBcosB)2 = AH2

**Bài tập 38:**

Coi hai bờ sông là hai đường thẳng d1 và d2 mà d1 // d2. Giả sử chiếc đò xuất phát từ điểm

|  |  |
| --- | --- |
| A thuộc bờ d1 và đến điểm B thuộc bờ d2, khi đó:  AC = 240m, AB = 300m.  Trong tam giác vuông ACB, ta có:    Từ đó α ≈ 370.  Vậy dòng nước đã đẩy chiếc đò đi một góc ≈ 370. | B  A  C  d2  d1  240  300  α |

**Bài tập 39:** Gọi chiều cao của hải đăng là h, khoảng cách từ tàu đến chân hải đăng là *l*.

|  |  |
| --- | --- |
| Ta có:  h = *l* . tanα,  suy ra *l* =  Vậy khoảng cách từ tàu đến chân đài quan sát gần bằng 851m. | h  *l*  α  α |

**Bài tập 40:**

|  |  |
| --- | --- |
| Trong tam giác vuông AHB, ta có:  BH = AH . tan450.  Trong tam giác vuông AHC, ta có:  HC = AH . tan100.  Vậy BC = BH + HC = AH (tan450 + tan100)  ≈ 10(1 + 0,1763) ≈ 12 (m)  Vậy chiều cao của tháp gần bằng 12m. | Capture15.PNG  100 |