ĐẲNG THỨC, SO SÁNH VÀ BẤT ĐẲNG THỨC

Câu lạc bộ Toán học:

Chương trình bồi dưỡng chuyên đề Toán

HỘI TOÁN HỌC HÀ NỘI VÀ SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

Hà Nội, Ngày 11.12.2009

Vào 13h30 thứ Sáu, Ngày 11.12.2009, Hội Toán học Hà Nội và Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội phối hợp tổ chức chương trình bồi dưỡng kiến thức chuyên đề Toán cho các cán bộ chỉ đạo chuyên môn, các thầy giáo, cô giáo đang trực tiếp bồi dưỡng học sinh giỏi trên địa bàn Thủ đô.

Chuyên đề sinh hoạt lần này về

Đẳng thức và bất đẳng thức

.

Chuyên đề do GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu,
Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội, trực tiếp giảng dạy.

Kính mời các thầy giáo, cô giáo đang trực tiếp bồi dưỡng học sinh giỏi của các quận huyện trên địa bàn Thủ đô quan tâm đến dự.

Địa điểm: Phòng Giáo Dục Huyện Thạch Thất.

Mục lục

Chương 1

Tam thức bậc hai và các vấn đề liên quan

Bất đẳng thức cơ bản và cũng là quan trọng nhất trong chương trình đại số bậc trung học phổ thông chính là bất đẳng thức dạng sau đây

$$\boldsymbol{x^2 \geqslant 0, \forall x \in \mathbb{R}.} \tag{1.1}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 0$.

Gắn với bất đẳng thức (1.1) là bất đẳng thức dạng sau

$$(x_1 - x_2)^2 \geqslant 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

hay

$$x_1^2 + x_2^2 \geqslant 2x_1x_2, \ \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$.

Bất đẳng thức (1.1) là dạng bậc hai đơn giản nhất của bất đẳng thức bậc hai mà học sinh đã làm quen ngay từ chương trình lớp 9. Định lí Viete đóng vai trò rất quan trọng trong việc tính toán và ước lượng giá trị của một số biểu thức dạng đối xứng theo các nghiệm của phương trình bậc hai tương ứng. Đặc biệt, trong chương trình Đại số lớp 10, mảng bài tập về ứng dụng định lí (thuận và đảo) về dấu của tam thức bậc hai là công cụ hữu hiệu của nhiều dạng toán ở bậc trung học phổ thông.

Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c, \ a \neq 0$. Khi đó

$$af(x) = \Big(ax + \frac{b}{2}\Big)^2 - \frac{\Delta}{4},$$

với $\Delta = b^2 - 4ac$. Từ đẳng thức này, ta có kết quả quen thuộc sau.

Định lý 1. *Xét tam thức bậc hai* $f(x) = ax^2 + bx + c, \ a \neq 0$.

i) Nếu $\Delta < 0$ *thì* $af(x) > 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Nếu $\Delta = 0$ *thì* $af(x) \geqslant 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. *Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* $x = -\dfrac{b}{2a}$.

iii) Nếu $\Delta > 0$ *thì* $af(x) = a^2(x - x_1)(x - x_2)$ *với*

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}. \tag{1.2}$$

Trong trường hợp này, $af(x) < 0$ *khi* $x \in (x_1, x_2)$ *và* $af(x) > 0$ *khi* $x < x_1$ *hoặc* $x > x_2$.

Ta nhắc lại kết quả sau.

Định lý 2 (Định lí đảo)**.** *Điều kiện cần và đủ để tồn tại số α sao cho $af(\alpha) < 0$ là $\Delta > 0$ và $x_1 < \alpha < x_2$, trong đó $x_{1,2}$ là các nghiệm của $f(x)$ xác định theo* (1.2).

Nhận xét rằng, các định lí trên đều được mô tả thông qua bất đẳng thức (kết quả so sánh biệt thức Δ với 0). Các định lí sau đây cho ta tiêu chuẩn nhận biết, thông qua biểu diễn hệ số, khi nào thì tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, có nghiệm.

Định lý 3. *Với mọi tam thức bậc hai $f(x)$ có nghiệm thực đều tồn tại một nguyên hàm $F(x)$, là đa thức bậc ba, có ba nghiệm đều thực.*

Chứng minh. Khi $f(x)$ có nghiệm kép, tức $f(x) = a(x - x_0)^2$, thì ta chỉ cần chọn nguyên hàm dưới dạng
$$F(x) = \frac{a}{3}(x - x_0)^3.$$
Khi $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt, tức
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),\ \ x_1 < x_2,\ \ a \neq 0,$$
ta chọn nguyên hàm $F(x)$ thoả mãn điều kiện
$$F\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) = 0.$$
Khi đó, rõ ràng hàm $F(x)$ có cực đại và cực tiểu lần lượt tại x_1 và x_2 và điểm uốn của đồ thị tương ứng là $M\Big(\frac{x_1+x_2}{2}, 0\Big)$. Từ đây suy ra điều cần chứng minh. □

Định lý 4. *Tam thức bậc hai $f(x) = 3x^2 + 2bx + c$ có nghiệm (thực) khi và chỉ khi các hệ số b, c có dạng*
$$\begin{cases} b = \alpha + \beta + \gamma \\ c = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \end{cases} \tag{1.3}$$

Chứng minh. Điều kiện đủ là hiển nhiên vì theo bất đẳng thức Cauchy, ta có
$$\begin{aligned}\Delta' =& b^2 - 3c = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 3(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\\ =& \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)\\ =& \frac{1}{2}(\alpha - \beta)^2 + \frac{1}{2}(\beta - \gamma)^2 + \frac{1}{2}(\gamma - \alpha)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

Điều kiện cần. Giả sử phương trình bậc hai có nghiệm thực x_1, x_2. Khi đó, tồn tại đa thức bậc ba có ba nghiệm thực, là nguyên hàm của $f(x)$, tức là:
$$F(x) = (x + \alpha)(x + \beta)(x + \gamma).$$
Từ đây ta suy ra điều cần chứng minh. □

Tiếp theo, trong chương này, ta xét các dạng toán cơ bản về bất đẳng thức và cực trị có sử dụng tính chất của tam thức bậc hai.

Xét đa thức thuần nhất bậc hai hai biến (xem như tam thức bậc hai đối với x)
$$\begin{aligned}F(x, y) &= ax^2 + bxy + cy^2,\ \ a \neq 0,\\ \Delta :&= (b^2 - 4ac)y^2.\end{aligned}$$

Khi đó, nếu $\Delta \leqslant 0$ thì $aF(x,y) \geqslant 0,\ \forall x,y \in \mathbb{R}$.

Vậy khi $b^2 \leqslant 4ac$ và $a < 0$ thì hiển nhiên

$$ax^2 + cy^2 \geqslant |bxy|,\ \ \forall x,y \in \mathbb{R}.$$

Trường hợp riêng, khi $a = c = 1$, $b = \pm 2$ thì ta nhận lại được kết quả

$$x^2 + y^2 \geqslant 2|xy|$$

hay

$$\frac{u+v}{2} \geqslant \sqrt{uv},\ u,v \geqslant 0.$$

Về sau, ta sử dụng các tính chất của dạng phân thức bậc hai

$$y = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$$

với điều kiện

$$a_2 > 0,\ f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

để tìm cực trị của một số dạng toán bậc hai.

Bài toán 1. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$y = \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2}$$

với điều kiện

$$a_2 > 0,\ f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2 > 0,\ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Giải. Nhận xét rằng khi $x = 0$ thì $y(0) = \dfrac{c_1}{c_2}$ và khi $x \to \infty$ thì $y \to \dfrac{a_1}{a_2}$. Tiếp theo, ta xét các giá trị $y \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ và $y \neq \dfrac{a_1}{a_2}$.

Giả sử y là một giá trị của biểu thức, $y \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ và $y \neq \dfrac{a_1}{a_2}$. Khi đó phương trình tương ứng

$$\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} = y$$

phải có nghiệm, hay phương trình

$$(a_2y - a_1)x^2 + (b_2y - b_1)x + (c_2y - c_1) = 0 \tag{1.4}$$

phải có nghiệm.

Do (1.4) là phương trình bậc hai nên điều này tương đương với

$$\Delta = (b_2y - b_1)^2 - 4(a_2y - a_1)(c_2y - c_1) \geqslant 0$$

hay

$$g(y) := (b_2^2 - 4a_2c_2)y^2 + 2(b_1b_2 + 2a_2c_1 + 2a_1c_2)y + b_1^2 - 4a_1c_1 \geqslant 0$$

phải có nghiệm. Vì $g(y)$ có $b_2^2 - 4a_2c_2 < 0$ nên theo Định lí đảo của tam thức bậc hai, thì

$$\Delta' = (b_1b_2 + 2a_1c_2 + a_2c_1)^2 - (4a_1c_1 - b_1^2)(4a_2c_2 - b_2^2) \geqslant 0. \tag{1.5}$$

và

$$y_1 \leqslant y \leqslant y_2,$$

với
$$y_{1,2} = \frac{b_1b_2 + 2a_2c_1 + 2a_1c_2 \pm \sqrt{\Delta'}}{b_2^2 - 4a_2c_2},$$
và Δ' được tính theo công thức (1.5).

Suy ra $\max y = y_2$ và $\min y = y_1$, đạt được khi ứng với mỗi j $(j = 1, 2)$, xảy ra đồng thời
$$\begin{cases} \Delta = (b_2y_j - b_1)^2 - 4(a_2y_j - a_1)(c_2y_j - c_1) = 0, \\ x_j = -\dfrac{1}{2}\dfrac{b_2y_j - b_1}{a_2y_j - a_1}. \end{cases}$$

Xét một vài ví dụ minh hoạ sau đây.

Ví dụ 1. *Cho x, y là các số thực sao cho*
$$2x^2 + y^2 + xy \geqslant 1.$$
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$M = x^2 + y^2.$$

Giải. Đặt $2x^2 + y^2 + xy = a$, $a \geqslant 1$. Khi đó
$$\frac{M}{a} = \frac{x^2 + y^2}{2x^2 + y^2 + xy}$$

1) Nếu $y = 0$ thì $\dfrac{M}{a} = \dfrac{1}{2}$.

2) Nếu $y \neq 0$ suy ra
$$\frac{M}{a} = \frac{t^2 + 1}{2t^2 + t + 1}, \quad t = \frac{x}{y}$$
Ta chỉ cần xác định các giá trị $\dfrac{M}{a} < \dfrac{1}{2}$, sao cho phương trình
$$\frac{M}{a} = \frac{t^2 + 1}{2t^2 + t + 1}$$
có nghiệm.

Nghĩa là phương trình
$$\Big(2\frac{M}{a} - 1\Big)t^2 + \frac{M}{a}t + \frac{M}{a} - 1 = 0$$
có nghiệm. Thế thì biệt thức Δ phải không âm. Ta có
$$\Delta = \Big(\frac{M}{a}\Big)^2 - 4\Big(2\frac{M}{a} - 1\Big)\Big(\frac{M}{a} - 1\Big) \geqslant 0$$
hay
$$-7\Big(\frac{M}{a}\Big)^2 + 12\Big(\frac{M}{a}\Big) - 4 \geqslant 0.$$
Giải bất phương trình bậc hai này ta được
$$\frac{6 - 2\sqrt{2}}{7} \leqslant \frac{M}{a} \leqslant \frac{6 + 2\sqrt{2}}{7}.$$

Suy ra
$$M \geqslant \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7}a \geqslant \frac{6 - 2\sqrt{2}}{7} = M_0.$$

Vậy $\min M = \dfrac{6-2\sqrt{2}}{7}$, đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = M_1 y \\ 2x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = M_1 y \\ y = \pm \dfrac{\sqrt{2}(1-2M_0)}{\sqrt{2-7M_0+7M_0^2}}, \end{cases}$$

với $M_1 = \dfrac{-M_0}{2(2M_0-1)}$.

Ví dụ 2. *Cho*

$$x^2 + y^2 + xy = 1.$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$A = x^2 - xy + 2y^2.$$

Giải. Ta có thể viết A dưới dạng

$$A = \frac{x^2 - xy + 2y^2}{x^2 + xy + y^2}.$$

1) Nếu $y = 0$ thì $A = 1$.
2) Nếu $y \neq 0$ thì

$$A = \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + t + 1}, \quad t = \frac{x}{y}$$

Cần xác định A để phương trình

$$A = \frac{t^2 - t + 2}{t^2 + t + 1}$$

có nghiệm. Điều đó tương đương với việc phương trình

$$(A-1)t^2 + (A+1)t + A - 2 = 0$$

có nghiệm, tức là

$$\Delta = (A+1)^2 - 4(A-1)(A-2) \geqslant 0.$$

Từ đó, ta được

$$\frac{7-2\sqrt{7}}{3} \leqslant A \leqslant \frac{7+2\sqrt{7}}{3}$$

Vậy $\max A = \dfrac{7+2\sqrt{7}}{3}$, đạt được khi

$$\begin{cases} x = \dfrac{A_2+1}{2(1-A_2)} y \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = \dfrac{A_2+1}{2(1-A_2)} y \\ y = \pm \dfrac{2(A_2-1)}{\sqrt{7-6A_2+3A_2^2}} \end{cases}$$

và $\min A = \dfrac{7-2\sqrt{7}}{3}$, đạt được khi

$$\begin{cases} x = \dfrac{A_1+1}{2(1-A_1)} y \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = \dfrac{A_1+1}{2(1-A_1)} y \\ y = \pm \dfrac{2(A_1-1)}{\sqrt{7-6A_1+3A_1^2}} \end{cases}$$

trong đó A_1, A_2 lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất.

Ví dụ 3. *Cho* $x^2 + y^2 - xy = 1$. *Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức*

$$M = x^4 + y^4 - x^2y^2.$$

Giải. Từ giả thiết suy ra

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 + y^2 - xy \geqslant 2xy - xy = xy \\ 1 &= (x+y)^2 - 3xy \geqslant -3xy \end{aligned}$$

Từ đó ta có $-\frac{1}{3} \leqslant xy \leqslant 1$. Mặt khác, từ giả thiết ta có $x^2 + y^2 = 1 + xy$ nên

$$x^4 + y^4 = -x^2y^2 + 2xy + 1$$
$$x^4 + y^4 - x^2y^2 = -2t^2 + 2t + 1, \ \ t = xy$$

Vậy cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của tam thức bậc hai

$$f(t) = -2t^2 + 2t + 1; \ \ -\frac{1}{3} \leqslant t \leqslant 1.$$

Ta có

$$\max M = f\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{3}{2},$$

đạt được khi và chỉ khi

$$xy = \frac{1}{2}, \text{ và } x^2 + y^2 - xy = 1$$

hay là

$$(x, y) \in \left\{ \Big(\frac{\sqrt{5} \mp 1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2\sqrt{2}}\Big), \Big(-\frac{\sqrt{5} \mp 1}{2\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2\sqrt{2}}\Big) \right\}$$

Vậy nên

$$\min M = f\Big(-\frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{9},$$

đạt được khi và chỉ khi

$$\begin{cases} xy = -\frac{1}{3} \\ x^2 + y^2 - xy = 1 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \\ y = \mp\frac{\sqrt{3}}{3}. \end{cases}$$

Bài toán 2 (Thi HSG Toán Việt Nam 2003). *Cho hàm số f xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện*

$$f(\cot x) = \sin 2x + \cos 2x, \ \ x \in (0, \pi).$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$g(x) = f(\sin^2 x) f(\cos^2 x).$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} f(\cot x) &= \sin 2x + \cos 2x \\ &= \frac{2\cot x}{\cot^2 x + 1} + \frac{\cot^2 x - 1}{\cot^2 x + 1} \\ &= \frac{\cot^2 x + 2\cot x - 1}{\cot^2 x + 1}, \ \ \forall x \in (0; \pi) \end{aligned}$$

Với mỗi $t \in \mathbb{R}$ đều tồn tại $x \in (0, \pi)$ sao cho $\cot x = t$, ta được

$$f(t) = \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2 + 1}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$g(x) = f(\sin^2 x) f(\cos^2 x) = \frac{\sin^4 2x + 32 \sin^2 2x - 32}{\sin^4 2x - 8 \sin^2 2x + 32}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Đặt $u = \dfrac{1}{4} \sin^2 2x$. Dễ thấy, $x \in \mathbb{R}$ khi và chỉ khi $u \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$. Vì vậy

$$\min_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \min_{0 \leqslant u \leqslant 1/4} h(u) \ \text{ và } \ \max_{x \in \mathbb{R}} g(x) = \max_{0 \leqslant u \leqslant 1/4} h(u),$$

trong đó

$$h(u) = \frac{u^2 + 8u - 2}{u^2 - 2u + 2}.$$

Ta tính dạo hàm của hàm $h(u)$

$$h'(u) = \frac{2(-5u^2 + 4u + 6)}{(u^2 - 2u + 2)^2}.$$

Ta dễ dàng chứng minh được $h'(u) > 0 \ \forall u \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$. Suy ra hàm $h(u)$ đồng biến trên $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$. Vì vậy, trên $\left[0, \dfrac{1}{4}\right]$, ta có

$$\min h(u) = h(0) = -1$$

và

$$\max h(u) = h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{25}.$$

Do đó $\min g(x) = -1$, đạt được chẳng hạn khi $x = 0$ và $\max g(x) = \dfrac{1}{25}$, đạt được chẳng hạn khi $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Bài toán 3 (Thi HSG Toán Việt Nam 2003)**.** *Cho hàm số f xác định trên tập hợp số thực $\mathbb{R}$, lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn điều kiện*

$$f(\cot x) = \sin 2x + \cos 2x, \ \forall x \in (0, \pi).$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(x) f(1 - x)$ trên đoạn $[-1; 1]$.

Ta có

$$\begin{aligned} f(\cot x) &= \sin 2x + \cos 2x \\ &= \frac{2 \cot x}{\cot^2 x + 1} + \frac{\cot^2 x - 1}{\cot^2 x + 1} \\ &= \frac{\cot^2 x + 2 \cot x - 1}{\cot^2 x + 1}, \ \forall x \in (0; \pi) \end{aligned}$$

Từ đó, với lưu ý rằng với mỗi $t \in \mathbb{R}$ đều tồn tại $x \in (0, \pi)$ sao cho $\cot x = t$, ta được

$$f(t) = \frac{t^2 + 2t - 1}{t^2 + 1}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dẫn tới,
$$g(x) = f(x)f(1-x) = \frac{x^2(1-x)^2 + 8x(1-x) - 2}{x^2(1-x)^2 - 2x(1-x) + 2}, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$
Đặt $u = x(1-x)$. Dễ thấy, khi x chạy qua $[-1, 1]$ thì u chạy qua $\Big[-2, \dfrac{1}{4}\Big]$.
Vì vậy,
$$\min_{-1\leqslant x\leqslant 1} g(x) = \min_{-2\leqslant u\leqslant \frac{1}{4}} h(u) \quad \text{và} \quad \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} g(x) = \max_{-2\leqslant u\leqslant \frac{1}{4}} h(u),$$
trong đó
$$h(u) = \frac{u^2 + 8u - 2}{u^2 - 2u + 2}.$$
Ta có
$$h'(u) = \frac{2(-5u^2 + 4u + 6)}{(u^2 - 2u + 2)^2}$$
Từ việc khảo sát dấu của $h'(u)$ trên $[-2; 1/4]$, ta thu được
$$\min_{-2\leqslant u\leqslant \frac{1}{4}} h(u) = h\left(\frac{2-\sqrt{34}}{5}\right) = 4 - \sqrt{34}$$
và
$$\max_{-2\leqslant u\leqslant \frac{1}{4}} h(u) = \max\{h(-2); h(1/4)\} = \frac{1}{25}.$$
Vậy, trên $[-1; 1]$, ta có $\min g(x) = 4 - \sqrt{34}$ và $\max g(x) = \dfrac{1}{25}$.

Bài toán 4 (MO Nga 1999)**.** *Cho hàm số*
$$f(x) = x^2 + ax + b\cos x.$$
Tìm tất cả các giá trị của a, b sao cho phương trình $f(x) = 0$ và $f(f(x)) = 0$ có cùng một tập hợp nghiệm thực (khác rỗng).

Giải. Giả sử r là một nghiệm của $f(x)$. Khi đó $b = f(0) = f(f(x)) = 0$. Do đó $f(x) = x(x+a)$, suy ra hoặc $r = 0$ hoặc $r = -a$.

Vì vậy
$$f(f(x)) = f(x)(f(x) + a) = x(x+a)(x^2 + ax + a).$$
Ta chọn a sao cho $x^2 + ax + a$ không có nghiệm thực nằm giữa 0 và $-a$.

Thật vậy nếu 0 hoặc $-a$ là nghiệm của phương trình $x^2 + ax + a = 0$, thì phải có $a = 0$ và khi đó $f(f(x))$ không có nghiệm nào khác.

Nói cách khác, $\Delta = a^2 - 4a < 0$ hay $0 < a < 4$.

Vậy với $0 \leqslant a < 4$ thì hai phương trình đã cho có cùng tập hợp nghiệm $x = 0$, $x = -a$.

Bài toán 5. *Cho tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ thoả mãn điều kiện*
$$|f(-1)| \leqslant 1, \ |f(0)| \leqslant 1, \ |f(1)| \leqslant 1.$$
Tìm giá trị lớn nhất của $|f(x)|$ với $x \in [-1; 1]$.

Giải. Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \Big[\frac{f(1)+f(-1)}{2} - f(0)\Big]x^2 + \Big[\frac{f(1)-f(-1)}{2}\Big]x + f(0) \\ &= \frac{f(1)}{2}(x^2+x) + \frac{f(-1)}{2}(x^2-x) + f(0)(1-x^2) \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(x) &\leqslant \frac{1}{2}|x^2+x| + \frac{1}{2}|x^2-x| + |1-x^2| \\ &= \frac{1}{2}(|x^2+x| + |x^2-x|) + |1-x^2| \end{aligned}$$

Vì $x \in [-1;1]$ nên $(x^2+x)(x^2-x) = x^2(x^2-1) \leqslant 0$. Do đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(|x^2+x| + |x^2-x|) + |1-x^2| &= \frac{1}{2}|x^2+x-x^2+x| + 1 - x^2 \\ &= |x| + 1 - x^2 \\ &= -(|x| - \tfrac{1}{2})^2 + \frac{5}{4} \leqslant \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

Suy ra $|f(x)| \leqslant \dfrac{5}{4}$. Vậy $\max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)| = \dfrac{5}{4}$.

Chương 2

Một số đồng nhất thức quan trọng

Trước hết, ta có nhận xét rằng từ một đẳng thức đã cho đối với bộ số thực ta đều có thể mở rộng (theo nhiều cách thức khác nhau) thành một đẳng thức mới cho bộ số phức. Chẳng hạn, ta có thể coi mọi số thực a đã cho như là phần thực của một số phức $z = a + ib$ $(b \in \mathbb{R})$.

Ta nêu một số đồng nhất thức về sau cần sử dụng.

Định lý 5. *Với mọi bộ số (a_j, b_j, u_j, v_j), ta luôn có đẳng thức sau:*

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{n} a_j u_j \sum_{j=1}^{n} b_j v_j - \sum_{j=1}^{n} a_j b_j \sum_{j=1}^{n} u_j v_j \\ &= \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} (a_j b_k - b_j a_k)(u_j v_k - u_k v_j).\end{aligned} \tag{2.1}$$

Nhận xét rằng, từ đồng nhất thức này ta thu được đồng nhất thức Lagrange sau đây đối với bộ số phức.

Định lý 6. *Với mọi bộ số phức (a_j, b_j), ta luôn có đẳng thức sau*

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 - \Big|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\Big| = \sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} |\overline{a_j} b_k - a_k \overline{b_j}|. \tag{2.2}$$

Chứng minh. . Từ đẳng thức (2.1), bằng cách thay a_j bởi $\overline{a_j}$, v_j bởi $\overline{b_j}$ và u_j bởi a_j, ta sẽ thu được (2.2). □

Hệ thức (2.2) cho ta bất đẳng thức Cauchy sau đây đối với bộ số phức.

Hệ quả 1. *Với mọi bộ số phức (a_j, b_j), ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2 \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \geqslant \Big|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\Big|. \tag{2.3}$$

Giả sử ta có bộ các cặp số dương (a_k, b_k) sao cho

$$\frac{a_k}{b_k} \in [\alpha, \beta], \ \ \alpha > 0, \ \ k = 1, 2, \dots, n.$$

Khi đó, theo Định lí đảo của tam thức bậc hai thì

$$\Big(\beta - \frac{a_k}{b_k}\Big)\Big(\frac{a_k}{b_k} - \alpha\Big) \geqslant 0$$

hay

$$a_k^2 + \alpha\beta b_k^2 \leqslant (\alpha+\beta)a_k b_k, \ \ k = 1, 2, \dots, n.$$

Từ đây suy ra

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \alpha\beta \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leqslant (\alpha+\beta)\sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\alpha\beta\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \alpha\beta\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big).$$

Vậy nên

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\alpha\beta\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

Từ đây, ta thu được bất đẳng thức đảo Cauchy.

Định lý 7. *Giả sử ta có bộ các cặp số dương (a_k, b_k) sao cho*

$$\frac{a_k}{b_k} \in [\alpha, \beta], \ \ \alpha > 0, \ \ k = 1, 2, \dots, n.$$

Khi đó

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{A}{G}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

trong đó

$$A = \frac{\alpha+\beta}{2}, \ \ G = \sqrt{\alpha\beta}.$$

Nhìn chung, rất nhiều bất đẳng thức nhận được từ các đồng nhất thức. Vì vậy, việc thiết lập được các đồng nhất thức được coi như một phương pháp hữu hiệu để sáng tác và chứng minh bất đẳng thức.

Bài toán 6. *Chứng minh rằng với mọi bộ ba số (x, y, z), ta luôn có đẳng thức sau*

$$(2x + 2y - z)^2 + (2y + 2z - x)^2 + (2z + 2x - y)^2 = 9(x^2 + y^2 + z^2).$$

Hãy tổng quát hoá?

Bài toán 7. *Chứng minh rằng với mọi bộ bốn số (x, y, z, t), ta luôn có đẳng thức sau*

$$(x+y+z-t)^2 + (y+z+t-x)^2 + (z+t+x-y)^2 + (t+x+y-z)^2 = 4(x^2+y^2+z^2+t^2).$$

Hãy tổng quát hoá?

Bài toán 8. *Chứng minh rằng với mọi bộ số (u_k, v_k, p_k), ta luôn có đẳng thức sau*

$$\sum_{j,k=1}^{n} (u_k v_j + u_j v_k)p_j p_k = 2\Big(\sum_{k=1}^{n} u_k p_k\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} v_k p_k\Big).$$

Bài toán 9. *Chứng minh rằng với mọi bộ số (u_k, v_k, p_k), ta luôn có đẳng thức sau*

$$\sum_{j,k=1}^{n} (u_j v_j + u_k v_k)p_j p_k = 2\Big(\sum_{k=1}^{n} u_k v_k p_k\Big).$$

Chương 3

Bất đẳng thức Cauchy (dạng thực và phức)

3.1 Bất đẳng thức Cauchy

Tiếp theo, thực hiện theo ý tưởng của Cauchy[1] đối với tổng

$$\sum_{i=1}^{n}(x_it-y_i)^2 = t^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2t\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + \sum_{i=1}^{n}y_i^2,$$

ta nhận được tam thức bậc hai dạng

$$f(t) = t^2\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2t\sum_{i=1}^{n}x_iy_i + \sum_{i=1}^{n}y_i^2 \geqslant 0,\ \ \forall t \in \mathbb{R},$$

nên $\Delta \leqslant 0$.

Định lý 8. *Với mọi bộ số (x_i), (y_i), ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\Big). \tag{3.1}$$

Dấu đẳng thức trong (3.1) xảy ra khi và chỉ khi hai bộ số (x_i) và (y_i) tỷ lệ với nhau, tức tồn tại cặp số thực α, β, không đồng thời bằng 0, sao cho

$$\alpha x_i + \beta y_i = 0,\ \ \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Bất đẳng thức (3.1) thường được gọi là bất đẳng thức Cauchy[2] (đôi khi còn gọi là bất đẳng thức Bunhiacovski, Cauchy - Schwarz hoặc Cauchy-Bunhiacovski).

Nhận xét rằng, bất đẳng thức Cauchy cũng có thể được suy trực tiếp từ đồng nhất thức Lagrange sau đây

[1] Augustin-Louis Cauchy 1789-1857

[2] Tại Việt Nam và một số nước Đông Âu, bất đẳng thức này được mang tên là "Bất đẳng thức Bunhiacovski","Bất đẳng thức Cauchy-Bunhiacovski" hoặc "Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz". Còn bất đẳng thức giữa các giá trị trung bình cộng và nhân thì được gọi là bất đẳng thức Cauchy. Thực ra, theo cách gọi của các chuyên gia đầu ngành về bất đẳng thức (Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G., Bellman R.,...), thì bất đẳng thức tích phân dạng (2.1) mới mang tên là bất đẳng thức Bunhiacovski.

Định lý 9 (Lagrange)**.** *Với mọi bộ số* (x_i), (y_i), *ta luôn có đồng nhất thức:*

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 = \sum_{i,j=1,\, i<j}^{n} (x_i y_j - x_j y_i)^2.$$

Tương tự, ta cũng có các đẳng thức dạng sau đây (Bạn đọc dễ dàng tự kiểm chứng trực tiếp).

Bài toán 10. *Với mọi bộ số* (x_i, y_i), *ta luôn có đẳng thức sau*

$$\begin{aligned} &E_2(x+y)E_1(x)E_1(y) - E_1(x+y)E_2(x)E_1(y) - E_1(x+y)E_1(x)E_2(y)\\ =&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big(x_i\sum_{j=1}^{n} y_j - y_i\sum_{j=1}^{n} x_j\Big)^2, \end{aligned}$$

trong đó

$$E_1(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i,\ \ E_2(x) := \sum_{i,j=1, i\neq j}^{n} x_i x_j.$$

Nhận xét rằng, từ đồng nhất thức này ta thu được bất đẳng thức sau đây

Hệ quả 2. *Với mọi bộ số dương* (x_i, y_i), *ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$\frac{E_2(x+y)}{E_1(x+y)} \geqslant \frac{E_2(x)}{E_1(x)} + \frac{E_2(y)}{E_1(y)},$$

trong đó

$$E_1(x) := \sum_{i=1}^{n} x_i,\ \ E_2(x) := \sum_{i,j=1; i\neq j}^{n} x_i x_j.$$

Về sau, ta đặc biệt quan tâm đến trường hợp tương ứng với hai cặp số $(1,1)$ và (a,b). Khi đó bất đẳng thức Cauchy trùng với bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân.

Hệ quả 3. *Với mọi cặp số dương* (a, b), *ta luôn có bất đẳng thức sau*

$$2(a+b) \geqslant (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,$$

hay

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}.$$

3.2 Dạng phức của bất đẳng thức Cauchy

Tiếp theo, ta xét một số mở rộng khác (dạng phức) của bất đẳng thức Cauchy.

Định lý 10 (N.G.de Bruijn)**.** *Với bộ số thực* $a_1, \dots, a_n$ *và bộ số phức (hoặc thực)* $z_1, \dots, z_n$, *ta đều có*

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\Big|^2 \leqslant \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + \Big|\sum_{k=1}^{n} z_k^2\Big|\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_k = \mathrm{Re}\,(\lambda z_k)$ $(k = 1, \dots, n)$, *trong đó* λ *là số phức và* $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^2 z_k^2$ *là số thực không âm.*

Chứng minh. Bằng cách thực hiện đồng thời phép quay quanh gốc toạ độ đối với các z_k cùng một góc, ta thu được

$$\sum_{k=1}^{n} a_k z_k \geqslant 0.$$

Rõ ràng phép quay này không ảnh hưởng đến giá trị của modul các số.

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\Big|, \qquad \Big|\sum_{k=1}^{n} z_k^2\Big|, \qquad |z_k| \quad (k = 1, \dots, n).$$

Vậy, chỉ cần chứng minh cho trường hợp

$$\sum_{k=1}^{n} a_k z_k \geqslant 0.$$

Nếu ta đặt $z_k = x_k + iy_k \quad (k = 1, \dots, n)$, thì

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\Big|^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\Big).$$

Vì

$$2x_k^2 = |z_k|^2 + \mathrm{Re}\ z_k^2,$$

ta nhận được

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k z_k\Big|^2 \leqslant \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\ z_k^2\Big).$$

Từ bất đẳng thức này và

$$\sum_{k=1}^{n} \Re z_k^2 = \Re \sum_{k=1}^{n} z_k^2 \leqslant \Big|\sum_{k=1}^{n} z_k^2\Big|$$

ta thu được điều cần chứng minh. □

Chương 4

Tam thức bậc (α) và tam thức bậc (α, β)

Ta có nhận xét rằng bất đẳng thức Cauchy dưới dạng sơ đẳng

$$x^2 + 1 \geqslant 2x, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

có thể xem như bất đẳng thức tam thức bậc hai trong trường hợp dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Khi đó, ta dễ dàng mở rộng cho tam thức bậc α ($\alpha > 1$) để có bất đẳng thức tương tự như (4.1) bằng cách thay số 2 bởi số α. Thật vậy, ta cần thiết lập bất đẳng thức dạng

$$x^\alpha + (?) \geqslant \alpha x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \tag{4.2}$$

sao cho dấu đẳng thức vẫn xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Thay $x = 1$ vào (4.2), ta nhận được $(?) = \alpha - 1$, tức là (4.2) có dạng

$$x^\alpha + \alpha - 1 \geqslant \alpha x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{4.3}$$

Đây chính là bất đẳng thức Bernoulli quen biết.

Sử dụng đạo hàm, ta dễ dàng chứng minh (4.3).

Thật vậy, xét hàm số

$$f(x) = x^\alpha + \alpha - 1 - \alpha x, \ \ x > 0.$$

Ta có $f(1) = 0$ và $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)$. Suy ra $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi $x = 1$ và $x = 1$ là cực tiểu duy nhất của $f(x)$ trên $\mathbb{R}^+$ nên $f(x) \geqslant f(1) = 0$.

Nhận xét 1. *Trong áp dụng, đặc biệt trong các dạng toán xác định giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất, bất đẳng thức Bernoulli dạng (4.3) chỉ được sử dụng trong các trường hợp đảm bảo chắc chắn rằng dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* $x = 1$.

Trong những trường hợp, nếu dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = x_0 > 0$ *cho trước, ta cần thay (4.3) bởi bất đẳng thức sau đây*

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha + \alpha - 1 \geqslant \alpha \frac{x}{x_0}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{4.4}$$

Tiếp theo, ta lại có nhận xét rằng bất đẳng thức Cauchy dưới dạng sơ đẳng

$$x^2 + 1 \geqslant 2x, \ \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{4.5}$$

có thể xem như bất đẳng thức tam thức bậc (2,1) (ứng với luỹ thừa 2 và luỹ thừa 1 của x), trong trường hợp dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Khi đó, ta dễ dàng mở rộng một cách tự nhiên cho tam thức bậc (α, β) $(\alpha > \beta > 0)$ để có bất đẳng thức tương tự như (1.14) bằng cách thay luỹ thừa 2 bởi số α và luỹ thừa 1 bởi β.

Thật vậy, ta cần thiết lập bất đẳng thức dạng

$$x^\alpha + (?) \geqslant (??)x^\beta, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \tag{4.6}$$

sao cho dấu đẳng thức vẫn xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Sử dụng phép đổi biến $x^\beta = t$ và $\dfrac{\alpha}{\beta} = \gamma$, ta có thể đưa (1.15) về dạng

$$t^\gamma + (?) \geqslant (??)t, \ \ \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{4.7}$$

So sánh với (4.3), ta thấy ngay cần chọn $(?) = \gamma - 1$ và $(??) = \gamma$. Vậy nên

$$t^\gamma + \gamma - 1 \geqslant \gamma t, \ \ \forall t \in \mathbb{R}^+,$$

hay

$$x^\alpha + \frac{\alpha}{\beta} - 1 \geqslant \frac{\alpha}{\beta}x^\beta, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+, \tag{4.8}$$

dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Ta nhận được bất đẳng thức Bernoulli đối với tam thức bậc (α, β) ứng với trường hợp dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Để sử dụng bất đẳng thức Bernoulli cho trường hợp đảm bảo chắc chắn rằng dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = x_0$ $(x_0 > 0)$ cho trước, ta chỉ cần thay (4.8) bởi bất đẳng thức sau đây

Định lý 11. *Giả sử cho trước $x_0 > 0$ và cặp số (α, β) thoả mãn điều kiện $\alpha > \beta > 0$. Khi đó*

$$\Big(\frac{x}{x_0}\Big)^\alpha + \frac{\alpha}{\beta} - 1 \geqslant \frac{\alpha}{\beta}\Big(\frac{x}{x_0}\Big)^\beta, \ \ \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{4.9}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = x_0$.

Bài toán 11. *Cho bộ các số dương $a, b, c; \alpha, \beta$ với $\alpha > \beta$. Chứng minh rằng*

$$\Big(\frac{a}{b}\Big)^\alpha + \Big(\frac{b}{c}\Big)^\alpha + \Big(\frac{c}{a}\Big)^\alpha \geqslant \Big(\frac{a}{b}\Big)^\beta + \Big(\frac{b}{c}\Big)^\beta + \Big(\frac{c}{a}\Big)^\beta.$$

Giải. Ta sử dụng bất đẳng thức (4.8). Ta có

$$\begin{cases} \Big(\dfrac{a}{b}\Big)^\alpha + \dfrac{\alpha}{\beta} - 1 \geqslant \dfrac{\alpha}{\beta}\Big(\dfrac{a}{b}\Big)^\beta, \\ \Big(\dfrac{b}{c}\Big)^\alpha + \dfrac{\alpha}{\beta} - 1 \geqslant \dfrac{\alpha}{\beta}\Big(\dfrac{b}{c}\Big)^\beta, \\ \Big(\dfrac{c}{a}\Big)^\alpha + \dfrac{\alpha}{\beta} - 1 \geqslant \dfrac{\alpha}{\beta}\Big(\dfrac{c}{a}\Big)^\beta, \\ \Big(\dfrac{\alpha}{\beta} - 1\Big)\Big[\Big(\dfrac{a}{b}\Big)^\beta + \Big(\dfrac{b}{c}\Big)^\beta + \Big(\dfrac{c}{a}\Big)^\beta\Big] \geqslant 3\Big(\dfrac{\alpha}{\beta} - 1\Big) \end{cases} \tag{4.10}$$

Cộng các vế tương ứng của (4.10) ta thu được

$$\Big(\frac{a}{b}\Big)^\alpha + \Big(\frac{b}{c}\Big)^\alpha + \Big(\frac{c}{a}\Big)^\alpha \geqslant \Big(\frac{a}{b}\Big)^\beta + \Big(\frac{b}{c}\Big)^\beta + \Big(\frac{c}{a}\Big)^\beta.$$

Tiếp theo, ta xét dạng tam thức bậc (α, β):

$$f(x) = ax^\alpha + bx^\beta + c$$

với điều kiện $\alpha > 0 > \beta$ và $a\alpha + b\beta = k > 0$.

Trường hợp riêng, khi $k = 0$, ta thu được dạng *phân thức chính quy* và sẽ được xét chi tiết ở chương tiếp theo.

Ta có kết quả sau đây.

Định lý 12. *Tam thức bậc* (α, β) *dạng*

$$f(x) = ax^\alpha + bx^\beta + c,$$

trong đó $a, b > 0$, $\alpha > 0 > \beta$ *và* $a\alpha + b\beta = k \geqslant 0$ *có tính chất sau:*

$$f(x) \geqslant f(1), \ \ \forall x \geqslant 1.$$

Chứng minh. Để ý rằng

$$f'(x) = a\alpha x^{\alpha - 1} + b\beta x^{\beta - 1}$$

và trong khoảng $(0, +\infty)$, ta có $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi

$$x = x_0, \quad \text{trong đó} \quad x_0 = \sqrt{1 - \frac{k}{a\alpha}} \leqslant 1.$$

Do vậy, $f(x)$ đồng biến trong $[1, +\infty)$, nên

$$f(x) \geqslant f(1), \ \ \forall x \geqslant 1.$$

□

Hệ quả 4. *Tam thức bậc* (α, β) *dạng*

$$f(x) = ax^\alpha + bx^\beta + c,$$

trong đó $a, b > 0$, $\alpha > 0 > \beta$ *và* $a\alpha + b\beta = 0$ *có tính chất sau:*

$$\min_{x > 0} f(x) = f(1).$$

Chương 5

Một số bất đẳng thức cổ điển liên quan

Tiếp theo, ta xét bất đẳng thức dạng nội suy sau đây.

Định lý 13. *Với mọi cặp dãy số thực $a = (a_1, \ldots, a_n)$ và $b = (b_1, \ldots, b_n)$ và $0 \leqslant x \leqslant 1$, ta đều có*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + x \sum_{i \neq j} a_i b_j\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x \sum_{i<j} a_i a_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2x \sum_{i<j} b_i b_j\Big).$$

Rõ ràng, với $x = 0$, ta thu được bất đẳng thức Cauchy.

Chứng minh. Xét tam thức bậc hai theo y:

$$\begin{aligned} f(y) &= \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x \sum_{i<j} a_i a_j\Big) y^2 - 2\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + x \sum_{i \neq j} a_i b_j\Big) y + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2x \sum_{i<j} b_i b_j \\ &= (1-x) \sum_{k=1}^{n} (a_k y - b_k)^2 + x\Big(\sum_{k=1}^{n} (a_k y - b_k)\Big)^2. \end{aligned}$$

Dễ thấy $f(y) \geqslant 0$ với mọi y, và vì vậy ta suy ra ngay được điều cần chứng minh. □

Sử dụng đồng nhất thức, ta thu được một mở rộng của bất đẳng thức Cauchy.

Định lý 14 (H.W.Mclaughlin)**.** *Với mọi bộ số thực $a = (a_1, \ldots, a_n)$ và $b = (b_1, \ldots, b_n)$, ta đều có*

$$\Big(\sum_{i=1}^{2n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{2n} b_i^2\Big) \geqslant \Big(\sum_{i=1}^{2n} a_i b_i\Big)^2 + \Big(\sum_{i=1}^{n} (a_i b_{n+i} - a_{n+i} b_i)\Big)^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a_i b_j - a_j b_i - a_{n+i} b_{n+j} + a_{n+j} b_{n+i} = 0$$

và

$$a_i b_{n+j} - a_j b_{n+i} + a_{n+i} b_j - a_{n+j} b_i = 0$$

ứng với mọi $i, j = 1, \ldots, n$.

Chứng minh. Chứng minh được suy trực tiếp từ đẳng thức

$$\Big(\sum_{i=1}^{2n} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{2n} b_i^2\Big) - \Big(\sum_{i=1}^{2n} a_ib_i\Big)^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n}(a_ib_{n+i} - a_{n+i}b_i)\Big)^2 =$$

$$= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_ib_j - a_jb_i - a_{n+i}b_{n+j} + a_{n+j}b_{n+i})^2 +$$

$$+ \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_ib_{n+j} - a_jb_{n+i} - a_{n+i}b_j + a_{n+j}b_i)^2.$$

□

Tương tự, ta có thể mở rộng bất đẳng thức Cauchy cho bốn bộ số.

Sử dụng kỹ thuật bất đẳng thức Cauchy đối với $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ và $\dfrac{a_kb_k}{\sqrt{a_k^2 + b_k^2}}$, ta thu được

Định lý 15. *Với mọi bộ số thực a_k, b_k sao cho $a_k^2 + b_k^2 \neq 0, k = 1, \ldots, n$, ta đều có*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\Big)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k^2b_k^2}{a_k^2 + b_k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

Bất đẳng thức đầu xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi a và b tỷ lệ và bất đẳng thức sau xảy ra đẳng thức khi và chỉ khi các véctơ $\{|a_k|\}_{k=1}^n$ và $\{|b_k|\}_{k=1}^n$ trực giao.

Ta xét tiếp các bất đẳng thức Ostrowski và Fan-Todd.

Định lý 16 (A.M.Ostrowski)**.** *Cho hai dãy không tỷ lệ $a = (a_1, \ldots, a_n)$ và $b = (b_1, \ldots, b_n)$ và dãy số thực $x = (x_1, \ldots, x_n)$ thoả mãn điều kiện*

$$\sum_{i=1}^{n} a_ix_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} b_ix_i = 1.$$

Khi đó

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\Big) - \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i\Big)^2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x_k = \frac{b_k\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 - a_k\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\Big) - \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_ib_i\Big)^2}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Chứng minh. Đặt

$$A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2, \quad B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \quad C = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

và $y_i = \dfrac{Ab_i - Ca_i}{AB - C^2}$.

Dễ thấy rằng dãy $y_1, \ldots, y_n$ thoả mãn điệu kiện bài toán. Mọi dãy $x_1, \ldots, x_n$, từ giả thiết, cũng thoả mãn

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \frac{A}{AB - C^2}.$$

Do đó

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{A}{AB - C^2}.$$

Mọi dãy $x_1, \ldots, x_n$, theo giả thiết, thoả mãn

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2$$

Vậy nên

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \frac{A}{AB - C^2},$$

chính là điều phải chứng minh. $\square$

Tiếp theo, ta chứng minh định lý:

Định lý 17 (K.Fan and J.Todd). *Với mọi dãy số thực $a = (a_1, \ldots, a_n)$ và $b = (b_1, \ldots, b_n)$ thoả mãn điều kiện $a_i b_j \neq a_j b_i$ ứng với $i \neq j$, ta đều có*

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\Big) - \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2} \leqslant \binom{n}{2}^{-2} \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1, j\neq i} \frac{a_j}{a_j b_i - a_i b_j} \Big)^2$$

Chứng minh. Ta thấy

$$x_i = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i} \sum_{j \neq i} \frac{a_i a_j}{a_j b_i - a_i b_j}$$

có thể nhóm thành các cặp có dạng

$$\binom{n}{2}^{-1} \Big(\frac{a_i a_j}{a_j b_i - a_i b_j} + \frac{a_j a_i}{a_i b_j - a_j b_i} \Big) \quad (i \neq j)$$

và từng cặp như vậy đều bằng 0.

Vậy ta chuyển được về tổng $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$.

Tương tự, cũng có $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i x_i = 1$.

Vậy theo kết quả của Định lí Ostrowski vừa chứng minh ở trên, ta có ngay điều cần chứng minh. $\square$

Tiếp theo, ta xét một dạng bất đẳng thức, thực chất là bất đẳng thức Cauchy, trong hình học gắn với tích trong trong không gian tuyến tính, thường được gọi là Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz[1].

[1] Đôi khi được gọi là bất đẳng thức Schwarz (Hermann Amandus Schwarz, 1843-1921)

Trước hết, ta nhắc lại tích vô hướng đối với cặp véctơ

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n),\ \ b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

trong không gian $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa như sau

$$(a, b) = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j. \tag{5.1}$$

Từ (5.1), ta thấy ngay rằng

$$(a, a) \geqslant 0,\ \ (a, a) = 0 \Leftrightarrow a = (0, 0, \dots, 0).$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$(a, b) \leqslant (a, a)^{\frac{1}{2}} (b, b)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.2}$$

Để ý rằng, tích vô hướng (5.1) có các tính chất sau đây.

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} && (a, a) \geqslant 0,\ \ \forall a \in \mathbb{R}^n,\\
&\text{(ii)} && (a, a) = 0 \Leftrightarrow a = (0, 0, \dots, 0),\\
&\text{(iii)} && (\alpha a, b) = \alpha(a, b),\ \ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ \forall a, b \in \mathbb{R}^n,\\
&\text{(iv)} && (a, b + c) = (a, b) + (a, c),\ \ \forall a, b, c \in \mathbb{R}^n,\\
&\text{(v)} && (a, b) = (b, a),\ \ \forall a, b \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Định nghĩa 1. *Không gian véctơ với tích (a, b) có các tính chất (i)-(v) được gọi là không gian với tích trong.*

Ví dụ 4. *Giả sử (γ_j) là bộ số dương cho trước. Khi đó, tích vô hướng với trọng (γ_j)*

$$(a, b) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j b_j \tag{5.3}$$

là tích trong, tức là, có các tính chất (i)-(v).

Định lý 18. *Đối với mọi không gian với tích trong (a, b), ta đều có bất đẳng thức Cauchy-Schwarz*

$$(a, b) \leqslant (a, a)^{\frac{1}{2}} + (b, b)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra đối với cặp véctơ a, b khác 0 khi và chỉ khi $b = \lambda a$ với $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. Sử dụng tính chất

$$(v - w, v - w) \geqslant 0,$$

ta thu được

$$(v, w) \leqslant \frac{1}{2}(v, v) + \frac{1}{2}(w, w). \tag{5.5}$$

Vì (5.4) luôn luôn thoả mãn khi một trong hai véctơ bằng 0. Vậy, ta chỉ xét các véctơ khác 0. Ta đặt

$$\hat{v} = \frac{v}{(v, v)^{\frac{1}{2}}},\ \ \hat{w} = \frac{w}{(w, w)^{\frac{1}{2}}},$$

Khi đó, theo (5.5) thì $(\hat{v}, \hat{w}) \leqslant 1$. Từ đó, ta có ngay (5.4). □

Đặc biệt, đối với không gian các hàm số liên tục trên một đoạn thẳng $[\alpha, \beta]$ cho trước, ta có bất đẳng thức Bunhiacovski[2].

Định lý 19. *Với mọi cặp hàm số $f(t), g(t)$ liên tục trên đoạn thẳng $[\alpha, \beta]$, ta đều có*

$$\Big(\int_\alpha^\beta f(t)g(t)dt\Big)^2 \leqslant \int_\alpha^\beta [f(t)]^2 dt \int_\alpha^\beta [g(t)]^2 dt.$$

Chứng minh. Sử dụng tính chất

$$\int_\alpha^\beta \Big(f(t) - \lambda g(t)\Big)^2 dt \geqslant 0, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

ta suy ra

$$A\lambda^2 - 2B\lambda + C \geqslant 0, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

trong đó

$$A = \int_\alpha^\beta [g(t)]^2 dt, \ \ C = \int_\alpha^\beta [f(t)]^2 dt, \ \ B = \int_\alpha^\beta f(t)g(t)dt.$$

Từ đây, áp dụng định lí về dấu của tam thức bậc hai, ta có ngay điều cần chứng minh. □

Tiếp theo, ta dễ dàng kiểm chứng

Ví dụ 5. *Giả sử $V = \mathcal{C}[\alpha, \beta]$ là không gian các hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$. Khi đó, tích vô hướng của cặp hàm số $f(t), g(t) \in V$ được định nghĩa như sau*

$$(f, g) = \int_\alpha^\beta f(t)g(t)dt \tag{5.6}$$

chính là tích trong, tức có các tính chất (i)-(v).

Tương tự như trường hợp không gian $\mathbb{R}^n$, ta có thể định nghĩa tích (5.6) với trọng.

Ví dụ 6. *Giả sử $V = \mathcal{C}[\alpha, \beta]$ là không gian các hàm liên tục trên $[\alpha, \beta]$ và $\omega(t)$ là hàm số liên tục và dương trên $[\alpha, \beta]$. Khi đó, tích vô hướng của cặp hàm số $f(t), g(t) \in V$ với trọng $\omega(t)$ được định nghĩa như sau*

$$(f(t), g(t)) = \int_\alpha^\beta \omega(t)f(t)g(t)dt \tag{5.7}$$

là tích trong, tức có các tính chất (i)-(v).

Các ứng dụng của bất đẳng thức Schwaz và Bunhiacovski trong phép tính tích phân sẽ được đề cập ở các chương sau.

[2] Victor Yacovlewich Bunhiacovski 1804-1889

Chương 6

Phương pháp bất đẳng thức Cauchy

6.1 Độ gần đều và sắp thứ tự dãy cặp điểm

Từ bất đẳng thức
$$x_1^2 + x_2^2 \geqslant 2x_1x_2, \ \ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$
ta suy ra với mọi cặp số không âm x, y với tổng bằng 1 cho trước thì tích xy đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{1}{4}$ khi $x = y = \dfrac{1}{2}$. Vậy
$$xy \leqslant \frac{1}{4}. \tag{6.1}$$
Nếu ta có một cặp số không âm khác, chẳng hạn u, v với tổng bằng 1 thì tích uv cũng có tính chất như đã nêu và
$$uv \leqslant \frac{1}{4}. \tag{6.2}$$
Phải chăng ta có thể cho một tiêu chuẩn để có thể sắp thứ tự cặp số xy và uv?

Nhận xét rằng, ta không thể sắp thụ tự tất cả các cặp số dương theo một trình tự thông thường trên đường thẳng được. Tuy nhiên, đối với các cặp số dương có chung tổng thì nếu để ý đến trường hợp đặc biệt đảm bảo dấu đẳng thức xảy ra khi các số hạng (hoặc thừa số đối với tích) bằng nhau, thì ta có thể phát biểu thứ tự các cặp đó dưới dạng văn học rằng tích xy đạt giá trị lớn nhất trong trường hợp cặp số đó là đều, tức là $x = y$.

Định nghĩa 2. *(i) Xét các cặp số không âm x, y với tổng không đổi (để đơn giản, ta chọn $x+y = 1$). Ta gọi hiệu*
$$\rho(x, y) := \max(x, y) - \min(x, y),$$
là độ lệch của cặp số x, y hay là độ gần đều của cặp số x, y

(ii) Cặp x_1, y_1 được gọi là gần đều hơn (độ lệch nhỏ hơn) cặp x_2, y_2 (hay cặp x_2, y_2 được gọi là xa đều hơn cặp x_1, y_1), nếu
$$\rho(x_1, y_1) \leqslant \rho(x_2, y_2).$$

Như vậy, theo định nghĩa trên thì cặp x, y luôn có độ lệch $\rho(x, y) \geqslant 0$ và độ lệch bằng 0 khi và chỉ khi $x = y$, khi đó cặp x, y là cặp gần đều nhất và các cặp $0, 1$ và $1, 0$ sẽ là những cặp xa đều nhất.

Với các quy ước như trên, ta có thể sắp thứ tự các tích xy với tổng $x + y = 1$ không đổi theo ngôn ngữ "gần đều" như sau.

Định lý 20. *Xét các cặp số không âm x_j, y_j $(j = 1, 2)$ với tổng không đổi (để đơn giản, ta chọn $x + y = 1$). Khi đó*
$$x_1y_1 \geqslant x_2y_2$$
khi và chỉ khi cặp x_1, y_1 gần đều hơn cặp x_2, y_2.

Chứng minh. .

Xét các cặp số không âm x, y với tổng bằng 1 không đổi. Không mất tính tổng quát, coi $0 \leqslant x < y$. Với mỗi $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ, để đảm bảo $x + \varepsilon < y - \varepsilon$ (chỉ cần chọn $\varepsilon \in [0, \frac{y-x}{2})$. Dễ thấy rằng cặp $x + \varepsilon, y - \varepsilon$ gần đều hơn cặp x, y đã cho. Ta chỉ cần chứng minh rằng

$$xy \leqslant (x + \varepsilon)(y - \varepsilon) \tag{6.3}$$

là đủ.
Điều này là hiển nhiên vì (6.3) tương đương với bất đẳng thức $\varepsilon(y - x - \varepsilon) \geqslant 0$. □

Thứ tự sắp được theo ngôn ngữ "gần đều dần" cho ta một cách tiếp cận tự nhiên với nhiều bài toán của thực tiễn. Chẳng hạn, khi ta có cặp số tự nhiên x, y có tổng bằng một số lẻ thì cặp số đó sẽ không bao giờ là cặp số nguyên bằng nhau được. Khi đó khái niệm gần đều nhất (mà không phải là đều) sẽ có ý nghĩa thực tiễn.

Nhận xét rằng, đối với các cặp số dương có chung tích thì ta cũng có thể phát biểu thứ tự các cặp đó dưới dạng văn học rằng tổng $x + y$ đạt giá trị nhỏ nhất trong trường hợp cặp số đó là đều, tức là $x = y$.

Định nghĩa 3. *(i) Xét các cặp số dương x, y với tích không đổi (để đơn giản, ta chọn $xy = a > 0$). Ta gọi hiệu*

$$\rho(x, y) := \max(x, y) - \min(x, y),$$

là độ lệch của cặp số x, y hay là độ gần đều của cặp số x, y

(ii) Cặp x_1, y_1 được gọi là gần đều hơn (độ lệch nhỏ hơn) cặp x_2, y_2 (hay cặp x_2, y_2 được gọi là xa đều hơn cặp x_1, y_1), nếu

$$\rho(x_1, y_1) \leqslant \rho(x_2, y_2).$$

Như vậy, theo định nghĩa trên thì cặp x, y luôn có độ lệch $\rho(x, y) \geqslant 0$ và độ lệch bằng 0 khi và chỉ khi $x = y$, khi đó cặp x, y là cặp gần đều nhất và các cặp $0, 1$ và $1, 0$ sẽ là những cặp xa đều nhất.

Với các quy ước như trên, ta có thể sắp thứ tự các tổng $x + y$ với tích xy không đổi theo ngôn ngữ "gần đều" như sau.

Định lý 21. *Xét các cặp số dương x_j, y_j $(j = 1, 2)$ với tích không đổi (để đơn giản, ta chọn $x_j y_j = 1$). Khi đó*

$$x_1 + y_1 \leqslant x_2 + y_2$$

khi và chỉ khi cặp x_1, y_1 gần đều hơn cặp x_2, y_2.

Chứng minh. Xét các cặp số dương x, y với tích bằng 1 không đổi. Không mất tính tổng quát, coi $0 < x < y$. Với mỗi $\varepsilon > 1$, để đảm bảo $\varepsilon x < (\varepsilon)^{-1} y$ (chỉ cần chọn $\varepsilon \in \left(1, \sqrt{\frac{y}{x}}\right)$.

Dễ thấy rằng cặp $x\varepsilon, y(\varepsilon)^{-1}$ gần đều hơn cặp x, y đã cho. Ta chỉ cần chứng minh rằng

$$x + y \geqslant x\varepsilon + y(\varepsilon)^{-1} \tag{6.4}$$

là đủ.
Điều này là hiển nhiên vì (6.4) tương đương với bất đẳng thức $\varepsilon x \leqslant y$. □

Định lí sau đây đóng vai trò trọng tâm đối với hai cặp số sắp được thứ tự.

Xét hai cặp số $(z, 2 - z)$ và $(y, 2 - y)$ với

$$1 \leqslant z \leqslant y \leqslant 2$$

hoặc

$$0 \leqslant y \leqslant z \leqslant 1.$$

Khi đó, theo định nghĩa, rõ ràng cặp số $(z, 2 - z)$ gần đều hơn so với cặp số $(y, 2 - y)$. Vậy nên, ta có

Định lý 22 (H.W.Melaughlin, F.T.Metcalf)**.** *Với mọi cặp dãy số dương* $a = (a_1, \dots, a_n)$ *và* $b = (b_1, \dots, b_n)$ *sao cho* $1 \leqslant z \leqslant y \leqslant 2$ *hoặc* $0 \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$*, ta đều có*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^y b_k^{2-y}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^{2-y} b_k^y\Big) \geqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^z b_k^{2-z}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^{2-z} b_k^z\Big).$$

Đây chính là một dạng nội suy bất đẳng thức Cauchy trong $[0, 1]$. Từ kết quả này, ta dễ dàng thu được ngay bất đẳng thức Cauchy quen biết.

Quá trình sắp đều có thể dùng để điều chỉnh bộ số như sau:

Bài toán 12. *Cho*

$$B = \Big\{\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 + a_3}{2}, \dots, \frac{a_{2005} + a_{2006}}{2}, \frac{a_{2006} + a_1}{2}\Big\}$$

là một hoán vị của bộ số

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{2006}\}.$$

Chứng minh rằng

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{2006}.$$

Chứng minh. Theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$\frac{a_k^2 + a_{k+1}^2}{2} \geqslant \Big(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\Big)^2.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_k = a_{k+1},\ \ k = 1, 2, \dots, 2006$, trong đó $a_{2007} := a_1$. Do B là một hoán vị của A, nên

$$\sum_{k=1}^{2006} a_k^2 = \sum_{k=1}^{2006} \frac{a_k^2 + a_{k+1}^2}{2} = \sum_{k=1}^{2006} \Big(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\Big)^2.$$

Điều này chỉ xảy ra khi đồng thời $a_1 = a_2$, $a_2 = a_3$, ..., $a_{2006} = a_1$, điều cần chứng minh. □

Nhận xét 2. *Vấn đề sắp thứ tự gần đều đối với bộ số tuỳ ý sẽ được đề cập trong các chương sau. Đặc biệt quá trình sắp thứ tự gắn chặt chẽ với giả thiết của Karamata khi mở rộng các bất đẳng thức cổ điển đối với lớp hàm lồi, lõm và tựa lồi, lõm.*

6.2 Kỹ thuật tách và ghép bộ số

Trong những năm gần đây, chúng ta thấy có khá nhiều dạng bất đẳng thức trong các đề kỳ thi Olympic quốc tế, vô địch quốc gia của nhiều nước trên thế giới. Rất nhiều bài toán về bất đẳng thức xuất phát từ các phép biến đổi biểu thức đối xứng theo các kiểu (đặc thù) khác nhau.

Trong mục này chúng ta đưa ra một số dạng bất đẳng thức lấy từ các kỳ thi Olympic quốc tế và Olympic quốc gia của một số nước mà cách giải dựa chủ yếu vào kỹ thuật tách, ghép và điều chỉnh bộ hệ số $\{a_k\}$ trong bất đẳng thức Cauchy. Để minh hoạ và để tính toán đơn giản, ta chủ yếu xét các ví dụ với cặp bộ ba biến. Thực chất của kỹ thuật này cũng chính là cách sắp thứ tự và điều chỉnh bộ số theo quá trình gần đều hoặc đều theo từng nhóm.

Bài toán 13. *Cho* $a, b, c > 0$*. Chứng minh rằng*

$$a + b + c \leqslant 2\Big(\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b}\Big).$$

Giải. Ta viết vế trái dưới dạng

$$a+b+c=\frac{a}{\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c}+\frac{b}{\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a}+\frac{c}{\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$(a+b+c)^2\leqslant\Big(\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\Big)[(b+c)+(c+a)+(a+b)].$$

Từ đây ta thu được điều cần chứng minh.

Bài toán 14. *Cho $a,b,c>0$, $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng*

$$\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)-(a+b+c)\geqslant 2\sqrt{3}.$$

Giải. Từ hệ thức hiển nhiên

$$(\sqrt{3}x-1)^2(2\sqrt{3}x+3)\geqslant 0,\ \ \forall x>0,$$

suy ra

$$\frac{1}{a}-a\geqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{3}a^2.$$

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{b}-b\geqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{3}b^2,$$
$$\frac{1}{c}-c\geqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{3}c^2.$$

Do đó

$$\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)-(a+b+c)=\Big(\frac{1}{a}-a\Big)+\Big(\frac{1}{b}-b\Big)+\Big(\frac{1}{c}-c\Big)$$
$$\geqslant\Big(\frac{4\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{3}a^2\Big)+\Big(\frac{4\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{3}b^2\Big)+\Big(\frac{4\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{3}c^2\Big)=2\sqrt{3},$$

điều cần chứng minh.

Nhận xét 3. *Bằng phương pháp tương tự, ta dễ dàng chứng minh bất đẳng thức sau:*

Với mọi cặp số dương a,b và bộ số dương x_k với tổng $\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2=1$, ta đều có

$$a\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\Big)\pm\Big(\sum_{k=1}^{n}x_k\Big)\geqslant(an\pm b)\sqrt{n}.$$

Bài toán 15. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng*

$$\Big(\frac{a+b}{a+b+c}\Big)^{1/2}+\Big(\frac{b+c}{a+b+c}\Big)^{1/2}+\Big(\frac{c+a}{a+b+c}\Big)^{1/2}\leqslant 6^{1/2}.$$

Giải. Đặt

$$T:=\Big(\frac{a+b}{a+b+c}\Big)^{1/2}+\Big(\frac{b+c}{a+b+c}\Big)^{1/2}+\Big(\frac{c+a}{a+b+c}\Big)^{1/2}.$$

Khi đó, ta có

$$T^2 = \Big[1\cdot\Big(\frac{a+b}{a+b+c}\Big)^{1/2} + 1\cdot\Big(\frac{b+c}{a+b+c}\Big)^{1/2} + 1\cdot\Big(\frac{c+a}{a+b+c}\Big)^{1/2}\Big]^2.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$T^2 \leqslant (1^2+1^2+1^2)\Big(\frac{a+b}{a+b+c} + \frac{b+c}{a+b+c} + \frac{c+a}{a+b+c}\Big) = 6.$$

Từ đây suy ra

$$\Big(\frac{a+b}{a+b+c}\Big)^{1/2} + \Big(\frac{b+c}{a+b+c}\Big)^{1/2} + \Big(\frac{c+a}{a+b+c}\Big)^{1/2} \leqslant 6^{1/2}.$$

Bài toán 16 (APMO 1991)**.** *Cho hai bộ số dương* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *và* $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n$ *có chung tổng:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k+b_k} \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k+b_k}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k).$$

Suy ra

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{a_k+b_k} \geqslant \frac{\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\Big)^2}{\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k+b_k)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k,$$

điều cần chứng minh.

Bài toán 17. *Cho* $a, b, c > 0$, $a+b+c = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{ab}{c(b+c)} + \frac{bc}{a(c+a)} + \frac{ca}{b(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Giải. Ký hiệu

$$M := \frac{ab}{c(b+c)} + \frac{bc}{a(c+a)} + \frac{ca}{b(a+b)}.$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\begin{aligned}
&\Big(\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ca}{b}}\Big)^2\\
=&\Big(\sqrt{\frac{ab}{c(b+c)}}\sqrt{b+c} + \sqrt{\frac{bc}{a(c+a)}}\sqrt{c+a} + \sqrt{\frac{ca}{b(a+b)}}\sqrt{a+b}\Big)^2\\
\leqslant&\Big[\frac{ab}{c(b+c)} + \frac{bc}{a(c+a)} + \frac{ca}{b(a+b)}\Big][2(a+b+c)] = M[2(a+b+c)].
\end{aligned}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca),$$

nên

$$\Big(\sqrt{\frac{ab}{c}}+\sqrt{\frac{bc}{a}}+\sqrt{\frac{ca}{b}}\Big)^2 \geqslant 3(b+c+a).$$

Suy ra $M \geqslant \dfrac{3}{2}$, hay

$$\frac{ab}{c(b+c)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ca}{b(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Bài toán 18 (Japan MO- 2004)**.** *Cho* $a, b, c > 0$, $a+b+c = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c} \leqslant 2\Big(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\Big). \tag{6.5}$$

Giải. Ta viết (6.5) dưới dạng

$$\begin{aligned}
&\frac{1+a}{1-a}+\frac{1+b}{1-b}+\frac{1+c}{1-c}\\
&= 3+\frac{2a}{1-a}+\frac{2b}{1-b}+\frac{2c}{1-c} \leqslant 2\Big(\frac{b}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{c}\Big)\\
&\Leftrightarrow 2a\Big(\frac{1}{c}-\frac{1}{1-a}\Big)+2b\Big(\frac{1}{a}-\frac{1}{1-b}\Big)+2c\Big(\frac{1}{b}-\frac{1}{1-c}\Big) \geqslant 3\\
&\Leftrightarrow a\Big(\frac{1}{c}-\frac{1}{b+c}\Big)+b\Big(\frac{1}{a}-\frac{1}{c+a}\Big)+c\Big(\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\Big) \geqslant \frac{3}{2}\\
&\Leftrightarrow \frac{ab}{c(b+c)}+\frac{bc}{a(c+a)}+\frac{ca}{b(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Điều cần chứng minh này chính là bất đẳng thức ở bài toán 1.17.

Bài toán 19 (MO Romanian 2004)**.** *Chứng minh rằng, với mọi* $a, b, c > 0$, *ta đều có*

$$\frac{a}{bc(c+a)}+\frac{b}{ca(a+b)}+\frac{c}{ab(b+c)} \geqslant \frac{27}{2(a+b+c)^2}. \tag{6.6}$$

Giải. Đặt

$$\frac{a}{bc(c+a)}+\frac{b}{ca(a+b)}+\frac{c}{ab(b+c)} = M.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}}+\sqrt{\frac{b}{ca}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}\Big)^2 =\\
=&\Big(\sqrt{\frac{a}{bc(c+a)}}\sqrt{c+a}+\sqrt{\frac{b}{ca(a+b)}}\sqrt{a+b}+\sqrt{\frac{c}{ab(b+c)}}\sqrt{b+c}\Big)^2\\
\leqslant&\Big[\frac{a}{bc(c+a)}+\frac{b}{ca(a+b)}+\frac{c}{ab(b+c)}\Big][2(a+b+c)] = M[2(a+b+c)].
\end{aligned}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}}+\sqrt{\frac{b}{ca}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}\Big)^2 \geqslant 3\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)$$

hay

$$\Big(\sqrt{\frac{a}{bc}}+\sqrt{\frac{b}{ca}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}\Big)^2 \geqslant \frac{27}{(a+b+c)},$$

nên suy ra (6.6):

$$M \geqslant \frac{27}{2(a+b+c)^2}.$$

Bài toán 20 (MO USA)**.** *Xét các số dương a, b, c thoả mãn điều kiện $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{1}{a^2(b+c)} + \frac{1}{b^2(c+a)} + \frac{1}{c^2(a+b)}.$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)^2 = \\
=&\Big(\frac{1}{a\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c}+\frac{1}{b\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a}+\frac{1}{c\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b}\Big)^2\\
\leqslant& P[2(a+b+c)].
\end{aligned}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)^2 \geqslant 3\Big(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\Big)$$

hay

$$\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)^2 \geqslant \frac{3(a+b+c)}{abc} = 3(a+b+c).$$

Từ đây suy ra $P \geqslant \dfrac{3}{2}$ và $P_{\min} = \dfrac{3}{2}$ khi $a = b = c = 1$.

Bài toán 21. *Chứng minh rằng, với mọi bộ số dương a, b, c thoả mãn điều kiện $abc = 1$, ta đều có*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{1}{2}(ab+bc+ca).$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)^2 = \\
=&\Big(\frac{1}{a\sqrt{a(b+c)}}\sqrt{a(b+c)}+\frac{1}{b\sqrt{b(c+a)}}\sqrt{b(c+a)}+\frac{1}{c\sqrt{c(a+b)}}\sqrt{c(a+b)}\Big)^2\\
\leqslant&\Big[\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\Big][2(ab+bc+ca)].
\end{aligned}$$

Mặt khác, theo giả thiết $abc = 1$, ta có

$$\Big(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\Big)^2 = (ab+bc+ca)^2.$$

Từ đây suy ra ngay được điều cần chứng minh.

Bài toán 22. *Chứng minh rằng, với mọi bộ số dương a, b, c, ta đều có*

$$\frac{a^4}{b^2(c+a)} + \frac{b^4}{c^2(a+b)} + \frac{c^4}{a^2(b+c)} \geqslant \frac{1}{2}(a+b+c).$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\Big)^2 = \\
=&\Big(\frac{a^2}{b\sqrt{c+a}}\sqrt{c+a} + \frac{b^2}{c\sqrt{a+b}}\sqrt{a+b} + \frac{c^2}{a\sqrt{b+c}}\sqrt{b+c}\Big)^2 \\
\leqslant&\Big[\frac{a^4}{b^2(c+a)} + \frac{b^4}{c^2(a+b)} + \frac{c^4}{a^2(b+c)}\Big][2(a+b+c)].
\end{aligned}$$

Mặt khác, cũng theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$\Big(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\Big)^2 \geqslant (a+b+c)^2.$$

Từ đây ta suy ra điều cần chứng minh.

Bài toán 23. *Chứng minh rằng, với mọi bộ số dương a, b, c, ta đều có*

$$\frac{a^6}{b^3(a+c)} + \frac{b^6}{c^3(a+b)} + \frac{c^6}{a^3(b+c)} \geqslant \frac{1}{2}(ab+bc+ca).$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\Big)^2 = \\
=&\ \Big(\frac{a^3}{b\sqrt{bc+ba}}\sqrt{bc+ba} + \frac{b^3}{c\sqrt{ca+cb}}\sqrt{ca+cb} + \frac{c^3}{a\sqrt{ab+ac}}\sqrt{ab+ac}\Big)^2 \\
\leqslant&\ \Big[\frac{a^6}{b^3(a+c)} + \frac{b^6}{c^3(a+b)} + \frac{c^6}{a^3(b+c)}\Big][2(ab+bc+ca)].
\end{aligned}$$

Mặt khác cũng theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$\Big(\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a}\Big)^2 \geqslant (ab+bc+ca)^2.$$

Từ đây ta suy ra điều cần chứng minh.

Bài toán 24. *Cho hai bộ số dương p, q, r và x, y, z. Chứng minh rằng*

$$\frac{p}{q+r}x^2 + \frac{q}{r+p}y^2 + \frac{r}{p+q}z^2 \geqslant (xy+yz+zx) - \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2).$$

Giải.
Đặt

$$\frac{p}{q+r}x^2 + \frac{q}{r+p}y^2 + \frac{r}{p+q}z^2 = M.$$

Ta sử dụng biến đổi sau

$$
\begin{aligned}
M &= \Big(\frac{p}{q+r}x^2 + x^2\Big) + \Big(\frac{q}{r+p}y^2 + y^2\Big) + \Big(\frac{r}{p+q}z^2 + z^2\Big) - (x^2+y^2+z^2) \\
&= (p+q+z)\Big(\frac{x^2}{q+r} + \frac{y^2}{r+p} + \frac{z^2}{p+q}\Big) - (x^2+y^2+z^2). \\
&= \frac{1}{2}\Big((\sqrt{q+r})^2 + (\sqrt{r+p})^2 + (\sqrt{p+q})^2\Big)\Big((\frac{x}{\sqrt{q+r}})^2 + \frac{y}{\sqrt{r+p}})^2 + \frac{z}{\sqrt{p+q}})^2\Big) \\
&\quad - (x^2+y^2+z^2).
\end{aligned}
$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$
\begin{aligned}
&\Big((\sqrt{q+r})^2 + (\sqrt{r+p})^2 + (\sqrt{p+q})^2\Big)\Big((\frac{x}{\sqrt{q+r}})^2 + \frac{y}{\sqrt{r+p}})^2 + \frac{z}{\sqrt{p+q}})^2\Big) \\
&\qquad\qquad \geqslant (x+y+z)^2.
\end{aligned}
$$

Suy ra

$$M \geqslant \frac{1}{2}(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2),$$

hay

$$M \geqslant (xy+yz+zx) - \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2).$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{p}{y+z-x} = \frac{q}{x+z-y} = \frac{r}{x+y-z}.$$

Bài toán 25. *Với $a, b, c > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{3a}{b+c} + \frac{4b}{c+a} + \frac{5c}{a+b}.$$

Giải. Ta có

$$
\begin{aligned}
P =& \Big(\frac{3a}{b+c} + 3\Big) + \Big(\frac{4b}{c+a} + 4\Big) + \Big(\frac{5c}{a+b} + 5\Big) - 12 \\
=& (a+b+c)\Big(\frac{3}{b+c} + \frac{4}{c+a} + \frac{5}{a+b}\Big) - 12 \\
=& \frac{1}{2}\Big[(\sqrt{b+c})^2 + (\sqrt{c+a})^2 + (\sqrt{a+b})^2\Big]\Big[\Big(\sqrt{\frac{3}{b+c}}\Big)^2 \\
&+ \Big(\sqrt{\frac{4}{c+a}}\Big)^2 + \Big(\sqrt{\frac{5}{a+b}}\Big)^2\Big] - 12 \\
&\geqslant \frac{1}{2}\Big(\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5}\Big)^2 - 12
\end{aligned}
$$

Vậy $\quad P_{\min} = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{3} + 2 + \sqrt{5}\Big)^2 - 12$, khi :

$$\frac{b+c}{\sqrt{3}} = \frac{c+a}{2} = \frac{a+b}{\sqrt{5}}.$$

6.3 Thứ tự và sắp lại thứ tự của bộ số

Kỹ thuật sắp lại thứ tự của bộ dãy số cho trước để phù hợp với đặc thù của bài toán đóng vai trò rất tích cực trong việc định hướng sáng tác bài tập cũng như định hướng cách chứng minh các bất đẳng thức. Chú ý rằng, sau khi sắp lại thứ tự bộ số, chẳng hạn $x \geqslant y \geqslant z$, ta thấy ngay cặp số $x-y, y-z$ gần đều hơn cặp $x-z, 0$. Vì vậy, ứng với mọi $\alpha > 1$, ta dễ dàng kiểm chứng hàm số $f(t) = t^\alpha$ có tính chất

$$f(x-z) + f(0) \geqslant f(x-y) + f(y-z),$$

hay

$$(x-z)^\alpha \geqslant (x-y)^\alpha + (y-z)^\alpha.$$

Một cách tổng quát, với mỗi bộ số sắp được

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n,$$

và với mọi $\alpha > 1$, ta đều có

$$(x_1 - x_n)^\alpha \geqslant (x_1 - x_2)^\alpha + (x_2 - x_3)^\alpha + \cdots + (x_{n-1} - x_n)^\alpha.$$

Bài toán 26. *Giả sử $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2b}{c^2} + \frac{b^2c}{a^2} + \frac{c^2a}{b^2} \geqslant a + b + c.$$

Giải. Ta có biến đổi sau

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= \Big(\frac{a}{c}\sqrt{b}\frac{c}{a}\sqrt{b} + \frac{b}{a}\sqrt{c}\frac{a}{b}\sqrt{c} + \frac{c}{b}\sqrt{a}\frac{b}{c}\sqrt{a}\Big)^2\\ &\leqslant \Big(\frac{a^2b}{c^2} + \frac{b^2c}{a^2} + \frac{c^2a}{b^2}\Big)\Big(\frac{c^2b}{a^2} + \frac{a^2c}{b^2} + \frac{b^2a}{c^2}\Big).\end{aligned}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức:

$$\frac{a^2b}{c^2} + \frac{b^2c}{a^2} + \frac{c^2a}{b^2} \geqslant \frac{ab^2}{c^2} + \frac{bc^2}{a^2} + \frac{ca^2}{b^2}.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}& \frac{a^2b}{c^2} + \frac{b^2c}{a^2} + \frac{c^2a}{b^2} \geqslant \frac{ab^2}{c^2} + \frac{bc^2}{a^2} + \frac{ca^2}{b^2}\\
\Leftrightarrow\ & a^4b^3 + b^4c^3 + c^4a^3 \geqslant a^3b^4 + b^3c^4 + c^3a^4\\
\Leftrightarrow\ & a^3b^3(a-b) + b^3c^3(b-c) + c^3a^3(c-a) \geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ & a^3(b^3 - c^3 + c^3)(a-b) + b^3c^3(b-c) + c^3a^3(c-a) \geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ & a^3(b^3-c^3)(a-b) + c^3\Big[a^3(a-b) + b^3(b-c) + a^3(c-a)\Big] \geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ & a^3(b^3-c^3)(a-b) + c^3\Big[a^3(c-b) + b^3(b-c)\Big] \geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ & a^3(b^3-c^3)(a-b) + c^3(b-c)(b^3-a^3) \geqslant 0\\
\Leftrightarrow\ & (b-c)(a-b)[a^2(ab^2-c^3) + c^2(a^3-b^2c) + abc(a^2-c^2)] \geqslant 0.\end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$(a+b+c)^2 \leqslant \Big(\frac{a^2b}{c^2} + \frac{b^2c}{a^2} + \frac{c^2a}{b^2}\Big)^2$$

hay

$$a + b + c \leqslant \frac{a^2b}{c^2} + \frac{b^2c}{a^2} + \frac{c^2a}{b^2}.$$

Bài toán 27. *Giả sử $a \geqslant b \geqslant c > 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} \geqslant \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}.$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}\Big)^2 = \\
=&\Big(\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{b}{a}\frac{1}{\sqrt{b}}\frac{a}{b} + \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{c}{b}\frac{1}{\sqrt{c}}\frac{b}{c} + \frac{1}{\sqrt{c}}\frac{a}{c}\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{c}{a}\Big)^2 \\
\leqslant&\Big(\frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} + \frac{a^2}{c^3}\Big)\Big(\frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3}\Big).
\end{aligned}$$

Tiếp theo, ta chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} + \frac{a^2}{c^3} \geqslant \frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3}.$$

Thật vậy, ta có các biến đổi tương đương sau

$$\begin{aligned}
&\frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3} + \frac{a^2}{c^3} \geqslant \frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3} \\
\Leftrightarrow\ & b^5c^3 + c^5a^3 + a^5b^3 \geqslant a^5c^3 + b^5a^3 + c^5b^3 \\
\Leftrightarrow\ & a^3b^3(a^2 - b^2) + b^3c^3(b^2 - c^2) + c^3a^3(c^2 - a^2) \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & a^3(b^3 - c^3 + c^3)(a^2 - b^2) + b^3c^3(b^2 - c^2) + c^3a^3(c^2 - a^2) \geqslant 0 \\
\Leftrightarrow\ & a^3(b^3 - c^3)(a^2 - b^2) + c^3(b^2 - c^2)(a^3 - b^3) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\Big(\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}\Big)^2 \leqslant \Big(\frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3}\Big)^2,$$

hay

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} \leqslant \frac{a^2}{c^3} + \frac{b^2}{a^3} + \frac{c^2}{b^3}.$$

Bài toán 28 (IMO 1995)**.** *Cho các số dương a, b, c thoả mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Giải. Đặt $bc = x$, $ca = y$ và $ab = z$. Theo giả thiết, ta thu được

$$\frac{1}{a} = x,\ \frac{1}{b} = y,\ \frac{1}{c} = z$$

và

$$x + y + z \geqslant 3.$$

Ta đưa bất đẳng thức đã cho về dạng

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Do vai trò của a, b, c cũng như của x, y, z bình đẳng, không mất tổng quát, ta có thể giả thiết $a \geqslant b \geqslant c$ hay $0 < x \leqslant y \leqslant z$. Khi đó

$$\begin{cases} x^2 \leqslant y^2 \leqslant z^2 \\ \dfrac{1}{y+z} \leqslant \dfrac{1}{z+x} \leqslant \dfrac{1}{x+y}. \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{x^2}{y+x} + \frac{y^2}{z+y} + \frac{z^2}{x+z}$$

và

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{x^2}{x+z} + \frac{y^2}{y+x} + \frac{z^2}{z+y}.$$

Từ đây, cộng các vế tương ứng, ta nhận được

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{x^2+z^2}{x+z} + \frac{y^2+x^2}{y+x} + \frac{z^2+y^2}{z+y}\Big).$$

Theo bất đẳng thức Cauchy, thì

$$x^2+z^2 \geqslant \frac{(x+z)^2}{2},\ \ y^2+x^2 \geqslant \frac{(y+x)^2}{2},\ \ z^2+y^2 \geqslant \frac{(z+y)^2}{2},$$

và vì vậy

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{x^2+z^2}{x+z} + \frac{y^2+x^2}{y+x} + \frac{z^2+y^2}{z+y}\Big) \geqslant \frac{1}{2}(x+y+z) \geqslant \frac{3}{2}.$$

Từ đây, ta thu được điều cần chứng minh.

Nhận xét 4. *Sau khi sắp lại thứ tự, ta cũng có thể sử dụng trực tiếp bất đẳng thức Chebyshev*

$$\Big(\frac{x+y+z}{3}\Big)\Big(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\Big) \leqslant \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}.$$

Từ các kết quả quen biết (ứng với $xyz = 1$)

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant 1,\ \ \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geqslant \frac{3}{2},$$

ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

6.4 Điều chỉnh và lựa chọn tham số

Đối với một số bất đẳng thức đồng bậc dạng không đối xứng thì dấu đẳng thức trong bất đẳng thức thường xảy ra khi giá trị của các biến tương ứng không bằng nhau. Vì vậy, cần lựa chọn kỹ thuật hợp lý để giải các bài toán cực trị dạng không đối xứng là rất cần thiết. Một trong những kỹ thuật cơ bản nhất chính là xây dựng thuật toán sắp thứ tự gần đều. Trong trường hợp dạng bậc hai, ta đã sử dụng phương pháp miền giá trị như đã nêu ở trên. Trong phần này, ta nêu thêm một kỹ thuật nữa nhằm điều chỉnh bộ số bằng tham số phụ. Ta đưa vào các tham số tự do cần thiết thường là các giá trị trung gian được xác định sau theo cách chọn đặc biệt để tất cả các dấu đẳng thức đồng thời xảy ra. Tham số phụ được đưa vào một cách hợp lí để phương trình xác định chúng có nghiệm.

Bài toán 29. *Cho số dương a. Xét bộ số dương x, y, z thoả mãn điều kiện*

$$xy + yz + zx = 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a(x^2 + y^2) + z^2.$$

Giải. Ta thấy biểu thức P đối xứng theo x, y, do vai trò của x và y là bình đẳng nên ta có thể đặt $\frac{z^2}{2} = \alpha x^2 = \alpha y^2$, $\alpha > 0$ được chọn sau.

Theo bất đẳng thức Cauchy (hoặc bất đẳng thức AG) cho 2 số dương, ta có

$$\alpha x^2 + \frac{z^2}{2} \geqslant 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}xz,\ \ \alpha y^2 + \frac{z^2}{2} \geqslant 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}yz,\ \ \sqrt{\frac{\alpha}{2}}(x^2 + y^2) \geqslant 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}xy.$$

Từ các bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$\left(\alpha + \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)(x^2 + y^2) + z^2 \geqslant 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(xy + yz + zx) = 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}.$$

Chọn α sao cho

$$\alpha + \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = a,$$

hay

$$\sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8a}}{4}.$$

Ta thấy dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{2} = \alpha x^2 = \alpha y^2 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} x = y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1 + 8a}}, \\ z = \dfrac{\sqrt[4]{1 + 8a} - 1}{2\sqrt[4]{1 + 8a}}. \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức đã cho bằng

$$\min P = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8a}}{2}.$$

Bài toán 30. *Cho u, v là các số dương. Xét bộ số dương a, b, c thoả mãn điều kiện*

$$ab + bc + ca = 1.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = ua^2 + vb^2 + c^2.$$

Giải. Ta phân tích
$$u = x + y,\ \ v = z + t,\ \ 1 = m + n,$$
trong đó x, y, z, t, m, n là các số dương sẽ được chọn sau.

Theo bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương, ta có
$$xa^2 + tb^2 \geqslant 2\sqrt{xt}ab,\ \ ya^2 + nc^2 \geqslant 2\sqrt{yn}ac,\ \ zb^2 + mc^2 \geqslant 2\sqrt{zm}bc.$$
Từ các bất đẳng thức trên, ta nhận được
$$Q \geqslant 2\sqrt{xt}ab + 2\sqrt{yn}ac + 2\sqrt{zm}bc.$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} xa^2 = tb^2 \\ ya^2 = nc^2 \\ zb^2 = mc^2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} \dfrac{x}{t} = \dfrac{b^2}{a^2} \\ \dfrac{n}{y} = \dfrac{a^2}{c^2} \\ \dfrac{z}{m} = \dfrac{c^2}{b^2} \end{cases}$ Suy ra
$$xzn = ytm. \tag{6.7}$$
Chọn x, y, z, t, m, n sao cho
$$xt = yn = zm = \alpha$$
thoả mãn (6.7)

Ta có
$$\begin{aligned} & (x + y)(z + t)(m + n) = uv \\ \Leftrightarrow\ & (xz + xt + yz + yt)(m + n) = uv \\ \Leftrightarrow\ & xzm + xtm + yzm + ytm + xzn + xtn + yzn + ytn = uv \\ \Leftrightarrow\ & (x + y + m + n + t + z)\alpha + 2xzn = uv. \end{aligned}$$
Mà $(xzn)(ytm) = \alpha^3$ nên $xzn = \sqrt{\alpha^3}$.

Đặt $q = \sqrt{\alpha}$ thì
$$2q^3 + (u + v + 1)q^2 - uv = 0. \tag{6.8}$$
Rõ ràng (6.8) có nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là q_0.

Vậy $\min P = 2q_0$ với q_0 là nghiệm dương duy nhất của phương trình (6.8).

Nhận xét 5. *Hai bài toán trên hoàn toàn có thể giải được theo phương pháp tam thức bậc hai thông thường.*

Bài toán 31 (Thi chọn đội tuyển Việt Nam dự IMO-1994)**.** *Xét bộ số thực a, b, c, d thoả mãn điều kiện*
$$\frac{1}{2} \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leqslant 1.$$
Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau
$$Q = (a - 2b + c)^2 + (b - 2c + d)^2 + (b - 2a)^2 + (c - 2d)^2.$$

Giải. Do vai trò của a và d, b và c là đối xứng trong biểu thức trên, ta dự đoán rằng điểm cực trị sẽ đạt được tại các bộ số thoả mãn điều kiện $a^2 = d^2$, $b^2 = c^2$. Với p là số thực dương (được xác định sau), theo bất đẳng thức Cauchy - Bunhiacovski, ta có

$$\begin{aligned}
&(1+3p)\Big(\frac{a^2}{1} + \frac{2b^2}{p} + \frac{c^2}{p}\Big) \geqslant (a - 2b + c)^2\\
&(p+2)\Big(\frac{b^2}{p} + 2a^2\Big) \geqslant (b - 2a)^2\\
&(1+3p)\Big(\frac{d^2}{1} + \frac{2c^2}{p} + \frac{b^2}{p}\Big) \geqslant (d - 2c + b)^2\\
&(p+2)\Big(\frac{c^2}{p} + 2d^2\Big) \geqslant (c - 2d)^2
\end{aligned}$$

Cộng vế với vế 4 bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$Q \leqslant (5+5p)(a^2+d^2) + \frac{5+10p}{p}(b^2+c^2). \tag{6.9}$$

Bây giờ ta cần chọn $p > 0$ sao cho

$$1 + p = \frac{1+2p}{p},$$

tức $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Thay $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ vào (6.9), ta thu được

$$Q \leqslant \frac{5(3+\sqrt{5})}{2}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} a > 0, c > 0, b < 0, d < 0\\ |a| = |d| = \left|\frac{b}{p}\right| = \left|\frac{c}{p}\right|\\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\end{cases}$$

Giải hệ trên ứng với $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, ta nhận được

$$\begin{cases} a = -d = -\dfrac{1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}},\\ -b = c = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5-\sqrt{5}}}.\end{cases} \tag{6.10}$$

Vậy, giá trị lớn nhất của biểu thức bằng

$$\max Q = \frac{5(3+\sqrt{5})}{2},$$

khi a, b, c, d thoả mãn điều kiện (6.10).

Tiếp theo, ta tìm giá trị nhỏ nhất.

Với cách phân tích tương tự như trên, việc tìm Min Q được trình bày hoàn toàn tương tự.

Ta có

$$\begin{aligned} Q &= 5(a^2+d^2)+6(b^2+c^2)+2a(c-4b)+2d(b-4c)-8bc \\ &\geqslant 5(a^2+d^2)+6(b^2+c^2)-\frac{1}{p}[p^2a^2+(c-4b)^2]-\frac{1}{p}[p^2d^2+(b-4c)^2]-8bc \end{aligned}$$

hay

$$Q \geqslant (5-p)(a^2+d^2)+\Big(6-\frac{17}{p}\Big)(b^2+c^2)+2\Big(\frac{8}{p}-4\Big)bc.$$

Chọn p trong khoảng (2,5) sao cho $\frac{8}{p}-4<0$ và vì vậy

$$\begin{aligned} Q &\geqslant (5-p)(a^2+d^2)+\Big(6-\frac{17}{p}\Big)(b^2+c^2)+2\Big(\frac{8}{p}-4\Big)(b^2+c^2) \\ Q &\geqslant (5-p)(a^2+d^2)+\Big(2-\frac{9}{p}\Big)(b^2+c^2). \end{aligned}$$

Tiếp theo,chọn p sao cho $5-p=2-\frac{9}{p}$, tức $p=\frac{3+\sqrt{45}}{2}\in(2,5)$, ta được

$$Q \geqslant \Big(5-\frac{3+\sqrt{45}}{2}\Big)(a^2+b^2+c^2+d^2) \geqslant \frac{7-\sqrt{45}}{4}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} pa=c-4b \\ pd=b-4c \\ b=c \\ a^2+b^2+c^2+d^2=\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} a=d=\pm\frac{3}{2\sqrt{9+p^2}} \\ b=c=\mp\frac{3}{2\sqrt{9+p^2}} \end{cases} \quad \text{với } p=\frac{3+\sqrt{45}}{2}.$$

Vậy

$$\min Q=\frac{7-\sqrt{45}}{4}.$$

Bài toán 32. *Xét bộ số x,y,z thoả mãn điều kiện*

$$x^2+y^2+z^2+\frac{16}{25}xy=a^2,$$

trong đó a là số dương cho trước.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=xy+yz+zx.$$

Giải. Với q tuỳ ý (được chọn sau) trong $(0,1)$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số không âm, ta có

$$\begin{cases} q(x^2+y^2)\geqslant 2q\sqrt{x^2y^2}\geqslant 2qxy \\ (1-q)x^2+\frac{z^2}{2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1-q}{2}x^2z^2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1-q}{2}}xz \\ (1-q)y^2+\frac{z^2}{2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1-q}{2}y^2z^2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1-q}{2}}yz \\ \frac{16}{25}xy=\frac{16}{25}xy. \end{cases}$$

Cộng các vế tương ứng của các bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$a^2\geqslant\Big(2q+\frac{16}{25}\Big)xy+2\sqrt{\frac{1-q}{2}}(yz+zx). \tag{6.11}$$

Để xuất hiện biểu thức P ở vế phải của (6.11) ta chỉ việc chọn q sao cho

$$2q + \frac{16}{25} = 2\sqrt{\frac{1-q}{2}} \quad \text{hay} \quad q = \frac{7}{25}.$$

Thay giá trị q vào (6.11) ta thu được $P \leqslant \dfrac{5a^2}{6}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = y = \dfrac{5z}{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 + \dfrac{15}{25}xy = a^2 \end{cases} \qquad \text{hay} \qquad \begin{cases} x = y = \pm\dfrac{a}{\sqrt{3}} \\ z = \pm\dfrac{3a}{5\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Chương 7

Các giá trị trung bình

Ta sử dụng các giá trị trung bình để thực hiện quy trình sắp thứ tự gần đều trong bất đẳng thức.

Chúng ta biết rằng đặc điểm của nhiều bất đẳng thức là dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi tất cả hoặc một vài biến số bằng nhau (xuất phát từ bất đẳng thức cơ bản $x^2 \geq 0$!, đặc biệt là bất đẳng thức đại sô.

Phương pháp dồn biến dựa vào đặc điểm này để làm giảm biến số của bất đẳng thức, đưa bất đẳng thức về dạng đơn giản hơn. Để có thể chứng minh trực tiếp bằng cách khảo sát hàm một biến hoặc chứng minh bằng quy nạp.

Để chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \tag{7.1}$$

ta có thể chứng minh

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \ldots, x_n\Big). \tag{7.2}$$

hoặc

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq f\big(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 x_2}, \ldots, x_n\big). \tag{7.3}$$

Sau đó, chuyển sang việc chứng minh (7.1) về chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) \geq g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

tức là chứng minh bất đẳng thức có ít biến số hơn. Dĩ nhiên, các bất đẳng thức (7.2) có thể không đúng, hoặc chỉ đúng trong một số điều kiện nào đó. Vì ta chỉ thay đổi hai biến số nên có thể kiểm tra tính đúng đẳng của bất đẳng thức này một cách dễ dàng.

Ta xét các bài toán sau để minh hoạ phương pháp.

Bài toán 33. *Chứng minh rằng nếu $x, y, z, > 0$ thì*

$$2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(xyz)^{2/3} \geq (x + y + z)^2.$$

Chứng minh. Xét hàm

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= 2(x^2 + y^2 + z^2) + 3(xyz)^{2/3} - (x + y + z)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx + 3(xyz)^{2/3} \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x \leq y \leq z$, ta cần chứng minh $F(x, y, z) \geq 0$.

thực hiện dồn biến bằng trung bình nhân, ta sẽ chứng minh

$$F(x, y, z) \geq F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}). \tag{7.4}$$

Thật vậy, xét hiệu $d = F(x, y, z) - F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz})$.

$$\begin{aligned}
d &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx - (x^2 + yz + yz - 2x\sqrt{yz} - 2x\sqrt{yz} - 2yz) \\
&\quad + 3(xyz)^{2/3} - 3(xyz)^{2/3} \\
&= y^2 + z^2 - 2yz + 4x\sqrt{yz} - 2x(y+z) \\
&= (y-z)^2 + 2x(-y - z + 2\sqrt{yz}) \\
&= (y-z)^2 - 2x(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 \\
&= (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2[(\sqrt{y} + \sqrt{z})^2 - 2x] \\
&= (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2[(y + z - 2x) + 2\sqrt{y}z] \geq 0
\end{aligned}$$

Vì $x \leq y \leq z$ suy ra $y + z \geq 2x$. Từ đó suy ra bất đẳng thức (7.4) đúng.

Mặt khác

$$F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}) = x^2 - 4x\sqrt{yz} + 3(xyz)^{2/3}$$

Mà

$$\begin{aligned}
x^2 + 3(xyz)^{2/3} &= x^2(xyz)^{2/3} + (xyz)^{2/3} + (xyz)^{2/3} \\
&\geq 4(x^2y^2z^2)^{1/4} = 4x\sqrt{yz}
\end{aligned}$$

nhờ áp dụng bất đẳng thức côsi cho bốn số không âm x^2, $(xyz)^{2/3}$, $(xyz)^{2/3}$, $(xyz)^{2/3}$. Do vậy $F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}) \geq 0$. Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh. □

Bài toán 34. *Chứng minh rằng nếu $x, y, z, t \geq 0$ thì*

$$3(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + 4\sqrt{xyzt} \geq (x + y + z + t)^2.$$

Chứng minh. Xét hàm

$$\begin{aligned}
F(x, y, z, t) &= 3(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + 4\sqrt{xyzt} - (x + y + z + t)^2 \\
&= 2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) - 2xy - 2xz - 2xt \\
&\quad - 2yz - 2yt - 2zt + 4\sqrt{xyzt}
\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x \leq y \leq z \leq t$, ta cần chứng minh $F(x, y, z, t) \geq 0$, trước hết, ta có $F(x, y, z, t) \geq F(x, y, \sqrt{zt}, \sqrt{zt})$. Thật vậy, xét hiệu $d = F(x, y, z, t) - F(x, y, \sqrt{zt}, \sqrt{zt})$.

$$\begin{aligned}
d &= 2(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) - 2xy - (2xz + 2xt + 2yt + 2zt) + 4\sqrt{xyzt} - \\
&\quad - [2(x^2 + y^2 + zt + zt) - 2xy + 2x\sqrt{zt} + 2x\sqrt{zt} \\
&\quad + 2y\sqrt{zt} + 2y\sqrt{zt} + 2zt) + 4\sqrt{xyzt}] \\
&= 2(z^2 + t^2) - 4zt - 2x(z + t) - 2y(z + t) + 4 + 4x\sqrt{zt} + 4y\sqrt{zt} \\
&= 2(t - z)^2 - 2x(\sqrt{t} - \sqrt{z})^2 - 2y(\sqrt{t} - \sqrt{z})^2 \\
&= (\sqrt{t} - \sqrt{z})^2[2(\sqrt{t} + \sqrt{z})^2 - 2x - 2y]
\end{aligned}$$

Do $x \leq y \leq z \leq t$ nên

$$2(\sqrt{t} + \sqrt{z})^2 - 2x - 2y = 2(t + z - x - y + 2\sqrt{zt}) \geq 0$$

suy ra $d \geq 0$.

Tiếp theo ta chứng minh

$$F(x,y,\alpha,\alpha) \geq F(x,(y\alpha^2)^{1/3},(y\alpha^2)^{1/3},(y\alpha^2)^{1/3})$$

với $\alpha = \sqrt{zt}$. Đặt $\beta = (y\alpha^2)^{1/3}$ suy ra $y = \frac{\beta^3}{\alpha^2}$, ta phải chứng minh

$$F(x,\frac{\beta^3}{\alpha^2},\alpha,\alpha) \geq F(x,\beta,\beta,\beta)$$

và $x \leq \frac{\beta^3}{\alpha^2} \leq \alpha$.

Thật vậy xét

$$\begin{aligned}
&F(x,\frac{\beta^3}{\alpha^2},\alpha,\alpha) - F(x,\beta,\beta,\beta) = \\
&= 2(x^2 + \frac{\beta^3}{\alpha^2} + \alpha^2 + \alpha^2) - [2(\frac{x\beta^3}{\alpha^2}) + 2x\alpha + \frac{2\beta^3}{\alpha} + \frac{2\beta^3}{\alpha} + 2\alpha^2] + 4\sqrt{x\beta^3} - \\
&\quad - [2(x^2+\beta^2+\beta^2+\beta^2) - (2x\beta + 2x\beta + 2x\beta + 2\beta^2 + 2\beta^2 + 2\beta^2 + 4\sqrt{x\beta^3}] \\
&= 2\Big(\frac{\beta^6}{\alpha^4} + 2\alpha^2\Big) - \Big(\frac{2x\beta^3}{\alpha^2} + 4x\alpha + \frac{4\beta^3}{\alpha} + 2\alpha^2\Big) + 6x\beta \\
&= 2\Big(\frac{\beta^6}{\alpha^4} + \alpha^2 - \frac{2\beta^3}{\alpha}\Big) - 2x\Big(\frac{\beta^3}{\alpha^2} + 2\alpha - 3\beta) \\
&= 2\Big(\frac{\beta^3}{\alpha^2} - \alpha\Big)^2 + 2x(3\beta - \frac{\beta^3}{\alpha^2} - 2\alpha)
\end{aligned}$$

Mà

$$3\beta - \frac{\beta^3}{\alpha^2} \geq 4\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}} - 2(\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha}})^2 \tag{7.5}$$

Bất đẳng thức này tương đương với mỗi bất đẳng thức sau

$$\begin{gathered}
3\beta \geq 4\sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha}} - \frac{\beta^3}{\alpha} \\
3\beta\alpha \geq 4\sqrt{\beta^3\alpha} - \frac{\beta^3}{\alpha} \\
\beta - 4\sqrt{\beta\alpha} + 3\alpha \geq 0 \\
(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha})(\sqrt{\beta} - 3\sqrt{\alpha}) \geq 0
\end{gathered}$$

Bất đẳng thức cuối đúng vì $\beta \leq \alpha$. Vậy (7.5) đúng.

Từ đó suy ra

$$F(x,\frac{\beta^3}{\alpha^2},\alpha,\alpha) - F(x,\beta,\beta,\beta) \geq 2(\alpha - \frac{\beta^3}{\alpha^2})^2 + 2x(4\sqrt{\beta^3}\alpha - \frac{2\beta^3}{\alpha} - 2\alpha)$$

Vế trái của bất đẳng thức này lớn hơn hoặc bằng

$$\begin{gathered}
2(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2 - 4x(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2 \\
\geq 2(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2[(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\frac{\beta^3}{\alpha^2}})^2 - 2x] \geq 0
\end{gathered}$$

đúng. Vậy

$$F(x, \frac{\beta^3}{\alpha^2}, \alpha, \alpha) \geq F(x, \beta, \beta, \beta)$$

Mà

$$F(x, \beta, \beta, \beta) = 2x^2 - 6x\beta + 4\sqrt{x\beta^3}$$

Áp dụng bất đẳng thức cosi ta có

$$2x^2 + 4\sqrt{x\beta^3} = x^2 + x^2 + \sqrt{x\beta^3} + \sqrt{x\beta^3} + \sqrt{x\beta^3} + \sqrt{x\beta^3} \geq 6x\beta$$

Suy ra $F(x, \beta, \beta, \beta) \geq 0$, suy ra $F(x, y, z, t) \geq 0$. Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

$\square$

Bài toán 35. *Cho a, b, c là các số không âm, sao cho $a + b + c = d$, $n \geq 2$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = \frac{(ab)^n}{1 - ab} + \frac{(bc)^n}{1 - bc} + \frac{(ca)^n}{1 - ac}.$$

Chứng minh. Không giảm tổng quát, ta giả sử $a \geq b \geq c$.

Xét

$$P(a, b, c) = \frac{(ab)^n}{1 - ab} + \frac{(bc)^n}{1 - bc} + \frac{(ca)^n}{1 - ac}.$$

Ta chứng minh

$$P(a, b, c) \leq P(a, b + c, 0)$$

Thật vậy ta xét hiệu

$$\begin{aligned} &P(a, b, c) - P(a, b + c, 0) \\ &\quad = \frac{[a(b+c)]^n}{1 - a(b+c)} - \Big[\frac{(ab)^n}{1 - ab} + \frac{(bc)^n}{1 - bc} + \frac{(ca)^n}{1 - ca}\Big] \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{[a(b+c)]^n}{1 - a(b+c)} &= a^n \frac{(b+c)^n}{1 - a(b+c)} = \\ &= a^n \frac{(b^n + nb^{n-1}c + \cdots + nbc^{n-1} + c^n)}{1 - a(b+c)} \\ &> \frac{a^n b^n}{1 - a(b+c)} + \frac{a^n b^n}{1 - a(b+c)} + \frac{na^n b^{n-1} c}{1 - a(b+c)} \end{aligned}$$

Do $a, b, c \geq 0$ suy ra $1 - a(b + c) = 1 - ab - ac \geq 1 - ab$ và $1 - a(b + c) \geq 1 - ac$, suy ra

$$\frac{a^n b^n}{1 - a(b+c)} > \frac{a^n b^n}{1 - ab} \;\text{ và }\; \frac{b^n c^n}{1 - a(b+c)} > \frac{c^n b^n}{1 - a(b+c)} > \frac{a^n c^n}{1 - ac}$$

và

$$\frac{na^n b^{n-1} c}{1 - a(b+c)} \geq \frac{na^n b^{n-1} c}{1 - bc} \geq \frac{b^n c^n}{1 - bc}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $c = 0$, suy ra $P(a, b, c) \leq P(a, b + c, 0)$.

Vậy ta cần tìm giá trị lớn nhất của

$$P(a, b + c, 0) = \frac{(a(b+c))^n}{1 - a(b+c)} = \frac{a^n d^n}{1 - ad}, \;\; a \geq 0, d \geq 0, \; a + d = 1.$$

Ta có
$$ad \le \frac{(a+d)^2}{4} = \frac{1}{4}$$
Suy ra
$$P(a, b+c, 0) \le \frac{(1/4)^n}{1-1/4} = \frac{1}{3.4^{n-1}}$$
Vậy
$$P_{\max} = \frac{1}{3.4^{n-1}}.$$
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 0$ và các hoán vị của nó. □

Bài toán 36. *Cho a, b, c là các số thực bất kỳ, chứng minh rằng*
$$F(a,b,c) = (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4) \ge 0.$$

Chứng minh. Đây là đề thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 1996, dùng phương pháp dồn biến cho trung bình cộng rồi thực hiện bước sau cùng bằng phương pháp đạo hàm.

Xét hiệu $d = F(a,b,c) - F(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2})$
$$\begin{aligned}
d &= (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \frac{4}{7}(a^4+b^4+c^4) \\
&\quad - 2(a\frac{b+c}{2})^4 - (b+c)^4 + \tfrac{4}{7}\left(a^4 + 2\left(\frac{b+c}{2}\right)^4\right) \\
&= (a+b)^4 + (c+a)^4 - 2\left(a + \frac{b+c}{2}\right)^4 + \tfrac{4}{7}\left(\frac{(b+c)^4}{8} - b^4 - c^4\right) \\
&= a(4b^3+4c^3-(b+c)^3) + 3a^2(2b^2+c^2-(b+c)^2) + \tfrac{3}{7}(b^4+c^4-\tfrac{1}{8}(b+c)^4) \\
&= 3a(b+c)(b-c)^2 + 3a^2(b-c)^2 + \tfrac{3}{56}(b-c)^2(7b^2+7c^2+10bc) \\
&= 3a(a+b+c)(b+c)^2 + \tfrac{3}{56}(b-c)^2(7b^2+7c^2+10bc)
\end{aligned}$$
Hạng tử $\frac{3}{56}(b-c)^2(7b^2+7c^2+10bc) \ge 0$, ta xét hạng tử $3a(a+b+c)(b+c)^2$.

Nếu a, b, c cùng dấu thì $3a(a+b+c)$ không âm, suy ra $d \ge 0$.

Nếu a, b, c không cùng dấu, như vậy trong a, b, c có ít nhất một số cùng dấu với a, b, c. Không mất tổng quát, giả sử đó là a. Từ đẳng thức trên ta suy ra
$$F(a,b,c) \ge F\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$$
Như vậy ta còn phải chứng minh $F(a,b,c) \ge 0$ với mọi a, b hay là
$$2(a+b)^4 + (2b)^4 - \tfrac{4}{7}(a^4+2b^3) \ge 0 \tag{7.6}$$
Nếu $b = 0$ thì bất đẳng thức trên là hiển nhiên.

Nếu $b \ne 0$ thì chia hai vế bất đẳng thức cho b^4 và đặt $x = a/b$, thế thì (7.6) trở thành
$$2(x+1)^4 + 16 - \tfrac{4}{7}(x^4+2) \ge 0$$
Xét hàm
$$f(x) = 2(x+1)^4 - \tfrac{4}{7}(x^4+2) + 16.$$
Tính đạo hàm ta được
$$f'(x) = 8(x+1)^3 - \tfrac{16}{7}x^3$$
Suy ra $f'(x) = 0$ khi và chỉ khi $x + 1 = (2/7)^3 x$ hay $x = -2,99294$. Suy ra
$$f_{\min} = f(-2,9294) = 0,4924 > 0$$
Điều này cho thấy bất đẳng thức rất chặt. Vậy bất đẳng thức được chứng minh. □

Chương 8

Bài tập áp dụng

Bài 1. *Cho tam thức bậc hai* $f(t) = at^2 + bt + c$. *Đặt*

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z = x_1 \\ \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{1}{3}x = y_1 \\ \frac{2}{3}z + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y = z_1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$f(x_1) + f(y_1) + f(z_1) = f(x) + f(y) + f(z), \ \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Bài 2. *Xác định các bộ số* α, β, γ *sao cho ứng với mọi tam thức bậc hai* $f(t) = at^2 + bt + c$, *ta đều có hằng đẳng thức*

$$f(x_1) + f(y_1) + f(z_1) = f(x) + f(y) + f(z), \ \ \forall x, y, z \in \mathbb{R},$$

trong đó

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = x_1 \\ \alpha y + \beta z + \gamma x = y_1 \\ \alpha z + \beta x + \gamma y = z_1 \end{cases}$$

Bài 3. *Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số*

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 + 2x + 2}, \ \ \textit{trong đoạn } [0; 2].$$

Bài 4. *Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số*

$$y = \frac{3\sqrt{x+3} + 4\sqrt{1-x} + 1}{4\sqrt{x+3} + 3\sqrt{1-x} + 1}.$$

Bài 5. *Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số*

$$y = a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x.$$

Bài 6. *Cho các số thực* $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$. *Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số*

$$y = \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a_2\sin x + b_2\cos x + c_2}.$$

Bài 7. *Xét các tam thức bậc hai* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *thoả mãn điều kiện*

$$|f(x)| \leqslant 1 \;\; \forall x \in [-1, 1].$$

Chứng minh rằng

$$\max(4a^2 + 3b^2) = 16.$$

Bài 8. *Giả sử các số thực* x, y, z *thoả mãn điều kiện* $xy + yz + zx = 1$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$M = x^2 + 2y^2 + 5z^2.$$

Bài 9. *Cho* $x, y, z \in \mathbb{R}$. *Chứng minh rằng với mọi tam giác* ABC, *ta đều có*

$$\begin{aligned} &\Big(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 1\Big)x^2 + \Big(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 1\Big)y^2 + \Big(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\Big)z^2 \\ \geqslant &\Big(3 - \frac{b+c}{a}\Big)yz + \Big(3 - \frac{c+a}{b}\Big)zx + \Big(3 - \frac{a+b}{c}\Big)xy. \end{aligned}$$

Bài 10. *Cho* $a \geqslant b \geqslant c > 0$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3b}{c^3} + \frac{b^3c}{a^3} + \frac{c^3a}{b^3} \geqslant a + b + c.$$

Bài 11. *Cho* $0 \leqslant x < 1$. *Chứng minh rằng với mọi bộ số* (a_k), *ta đều có*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leqslant \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Bài 12. *Chứng minh rằng với mọi bộ số* (a_k), *ta đều có*

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a_k \leqslant \binom{2n}{n}^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Bài 13. *Chứng minh rằng với mọi bộ số dương* (a_k) *sao cho* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$, *ta đều có*

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(a_k + \frac{1}{a_k}\Big)^2 \geqslant n^3 + 2n + \frac{1}{n}.$$

Bài 14. *Chứng minh rằng với mọi bộ số* (a_k), *ta đều có*

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k\Big|^2 + \Big|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k a_k\Big|^2 \leqslant (n + 2) \sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

Bài 15. *Chứng minh rằng với mọi bộ số* (a_{jk}, x_j, y_k) $(j = 1, 2, \ldots, m;$
$k = 1, 2, \ldots, n)$, *ta đều có*

$$\Big|\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_j y_k\Big|^2 \leqslant \sqrt{DC} \Big(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2\Big)^{1/2},$$

trong đó

$$D = \max_{1 \leqslant j \leqslant m} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|, \;\; C = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{j=1}^{m} |a_{jk}|.$$

Bài 16. *Tìm các cặp số a, b thoả mãn điều kiện $a \leqslant b \leqslant 4$ sao cho bất đẳng thức:*

$$(x + y + z - 4)^2 < xyz$$

nghiệm đúng với mọi $x, y, z \in [a, b]$ và hiệu $b - a$ là lớn nhất.

Bài 17. *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, ta luôn có*

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geqslant \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z).$$

Bài 18 (K.Fan and J.Todd)**.** *Giả sử $p_{ij}(i, j = 1, \ldots, n; i \neq j)$ thoả mãn điều kiện*

$$p_{ij} = pji, \quad P = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} p_{ij} \neq 0.$$

Chứng minh rằng, khi đó với mọi cặp dãy số thực $a_1, \ldots, a_n$ và $b_1, \ldots, b_n$ sao cho $a_i b_j \neq a_j b_i (i \neq j)$, ta đều có

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}{\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2\Big)\Big(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2\Big) - \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i\Big)^2} \leqslant \frac{1}{p^2} \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1, j \neq i} \frac{p_{ij} a_j}{a_j b_i - a_i b_j} \Big)^2.$$