**ĐỀ TOÁN ĐỀ NGHỊ GỬI BTC THI DUYÊN HẢI BẮC BỘ NĂM 2023**

**Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn-Bình Định.**

**LỚP 11**

**Bài 1.** Cho dãy số được xác định 

 Chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn. Tìm 

**Bài 2.** Tìm tất cả đa thức  thỏa mãn: 

**Bài 3.** Tìm tất cả các số nguyên tố  sao cho

 và .

**Bài 4.** Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp trong đường tròn (*O*) sao cho *AB* cắt *CD* tại *E* và *AD* cắt *BC* tại *F*, gọi *G* là giao điểm của *AC* và *BD*. Các đường tròn (*ADE*) và (*CDF*) cắt nhau tại *D* và *H*. Phân giác trong góc  cắt *AB, AD* lần lượt tại *I, J* và phân giác trong góc  cắt *CB*, *CD* lần lượt tại *K, L*. Gọi *M, M’* là giao điểm của *BH* với *AD, CD* tương ứng, *N, N’* là giao điểm của *DH* với *BC, BA* tương ứng. Chứng minh *IL, KJ, MN* và *M’N’* đồng quy tại *G*.

**Bài 5.** Cho tập hợp X là một tập hợp con của tập các số nguyên dương sao cho trong 2023 số tự nhiên liên tiếp bất kì luôn có một số thuộc tập X. Chứng minh rằng tồn tại hai số trong X sao cho số này chia hết cho số kia.

**Người soạn :**

Thầy: Đào Xuân Luyện ( Các bài 1,2,5)

Thầy:Nguyễn Hữu Tâm ( bài 4)

Thầy: Trà Quốc Anh ( bài 3)

**ĐỀ TOÁN ĐỀ NGHỊ GỬI BTC THI DUYÊN HẢI BẮC BỘ NĂM 2023**

**LỚP 11**

**Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn-Bình Định.**

**Bài 1.** Cho dãy số được xác định 

 Chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn. Tìm 

**Giải:**

Trước hết, ta chứng minh  (1) bằng phương pháp quy nạp.

 \* Hiển nhiên 

 \* Với ,ta có



Do đó  với mọi số nguyên dương 

Tiếp theo, ta chứng minh dãy số là dãy giảm hay bằng phương pháp quy nạp.

\* Với .

\* Giả sử 

Khi đó xét hiệu



Vì (gt quy nạp) và nên

Từ đó suy ra dãy số giảm và bị chặn dưới nên theo nguyên lý Weierstrat dãy số có giới hạn hữu hạn.Đặt .

Từ hệ thức truy hồi cho  dần đến dương vô cực ta có phương trình



Kết hợp với điều kiện của ta có 

Vậy 

**Bài 2.** Tìm tất cả đa thức  thỏa mãn: 

**Lời giải:** Trước hết chúng ta cần tìm số thực *a* là nghiệm của phương trình;



Với  thì a thỏa  hay .

* Giả sử đa thức  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trong (1) thay  ta có:





Giả sử  là đa thức khác hằng, khi đó  với và  thỏa 

Do  nên ta viết  dưới dạngvới

Thay vào (1) ta được

.

Hay

 (2)

Vì ,  nên (2) được viết thành



Trong (3) thay *x=a* ta có:

vì )

Hay  điều này không xảy ra với mọi số nguyên dương n

Do đó 

Thử lại thỏa mãn yêu cầu bài toán

Vậy hoặc

**Bài 3.** Tìm tất cả các số nguyên tố  sao cho

 và .

**Lời giải:**Vì vai trò của như nhau nên không mất tính tổng quát, giả sử .

● Nếu , ta có:

 (1) và  (2).

Từ (1) suy ra  là số chẵn nên có .Thử lại  là cặp số thỏa mãn.

● Nếu , vì lẻ nên do đó  có ít nhất một ước là số lẻ. Gọi  là một ước nguyên tố lẻ của (\*). Từ giả thiết suy ra

 (mod )  (mod ).

Đặt , khi đó . Mà ta có  (mod ) nên . Từ đó suy ra  hoặc .

- TH1:  khi đó . Vì  lẻ nên  hoặc .

 +) Xét , vì  (mod 3) nên  (điều này mâu thuẫn với (\*))

 +) Xét , theo định lí Fermat nhỏ .

Nếu  thì  (mâu thuẫn (\*)).

Nếu  thì , suy ra  (vô lí vì *m* là số nguyên tố).

- TH2: , theo định lí Fermat nhỏ ta có

,

suy ra , do đó . Điều này nghĩa là các ước nguyên tố lẻ của  đều chia cho  dư 1 và hơn nữa , từ đây suy ra .

Suy ra  hay  hoặc . Vì  nên . Do đó , nhưng điều này mâu thuẫn với .

Vậy  là cặp số duy nhất thỏa mãn.

**Bài 4.** Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp trong đường tròn (*O*) sao cho *AB* cắt *CD* tại *E* và *AD* cắt *BC* tại *F*, gọi *G* là giao điểm của *AC* và *BD*. Các đường tròn (*ADE*) và (*CDF*) cắt nhau tại *D* và *H*. Phân giác trong góc  cắt *AB, AD* lần lượt tại *I, J* và phân giác trong góc  cắt *CB*, *CD* lần lượt tại *K, L*. Gọi *M, M’* là giao điểm của *BH* với *AD, CD* tương ứng, *N, N’* là giao điểm của *DH* với *BC, BA* tương ứng. Chứng minh *IL, KJ, MN* và *M’N’* đồng quy tại *G*.

**Lời giải :**



***Lời giải.*** Trước hết ta chứng minh *H, E, F* thẳng hàng. Thật vậy, do các tứ giác *ABCD, AEHD, CFHD* nội tiếp nên ta có

 

Suy ra *H, E, F* thẳng hàng.

Xét hai tam giác *HCB* và *HAD*, ta có

 

(Để ý *H* là điểm Miquel của tứ giác toàn phần *ABCDEFG*)

 

Suy ra hai tam giác *HCB* và *HDA* đồng dạng. Do đó

 

Dễ thấy  nên 

Theo giả thiết thì *HL, HI* lần lượt là phân giác trong của  nên ta lại có



Từ (1), (2), (3) ta được  và . Suy ra *GI, GL* tương ứng là phân giác trong các góc  và . Mà hai góc nay là hai góc đối đỉnh nên *G, I, L* thẳng hàng.

Tiếp theo ta cần chứng minh *KJ* và *MN, M’N’* cũng qua *G*. Xét hai tam giác *AIJ* và *CKL* ta có *CK* cắt *AJ* tại *F, IJ* cắt *KL* tại *H, IA* cắt *LC* tại *E*. Mà *H, F, E* thẳng hàng nên theo định lý Desargues thì *AC, JK, IL* đồng quy tại *G.*

Lại xét hai tam giác *FAC* và *HBD* có *FH, AB, CD* đồng quy. Mà *FA* cắt *HB* tại *M, AC* cắt *BD* tại *G, FC* cắt *HD* tại *N* nên theo định lý Desargues thì *M, N, G* thẳng hàng. 

Tương tự thì *M’N’* cũng qua *G*. Vậy các đường thẳng *MN, M’N’, IL, KJ* đồng quy tại *G*.

**Bài 5.** Cho tập hợp X là một tập hợp con của tập các số nguyên dương sao cho trong 2023 số tự nhiên liên tiếp bất kì luôn có một số thuộc tập X. Chứng minh rằng tồn tại hai số trong X sao cho số này chia hết cho số kia.

**Lời giải :**

Xét một bảng gồm 2023 cột và 2024 hàng
Ta điền các số vào trong bảng theo quy tắc sau :

* Trong hàng đầu tiên ta điền từ trái qua phải các số $1,2,…,2023$.
* Giả sử trong hàng thứ  được điền các số ( từ trái sang phải) là 
* Đặt  Ta điền các số ( từ trái sang phải) vào hàng thứ  các số 
Như vậy ta được một bảng gồm 2023 cột và 2024 hàng thỏa mãn hai tính chất sau :

1)Mỗi hàng đều chứa 2023 số nguyên dương liên tiếp

2)Trong mỗi cột, số ở hàng j+1 chia hết cho hàng thứ j với mọi 

Theo giả thiết,, trong mỗi hàng luôn chứa một phần tử của tập hợp X. Do 2024>2023 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại 2 phần tử của X nằm cùng một cột. Từ tính chất 2) của bảng đang xét ta có đpcm.

**Người soạn :**

Thầy: Đào Xuân Luyện ( Các bài 1,2,5)

Thầy:Nguyễn Hữu Tâm ( bài 4)

Thầy: Trà Quốc Anh ( bài 3)