

Chương IV. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Chuyên đề 21. BẤT ĐẲNG THỨC

A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa

* Hệ thức dạng $a > b$ (hay $a < b$; $a \geq b$; $a \leq b$) gọi là bất đẳng thức.

* $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$; $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$.

2. Tính chất

a) $a > b \Leftrightarrow b < a$

b) Tính chất bắc cầu:

$$a > b; b > c \Leftrightarrow a > c$$

$$a < b; b < c \Leftrightarrow a < c$$

c) Tính chất cộng:

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c$$

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

d) Tính chất nhân:

$$* a > b \Leftrightarrow ac > bc \text{ nếu } c > 0$$

$$a > b \Leftrightarrow ac < bc \text{ nếu } c < 0$$

$$a > b \Leftrightarrow ac = bc \text{ nếu } c = 0$$

$$* a < b \Leftrightarrow ac < bc \text{ nếu } c > 0$$

$$a < b \Leftrightarrow ac > bc \text{ nếu } c < 0$$

$$a < b \Leftrightarrow ac = bc \text{ nếu } c = 0$$

e) Cộng vế với vế của hai bất đẳng thức cùng chiều được một bất đẳng thức cùng chiều.

f) Trừ từng vế của hai bất đẳng thức ngược chiều ta được một bất đẳng thức cùng chiều với bất đẳng thức thứ nhất. (Không được trừ vế với vế của hai bất đẳng thức cùng chiều)

g) $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n (n \in \mathbb{N})$;

$$|a| > |b| \Rightarrow a^{2n} > b^{2n};$$

$$a > b \Rightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}.$$

h) Với $m > n > 0$ nếu $a > 1 \Rightarrow a^m > a^n$;

$$a = 1 \Rightarrow a^m = a^n;$$

$$0 < a < 1 \Rightarrow a^m < a^n.$$

i) Nếu $ab > 0$ và $a > b$ thì $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

3. Các phương pháp chứng minh $A > B$; ($A < B$ tương tự):

1) Dùng định nghĩa chứng minh $A - B > 0$ (Xét hiệu hai vế).

2) Biến đổi tương đương: $A > B \Leftrightarrow A_1 > B_1 \Leftrightarrow A_2 > B_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow A_n > B_n$;

Nếu $A_n > B_n$ đúng thì $A > B$ đúng.

3) Phản chứng: Giả sử $A \leq B$ dẫn tới một điều vô lý. Vậy $A > B$.

4) Chứng minh bằng quy nạp toán học:

+ Bước 1: Chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = n_0$.

+ *Bước 2*: Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$ ($k \geq n_0$), ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$.

Từ đó kết luận bất đẳng thức đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.

(Phương pháp quy nạp toán học thường được sử dụng khi trong bất đẳng thức có sự tham gia của n với vai trò của một số nguyên dương tùy ý hoặc số nguyên dương lấy mọi giá trị bắt đầu từ n_0 nào đó).

5) *Phương pháp tổng hợp*:

+ Sử dụng tính chất và các hằng bất đẳng thức.

+ Sử dụng tính chất bắc cầu (làm trội) $A > C$; $C > B \Rightarrow A > B$.

4. Một số hằng bất đẳng thức

a) $a^2 \geq 0 \quad \forall a$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$;

b) $|a| \geq 0 \quad \forall a$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = 0$;

c) Bất đẳng thức giá trị tuyệt đối:

* $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$).

* $|a - b| \geq |a| - |b|$ (Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$ và $|a| \geq |b|$).

d) Bất đẳng thức tam giác: với a ; b ; c là 3 cạnh tam giác:

$$a + b > c; \quad a - b < c$$

e) Bất đẳng thức Cauchy (*Augustin Louis Cauchy [1789 – 1857 nhà toán học Pháp]*): Với n số không âm $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ta có:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right)^n \geq a_1 a_2 \dots a_n.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

* *Chú ý*: Vài dạng bất đẳng thức cụ thể hay gặp có thể sử dụng như bổ đề:

$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \geq ab \text{ hay } (a+b)^2 \geq 4ab; \quad a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

f) Bất đẳng thức Bunyakovsky [*Victor Yakovlevich Bunyakovsky (1804 – 1889) nhà toán học Nga*].

Với mọi bộ n số $(a_1; a_2; \dots; a_n); (b_1; b_2; \dots; b_n)$, ta có:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \exists t$ để $a_i = t b_i$ ($i = \overline{1, n}$). Nếu $b_i \neq 0$ thì dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$.

* *Chú ý*: Dạng cụ thể hay gặp $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho a và b là hai số bất kỳ chứng minh rằng

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

* *Tìm cách giải:* Bài toán này thực chất gồm hai bài toán: Chứng minh

$$1) \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \quad (1); \quad 2) ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \quad (2).$$

Từ (1) và (2) ta suy ra kết quả.

Với mỗi câu 1) hoặc 2) ta đều có thể dùng 4 cách: Biến đổi tương đương; Xét hiệu hai vế; phản chứng và tổng hợp.

Giải

Ta chứng minh

$$1) \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \text{ bằng cả 4 cách:}$$

Cách 1: Biến đổi tương đương:

$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leq \frac{a^2+b^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \leq 2a^2+2b^2 \Leftrightarrow -a^2+2ab-b^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -(a^2-2ab+b^2) \leq 0 \Leftrightarrow -(a-b)^2 \leq 0 \text{ (hiển nhiên đúng).}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

Cách 2: Xét hiệu

$$\left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{a^2+2ab+b^2-2a^2-2b^2}{4} = \frac{-(a-b)^2}{4} \leq 0$$

$$\text{Vậy } \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}. \text{ Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow a=b.$$

Cách 3: Phản chứng

$$\text{Giả sử } \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 > \frac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 > 2a^2+2b^2$$

$$\Leftrightarrow -a^2+2ab-b^2 > 0 \Leftrightarrow -(a^2-2ab+b^2) > 0 \Leftrightarrow -(a-b)^2 > 0 \text{ vô lý.}$$

$$\text{Vậy } \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b$.

Cách 4: Tổng hợp:

$$\text{Ta có: } (a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow -(a^2-2ab+b^2) \leq 0 \Leftrightarrow -a^2+2ab-b^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$$

Hay $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ (1). Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

$$2) \text{ Chứng minh: } ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ (2)} \Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a - b)^2 \text{ hiển nhiên đúng.}$$

Từ (1) và (2) suy ra $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

$$* \text{ Nhận xét: } \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab;$$

$$\text{Từ bài toán a) ta có thể suy ra } \left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \leq \frac{a^4 + b^4}{2}$$

Thật vậy do $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ hai vế bất đẳng thức đều dương nên bình phương hai vế ta có

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \leq \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 \text{ (1); cũng có bài toán a) ta lại có } \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2 \leq \frac{a^4 + b^4}{2} \text{ (2). Từ (1) và (2) ta có:}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \leq \frac{a^4 + b^4}{2}.$$

Ví dụ 2: a) Chứng minh rằng $(a - 9)(a - 8)(a - 7)(a - 6) \geq -1 \forall a$

$$b) \text{ Chứng minh } (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2 \quad \forall a, b \text{ và } x, y.$$

$$\text{Áp dụng chứng minh } (2x + 3y - 3z)^2 \leq 13(x^2 + y^2 + z^2 - 2yz).$$

* *Tìm cách giải:* a) Hoán vị nhân tử $(a - 6)$ ở vế trái và thực hiện phép nhân $(a - 6)(a - 9)$ và $(a - 8)(a - 7)$ ta thấy xuất hiện $a^2 - 15a$ ở hai kết quả, ta nghĩ đến việc đặt ẩn phụ. Ta xét hiệu hai vế để chứng minh.

b) Xét hiệu hai vế và biến đổi.

Giải

$$a) \text{ Xét hiệu } (a - 9)(a - 6)(a - 8)(a - 7) - (-1)$$

$$= (a^2 - 15a + 54)(a^2 - 15a + 56) + 1$$

$$\text{Đặt } a^2 - 15a + 55 = b \text{ thì biểu thức trên bằng } (b - 1)(b + 1) + 1 = b^2 \geq 0$$

$$\text{Vậy } (a - 9)(a - 8)(a - 7)(a - 6) \geq -1.$$

b) Xét hiệu $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2$

$$= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - a^2x^2 - 2axby - b^2y^2$$

$$= a^2y^2 - 2aybx + b^2x^2 = (ay - bx)^2 \geq 0$$

Vậy $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2 \quad \forall a, b \text{ và } x, y$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow ax = by$.

Áp dụng: Ta viết bất đẳng thức $(2x + 3z - 3t)^2 \leq 13(x^2 + z^2 + t^2 - 2zt)$

$$\text{Dưới dạng } [2x + 3(z - t)]^2 \leq (2^2 + 3^2)[x^2 + (z^2 - 2zt + t^2)]$$

$$\text{Hay } [2x + 3(z - t)]^2 \leq (2^2 + 3^2)[x^2 + (z - t)^2]$$

Đặt $z - t = y$ thì $(2^2 + 3^2)(x^2 + y^2) \geq (2x + 3y)^2$ đúng theo bất đẳng thức vừa chứng minh ở trên.

Ví dụ 3:

a) Chứng minh tổng các bình phương của hai số bất kỳ không nhỏ hơn hai lần tích hai số đó.

b) Chứng minh với $x > 0$ thì $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (tổng một số dương với nghịch đảo của nó không nhỏ hơn 2).

c) Chứng minh với a, b, c, d là các số dương và thỏa mãn $abcd = 1$ thì $ab + cd \geq 2$ và $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 4$.

* *Tìm cách giải:* a) Lưu ý $(a - b)^2 \geq 0$

b) Khử mẫu, chuyển về xuất hiện hằng bất đẳng thức.

c) Lưu ý do $abcd = 1$ nên $cd = \frac{1}{ab}$, sử dụng kết quả b) để chứng minh.

Giải

a) Gọi hai số a và b . Hiển nhiên $(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

b) Với $x > 0$; $x + \frac{1}{x} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \geq 0$ đúng.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$.

c) Đặt $ab = x$. Do $a, b, c, d > 0$ và $abcd = 1$ nên $cd = \frac{1}{ab}$

$$\Rightarrow ab + cd = ab + \frac{1}{ab} = x + \frac{1}{x} \geq 2$$

* Ta luôn có $a^2 + b^2 \geq 2ab$ và $c^2 + d^2 \geq 2cd$

$$\text{Nên } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 2(ab + cd) \geq 4.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$.

Ví dụ 4:

a) Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, $\forall a; b; c$

b) Chứng minh $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$ với $a; b; c$ là 3 cạnh một tam giác.

* *Tìm cách giải:*

a) Bất đẳng thức có $a^2 + b^2$ ta nghĩ tới sử dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq 2ab, \dots$

b) Với a, b, c là ba cạnh của tam giác phải sử dụng bất đẳng thức tam giác.

Giải

a) Ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $b^2 + c^2 \geq 2bc$; $c^2 + a^2 \geq 2ac$.

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều trên ta có

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca) \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

b) Áp dụng bất đẳng thức về ba cạnh trong một tam giác:

$$|b - c| < a \Leftrightarrow (b - c)^2 < a^2$$

$$|c - a| < b \Leftrightarrow (c - a)^2 < b^2$$

$$|a - b| < c \Leftrightarrow (a - b)^2 < c^2$$

$$\text{Do đó } (b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2 < a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2 + a^2 - 2ab + b^2 < a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

* *Chú ý:* a) Ta còn cách rất hay sử dụng: biến đổi tương đương:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + c^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \text{ hiển nhiên đúng.}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 5:

a) Chứng minh rằng với ba số a, b, c tùy ý ta luôn có:

$$\frac{(a + b + c)^2}{3} \geq ab + bc + ca$$

b) Chứng minh $(3a)^2 + (3b)^2 + (3c)^2 \geq 3$ với $a + b + c = 1$.

* *Tìm cách giải:*

a) Ta có $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$. Do đó có thể biến đổi tương đương bằng cách nhân hai vế với 3 rồi xét hiệu hai vế.

b) Khó chứng minh trực tiếp. Ta đổi biến để chứng minh.

Giải

$$a) \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab+bc+ca \Leftrightarrow (a+b+c)^2 \geq 3ab+3bc+3ca$$

Xét hiệu

$$(a+b+c)^2 - 3ab - 3bc - 3ca = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - 3ab - 3ac - 3bc$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc)$$

$$= \frac{1}{2}(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2)$$

$$= \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0. \text{ Chứng tỏ } \frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab+bc+ca.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c$.

* *Chú ý:* a) Có thể biến đổi tương đương tiếp từ $(a+b+c)^2 \geq 3ab+3bc+3ca$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc) \geq 3(ab+ac+bc)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab+ac+bc \text{ bất đẳng thức đã được chứng minh ở ví dụ 4.}$$

Ta có thể dùng các cách khác (phản chứng, tổng hợp đều được).

b) *Cách 1:* Đặt $3a=1+3x$; $3b=1+3y$; $3c=1+3z$.

Do $a+b+c=1$ mà $3(a+b+c)=3+3(x+y+z)$. Suy ra $x+y+z=0$.

$$\text{Ta có: } (3a)^2 + (3b)^2 + (3c)^2 = (1+3x)^2 + (1+3y)^2 + (1+3z)^2$$

$$= 1+6x+x^2+1+6y+y^2+1+6z+z^2 = 3+6(x+y+z)+(x^2+y^2+z^2)$$

$$= 3+(x^2+y^2+z^2) \geq 3 \text{ (do } x+y+z=0)$$

$$\text{Vậy } (3a)^2 + (3b)^2 + (3c)^2 \geq 3. \text{ Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$$

Cách 2: Sử dụng bất đẳng thức Bunyakovsky ta có:

$$(3^2+3^2+3^2)(a^2+b^2+c^2) \geq (3a+3b+3c)^2 = 9(a+b+c)^2 = 9$$

$$\Rightarrow 27(a^2+b^2+c^2) \geq 9 \Rightarrow 9a^2+9b^2+9c^2 \geq 9$$

$$\text{Hay } (3a)^2 + (3b)^2 + (3c)^2 \geq 3. \text{ Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$$

Ví dụ 6: Chứng minh nếu $a > -1$ thì với mọi số nguyên dương n , ta đều có

$$(1+a)^n \geq 1+na \quad (\text{Bất đẳng thức Bernoulli})$$

* *Tìm cách giải:* Bất đẳng thức có sự xuất hiện của n với vai trò là một số nguyên dương tùy ý. Ta sử dụng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh.

Giải

Với $n = 1$ ta có $(1 + a) = 1 + a$ hiển nhiên đúng.

Giả sử bài toán đúng với số nguyên dương $n = k$ tức là $(1 + a)^k \geq 1 + ka$.

Nhân hai vế với số dương $(1 + a)$ ta có $(1 + a)^{k+1} \geq (1 + ka)(1 + a)$. Ta có

$$(1 + ka)(1 + a) = 1 + a + ka + ka^2 = 1 + (k + 1)a + ka^2 \geq 1 + (k + 1)a$$

Vậy $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$

Bài toán đúng với mọi số nguyên dương $n = (k + 1)$. Theo nguyên lý quy nạp bài toán đúng với mọi số nguyên dương n .

Ví dụ 7: Với a, b, c là các số dương chứng minh rằng:

$$a) (a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4;$$

$$b) (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9.$$

* *Tìm cách giải:* Các bất đẳng thức khi biến đổi về trái đều xuất hiện các số dương nghịch đảo. Do đó ta sử dụng kết quả của ví dụ 3b): một số dương cộng với nghịch đảo của nó không nhỏ hơn 2 khi chứng minh.

Giải

$$a) (a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = 2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 4 \text{ vì } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

(theo ví dụ 3 ta có $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$ là hai số dương nghịch đảo của nhau).

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

$$b) (a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + 1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + 1$$

$$= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

* *Nhận xét:* Từ hai bất đẳng thức trên ta có thể suy ra những bài toán tương tự:

Cho $a, b, c, d, e > 0$ chứng minh

$$(a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16$$

$$(a + b + c + d + e) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e} \right) \geq 25$$

Tổng quát cho $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n > 0$ ta có

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2, \quad (n \geq 2; n \in \mathbb{N})$$

Chứng minh:

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } & (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \\ &= n + \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \right) + \left(\frac{a_1}{a_3} + \frac{a_3}{a_1} \right) + \dots + \left(\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \right) + \left(\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_2} \right) + \dots + \left(\frac{a_2}{a_n} + \frac{a_n}{a_2} \right) + \dots + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1}} \right) \\ &\geq n + 2(n-1) + 2(n-2) + 2(n-3) + \dots + 2 \cdot 2 + 2 = \\ &= n + 2[1 + 2 + \dots + (n-1)] = n + 2 \times \frac{n(n-1)}{2} = n + n^2 - n = n^2 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$.

Ví dụ 8: Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

* *Tìm cách giải:* Ta thấy nếu cộng 1 vào mỗi hạng tử ở vế trái, sau khi quy đồng mẫu ta thấy xuất hiện nhân tử chung $(x+y+z)$. Vì thế ta biến đổi vế trái bằng cách thêm bớt cùng số 3 đưa về các dạng toán đã chứng minh.

Giải

Biến đổi vế trái ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} &= \left(\frac{x}{y+z} + 1 \right) + \left(\frac{y}{z+x} + 1 \right) + \left(\frac{z}{x+y} + 1 \right) - 3 \\ &= \left(\frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{z+x} + \frac{x+y+z}{x+y} \right) - 3 = (x+y+z) \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) - 3 \\ &= \frac{1}{2} [(x+y) + (y+z) + (z+x)] \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y} \right) - 3 \geq \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

[Áp dụng kết quả ví dụ 7b với $(x+y)=a; (y+z)=b; (z+x)=c$].

Ví dụ 9: Cho $a, b, c > 0$ chứng minh rằng:

$$a) (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

$$b) 3 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq 4 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)^2$$

* *Tìm cách giải:* Để có $(a+b)(b+c)(c+a)$ thử xét $(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2$ vì ta có $(x+y)^2 \geq 4xy$ (bất đẳng thức Cauchy).

Giải

a) Ta có $(a+b)^2 \geq 4ab$. Tương tự $(b+c)^2 \geq 4bc$; $(c+a)^2 \geq 4ca$.

Do $a, b, c > 0$ nên 2 vế của cả ba bất đẳng thức đều dương nên ta nhân vế với vế được:

$$(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \geq 64a^2b^2c^2 \Leftrightarrow [(a+b)(b+c)(c+a)]^2 \geq [8abc]^2$$

$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ do các biểu thức trong ngoặc $[]$ đều dương.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

b) Ta có
$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{8(a+b+c)}{8abc}$$

Từ câu a) đã chứng minh $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ ta có:

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{8(a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{4(a+b) + 4(b+c) + 4(c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow 2 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq \frac{8}{(b+c)(c+a)} + \frac{8}{(c+a)(a+b)} + \frac{8}{(a+b)(b+c)} \quad (1)$$

Mặt khác $(a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2}$ tương tự ta có:

$$\frac{1}{bc} \geq \frac{4}{(b+c)^2}; \quad \frac{1}{ac} \geq \frac{4}{(c+a)^2} \Rightarrow \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{4}{(b+c)^2} + \frac{4}{(c+a)^2} \quad (2)$$

Cộng vế với vế của (1) và (2) áp dụng hằng đẳng thức ở vế phải:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = (x+y+z)^2 \text{ với } x = \frac{1}{a+b}; y = \frac{1}{b+c}; z = \frac{1}{c+a} \text{ ta có:}$$

$$3 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq 4 \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)^2 \quad (3) \text{ (đpcm)}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Ví dụ 10: Cho $A = \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \frac{1}{13.17} + \dots + \frac{1}{(4n+1)(4n+5)}$ và $n \in \mathbb{N}^*$.

Chứng minh $A < \frac{1}{20}$.

* *Tìm cách giải:* Bài toán có số tổng quát n với $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có thể chứng minh bằng quy nạp toán học. Tuy nhiên từng hạng tử của A có quy luật có thể phân tích sau đó rút gọn nên ta sử dụng phương pháp tổng hợp.

Giải

Nhận xét: với $k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{(4k+1)(4k+5)} = \frac{1}{4} \left[\frac{(4k+5) - (4k+1)}{(4k+1)(4k+5)} \right] = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+5} \right)$$

$$\text{Do đó: } A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+5} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4n+5} \right) < \frac{1}{20}$$

Ví dụ 11: Chứng minh rằng $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$|x+1012| + |x-1004| \geq 2016$$

Giải

Áp dụng bất đẳng thức $|a+b| \leq |a| + |b|$

$$|x+1012| + |x-1004| = |x+1012| + |1004-x| \geq |x+1012+1004-x| = 2016.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow -1012 < x < 1004$.

C. Bài tập vận dụng

21.1.

a) Cho $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$. Chứng minh $A \geq 2$ nếu $ab > 0$ và $A \leq -2$ nếu $ab < 0$;

b) Chứng minh $\forall a, b, c$ thì $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^2$;

c) Chứng minh $\left(\frac{a+b}{2} \right)^3 \leq \frac{a^3+b^3}{2} \quad \forall a, b \geq 0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Với $ab > 0$. Ta có $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab$

Chia hai vế của bất đẳng thức cho $ab > 0$ ta có

$$\frac{a^2+b^2}{ab} \geq \frac{2ab}{ab} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2. \text{ Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow a=b.$$

Với $ab < 0$. Ta có $(a+b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 \geq -2ab$. Chia hai vế của bất đẳng thức cho $ab < 0$ ta có

$$\frac{a^2+b^2}{ab} \leq \frac{-2ab}{ab} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = -b$.

b) Chứng minh: Từ $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$

$$\Rightarrow 2(a^2+b^2+c^2) \geq 2ab+2ac+2bc$$

$$\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

$$\Rightarrow 3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$$

Chia 2 vế của bất đẳng thức này cho 9 ta có đpcm.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

$$\begin{aligned} \text{c) Xét hiệu } & \left(\frac{a+b}{2} \right)^3 - \frac{a^3+b^3}{2} = \frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-4a^3-4b^3}{8} \\ & = \frac{-3a^2(a-b)+3b^2(a-b)}{8} = \frac{-3(a-b)(a^2-b^2)}{8} = \frac{-3(a-b)^2(a+b)}{8} \leq 0 \text{ với } a, b \geq 0. \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

21.2. Chứng minh rằng:

a) $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c), \forall a, b, c;$

b) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq a(b+c+d), \forall a, b, c, d.$

c) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e), \forall a, b, c, d, e$

d) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd \geq 6, \forall a, b, c, d > 0 \text{ và } abcd = 1.$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Ta có nếu nhân, chuyển vế, tách $3 = 1+1+1$ thì xuất hiện $a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \dots$ Do đó: ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + c^2 - 2c + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 \geq 0 \text{ đúng.}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 1$.

b) Vế phải có $ab + ac + ad$. Nếu nhân 4 vào hai vế, chuyển vế và tách $4a^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2$ kết hợp với các hạng tử khác sẽ xuất hiện hằng đẳng thức.

$$\text{Do đó Nhân hai vế với 4 ta được } 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 \geq 4ab + 4ac + 4ad$$

$$\Leftrightarrow (a-2b)^2 + (a-2c)^2 + (a-2d)^2 + a^2 \geq 0 \text{ đúng.}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = 0$.

c) Nhận xét: $ab = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot b; ac = 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot c; \dots$ do đó ta nghĩ tới việc tách a^2 thành $\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$ để ghép với

b^2, c^2, d^2, e^2 . Ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq a(b+c+d+e)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{4} - ab + b^2 \right) + \left(\frac{a^2}{4} - ac + c^2 \right) + \left(\frac{a^2}{4} - ad + d^2 \right) + \left(\frac{a^2}{4} - ae + e^2 \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - b \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d \right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e \right)^2 \geq 0 \text{ đúng.}$$

* *Chú ý:* Cách khác: Nếu nhân hai vế với 4 ta biến đổi tương đương thành

$$(a-2b)^2 + (a-2c)^2 + (a-2d)^2 + (a-2e)^2 \geq 0 \text{ đúng.}$$

d) Với $a, b, c, d > 0$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab; \quad c^2 + d^2 \geq 2cd \text{ do đó}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd \geq 3(ab + cd)$$

Do $abcd = 1 \Rightarrow ab + cd = ab + \frac{1}{ab} \geq 2$. Ta có đpcm.

21.3.

a) Cho $a, b, c \neq 0$. Chứng minh $\frac{a^3 - b^3}{ab^2} + \frac{b^3 - c^3}{bc^2} + \frac{c^3 - a^3}{ca^2} \geq 0$;

b) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Nhận xét $\frac{a^3 - b^3}{ab^2} = \frac{a^2}{b^2} - \frac{b}{a} \dots$ Do đó bất đẳng thức biến đổi thành

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{c}{a}\right)^2 \geq 2 \cdot \frac{b}{a} + 2 \cdot \frac{c}{b} + 2 \cdot \frac{a}{c}$$

Áp dụng bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2xy$ có $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \geq 2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = 2 \cdot \frac{a}{c}$.

Xét tương tự rồi cộng vế với vế các bất đẳng thức cùng chiều ta được đpcm.

b) Vì $a, b, c > 0$ nên $a + b + c > a + b > 0$. Dùng phương pháp làm trội

$\Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b}$. Tương tự $\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c}$ và $\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a}$. Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta được

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1.$$

21.4.

a) Chứng minh $\forall x, y > 0$, ta có $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4x} + \frac{1}{4y}$;

b) Từ đó chứng minh $\forall a, b, c > 0$, ta có:

$$\frac{4}{2a+b+c} + \frac{4}{2b+c+a} + \frac{4}{2c+a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Biến đổi tương đương: $\forall x, y > 0$

$$\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4x} + \frac{1}{4y} \Leftrightarrow \frac{1}{x+y} \leq \frac{x+y}{4xy} \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq 4xy$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0 \text{ đúng.}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

b) Áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh ta có:

$$\frac{1}{2a+b+c} \leq \frac{1}{8a} + \frac{1}{4(b+c)} = \frac{1}{8a} + \frac{1}{4b+4c} \leq \frac{1}{8a} + \frac{1}{16b} + \frac{1}{16c} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{2b+c+a} \leq \frac{1}{8b} + \frac{1}{16c} + \frac{1}{16a} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2c+a+b} \leq \frac{1}{8c} + \frac{1}{16a} + \frac{1}{16b} \quad (3)$$

Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức cùng chiều (1); (2); (3) ta được:

$$\frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{2b+c+a} + \frac{1}{2c+a+b} \leq \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c} \text{ hay}$$

$$\frac{4}{2a+b+c} + \frac{4}{2b+c+a} + \frac{4}{2c+a+b} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

21.5. Chứng minh:

a) $a^3 + b^3 + abc \geq ab(a+b+c)$ với $a, b, c > 0$;

b) $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ với $a, b, c \geq 0$;

c) $8(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3$ với $a, b, c > 0$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Xét hiệu $a^3 + b^3 + abc - ab(a+b+c) = (a+b)(a-b)^2 \geq 0$

b) Xét hiệu $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

$$= (a+b+c) \cdot \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2} \geq 0$$

c) Biến đổi thành

$$4(a^3 + b^3) - (a+b)^3 + 4(b^3 + c^3) - (b+c)^3 + 4(c^3 + a^3) - (c+a)^3 \geq 0$$

$$\text{Xét } 4(a^3 + b^3) - (a+b)^3 = (a+b) \left[4(a^2 - ab + b^2) - (a+b)^2 \right]$$

$$= 3(a+b)(a-b)^2 \geq 0.$$

Tương tự với $4(b^3 + c^3) - (b+c)^3$ và $4(c^3 + a^3) - (c+a)^3$ ta suy ra đpcm.

21.6. Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh

a) $a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc$;

$$b) \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Vai trò a, b, c như nhau, không mất tổng quát giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Biến đổi bất đẳng thức đã cho được bất đẳng thức tương đương:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2(b+c) - b^2(c+a) - c^2(a+b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - a^2b - a^2c - b^2c - b^2a - c^2a - c^2b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2(a-b) + b^2(b-a) + c(2ab - a^2 - b^2) + c(c^2 - bc + ab - ac) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 - b^2) - c(a-b)^2 + c(c-a)(c-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b-c) + c(a-c)(b-c) \geq 0.$$

Hiển nhiên đúng vì $a \geq b$; $a+b > c$; $a \geq c$; $b \geq c > 0$.

b) Trước hết ta chứng minh với x, y, k là các số dương và $\frac{x}{y} < 1$ thì $\frac{x}{y} < \frac{x+k}{y+k}$. Thật vậy xét hiệu

$$\frac{x}{y} - \frac{x+k}{y+k} = \frac{k(x-y)}{y(y+k)} < 0 \text{ do } y(y+k) > 0 \text{ và } x-y < 0 \text{ (do giả thiết } x < y).$$

Do $a < b+c$; $b < c+a$; $c < a+b$ nên ta có:

$$\frac{a}{b+c} < \frac{a+a}{b+c+a}; \quad \frac{b}{c+a} < \frac{b+b}{c+a+b}; \quad \frac{c}{a+b} < \frac{c+c}{a+b+c}$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta được:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2.$$

21.7.

a) Chứng minh $(2x-3)(2x-6)(2x-7)(2x-10)+36 \geq 0$. Dấu “=” xảy ra khi nào?

b) $M = x^{2016} - x^{2013} + x^4 - x + 1 > 0 \quad \forall x$.

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Nhận xét: nếu nhân $(2x-3)$ với $(2x-10)$ và $(2x-6)$ với $(2x-7)$ sẽ cùng xuất hiện $4x^2 - 26x$. Do đó có thể đặt biến phụ. Biến đổi vế trái

$$(2x-3)(2x-6)(2x-7)(2x-10)+36 = (4x^2 - 26x + 30)(4x^2 - 26x + 42) + 36$$

Đặt $4x^2 + 26x + 36 = y$ ta có: $(y-6)(y+6)+36 = y^2 - 36 + 36 = y^2 \geq 0$.

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow y=0 \Leftrightarrow 4x^2 - 26x + 36 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 13x + 18 = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)(2x-9)=0 \Leftrightarrow x=2; x=4,5.$$

b) Ta có $M = x^{2013}(x^3 - 1) + x(x^3 - 1) + 1$

* Với $x \geq 1$ nên $x^3 \geq 1 \Rightarrow x^3 - 1 \geq 0$; $x^{2013} > 1$ do đó $M > 0$ (1).

* Với $x < 1$ ta có $M = x^{2016} + x^4(1 - x^{2009}) + (1 - x)$

Do $1 > x$ nên $1 > x^{2009}$ hay $1 - x^{2009} > 0$; $1 - x > 0$; $x^{2016} > 0$; $x^4 > 0$ nên $M > 0$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ đpcm.

21.8. Cho $a, b, c > 0$ chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq \frac{15}{2}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có:

$$\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \geq 2 + 2 + 2 = 6 \quad (1)$$

Theo chứng minh ở ví dụ 8 thì:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm. Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c$.

Cách giải khác:

$$\text{Đặt } A = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$$

$$\text{Ta có } 2A = \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} + 2\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right)$$

$$= \frac{2a}{b+c} + \frac{2b}{c+a} + \frac{2c}{a+b} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}\right)$$

$$= \left(\frac{2a}{b+c} + \frac{b+c}{2a}\right) + \left(\frac{2b}{c+a} + \frac{c+a}{2b}\right) + \left(\frac{2c}{a+b} + \frac{a+b}{2c}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)$$

Áp dụng bài toán: với $x > 0$ thì $x + \frac{1}{x} \geq 2$ ta có:

$$2A \geq 2 + 2 + 2 + \frac{3}{2}(2 + 2 + 2) = 6 + 9 = 15 \Rightarrow A \geq \frac{15}{2}.$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

* Cần tránh sai lầm sau đây khi giải bài toán này:

$$\begin{aligned} A &= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \\ &= \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c+a} + \frac{c+a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a+b} + \frac{b+c}{a}\right) \end{aligned}$$

Do $x + \frac{1}{x} \geq 2$ với $x > 0$ nên $A \geq 2 + 2 + 2 = 6$ kết quả sai. Sai lầm ở chỗ nếu xét riêng từng cặp thì đúng nhưng xét đồng thời cả ba cặp số thì dấu đẳng thức không thể xảy ra vì khi ấy $a = b + c$; $b = c + a$; $c = a + b \Rightarrow a + b + c = 2(a + b + c)$ vô lý.

21.9. Cho x, y, z là các số dương. Chứng minh rằng:

$$2 \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right) \geq \frac{9}{x+y+z}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Biến đổi thành $[(x+y) + (y+z) + (z+x)] \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right) \geq 9$

Đặt $x+y=a$; $y+z=b$; $z+x=c$ ta được

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9. \text{ (Bạn đọc tự làm tương tự ví dụ 7).}$$

21.10.

a) Chứng minh $\frac{2016}{1.3} + \frac{2016}{3.5} + \frac{2016}{5.7} + \dots + \frac{2016}{2015.2017} < 1008$;

b) Biết $n! = 1.2.3 \dots (n-1)n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Chứng minh $G < 1$ với

$$G = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{2015}{2016!};$$

c) Chứng minh với mọi số tự nhiên $n \geq 1$ ta có $H < \frac{5}{4}$

$$\text{với } H = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Đặt $B = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{2015.2017}$

thì $2B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2017} = 1 - \frac{1}{2017} < 1 \Rightarrow \text{đpcm}$

b) Nhận xét với $k \in \mathbb{N}^*$; $k > 1$ ta có:

$$\frac{k-1}{k!} = \frac{k-1}{(k-1)!k} = \frac{k}{(k-1)!k} - \frac{1}{(k-1)!k} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$$

Do đó $G = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{2015!} - \frac{1}{2016!} = 1 - \frac{1}{2016!} < 1.$

c) Ta làm trội bằng cách từ hạng thứ hai của H ta bớt mỗi mẫu số 1 đơn vị.

Ta có: $H < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2 - 1} + \frac{1}{5^2 - 1} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2 - 1}$

$$= 1 + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(2n-2) \cdot 2n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n} \right) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right) < \frac{5}{4}.$$

21.11. Chứng minh:

$$\frac{1}{2016} < \frac{1}{2015^2 + 1} + \frac{1}{2015^2 + 2} + \frac{1}{2015^2 + 3} + \dots + \frac{1}{2015^2 + 2015} < \frac{1}{2015}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Nhận xét: $2015^2 + 2015 = 2015(2015 + 1) = 2015 \cdot 2016$

Ta có: $\frac{1}{2015 \cdot 2016} < \frac{1}{2015^2 + 1} < \frac{1}{2015^2};$

$$\frac{1}{2015 \cdot 2016} < \frac{1}{2015^2 + 2} < \frac{1}{2015^2};$$

$$\frac{1}{2015 \cdot 2016} < \frac{1}{2015^2 + 3} < \frac{1}{2015^2};$$

...

$$\frac{1}{2015 \cdot 2016} = \frac{1}{2015^2 + 2015} < \frac{1}{2015^2}.$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{2015}{2015 \cdot 2016} < S < \frac{2015}{2015^2} \text{ hay } \frac{1}{2016} < S < \frac{1}{2015}.$$

Với $S = \frac{1}{2015^2 + 1} + \frac{1}{2015^2 + 2} + \frac{1}{2015^2 + 3} + \dots + \frac{1}{2015^2 + 2015}.$

21.12. Tìm các số nguyên x, y, z, t thỏa mãn bất đẳng thức:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 13 < xy + 3y + 2z + 6t.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Do $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$ nên ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 13 - xy - 3y - 2z - 6t \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - xy + 0,25y^2) + (0,75y^2 - 3y + 3) + (z^2 - 2z + 1) + (t^2 - 6t + 9) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 0,5y)^2 + 3(0,5y - 1)^2 + (z - 1)^2 + (t - 3)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x, y, z, t) = (1; 2; 1; 3).$$

21.13. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$

$$S_n = 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{37}{24}.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp toán học:

- Với $n=2$ thì $S_2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{19}{12} > \frac{37}{24}$ đúng.

- Giả sử bất đẳng thức đúng với $n=k$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$) tức là $S_k > \frac{37}{24}$.

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng với $n=k+1$, tức là $S_{k+1} > \frac{37}{24}$.

Thật vậy: $S_k = 1 + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{37}{24}$

$$S_{k+1} = 1 + \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \frac{1}{k+4} + \dots + \frac{1}{2k+2}$$

$$\text{Do đó } S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} > 0$$

Suy ra $S_{k+1} > S_k > \frac{37}{24}$. Vậy bất đẳng thức đúng $\forall n \geq 2$.

21.14. Chứng minh rằng nếu $|x| < 2$; $|y| < 2$ thì $|2(x+y)| < |4+xy|$.

Hướng dẫn giải – đáp số

Do $|x| < 2$; $|y| < 2$ nên $x^2 < 4$; $y^2 < 4$

Nghĩa là $(4-x^2) > 0$ và $(4-y^2) > 0$.

Ta có: $(4-x^2)(4-y^2) > 0$.

Mà $(4-x^2)(4-y^2) = 16 + x^2y^2 - 4(x^2 + y^2)$

$$= (16 + 8xy + x^2y^2) - 4(x^2 + 2xy + y^2) = (4+xy)^2 - [2(x+y)]^2 > 0.$$

Do đó: $(4+xy)^2 > [2(x+y)]^2$. Hay $|2(x+y)| < |4+xy|$.

21.15. Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba số thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} abc > 0 & (1) \\ a+b+c > 0 & (2) \\ ab+bc+ca > 0 & (3) \end{cases}$$

thì a, b, c là ba số dương.

Hướng dẫn giải – đáp số

* Ta sử dụng phương pháp phản chứng:

Giả sử trái lại, trong ba số a, b, c có ít nhất một số không dương. Do vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tổng quát ta coi $a \leq 0$. Nhưng theo (1) a phải khác 0 vậy $a < 0$ và ta có $bc < 0$.

Theo (3) $ab + bc + ca = a(b + c) + bc > 0$ nên $a(b + c) > -bc > 0$

Mà $a < 0$ nên $b + c < 0$ suy ra $a + b + c < 0$ trái với (2)

Vậy a, b, c phải là ba số dương.

21.16. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ ta có:

$$\frac{n}{2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n.$$

Hướng dẫn giải – đáp số

Bài toán có thể giải bằng phương pháp quy nạp toán học (bạn đọc tự chứng minh). Cách khác là ta sử dụng tính chất bắc cầu, làm trội biểu thức hoặc từng nhóm của biểu thức: Đặt $A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1}$.

a) Chứng minh $A < n$

$$\text{Ta có: } A = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \dots + \frac{1}{2^n - 1}\right)$$

Ta làm trội ở từng nhóm bằng cách thay các phân số trong nhóm bằng phân số lớn nhất của nhóm, ta có:

$$A < 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2^2} \cdot 4 + \frac{1}{2^3} \cdot 8 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \cdot 2^{n-1} = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n.$$

b) Chứng minh $A > n/2$. Ta có:

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2^3}\right) + \left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^{n-1} + 1} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2^n}$$

Thay mỗi phân số trong từng nhóm bằng phân số nhỏ nhất trong nhóm ta có:

$$A > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \cdot 2 + \frac{1}{2^3} \cdot 2^2 + \dots + \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{n}{2} - \frac{1}{2^n} > \frac{n}{2}$$

$$\text{Vậy } \frac{n}{2} < A < n.$$

21.17. Với bốn số thực a, b, c, d hãy chứng minh:

$$(1 + ab)^2 + (1 + cd)^2 + (ac)^2 + (bd)^2 \geq 1$$

(Đề thi Olympic Toán học Thành phố Leningrat, năm 1985)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$(1 + ab)^2 + (1 + cd)^2 + (ac)^2 + (bd)^2$$

$$= 1 + 2ab + a^2b^2 + 1 + 2cd + c^2d^2 + 2(ac) \cdot (bd) + (ac)^2 - 2abcd + (bd)^2$$

$$= 1 + (1 + ab + cd)^2 + (ac - bd)^2 \geq 1.$$

21.18.

a) Cho $A = \frac{x^3}{1+y} + \frac{y^3}{1+x}$ trong đó x, y là các số dương thỏa $xy = 1$.

Chứng minh rằng $A \geq 1$.

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 quận 9, TP Hồ Chí Minh, năm 2011 – 2012)

b) Cho ba số dương a, b, c chứng minh

$$(3a+b)(2c+a+b) \leq (2a+b+c)^2.$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi Toán 9 quận 9, TP Hồ Chí Minh, năm 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) Do $xy = 1$ nên

$$\begin{aligned} A &= \frac{x^3}{1+y} + \frac{y^3}{1+x} = \frac{x^4 + y^4 + x^3 + y^3}{(1+x)(1+y)} = \frac{(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 + (x+y)(x^2 - xy + y^2)}{1+xy+x+y} \\ &= \frac{(x^2 + y^2)^2 - 2 + (x+y)(x^2 - xy + y^2)}{1+1+x+y}. \text{ Ta có } x^2 + y^2 \geq 2xy = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } A \geq \frac{4 - 2 + (x+y)(2-1)}{2+x+y} = \frac{2+x+y}{2+x+y} = 1 \text{ (đpcm).}$$

b) Áp dụng bất đẳng thức $4xy \leq (x+y)^2$ ta có:

$$4(3a+b)(2c+a+b) \leq (3a+b+2c+a+b)^2 = 4(2a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow (3a+b)(2c+a+b) \leq (2a+b+c)^2 \text{ (đpcm)}$$

21.19. Cho x, y là hai số thực dương. Chứng minh rằng:

$$(1+x^2)(1+y^2) \geq (x+y)(1+xy).$$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên trường ĐHSPTP Hồ Chí Minh, năm 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ ta có

$$\begin{aligned} (x+y)(1+xy) &\leq \frac{(x+y)^2 + (1+xy)^2}{2} = \frac{(1+x^2)(1+y^2) + 2x \cdot 2y}{2} \\ &\leq \frac{(1+x^2)(1+y^2) + (1+x^2)(1+y^2)}{2} = (1+x^2)(1+y^2) \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

21.20. Chứng minh $a^5 + b^5 \geq a^3b^2 + a^2b^3$ biết rằng $a+b \geq 0$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên tỉnh Đồng Nai, năm 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Xét hiệu } a^5 + b^5 - a^3b^2 - a^2b^3 = a^3(a^2 - b^2) - b^3(a^2 - b^2)$$

$$=(a^2 - b^2)(a^3 - b^3)=(a - b)^2(a + b)(a^2 - ab + b^2) \geq 0$$

$$\text{do } a + b \geq 0; (a - b)^2 \geq 0 \text{ và } a^2 - ab + b^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0.$$

21.21. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2}.$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi môn Toán 9 tỉnh Bắc Giang, năm 2012 – 2013)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Ta có: } a^2 + 2b^2 + 3 = (a^2 + b^2) + (b^2 + 1) + 2 \geq 2ab + 2b + 2.$$

$$\text{Tương tự: } b^2 + 2c^2 + 3 \geq 2bc + 2c + 2$$

$$c^2 + 2a^2 + 3 \geq 2ca + 2a + 2.$$

Do đó

$$\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} \right)$$

Với $abc = 1$ thì

$$\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ca + a + 1} = \frac{1}{ab + b + 1} + \frac{ab}{b + 1 + ab} + \frac{b}{1 + ab + b} = 1 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

21.22. Cho các số dương x, y thỏa mãn $x - y = x^3 + y^3$

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 < 1$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên tỉnh Bắc Ninh, năm 2013 – 2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Từ giả thiết } \Rightarrow x - y > 0 \Rightarrow x - y = x^3 + y^3 > x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

$$\text{Vậy } x - y > (x - y)(x^2 + xy + y^2) \Rightarrow x^2 + xy + y^2 < 1 \Rightarrow x^2 + y^2 < 1 \text{ (đpcm).}$$

21.23. Cho ba số dương x, y, z . Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{2x + y + z} + \frac{y}{x + 2y + z} + \frac{z}{x + y + 2z} \leq \frac{3}{4}.$$

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên trường ĐHSPTP Hồ Chí Minh, năm 2013 – 2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

$$\text{Từ } 4ab \leq (a + b)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{a + b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \text{ với } a > 0; b > 0$$

$$\text{Ta có } \frac{x}{2x + y + z} = \frac{x}{(x + y) + (x + z)} \leq \frac{x}{4} \left(\frac{1}{x + y} + \frac{1}{x + z} \right)$$

Tương tự với $\frac{y}{x+2y+z}$ và $\frac{z}{x+y+2z}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{2x+y+z} + \frac{y}{x+2y+z} + \frac{z}{x+y+2z} &\leq \frac{x}{4} \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} \right) + \frac{y}{4} \left(\frac{1}{y+x} + \frac{1}{y+z} \right) + \frac{z}{4} \left(\frac{1}{z+y} + \frac{1}{z+x} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{x+y}{x+y} + \frac{x+z}{x+z} + \frac{y+z}{y+z} \right) = \frac{3}{4} \Rightarrow (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

21.24.

a) Chứng minh rằng nếu $x \geq y \geq 1$ thì $x + \frac{1}{x} \geq y + \frac{1}{y}$;

b) Cho $1 \leq a, b, c \leq 2$ chứng minh rằng $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \leq 10$.

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng, năm 2013 – 2014)

Hướng dẫn giải – đáp số

a) $x + \frac{1}{x} \geq y + \frac{1}{y} \Leftrightarrow x - y + \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-y)(xy-1)}{xy} \geq 0$ đúng vì $x \geq y \geq 1$.

b) Do vai trò a, b, c như nhau, giả sử $1 \leq a \leq b \leq c \leq 2$;

Đặt $x = \frac{b}{a}$; $y = \frac{c}{b}$ với $1 \leq x, y \leq 2$; $xy \leq 2 \Rightarrow y \leq \frac{2}{x}$.

Xét hiệu hai vế và áp dụng kết quả câu a) ta có:

$$\begin{aligned} (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) - 10 &= \left(x + \frac{1}{x} \right) + \left(y + \frac{1}{y} \right) + \left(xy + \frac{1}{xy} \right) - 7 \\ &\leq \left(x + \frac{1}{x} \right) + \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{2} \right) + \left(2 + \frac{1}{2} \right) - 7 = \frac{3x}{2} + \frac{3}{x} - \frac{9}{2} = \frac{3(x-1)(x-2)}{2x} \leq 0 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=2$ đồng thời $xy=2$

$\Leftrightarrow (a, b, c) = (1; 1; 2); (1; 2; 2)$ và các hoán vị.

21.25. Cho hai số thực a và b thỏa mãn $a+b=2$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 \leq a^4 + b^4.$$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên Toán trường ĐHSPTP Hồ Chí Minh, năm 2014 – 2015)

Hướng dẫn giải – đáp số

Ta có $(a+b)^2 \leq (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

Tương tự $(a^2 + b^2)^2 \leq 2(a^4 + b^4) \Rightarrow (a+b)^2 (a^2 + b^2)^2 \leq 4(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$

Mà $(a+b)^2 = 4 \Rightarrow (a^2 + b^2)^2 \leq (a^2 + b^2)(a^4 + b^4) \Rightarrow a^2 + b^2 \leq a^4 + b^4$.

21.26. Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{3}{4}.$$

(Đề thi học sinh giỏi lớp 9 trường PTTH Trần Đại Nghĩa, TP Hồ Chí Minh, năm học 2014 – 2015).

Hướng dẫn giải – đáp số

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ với $x > 0; y > 0$ và sử dụng giả thiết $abc = 1$ ta có:

$$\frac{1}{ab+a+2} = \frac{1}{(ab+1)+(a+1)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{ab+1} + \frac{1}{a+1} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{abc}{ab+abc} + \frac{1}{a+1} \right) \text{ hay}$$

$$\frac{1}{ab+a+2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{c}{c+1} + \frac{1}{a+1} \right) \quad (*); \text{ Tương tự } \frac{1}{bc+b+2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a}{a+1} + \frac{1}{b+1} \right) \quad (**);$$

$$\frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{b}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right) \quad (***). \text{ Cộng vế với vế của ba bất đẳng thức cùng chiều } (*), (**) \text{ và } (***) \text{ ta}$$

$$\text{có: } \frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{3}{4}.$$