|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**  **BẮC NINH**  ĐỀ CHÍNH THỨC | **KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH LỚP 9**  **NĂM HỌC 2021 – 2022**  Môn thi: TOÁN  Thời gian: 150 phút |

1. (4, 0 điểm)

1) Rút gọn biểu thức , với .

2) Cho đường thẳng  ( khác 0. Tìm  biết  đi qua  và cắt các trục , lần lượt tại  và  sao cho tam giác  cân,  là gốc tọa độ.

1. (4,0 điểm)

1) Giải phương trình .

2) Giải hệ phương trình .

1. (4,0 điểm)

1) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương  của phương trình

.

2) Cho  là các số nguyên dương thỏa mãn  là số nguyên tố và  chia hết cho 8. Giả sử  là các số nguyên thỏa mãn  chia hết cho . Chứng minh rằng cả hai số  chia hết cho .

1. (6,0 điểm)

Cho hình vuông  nội tiếp đường tròn . Điểm  thuộc cung nhỏ  của ,  khác  và . Đường thẳng  cắt  và  theo thứ tụ tại  và , đường thẳng  cắt  và  theo thứ tự tại  và . Hai đường thẳng ,  cắt nhau tại .

a. Chứng minh rằng tứ giác  nội tiếp và  là phân giác của góc .

b. Gọi  là giao điểm của  và . Chứng minh rằng tứ giác  là hình chữ nhật và  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác .

c. Chứng minh rằng .

1. (2,0 điểm)

1) Cho đường tròn tâm . Bước 1, lấy một đường kinh của đường tròn đó, tại mỗi đầu mút của đường kính ghi số 1. Bước 2, tại điểm chính giữa của mỗi cung nhận được ghi số 2. Bước 3, coi 4 điểm đã ghi số ở trên là các điểm chia đường tròn; khi đó, đường tròn được chia thành 4 cung bằng nhau; tại điểm chính giữa của mỗi cung này ta ghi số có giá trị bằng tổng của hai số được ghi ở hai đầu cung tương ứng. Cứ tiếp tục quá trình như vậy, hỏi sau 2021 bước tổng các sổ được ghi trên đường tròn là bao nhiêu?

2) Cho ba số  không âm thỏa mãn . Chứng minh bất đẳng thức



**Hướng dẫn giải**

**Câu 1.**

1) Rút gọn biểu thức , với 

2) Cho đường thẳng . Tìm  biết đường thẳng  đi qua  và cắt các trục ,  lẩn lượt tại  và  sao cho tam giác  cân (  là gốc tọa độ).

Lời giải

1/ Ta có





.

2) Vì đường thẳng  đi qua  nên . Đường thẳng (d) cắt các trục ,  lần lượt tại  và . Tam giác  cân khi  (vì  ) . Từ đó ta tìm được 

**Câu 2.**

1) Giải phương trình .

2) Giải hệ phương trình .

Lời giải.

1) Phương trình tương đương 

Đặt  được phương trình 

Ta có  

Với  

Với  

Vậy phương trình có tập nghiệm 

2)ĐKXĐ: . Từ phương trình 

 (1)

Nếu 

Nếu 

Nếu .

Do đó từ (1) ta có .

Thay  vào phương trình  được .

Đối chiếu ĐKXĐ thì hệ phương trình có nghiệm .

**Câu 3.**

1) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương  của phương trình



2) Cho , b là các số nguyên dương thỏa mãn  là số nguyên tố và  chia hết cho 8. Giả sử ,  là các số nguyên thóa mãn  chia hết cho . Chứng minh rằng cả hai số ,  chia hết cho .

*Lời giải.*

1) Ta có 







Vì , y nguyên dương nên y phải là số chính phương.

Lập luận tương tự ta cũng có  là số chính phương. Đặt  với .

Ta có . Suy ra 



2/ Vì .

Ta có 

.

Nhận thấy 



Do  và  nên . (\*)

Nếu trong hai số ,  có một số chia hết cho  thì từ (\*) suy ra số thứ hai cũng chia hết cho . Nếu cả hai số  đều không chia hết cho  thì theo định lí Fecma ta có  (mod );

 mâu thuẫn với (\*)

Vậy cả hai số  đều chia hết cho .

**Câu 4.** *Lời giải*

*.*

a) Vì hình vuông  nội tiếp đường tròn nên  là giao điểm của hai đường chéo hình vuông . Ta có  nên tứ giác  nội tiếp. Suy ra .

Lại có  là trung trực của , mà  thuộc  nên tam giác  cân tại .

Suy ra  là tia phân giác của .

 có , mà



Do đó  là tia phân giác của 

b) Tam giác  có ; 

Ta có ;  mà 

Suy ra tứ giác  nội tiếp. Lại có  hay  Vì  nên là hình chữ nhật.

Ta có  và , suy ra tam giác  vuông cân tại , nên   (1).

Vì  nên  là phân giác của . Tam giác có là phân giác của  và  là phân giác của  nên  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác . Do đó  là phân giác của , suy ra . Tương tự ta cũng có  là phân giác của 

Ta cũng có . Do đó dẫn đến  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác , suy  là phân giác của 

Từ đó suy ra . Hai tam giác  và  có  và  chung nên  .

Hai tam giác  và  có  chung nên .

Suy ra , mà  nên  nội tiếp.

Lai có   (2).

Từ (1) và (2) suy ra , hay  là tâm đường tròn ngoại tiểp tam giác .

c) Vì  nên tứ giác MKNC nội tiếp, suy ra .

Hai tam giác  và  có  chung và    (3).

Vi HE là phân giác của  nên  (4).

Vì ME là phân giác của  nên .

Lại có 

Vì MH là phân giác của  nên  (7).

Do  nên  (8).

Từ (3), (4), (5), (6), (7), (8) suy ra .

Câu 5.

Lời giải.

1) Gọi  là tổng của tất cả các số ghi trên đường tròn sau  bước, .

Sau bước 1, trên đường tròn có  số là 1,1 nên 

Sau bước 2, trên đường tròn có  số là  nên 

Sau bước 3, trên đường tròn có  số là  nên 

Dự đoán sau  bước tổng là . Ta sẽ chứng minh .

Thật vậy, với  thì  đúng

Giả sử  đúng với , nghĩa là sau  bước trên đường tròn đã cho có các số với tồng là .

Sang bước thứ , ta coi  điểm đã ghi số là  điểm chia, nên đường tròn được chia thành  cung bằng nhau.

Do điểm chính giữa của mỗi cung này lại ghi tổng của hai số đã ghi ở hai đầu mỗi cung tương ứng. Do đó 

Vậy với mọi do đó .

2) Ta có 

Áp dụng BĐT Cauchy ta có 

Do đó 

. Suy ra

 .

Ta có  

Áp dụng BĐT Cauchy và BĐT Cauchy  Schwarz ta có

;

 .

Suy ra  (1)

Tương tự 

(2)

Từ  và  ta có 

.

BĐT đã được chứng minh

Dấu "  " xảy ra khi và chi khi .