**Ví dụ 2.** Giải phương trình 

**- Nhận xét:** Đặt  . Giả sử ta có phân tích:



Đồng nhất hệ số 2 vế ta có:   Hay: 

**Lời giải**

Điều kiện  Đặt 

Phương trình đã cho trở thành:    

Với: , ta có phương trình:

 

Đặt    Phương trình (\*) trở thành:

   

Thay trở lại ta tìm được 

**Ví dụ 3.** Giải phương trình 

**- Nhận xét.** Nếu không có cơ sở, chúng ta khó lòng nhận đoán rằng phương trình này quy được về dạng  một câu hỏi mà đi qua 2 ví dụ chúng ta vẫn chưa trả lời!

Có thể suy luận một cách đơn giản như sau: Ta đoán được nghiệm  của phương trình, và khi

   Nghĩa là ta có quyền hy vọng bài toán trên đưa được về phương trình đối xứng. Từ đó ta thử khai triển: 

**Lời giải**

Điều kiện  Đặt   . Phương trình đã cho trở thành:   

Thay vào phương trình đã cho ta:  

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm 

**Ví dụ 4.** Giải phương trình 

**- Bình luận.** Đây là phương trình dạng:  quen thuộc với khá nhiều cách giải. Chúng ta hãy thử phân tích và tìm lời giải bằng cách đưa về phương trình 2 ẩn (phụ) đối xứng.

**- Phân tích.** Do hệ số  bằng 2, hệ số trước  bằng 3. Từ đó ta hy vọng có thể đưa phương trình về dạng:



Suy ra: 



Đồng nhất hai vế ta có:  

Từ đó đặt:  

**Lời giải**

Điều kiện  Đặt ta có phương trình:

  

Thay trở lại và giải ta được: 

**- Bình luận.** Từ các ví dụ trên chúng ta có thể dễ dàng nhận ra việc chế tác một bài toán kiểu đối xứng đồng bậc khá đơn giản. Mức độ khó dễ của bài toán phụ thuộc vào việc lựa chọn và biến đổi của người ra đề. Mời các bạn xem ví dụ sau:

Bước 1: Ta chọng 2 ẩn phụ tùy ý, ví dụ:  

Bước 2: Chọn kiểu phương trình đối xứng hay nửa đối xứng theo ẩn a, b

- Nếu chọn:  ta sẽ có: 

Biến đổi phương trình này theo ý muốn, chẳng hạn: 

Như vậy thấy khó cho chúng ta để nhận ra rằng, phương trình (\*) có dạng đối xứng. Và để khắc phục khó khăn trong việc tìm kiếm lời giải, mời các bạn tiếp tục theo dõi với phương pháp đưa phương trình vô tỷ và dạng tích của 2 ẩn phụ.

**Đưa phương trình về dạng: **

**Ví dụ 5.** Giải phương tình 

**- Phân tích.** Chúng ta nhìn thấy nét tương đồng với ví dụ 4, nghĩa là ta sẽ đặt câu hỏi: liệu có thể phân tích được nó dưới dạng:  không?

Đồng nhất thức ta tìm được . Bài toán lúc này được giải quyết như sau:

**Lời giải**

Đặt:   phương trình đã cho trở thành:

  , do 

Với    

**Ví dụ 6.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Nếu đặt  lúc đó có thể đưa phương trình về dạng:  Ta hy vọng có: , thay nghiệm  vào (\*) tìm được 

Kiểm tra lại ta có: 

**Lời giải**

Điều kiện  Phương trình đã cho tương đương với:



Đặt:   . Phương trình đã cho trở thành:

  

Với  thay trở lại ta có:  

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: 

**Ví dụ 7.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Nhận thấy bậc cao nhất của phương trình là bậc 3, phương trình chứa 1 căn thức bậc 3(2 phép toán ngược nhau). Vì vậy ta nhận định rằng phương trình có thể đưa về dạng đối xứng đồng bậc.

Để vế trái xuất hiện bậc 3, ta nghĩ đến phương án chia cả 2 vế cho  lúc này phương trình được đưa về dạng:  lúc này nếu đặt  sẽ cho ta phương trình:  Lúc này với những phân tích như các ví dụ trên ta có:

**Lời giải**

Do  không là nghiệm của phương trình, chia cả hai vế cho , ta được:

 

Đặt:   Phương trình đã cho trở thành:

  

Với    

Vậy các nghiệm của phương trình đã cho là:  

**Ví dụ 8.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Đặt  ở vế phải của phương trình đã cho ta:  Ta sẽ suy luận rằng có thể tìm thấy điều gì đó ở vế trái xoay quanh ẩn , thay vào vế trái cho ta: . Từ đó ta tìm được lời giải

**Lời giải**

Điều kiện  Đặt  . Phương trình đã cho trở thành:   

Thay trở lại cho ta phương trình:  

**- Bình luận:**

- Như chúng ta nhận xét ở dạng toán trước, để chế tác một phương trình vô tỷ là muôn hình muôn vẻ, nó phụ thuộc vào chủ quan của người ra đề. Nhưng vấn đề lớn nhất là người giải toán làm sao nắm bắt được ý tưởng của họ? Câu trả lời đó chính là cần đặt tư duy lên hàng đầu khi giải toán, hay khi bắt gặp một lời giải. Để người giải toán có thể hóa giải ,một bài toán phương trình vô tỷ có thể có nhiều cách, tùy vào sự tinh tế của từng người giải. Tuy nhiên để học phương trình vô tỷ, chúng ta luông đặt câu hỏi: **Vì sao bài toán lại có lời giải như thế này? Một hướng đi khác có giải quyết được không? Vấn đề nảy sinh của mỗi hướng đi đó? Tổng quát như thế nào?...**

- Với hai dạng toán trên, chúng ta có thể đưa ra các bài toán tổng quát có dạng .

Ví dụ:

+ Ta chọn hàm đại diện:  với 2 ẩn phụ:  . Không cần nhiều phép biến đổi ta có phương trình: 

+ Ta chọn hàm đại diện:  với 2 ẩn phụ:  

+ Ta có phương trình: 

- Vấn đề nảy sinh mà chúng ta cần giải quyết là: Đối xứng là vậy, còn bất đối xứng thì sao? Làm sao để có sự phân biệt, đâu là đối xứng đâu là bất đối xứng? Nhưng trước khi tiếp tục với câu hỏi, mời các bạn rèn luyện khả năng quan sát với một số bài tập rèn luyện sau.

**- BÀI TẬP RÈN LUYỆN.**

**Bài 1.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 2.** Giải phương tình  Đáp số: 

**Bài 3.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 4.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 5.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 6.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 7.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 8.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 9.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 10.** Giải phương trình  Đáp số: 

**Bài 11.** Giải phương trình  Đáp số: 

**c) Kỹ thuật: “Delta chính phương” .**

**Ví dụ 1.** Giải phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện  Đặt   

Phương trình đã cho trở thành:

 

Xem a là ẩn số, b là tham số ta có:



Từ đó suy ra phương trình (\*) có nghiệm: 

+ Với , ta có:  

+ Với , ta có: 

Vậy phương trình đã cho có nghiệm 

**- Bình luận.** Điều chúng ta quan tâm trong cách giải phương trình trên chính là việc làm sao để tách: 

Trước hết ta khẳng định rằng chỉ có thể tách  dưới dạng:  (Vì  không chứa căn thức nên các hệ số  trong phân tích này đều bằng 0: 

Để tìm các hệ số m, n, p ta sẽ làm như sau:

- Bước 1: Đặt   ta có: 

Giả sử cần phân tích:    

- Bước 2: Kết hợp với (\*) ta có:  

Xem a là ẩn số, b là tham số ta cần:  là một số chính phương

- Bước 3: Chọn  thay vào  ta có:



Ta cần chọn n sao cho  chính phương. Dò trên bảng TABLE của máy tính CaSiO hàm số (Xem bài sự hỗ trợ của máy tính CaSiO – các bạn cũng có thể dò trực tiếp các giá trị nguyên nhỏ mà không cần dụng máy tính) ta thấy   hay ta sẽ chọn   . (Chú ý giá trị  làm cho  nên ta không chọn)

- Bước 4: Thử các giá trị tìm được vào ta có:  hay việc lựa chọn các giá trị trên thực hiện được.

**Ví dụ 2.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Đặt    ta cần tìm m, n, p sao cho:     

Thay trở lại phương trình cho ta:

 

Khi đó:  chọn  và kết hợp với (1) suy ra:

 chính phương.

Ta chọn được ngay  suy ra: 

Thử lại ta thấy: 

**Lời giải**

Điều kiện  Đặt    

Phương trình dã cho trở thành: 

Xem a là ẩn số, b là tham số, ta có: 

Khi đó phương trình (\*) có nghiệm 

+ Với  

+ Với   

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm 

**- Chú ý.** Về nguyên tắc giải toán ta cần tìm m, n, p sao cho phương trình:  có  tuy nhiên công việc này sẽ khiến chúng ta mất thêm thời gian khá nhiều. Nếu chúng ta “đi tắt - đón đầu” bằng cách gán giá trị đặc biệt cho b.

**Ví dụ 3.** Giải phương trình 

**- Bình luận.** Phương trình này dễ dàng giải quyết bằng cách bình phương và đưa về phương trình bậc 4, sau đó sử dụng máy tính CaSiO để tìm nhân tử, hoặc sử dụng nhân tử trong phép nhân liên hợp. Tuy nhiên trong rất nhiều tài liệu loại phương trình này dược giải bằng kỹ thuật. Đeta chính phương, và để lại cho người đọc rất nhiều câu hỏi: Vì sao?

**- Phân tích.** Ta đặt , và để cố định hệ số trước ẩn , ta đặt  Lúc đó ta có: 

Suy ra ta chỉ cần tìm m, n, p trong phân tích: 

Tương tự các ví dụ trên ta có:

  

Phương trình trở thành:  

Lúc đó: 

Chọn  

Dò trên TABLE của CaSiO (các bạn có thể dò trực tiếp các giá trị nguyên nhỏ mà không cần sử dụng máy tính) để tìm m cho  chính phương, ta có ngay 

Thử trở lại ta có: 

**Lời giải**

Đặt   . Phương trình đã cho trở thành:  

Xem b là ẩn số, a là tham số ta có: 

Khi đó phương trình (1) có nghiệm: 

+Với  

+ Với  

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất 

**Ví dụ 4.** Giải phương trình 

**- Phân tích.** Trước hết ta đưa bài toán về dạng quen thuộc:



Đặt  , chúng ta không cố định được hệ số trước  hoặc  bởi cả hay đều làm xuất hiện đại lượng 

Từ đó ta cần tìm các hệ số m, n, p trong phân tích: 

Hay:   

Phương trình lúc này có dạng:  

Suy ra: 

- Cho , và kết hợp với (1) ta được:  ta loại trường hợp này vì ta không thể thử hết tất cả các giá trị.

- Cho  ta có:  thử trên TABLE ta tìm được 2 giá trị  làm cho  chính phương là: 

Thử lại ta thấy với  có: 

**Lời giải**

Phương trình đã cho tương đương với: 

Đặt  Phương trình đã cho trở thành:  

Xem b là ẩn số, a là tham số ta có: 

Khi đó phương trình (\*) có nghiệm 

+ Với   

+ Với  

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là 
**Ví dụ 5.** Giải phương trình 

**- Phân tích .** Đặt  

Ta cần có phân tích: 

Hay:   

Lúc đó phương trình trở thành:

 

Suy ra: 

- Cho , ta có:  Thử các giá trị trên TABLE của CaSiO ta thấy   làm cho  chính phương.

Thử kiểm tra lại ta có:  

**Lời giải**

Đặt   . Lúc đó ta có phương trình:

 . Xem b là ẩn số, a là tham số, ta có: . Suy ra: 

+ Với   

+ Với   (vô nghiệm).

Vậy phương trình có các nghiệm 