www.vnmath.com

TUYỂN TẬP
CÁC CHUYÊN ĐỀ HÌNH HỌC
TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

SỬ DỤNG TỌA ĐỘ VECTƠ ĐỂ GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN ĐẠI SỐ

ĐỖ THANH SƠN

(GV Khối chuyên Toán – Tin, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Bài viết này đề cập một phương pháp giải một số dạng toán về đại số như chứng minh bất đẳng thức, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức chứa các căn thức bậc hai, giải phương trình, ... Vấn đề này không mới! Bạn đọc có thể đã biết trong một số tài liệu hiện hành (dưới dạng các bài tập), nhưng còn tản mạn chưa được hệ thống. Bài viết này cố gắng hệ thống hóa vấn đề, giúp bạn đọc có thể vận dụng phương pháp xác định tọa độ vectơ, hoặc tọa độ điểm giải quyết các dạng toán nói trên. Trước hết chúng ta nhắc lại vài điểm cơ bản về vectơ trong hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxy.

Cho ba vectơ $\vec{u} = (x_1, y_1)$; $\vec{v} = (x_2, y_2)$; $\vec{w} = (x_3, y_3)$ thỏa mãn điều kiện $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$ (hoặc $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$) (*). Khi đó

Độ dài các vectơ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ lần lượt là

$u = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$, $v = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$, $w = \sqrt{x_3^2 + y_3^2}$.

Ta biết rằng với điều kiện (*) thì $u + v \geq w$ hay $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \geq \sqrt{x_3^2 + y_3^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v}$, hay $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$. Kết quả đó gợi cho ta thiết lập mối quan hệ giữa các biểu thức đại số trong bài toán đang xét với độ dài của các vectơ trong mặt phẳng tọa độ.

Phương pháp. *Khi gặp các bài toán đại số mà mỗi biểu thức dưới dấu căn bậc hai $\sqrt{A}, \sqrt{B}, \ldots$ được biểu diễn dưới dạng tổng của hai bình phương $\sqrt{A} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$, $\sqrt{B} = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}, \ldots$ Ta thiết lập các vectơ có tọa độ thích hợp trên hệ trục tọa độ Descartes Oxy sao cho độ dài các vectơ đó tương ứng bằng $\sqrt{A}, \sqrt{B}, \ldots$ Sau đó nghiệm lại rằng tổng các vectơ bằng vectơ không (hoặc có một vectơ bằng tổng các vectơ còn lại), rồi sử dụng bất đẳng thức (BĐT) về độ dài ba cạnh của tam giác hoặc BĐT về độ dài đường gấp khúc để đi đến kết quả bài toán.*

Để làm rõ cho phương pháp, chúng tôi xin đưa ra một số thí dụ minh họa sau đây.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng với mọi số thực x ta có* $\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq 2\sqrt{2}$.

Lời giải. Vế trái của BĐT có thể viết dưới dạng $\sqrt{(x+1)^2 + 1} + \sqrt{(x-1)^2 + 1}$. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy chọn $\vec{u} = ((x+1), 1)$; $\vec{v} = ((1-x), 1)$; $\vec{w} = (2, 2)$. Khi đó $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$;

$u = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$; $v = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$; $w = 2\sqrt{2}$.

Từ BĐT tam giác $u + v \geq w$ ta có điều cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

Thí dụ 2. *Với a, b là các số thực tùy ý. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{2b^2 - 6b + 9} + \sqrt{2b^2 - \frac{10ab}{3} + \frac{13a^2}{9}} + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{13a^2}{9} - 4a + 4} \geq \frac{15\sqrt{13}}{13} \qquad (1)$$

Lời giải. Ta biến đổi các biểu thức

$\sqrt{2b^2 - 6b + 9} = \sqrt{b^2 + (b-3)^2}$;

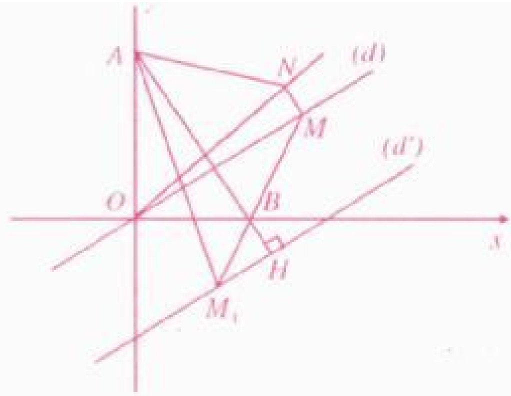
$\sqrt{2b^2 - \frac{10ab}{3} + \frac{13a^2}{9}} = \sqrt{(b-a)^2 + \left(b - \frac{2a}{3}\right)^2}$.

Xét các điểm $M\left(a, \frac{2a}{3}\right)$; $N(b, b)$; $A(0, 3)$; $B(2, 0)$ và lập các vectơ $\overrightarrow{AN} = (b, b-3)$;

$\overrightarrow{MN} = \left(b - a, b - \frac{2a}{3}\right)$; $\overrightarrow{BM} = \left(a - 2, \frac{2a}{3}\right)$.

Khi đó $AN = \sqrt{b^2 + (b-3)^2}$;

$MN = \sqrt{(b-a)^2 + \left(b - \frac{2a}{3}\right)^2}$; $BM = \sqrt{\frac{13a^2}{9} - 4a + 4}$.



Giả sử M_1 là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{BM} = -2\overrightarrow{BM_1}$ (2) ; (d) là đường thẳng có phương trình (PT) : $2x - 3y = 0$ đi qua M ; $(d') \parallel (d)$ và (d') đi qua M_1. Từ (2) ta xác định được $MM_1 = \frac{3}{2}BM$ và PT của (d') là $2x - 3y - 9 = 0$. Gọi H là giao điểm của (d') với AB, ta thấy $AB \perp (d')$ tại H và $AH = \frac{15\sqrt{13}}{13}$. Theo BĐT về độ dài đường gấp khúc ta có

$$AN + NM + MM_1 \geq AM_1 \geq AH = \frac{15\sqrt{13}}{13}.$$

BĐT (1) được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi M là giao điểm của (d) với AB, còn N là giao điểm của AB với đường $y = x$. Tọa độ của M là nghiệm của hệ PT :

$$\begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{18}{13}, \frac{12}{13}\right), \text{ lúc đó } a = \frac{18}{13}.$$

Tọa độ của N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + 2y - 6 = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right), \text{ lúc đó } b = \frac{6}{5}.$$

Tóm lại, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$(a, b) = \left(\frac{18}{13}, \frac{6}{5}\right).$$

Thí dụ 3. *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số*

$$F(x) = \sqrt{2}\,|\cos x| + |\sin x + \cos x|.$$

Lời giải. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, ta chọn điểm $A(\cos x, 0)$; $B(0, \cos x)$; $C(-\sin x, 0)$ và lập các vectơ $\overrightarrow{AB} = (-\cos x, \cos x)$; $\overrightarrow{BC} = (-\sin x, -\cos x)$; $\overrightarrow{CA} = (\cos x + \sin x, 0)$.

Ta có $AB = \sqrt{2}\,|\cos x|$; $BC = 1$; còn $CA = |\sin x + \cos x|$. Theo BĐT tam giác $AB + CA \geq BC$, suy ra $F(x) \geq 1$. Do đó giá trị nhỏ nhất của hàm số $F(x)$ là 1, đạt được khi và chỉ khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Thí dụ 4. *Giải phương trình*

$$\left|\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 6x + 10}\right| = \sqrt{5}.$$

Lời giải. PT đã cho có thể viết lại dưới dạng

$$\left|\sqrt{(x-1)^2 + 4} - \sqrt{(x-3)^2 + 1}\right| = \sqrt{5} \qquad (1)$$

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, lập các vectơ $\vec{u} = (x - 1, 2)$, $\vec{v} = (x - 3, 1)$, suy ra $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v} = (2, 1)$. Hiển nhiên rằng $w = \sqrt{5}$. Áp dụng BĐT tam giác ta có $|u - v| \leq w$ (2). Từ (1), (2) ta thấy việc giải PT (1) được chuyển về giải PT $\frac{x-1}{2} = x - 3$. PT này có nghiệm $x = 5$. Vậy PT đã cho có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Chúng ta tiếp tục sử dụng phương pháp trên vào bài toán chứng minh BĐT với các biến ràng buộc.

Thí dụ 5. *Chứng minh*

$$\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}\right)$$

trong đó a, b, c, d là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{|bc - ad|}{|ac + bd|} = \sqrt{3}$.

Lời giải. Điều kiện ràng buộc của bài ra có thể viết dưới dạng $\left|\dfrac{\frac{b}{a} - \frac{d}{c}}{1 + \frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}}\right| = \sqrt{3}$.

Đặt $k_1 = \frac{b}{a} > 0$; $k_2 = \frac{d}{c} > 0$ khi đó $b = k_1 a$; $d = k_2 c$. Xét các điểm $A(a, b)$ thuộc nửa đường thẳng $y = k_1 x$ và $B(c, d)$ thuộc nửa đường thẳng $y = k_2 x$ (với $x > 0$) trên mặt phẳng tọa độ Oxy. Trong tam giác OAB (O là gốc tọa độ) mà $\widehat{AOB} = 60^\circ$ ta có BĐT : $AB \geq \frac{1}{2}(OA + OB)$, trong đó $OA = \sqrt{a^2 + b^2}$; $OB = \sqrt{c^2 + d^2}$; còn $AB = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$.

Từ đó ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $OA = OB \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Để kết thúc bài báo xin mời các bạn tự thử sức mình với các bài toán sau :

1. Chứng minh rằng :

a) $\sqrt{x^2+4}+2\sqrt{x^2-4x+5} \ge 5$

với mọi $x \le \dfrac{4}{3}$;

b) $\sqrt{x^2+4}+\dfrac{3}{2}\sqrt{x^2+2x+2} \ge \dfrac{7\sqrt{5}}{6}$

với mọi $x \ge -\dfrac{2}{3}$;

(HD: Chọn A (0, 2); $B(-1, -1)$; M (x, 0); còn M_1 là điểm xác định bởi $\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{BM_1}$).

c) $\sqrt{a^2-4a+8}$ + $\sqrt{10b^2-18b+9}$ + $\sqrt{10b^2-2ab+a^2} \ge \sqrt{29}$

với mọi số thực a, b.

(HD: Chọn $A(0, 3)$; $B(2, -2)$; $M(b, 3b)$, $N(a, 0)$)

d) $\sqrt{10x^2-24x+16}+\sqrt{13y^2-18xy+10x^2}$ $+\sqrt{13y^2-6yz+z^2}+\sqrt{z^2-12z+40} \ge 6\sqrt{2}$

với mọi x, y, z.

(HD: Chọn $A(-2, 6)$; $B(4, 0)$; $M(0, z)$; $N(2y, 3y)$; $P(3x, x)$).

e) $\sqrt{5b^2-8b+4}+\sqrt{5b^2-8ab+5a^2}$ $+\ 2\sqrt{5a^2-4a+1} \ge \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ với mọi a, b.

2. Giải phương trình

$\left|\sqrt{x^2+4x+13}-\sqrt{x^2-2x+2}\right| = 5.$

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

a) $P = \sqrt{2}\,|\sin x|+|\sin x-\cos x|$;

b) $Q = \sqrt{x^2-4x+13}+\sqrt{x^2+6x+10}$;

c) $R = \sqrt{4a^2-2\sqrt{3}+1}+\dfrac{4}{3}\sqrt{4a^2-2\sqrt{3}a+3}$.

(HD: Chọn $A(0, 1)$; B $(\sqrt{3}, 0)$; $M(a, \sqrt{3}a)$).

DÙNG TÍNH CHẤT TIẾP TUYẾN BA ĐƯỜNG CÔNIC ĐỂ GIẢI TOÁN

PHAN CUNG ĐỨC
(GV khối PTCTT, ĐHKHTN–ĐHQG Hà Nội)

Ba đường cong Elip (E) : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, Hyperbol (H) : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ và Parabol (P): $y^2 = 2px$ thường được gọi chung là ba đường cônic vì đó là ba nghiệm hình thu được khi cắt mặt nón tròn xoay (cone) bằng một mặt phẳng. Ở bài này, chúng tôi sử dụng các khái niệm, các kí hiệu, các phương trình (PT) dạng chính tắc... của chúng đã được xây dựng trong sách giáo khoa (SGK).

Khi giải một bài toán có liên quan đến tiếp tuyến của ba đường cônic, học sinh thường có thói quen sử dụng "Phương pháp giải tích", nghĩa là xuất phát từ PT của tiếp tuyến, viết PT các đường có liên quan, tìm tọa độ của một điểm bằng cách giải hệ PT hai đường đi qua điểm đó, tìm quỹ tích của điểm chuyển động bằng cách tìm PT của đường quỹ tích... Đây là một phương pháp cơ bản, dễ trình bày nhưng thường nặng về tính toán và rất dễ bị nhầm lẫn. Do đó, chúng tôi muốn trao đổi thêm một phương pháp khác, đó là "Phương pháp hình học". Chúng ta sẽ khai thác các tính chất hình học của tiếp tuyến để có lời giải thuần túy hình học, trình bày gọn gàng hơn và ít tính toán hơn. Vì thế, sẽ tiết kiệm được thời gian khi làm bài và nhất là trong phòng thi.

Cơ sở lí luận của phương pháp này là định lí đã được trình bày trong các bộ SGK cũ, chẳng hạn cuốn Hình học 12 (GS. Văn Như Cương chủ biên).

Định lí. *Cho điểm M tùy ý thuộc đường cônic (C). Gọi (t) là tiếp tuyến qua M đối với (C). Khi đó*

1) Nếu (C) là (E) thì (t) là phân giác ngoài của góc F_1MF_2.

2) Nếu (C) là (H) thì (t) là phân giác trong của góc F_1MF_2.

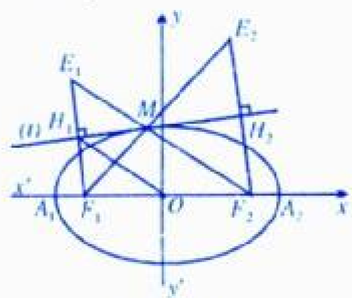
3) Nếu (C) là (P) thì (t) là phân giác trong của góc F_1MF_2.

(H là hình chiếu vuông góc của M lên đường chuẩn (d)).

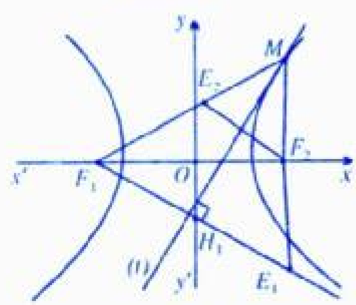
Các kết quả sau nhận được trực tiếp từ định lí trên. Có thể chứng minh các kết quả này bằng phương pháp giải tích. Các bạn hãy thử xem.

Kết quả 1. (*Nếu (C) là (E) hoặc (H)*).

Gọi E_1, E_2 theo thứ tự là các điểm đối xứng của F_1, F_2 qua (t) thì E_1, M, F_2 (hoặc E_2, M, F_1) thẳng hàng và $F_1E_2 = F_2E_1 = 2a$ (xem h.1 và h.2).



Hình 1



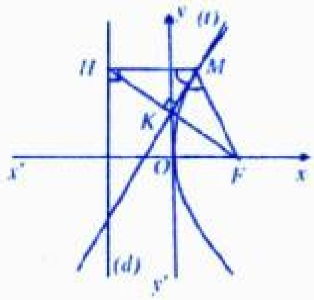
Hình 2

Từ đó nếu cho M chuyển động trên (C) thì quỹ tích của E_1 là đường tròn tâm F_2 bán kính

$2a$ (kí hiệu (F_1; $2a$)) và của E_2 là đường tròn (F_1; $2a$). Ngoài ra, nếu gọi H_1, H_2 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của F_1, F_2 lên (t) thì quỹ tích của H_1 và H_2 là đường tròn (O; a).

Kết quả 2. (*Nếu (C) là (P)*).

Gọi H là điểm đối xứng của F qua (t) thì H thuộc đường chuẩn (d). Gọi K là hình chiếu vuông góc của F lên (t) thì K thuộc trục tung (h. 3).

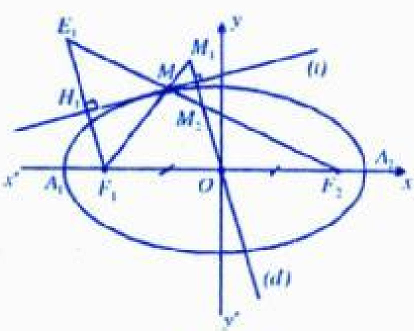


Hình 3

Bây giờ chúng ta đưa một vài thí dụ minh họa.

Thí dụ 1. *Giả sử M là điểm thuộc (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ và (t) là tiếp tuyến qua M đối với (E). Đường thẳng (d) qua O, vuông góc với (t) cắt MF_1, MF_2 lần lượt ở M_1, M_2. Tìm quỹ tích của các điểm M_1 và M_2* khi M thay đổi trên (E).

Lời giải. (h.4). Vì khi M thay đổi trên (E), (d) $\perp$ (t) nên $d // F_1E_1$ dẫn đến M_2 là trung điểm của E_1F_2 nên $F_2M_2 = \frac{1}{2}F_2E_1 = a$. Vậy quỹ tích của M_2 là đường tròn (F_2; a).



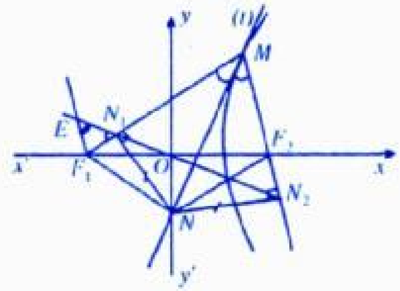
Hình 4

Tương tự, quỹ tích của M_1 là đường tròn (F_1; a).

(Các bạn tự làm phần đảo).

Thí dụ 2. *Cho điểm M tùy ý thuộc (H): $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ và (t) là tiếp tuyến của (H) qua M. (t) cắt trục tung ở N. Gọi N_1, N_2 là hình chiếu vuông góc của N lên MF_1, MF_2. Chứng minh đường thẳng (N_1N_2) đi qua một điểm cố định khi M thay đổi trên (H).*

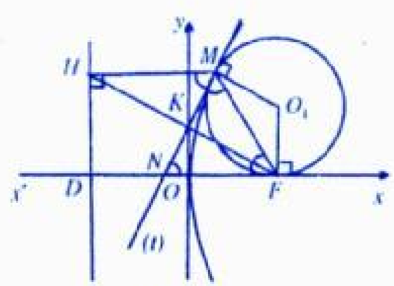
Lời giải. (h. 5). Đường thẳng qua F_1 song song với MF_2 cắt N_1N_2 tại E. Từ định lí trên ta thấy ΔMN_1N_2 cân tại M suy ra ΔEF_1N_1 cân tại $F_1 \Rightarrow F_1E = F_1N_1$ mà $\Delta NN_1F_1 = \Delta NN_2F_2 \Rightarrow F_1N_1 = F_2N_2$. Vậy $F_1E = F_2N_2$, dẫn đến tứ giác $F_1EF_2N_2$ là hình bình hành. Do đó hai đường chéo của nó cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường. Vậy N_1N_2 luôn qua điểm O cố định (đpcm).



Hình 5

Thí dụ 3. *Cho parabol (P): $y^2 = 2px$. Hãy dựng đường tròn (O_1) vừa tiếp xúc với tia Ox tại tiêu điểm F vừa tiếp xúc với (P).*

Lời giải. (h. 6) Giả sử đường tròn (O_1) tiếp xúc với (P) tại M. Tiếp tuyến chung (t) của (P) và đường tròn (O_1) qua M cắt trục hoành ở N. Do (t) là phân giác trong của $\widehat{HMF}$ nên $\widehat{NMF}=\widehat{FNM}$. Mặt khác $NM = NF$ nên ΔNMF đều, suy ra $\widehat{MFN} = 60^0$.



Hình 6

Vậy điểm M là giao điểm của (P) với đường thẳng cố định đi qua F, lập với tia FO một góc 60^0 với (P). Từ đó tâm O_1 xác định và suy ra cách dựng đường tròn (O_1). Bài toán có hai nghiệm hình đối xứng nhau qua Ox.

Các bạn hãy giải lại các thí dụ trên bằng phương pháp giải tích để có sự so sánh giữa hai phương pháp.

NHỮNG CÁCH TIẾP CẬN MỘT BÀI TOÁN TỪ NHIỀU GÓC ĐỘ KHÁC NHAU

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT
(Hà Nội)

Trong kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT môn Toán, Bảng A năm học 2004–2005 có một bài toán hình học phẳng (bài 2) mà đề và đáp án đã được giới thiệu trên tạp chí THTT số 340, tháng 10/2005. Bài viết này giới thiệu với bạn đọc những cách tiếp cận và khai thác bài toán đó dưới những góc độ khác nhau. Để bạn đọc dễ theo dõi, trước hết xin nhắc lại nội dung đề toán.

Bài 2. *Trong mặt phẳng cho đường tròn (O) tâm O bán kính R và hai điểm A, B cố định trên đường tròn đó sao cho chúng không thẳng hàng với O. Xét một điểm C trên (O), C không trùng với A và B. Dựng các đường tròn sau: (O_1) đi qua A và tiếp xúc với BC tại C, và (O_2) đi qua B, tiếp xúc với AC tại C. Hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt lại nhau ở điểm D khác C. Chứng minh rằng :*

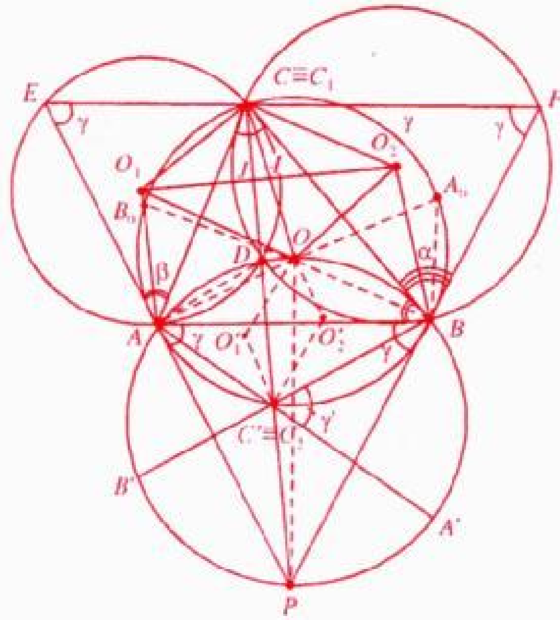
1) $CD \le R$;

2) Đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định khi C di động trên (O) và C không trùng với A và B.

Lời giải 1. Đó chính là đáp án của bài toán trên THTT số 340. Đáp án này là một phương án giải của bài toán, trong đó sử dụng đến định lí sin, định lí côsin và công thức biến đổi lượng giác (Hình học 10).

Lời giải này không đòi hỏi vẽ thêm hình phụ mà vẫn lập luận chặt chẽ khi xét đầy đủ hai trường hợp về góc $\widehat{ACB}$ có thể nhọn hay tù, tuy việc đòi hỏi cần thiết phải huy động đến các định lí sin và côsin không được tự nhiên cho lắm. Vì vậy, chúng ta có cơ sở để tin chắc rằng có nhiều cách nhìn (tiếp cận) bài toán từ những góc độ khác nhau sao cho lời giải đưa ra được tự nhiên hơn.

Lời giải 2. 1) Theo giả thiết thì các cặp đoạn thẳng O_1C, OO_2 và O_2C, OO_1 theo thứ tự vuông góc với BC và CA. Từ đó suy ra OO_1CO_2 là một hình bình hành, vì vậy trung điểm I của OC cũng là trung điểm của O_1O_2. Mặt khác, O_1O_2 là đường trung trực của CD, cắt CD tại trung điểm J của nó. Từ đó suy ra $IJ // OD$ và tam giác OCD là vuông ở D. Bởi vậy ta có $CD \le OC = R$, đpcm. Ngoài ra, dễ thấy rằng: $CD_{max} = R \Leftrightarrow D \equiv O \Leftrightarrow OC \perp AB$.



2) Vì B không đối xứng với A qua O nên dây AB chia đường tròn (O) thành hai cung: cung lớn $\overset{\frown}{A\gamma B}$ chứa góc nhọn γ và cung nhỏ $\overset{\frown}{A\gamma' B}$ chứa góc tù $\gamma' = 180^0 - \gamma$. Ta xét hai trường hợp:

• Nếu $C \in \overset{\frown}{A\gamma B}$ thì $\widehat{ACB} = \gamma < 90^0$; khi đó O và D nằm cùng phía với C đối với AB. Gọi C' là giao điểm thứ hai của tia CD và (O), thế thì D thuộc đoạn CC' và tia DC' nằm trong góc (giữa hai tia) $\widehat{ADB}$. Góc $\widehat{CDA}$ là góc nội tiếp của đường tròn (O_1) chắn *cung bù* của cung $\overset{\frown}{ADC}$ nên $\widehat{CDA} = 180^0 - \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{ADC}$. Bởi vậy góc $\widehat{ADC'}$ kề bù của $\widehat{CDA}$ có số đo $\widehat{ADC'} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{ADC}$ và do đó $\widehat{ADC'} = \widehat{ACB}$, trong đó góc (giữa hai tia) $\widehat{ACB}$ là góc *nội tiếp* của đường tròn (O_1) có một cạnh chứa dây cung CA của (O_1) và cạnh kia là tia tiếp tuyến CB tại C của (O_1).

(Chính vì lẽ đó mà ta cũng xem và gọi góc (giữa hai tia) $\widehat{ADC'}$, kề bù của $\widehat{CDA}$ có một

cạnh chứa dây DA và cạnh kia DC' mà tia đối của nó chứa dây DC của (O_1) là *góc nội tiếp suy rộng chắn cung* $\widehat{ADC}$ *của đường tròn* (O_1) *ngoại tiếp* ΔCDA). Với cách quan niệm đó và lập luận tương tự, ta được: $\widehat{C'DB} = \widehat{ACB}$ (hai góc *nội tiếp* của (O_2) cùng chắn cung $\widehat{CDB}$). Từ đó $\widehat{ADB} = \widehat{AOB}$ và D *thuộc cung* $\widehat{AOB}$ *chứa góc* $\widehat{AOB} = 2\gamma$ của đường tròn (AOB), đồng thời đường thẳng DC' cũng tức là *đường thẳng CD đi qua một điểm cố định là trung điểm P của cung bù của cung* $\widehat{AOB}$ *thuộc đường tròn (AOB).*

• Nếu $C \in \widehat{A\gamma' B}$ thì $\widehat{ACB} = \gamma' = 180^o - \gamma > 90^o$; khi đó D nằm khác phía với C đối với (AB) và do đó, D vẫn nằm cùng phía với O đối với (AB). Trong trường hợp này đối với (O_1) và (O_2) theo thứ tự ta có: $\widehat{ADC} = \widehat{ACB'}$ và $\widehat{CDB} = \widehat{A'CB}$ (bạn đọc tự vẽ hình), trong đó CB' là tia đối của tia CB; CA' là tia đối của tia CA. Mặt khác $\widehat{ACB'} = \widehat{A'CB} = 180^o - \widehat{ACB} = \gamma$. Từ đó $\widehat{ADC}$ $= \widehat{CDB} = \frac{1}{2}\widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$ và các kết luận rút ra trong trường hợp góc $\widehat{ACB}$ nhọn đã xét ở trên vẫn còn nguyên hiệu lực.

Sau đây các phương án giải tiếp theo (chỉ đề cập lời giải phần 2) của bài toán.

Lời giải 3. Rõ ràng lời giải 2 trên đây chỉ đòi hỏi vốn kiến thức hình học môn Toán bậc THCS, nhưng nhất thiết lập luận phải chặt chẽ, xét đầy đủ hai trường hợp về góc $\widehat{ACB}$. Tuy nhiên, nếu sử dụng *góc định hướng giữa hai đường thẳng* [modπ] *và giữa hai vectơ* [mod 2π] thì lời giải sẽ ngắn gọn hơn; ngoài ra, còn dễ dàng chỉ ra được quỹ tích của điểm D. Thật vậy, ta có:

$(DA, DC) = (AD, AC) + (CA, CD) =$
$= (CA, CD) + (CD, CB) = (CA, CB)$ [mod π].

Tương tự

$(DC, DB) = (CD, CB) + (BC, BD) =$
$= (CA, CD) + (CD, CB) = (CA, CB)$ [mod π].

Từ đó suy ra:

$(DA, DB) = 2(DA, DC) = 2(DC, DB) = 2(CA, CB) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ [mod 2π].

Đẳng thức $(DA, DB) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ [mod 2π] nói lên rằng: $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ [mod 2π].

Sau đó, ta dễ dàng kết luận được rằng:
Nếu $\{C\}$ là $(O) \setminus \{A, B\}$ thì $\{D\}$ là $\widehat{AOB} \setminus \{A, B\}$ ($\{C\}$ - kí hiệu tập hợp các điểm C).
Có thể chứng minh điều đó bằng cách chỉ ra rằng nếu một đường thẳng (tia) bất kì đi qua P, cắt (O) ở hai điểm C_1, C_2 và cắt cung $\widehat{AOB}$ ở điểm D thì hai cặp đường tròn (O_1), (O_2) và (O'_1), (O'_2) ứng với hai điểm C_1, C_2 đều nhận D là giao điểm thứ hai, khác C của chúng (xem hình vẽ). Ngoài ra, cũng từ các đẳng thức thu được về góc định hướng, kết luận nêu ra ở lời giải 2 vẫn còn nguyên hiệu lực.

Lời giải 4. Vì C di động trên (O) nhưng $C \notin \{A, B\}$ nên ta lại đặc biệt chú ý đến A và B, hai vị trí bị loại trừ của điểm C. Quan sát khi $C \to A$ (hoặc $C \to B$) ta nhận ra rằng đến khi $C \equiv A$ thì (O_1) trở thành "*đường tròn điểm A*, (CA) trở thành tiếp tuyến (AA) tại A của (O) và (O_2) trùng (O), $D \equiv C \equiv A$ và do đó (CD) cũng chính là (AA). Cũng vậy, cho $C \to B$ đến khi $C \equiv B$ thì $D \equiv C \equiv B$ và khi đó (CD) chính là tiếp tuyến (BB) tại B của (O). Điều đó khiến ta *dự đoán* (CD) đi qua $P = (AA) \cap (BB)$. Gọi E và F theo thứ tự là giao điểm thứ hai của (PA) với (O_1) và của (PB) với (O_2). Thế thì: $\widehat{AEC} = \widehat{ACB} = \gamma = \widehat{CFB}$ rồi đặt $\widehat{BAC} = \alpha$ và $\widehat{CBA} = \beta$ thì $\widehat{ECA} = \alpha$ và $\widehat{BCF} = \beta$ (do $\widehat{PAB} = \widehat{ABP} = \gamma$). Từ đó E, C, F thẳng hàng, $EF // AB$, do đó $AE = BF$. Từ đây suy ra điểm P có cùng phương tích với (O_1) và (O_2); bởi vậy P phải thuộc đường thẳng CD.

Lời giải 5. Vì ba đường thẳng AP, BP và CD đều xuất phát từ các đỉnh của tam giác ABC nên việc chứng minh (CD) đi qua P có thể hi vọng nhờ vào điều kiện đủ của định lí Céva. Bạn đọc có thể tự kiểm nghiệm điều này trên cơ sở định lí Céva dưới dạng lượng giác.

Cuối cùng, điểm C di động trên (O) kéo theo tâm O_i của (O_i) ($i = 1, 2$) cũng chuyển động theo.

Trong khi $\{D\}$ là một cung tròn $\widehat{AOB} \setminus \{A, B\}$ thì $\{O_i\}$ ($i = 1, 2$) lại là đường tròn loại bỏ đi hai điểm. Đề nghị bạn đọc chỉ rõ hai đường tròn, *quỹ tích đó của O_1 và O_2.*

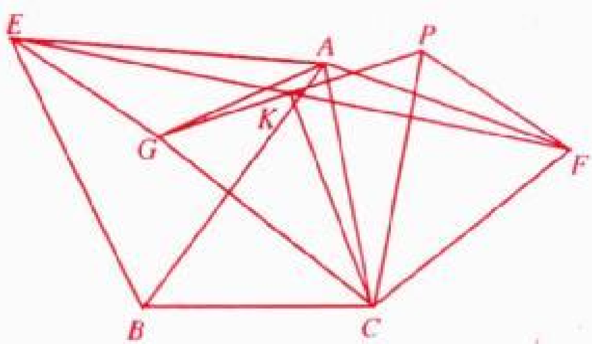
ỨNG DỤNG GÓC ĐỊNH HƯỚNG VÀO VIỆC GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC

NGUYỄN MINH HÀ
(GV ĐHSP Hà Nội)

Trong THTT số 339 (9/2005) và 340 (10/2005), chúng tôi đã giới thiệu với bạn đọc khái niệm góc định hướng của hai vectơ và góc định hướng của hai đường thẳng cùng một vài hệ thức liên quan tới số đo của chúng. Trong bài này, chúng tôi sẽ giới thiệu ứng dụng của góc định hướng trong việc giải một số bài toán hình học. Việc sử dụng góc định hướng sẽ giúp lời giải ngắn gọn, trong khi dùng góc không có hướng phải phụ thuộc vào hình vẽ, phải xét nhiều vị trí tương đối của các hình.

Trong bài này thay cho cách nói bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn, ta nói bốn điểm A, B, C, D *đồng viên*.

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC. Về phía ngoài nó ta dựng các tam giác đều ABE, ACF. Gọi G là tâm tam giác ABE và K là trung điểm của đoạn EF. Chứng minh rằng tam giác KGC vuông và có một góc bằng* 60^o.



Hình 1

Lời giải. Không mất tính tổng quát giả sử (AB, AC) là góc dương (h. 1) Lấy điểm P sao cho K là trung điểm của GP thì tứ giác $EGFP$ là hình bình hành nên $GE = PF$. Từ giả thiết G là tâm tam giác đều ABE, ta có $GA = GE$. Vậy

$$GA = PF \qquad (1)$$

Từ giả thiết tam giác ACF đều, ta có

$$CA = CF \qquad (2)$$

Mặt khác $(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FC}) \equiv (\overrightarrow{GE}, \overrightarrow{FC})$ (mod 2π) (vì $\overrightarrow{FP}$ và $\overrightarrow{GE}$ cùng hướng) nên

$$(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FC}) \equiv (\overrightarrow{GE}, \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{CA}) + $$
$$+ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CF}) + (\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{FC}) \quad (\text{mod } 2\pi)$$
$$\Rightarrow (\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FC}) \equiv -\frac{2\pi}{3} + (\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}) - \frac{\pi}{3} + \pi \ (\text{mod } 2\pi)$$
$$\Rightarrow (\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FC}) \equiv (\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}) \ (\text{mod } 2\pi).$$

Suy ra $\widehat{PFC} = \widehat{GAC}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\Delta CGA = \Delta CPF$. Từ đó, dễ dàng thấy $CG = CP$ và $\widehat{GCP} = \widehat{ACF} = 60^o$, suy ra ΔKGC vuông tại K và $\widehat{KGC} = 60^o$.

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC với AA', BB', CC' là các đường phân giác trong. Gọi M là điểm bất kì không thuộc BC, CA, AB. Các điểm X, Y, Z theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua AA', BB', CC'. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy hoặc đôi một song song.*

Lời giải. Trước hết xin phát biểu không chứng minh một nhận xét.

Nhận xét. Cho ba điểm A, B, C và đường thẳng Δ. Gọi A', B', C' theo thứ tự là các điểm đối xứng của A, B, C qua Δ. Khi đó:
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'})$ (mod 2π).

Trở lại việc giải bài toán 2 (h.2).

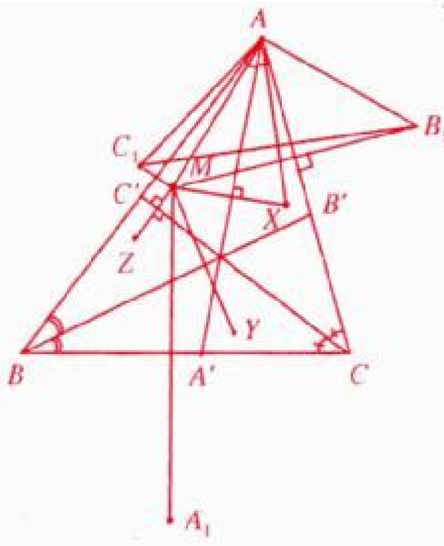
Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm đối xứng của M qua BC, CA, AB. Dễ thấy $AB_1 = AM = AC_1$ (1).

Mặt khác, theo nhận xét trên, ta có

$$(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB_1}) \equiv (\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}) \ (\text{mod } 2\pi)$$
$$\Rightarrow (\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB_1}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) \ (\text{mod } 2\pi)$$
$$\Rightarrow (\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB_1}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \ (\text{mod } 2\pi).$$

Tương tự như vậy, ta có

$$(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AC_1}) \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \ (\text{mod } 2\pi)$$



Hình 2

Từ đó suy ra

$(\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AB_1}) + (\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AC_1}) \equiv 0 \pmod{2\pi}$

nên AX là phân giác góc B_1AC_1 (2)

Từ (1), (2) suy ra: AX là trung trực của đoạn B_1C_1. Tương tự như vậy, BY, CZ theo thứ tự là trung trực của C_1A_1, A_1B_1.

Từ đó, ta có kết luận sau:

Nếu A_1, B_1, C_1 không thẳng hàng thì AX, BY, CZ đồng quy; nếu A_1, B_1, C_1 thẳng hàng thì AX, BY, CZ đôi một song song.

Bài toán 3. *Cho tứ giác ABCD mà các cặp cạnh đối không song song nội tiếp đường tròn (O). Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AC và BD, AD và BC. Gọi I, M, N theo thứ tự là trung điểm của EF, AB, CD. Chứng minh rằng:*

a) $\mathcal{P}_{E/(O)} + \mathcal{P}_{F/(O)} = EF^2$;

b) $\Delta IEM \backsim \Delta INE$.

Lời giải. Trước hết xin phát biểu không chứng minh một nhận xét quen thuộc.

Nhận xét. Cho tứ giác $ABCD$ mà các cặp cạnh đối không song song. Gọi E, F, K lần lượt là giao điểm của AC và BD, AD và BC, AB và CD. Khi đó

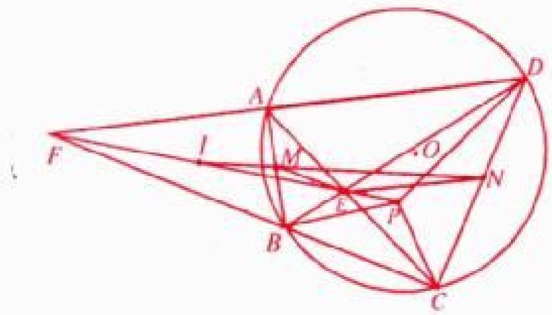
a) Trung điểm của các đoạn AC, BD, KF thẳng hàng.

b) Trung điểm của các đoạn AB, DC, EF thẳng hàng.

c) Trung điểm của các đoạn AD CB, KE thẳng hàng.

Tác giả của nhận xét trên là nhà toán học nổi tiếng người Đức K.Gauss. Các bạn có thể xem chứng minh nhận xét này ở lời giải bài T7/308 THTT số 312 (6.2003).

Trở lại việc giải bài toán 3 (h. 3).



Hình 3

a) Gọi P là giao của EF với đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE ($P \neq E$). Ta có :

$(PF, PB) \equiv (PE, PB) \pmod{\pi}$

$(PF, PB) \equiv (CE, CB) \pmod{\pi}$

$(PF, PB) \equiv (CA, CB) \pmod{\pi}$

$(PF, PB) \equiv (DA, DB) \pmod{\pi}$

$(PF, PB) \equiv (DF, DB) \pmod{\pi}$.

Suy ra bốn điểm B, P, O, F đồng viên.

Từ đó suy ra

$\mathcal{P}_{E/(O)} + \mathcal{P}_{F/(O)} = \overline{EB}.\overline{ED} + \overline{FB}.\overline{FC}$

$= \overline{EF}.\overline{EP} + \overline{FE}.\overline{FP} = \overline{EF}(\overline{EP} - \overline{FP}) = EF^2$.

b) Theo nhận xét trên, I, M, N thẳng hàng (chú ý: I nằm ngoài đoạn MN).

Ta thấy hai tam giác IEM và INE có góc MIE chung nên

$\Delta IEM \backsim \Delta INE \Leftrightarrow IE^2 = IM.IN$

$\Leftrightarrow \overline{IE}^2 = \overline{IM}.\overline{IN}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}FE^2 = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{EB}).\frac{1}{2}(\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{EC})$

$\Leftrightarrow EF^2 = \overrightarrow{FA}.\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{FA}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC}$

$\Leftrightarrow EF^2 = \overrightarrow{FA}.\overrightarrow{FD} + (\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EA}).\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{FD} + \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC}$

$\Leftrightarrow EF^2 = \mathcal{P}_{F/(O)} + \mathcal{P}_{E/(O)} + \overrightarrow{FE}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{FD}$

$+ \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC}$

$\Leftrightarrow 0 = \overrightarrow{FB}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EB}.\overrightarrow{FD}$

$\Leftrightarrow 0 = FB.EC.\cos(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{EC}) +$

$+ EB.FD.\cos(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FD}) \quad (1)$

Chú ý rằng nếu A nằm giữa F và D, B nằm giữa F và C thì ta có :

$(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{EC}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EC}) \pmod{2\pi}$

$\Rightarrow (\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{EC}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC}) \pmod{2\pi}$

$\Rightarrow (\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{EC}) \equiv (\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AD}) \pmod{2\pi}$

$\Rightarrow (\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{EC}) \equiv (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{FD}) \pmod{2\pi}$

$\Rightarrow (\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{EC}) \equiv (\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EB}) + (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FD}) \pmod{2\pi}$

$\Rightarrow (\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{EC}) \equiv \pi + (\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FD}) \pmod{2\pi} \quad (2)$

Tương tự nếu D nằm giữa F và A, C nằm giữa F và B ta cũng có (2).

Suy ra

$\cos(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{EC}) \equiv -\cos(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FD}) \quad (3)$

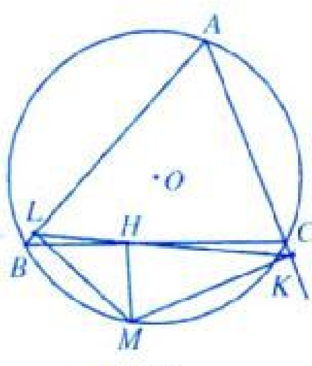
Mặt khác, $\Delta FAB \backsim \Delta FCD$; $\Delta EAB \backsim \Delta EDC$

nên $\dfrac{FB}{FD} = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{EB}{EC} \Rightarrow FB.EC = EB.FD$ (4)

Từ (3), (4) suy ra (1) đúng. Từ đó suy ra đpcm.

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC. Gọi M là điểm bất kì và H, K, L theo thứ tự là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB. Tìm tập hợp những điểm M sao cho H, K, L thẳng hàng.*

Lời giải. Dễ thấy, khi M trùng với các điểm A, B, C thì thỏa mãn điều kiện đề bài.



Hình 4

Khi M khác A, B, C (h. 4) ta thấy:

H, K, L thẳng hàng

$\Leftrightarrow (HK, HL) \equiv 0 \pmod{\pi}$

$\Leftrightarrow (HK, HM) + (HM, HL) \equiv 0 \pmod{\pi}$ (1)

Chú ý rằng, các bộ bốn điểm K, M, H, C và L, M, H, B đồng viên.

Ta có : $\begin{cases}(HK, HM) \equiv (CK, CM) \pmod{\pi} \\ (HM, HL) \equiv (BM, BL) \pmod{\pi}\end{cases}$ (2)

Từ (1), (2) ta có : H, K, L thẳng hàng

$\Leftrightarrow (CK, CM) + (BM, BL) \equiv 0 \pmod{\pi}$

$\Leftrightarrow (CA, CM) + (BM, BA) \equiv 0 \pmod{\pi}$

$\Leftrightarrow (CA, CM) \equiv (BA, BM) \pmod{\pi}$

$\Leftrightarrow M, A, B, C$ đồng viên.

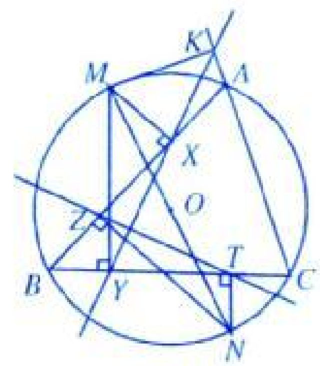
Vậy M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (không kể các điểm A, B, C).

Tóm lại: H, K, L thẳng hàng $\Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (không kể các điểm A, B, C).

Đường thẳng chứa ba điểm H, K, L nói trên được gọi là đường thẳng Simson của tam giác ABC ứng với điểm M.

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). MN là một đường kính của (O). Chứng minh rằng: Các đường thẳng Simson của tam giác ABC ứng với hai điểm M, N thì vuông góc với nhau.*

Lời giải. (h. 5) Gọi X, Y là các hình chiếu của M trên AB, BC theo thứ tự và Z, T là các hình chiếu của N trên AB, BC theo thứ tự. Ta cần chứng minh $XY \perp ZT$.



Hình 5

Thật vậy, ta thấy, các bộ bốn điểm M, B, X, Y và N, B, Z, T đồng viên.

Ta có: (XY, ZT)

$\equiv (XY, MY) + (MY, NT) + (NT, ZT) \pmod{\pi}$

$\Rightarrow (XY, ZT) \equiv (XB, MB) + 0 + (NB, ZB) \pmod{\pi}$

$\Rightarrow (XY, ZT) \equiv (NB, MB) \pmod{\pi}$ (vì XB, ZB trùng nhau)

$\Rightarrow (XY, ZT) \equiv \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ (vì MN là đường kính của (O)).

Suy ra $XY \perp ZT$ (đpcm).

(Kì sau đăng tiếp)

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

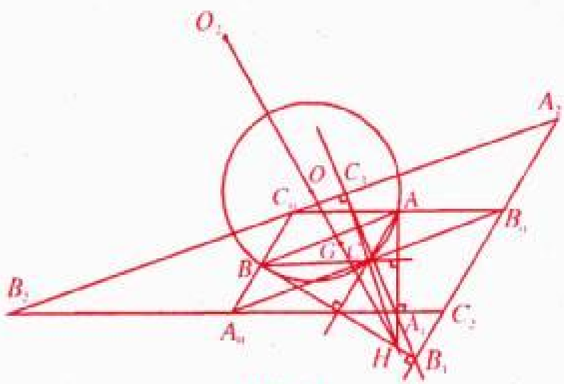
ỨNG DỤNG GÓC ĐỊNH HƯỚNG VÀO VIỆC GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC

(Tiếp theo kì trước)

NGUYỄN MINH HÀ
(*GV ĐHSP Hà Nội*)

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R) và trực tâm H. Gọi A_1, B_1, C_1 là điểm đối xứng của A, B, C qua BC, CA, AB theo thứ tự. Chứng minh rằng: A_1, B_1, C_1 thẳng hàng khi và chỉ khi OH = 2R.*

Lời giải. (h. 6)



Hình 6

Qua A_1, B_1, C_1 theo thứ tự dựng các đường thẳng song song với BC, CA, AB. Các đường thẳng này đôi một cắt nhau tại A_2, B_2, C_2 . Gọi A_0, B_0, C_0 là trung điểm của B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 theo thứ tự. Dễ thấy A, B, C theo thứ tự là trung điểm của B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 và các tam giác ABC, $A_2B_2C_2$, $A_0B_0C_0$ có cùng trọng tâm. Ta kí hiệu trọng tâm chung của chúng là G.

Ta thấy:

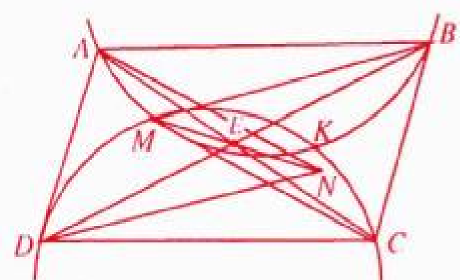
$$\Delta ABC \xrightarrow{V_G^{-2}} \Delta A_0B_0C_0 \xrightarrow{V_G^{-2}} \Delta A_2B_2C_2 \quad (1)$$

Giả sử (O_2, R_2) là đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$. Từ (1) dễ thấy $R_2 = 4R$. Cũng từ (1), cùng với chú ý về đường thẳng Euler, ta có: $GO_2 = 4GO \Rightarrow O_2H = 2OH$ (vì $OH = 3OG$).

Vậy theo bài toán (BT) 4, ta có : A_1, B_1, C_1 thẳng hàng $\Leftrightarrow$ các hình chiếu của H trên B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 thẳng hàng $\Leftrightarrow$ H thuộc đường tròn tâm O_2 ngoại tiếp $\Delta A_2B_2C_2 \Leftrightarrow O_2H = R_2$
$\Leftrightarrow 2OH = 4R \Leftrightarrow OH = 2R$ (đpcm).

Bài toán 7. *Cho hình bình hành ABCD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Xét hai điểm M, N đối xứng với nhau qua E và M không nằm trên các đường thẳng AB, CD còn N không nằm trên các đường thẳng AD, BC. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp bốn tam giác ABM, CDM, ADN, CBN cùng đi qua một điểm.*

Lời giải. (h. 7)



Hình 7

Nếu hai đường tròn (ABM) và (CDM) cắt nhau thì ta gọi điểm chung khác M của chúng là K. Nếu hai đường tròn (ABM), (CDM) tiếp xúc với nhau tại M thì K trùng với M, lúc đó đường thẳng MK được hiểu là tiếp tuyến chung của (ABM) và (CDM). Với quy ước trên, ta có:

$(KA, KD) \equiv (KA, KM) + (KM, KD) \pmod{\pi}$

$\Rightarrow (KA, KD) \equiv (BA, BM) + (CM, CD) \pmod{\pi}$

$\Rightarrow (KA, KD) \equiv (CD, DN) + (AN, CD) \pmod{\pi}$

(vì $AB // CD$, $BM // DN$, $CM // AN$).

Suy ra: $(KA, KD) \equiv (NA, ND) \pmod{\pi}$

nên K thuộc đường tròn (ADN) (1)

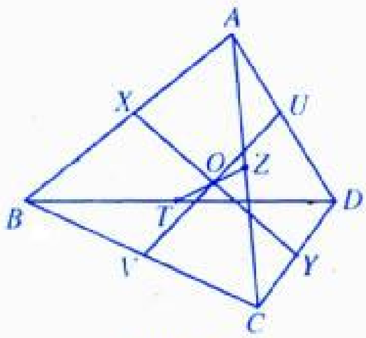
Tương tự, K thuộc đường tròn (CBN) (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Bài toán 8. *Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng các đường tròn Euler của bốn tam giác BCD, CDA, DAB, ABC cùng đi qua một điểm.*

Lời giải.(h. 8).

Gọi X, Y, Z, T, U, V là trung điểm của AB, CD, AC, DB, AD, BC theo thứ tự. Kết quả sau đây là quen thuộc: XY, ZT, UV đồng quy tại trung điểm mỗi đường. Ta kí hiệu trung điểm chung của chúng là O.



Hình 8

Áp dụng kết quả nhận được trong BT7 cho hình bình hành $XUYV$ và hai điểm Z, T, ta thấy các đường tròn (YTV), (UZY), (XTU), (VZX) cùng đi qua một điểm (1).

Mặt khác, các đường tròn (YTV), (UZV), (XTU), (VZX) theo thứ tự là đường tròn Euler của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC (2).

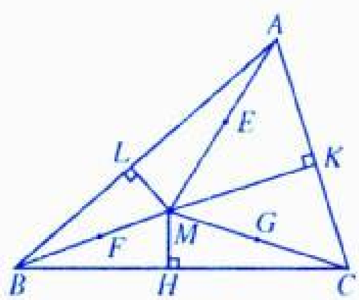
Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Nhận xét. Trong BT8, có thể thay giả thiết "tứ giác $ABCD$" bằng giả thiết "bốn điểm A, B, C, D mà không có ba điểm nào thẳng hàng".

Bài toán 9. *Cho tam giác ABC và điểm M không thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Gọi* (ω_A), (ω_B), (ω_C) *theo thứ tự là ảnh của các đường tròn (MBC), (MCA), (MAB) qua các phép đối xứng trục BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường tròn* (ω_A), (ω_B), (ω_C) *cùng đi qua một điểm và trung điểm của đoạn thẳng nối điểm đó với M thuộc đường tròn Euler của tam giác ABC.*

Lời giải. (h. 9).

Gọi H, K, L là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB theo thứ tự. Gọi E, F, G là trung điểm của các đoạn MA, MB, MC theo thứ tự. Qua phép vị tự tâm M, tỉ số 1/2, dễ thấy



Hình 9

$$V_M^{1/2}: (\omega_A) \to (HGF)\ ;\ (\omega_B) \to (KEG)$$

$$(\omega_C) \to (LFE) \qquad (1)$$

Mặt khác, vì các đường tròn (HGF), (KEG), (LFE) theo thứ tự là đường tròn Euler của các tam giác MBC, MCA, MAB nên theo nhận xét cuối BT8 với bộ bốn điểm A, B, C, M ta có:

Các đường tròn (HGF), (KEG), (LFE) cùng đi qua một điểm thuộc đường tròn Euler của tam giác ABC. Gọi điểm này là P. Đặt $Q = V_M^2(P)$ (2).

Từ (1), (2) ta có: Các đường tròn (ω_A), (ω_B), (ω_C) cùng đi qua điểm Q và trung điểm của MQ chính là P (thuộc đường tròn Euler của tam giác ABC).

Chín bài toán trên không thể giới thiệu đầy đủ vai trò của góc định hướng trong việc giải toán hình học. Tuy nhiên, do khuôn khổ có hạn của bài báo, xin tạm dừng ở đây. Sau đây là một vài bài toán để bạn đọc rèn luyện kĩ năng sử dụng góc định hướng.

Bài tập 1. Cho tam giác ABC và các điểm A_1, B_1, C_1 thỏa mãn điều kiện: $A_1B = A_1C$; $B_1C = B_1A$; $C_1A = C_1B$ và

$$(\overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1B}) + (\overrightarrow{B_1A}, \overrightarrow{B_1C}) + (\overrightarrow{C_1B}, \overrightarrow{C_1A}) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

Chứng minh rằng:

$$(A_1B_1, A_1C_1) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1B}) \pmod{\pi};$$

$$(B_1C_1, B_1A_1) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{B_1A}, \overrightarrow{B_1C}) \pmod{\pi};$$

$$(C_1A_1, C_1B_1) \equiv \frac{1}{2}(\overrightarrow{C_1B}, \overrightarrow{C_1A}) \pmod{\pi}.$$

Bài tập 2. Cho tứ giác $ABCD$. Về phía ngoài nó ta dựng các tam giác đồng dạng ADE, BCF. Các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các đoạn AB, DC, EF sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{ND}{NC} = \frac{PE}{PF} = \frac{AD}{BC}$.

Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Bài tập 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Đường thẳng Δ đi qua O. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên Δ. Các đường thẳng Δ_A, Δ_B, Δ_C theo thứ tự đi qua A_1, B_1, C_1 và vuông góc với BC, CA, AB. Chứng minh rằng Δ_A, Δ_B, Δ_C đồng quy tại một điểm thuộc đường tròn Euler của tam giác ABC.

Bài tập 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác trong của các góc $\widehat{BAC}$, $\widehat{CBA}$, $\widehat{ACB}$ cắt (O) tại A_1, B_1, C_1 theo thứ tự. M là một điểm thuộc (O). Giả sử Δ_1 là đường thẳng Simson của các tam giác ABC, $A_1B_1C_1$ ứng với điểm M theo thứ tự. Chứng minh rằng $\Delta \perp \Delta_1$.

Bài tập 5. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N, P (khác A, B, C) theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường tròn (ANP), (BPM), (CMN) cùng đi qua một điểm.

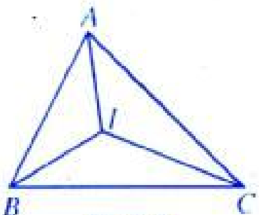
Bài tập 6. Cho tam giác ABC và điểm P không thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Các đường thẳng AP, BP, CP theo thứ tự cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại A', B', C'. Chứng minh rằng tâm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác APB', APC', BPC', BPA', CPA', CPB' cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi P là trọng tâm hoặc trực tâm của tam giác ABC.

VỀ MỘT TÍNH CHẤT CỦA TÂM ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP TAM GIÁC

LÊ THỊ NGỌC THUÝ
(GV. Trường Cao đẳng Sư phạm Nghệ An)

Tính chất sau đây của tâm đường tròn nội tiếp tuy đơn giản, nhưng có nhiều ứng dụng trong giải toán hình học.

Tính chất. *Nếu I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC thì* $\widehat{BIC} = 90^o + \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$.


Hình 1

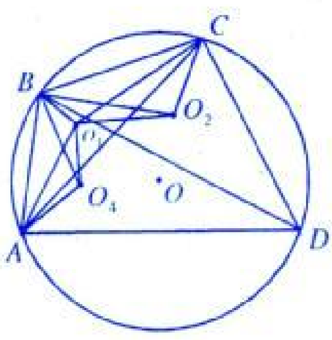
Thật vậy, trong tam giác BIC (h. 1) có $\widehat{BIC} =$

$= 180^o - (\widehat{IBC} + \widehat{ICB})$

$= 180^o - \dfrac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB})$

$= 180^o - \dfrac{1}{2}(180^o - \widehat{BAC}) = 90^o + \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$.

Ta sẽ lần lượt áp dụng tính chất trên vào giải các dạng toán: chứng minh, tìm tập hợp điểm, dựng hình, ... để thấy rõ hơn giá trị của tính chất đó.


Hình 2

Thí dụ 1. *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB. Chứng minh tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình chữ nhật.*

Lời giải. (h. 2).

Vì O_1 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên theo tính chất trên, ta có

$$\widehat{AO_1C} = 90^o + \frac{\widehat{ABC}}{2} \qquad (1)$$

$$\widehat{BO_1C} = 90^o + \frac{\widehat{BAC}}{2}.$$

Mặt khác, vì O_2 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BCD nên $\widehat{BO_2C} = 90^o + \dfrac{\widehat{BDC}}{2}$.

Do $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ nên $\widehat{BO_1C} = \widehat{BO_2C}$.

Suy ra tứ giác BO_1O_2C nội tiếp, nên

$$\widehat{CO_1O_2} = \widehat{CBO_2} = \frac{\widehat{CBD}}{2}.$$

Tương tự ta có $\widehat{AO_1O_4} = \widehat{ABO_4} = \dfrac{\widehat{ABD}}{2}$.

Từ đó

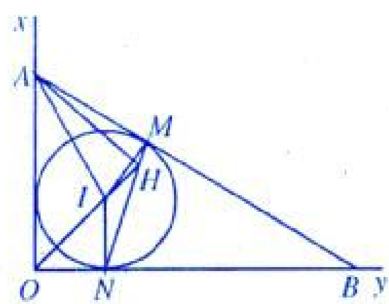
$$\widehat{CO_1O_2} + \widehat{AO_1O_4} = \frac{\widehat{CBD} + \widehat{ABD}}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{O_2O_1O_4} = 90^o$.

Tương tự, ba góc còn lại của tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ đều bằng 90^o nên tứ giác $O_1O_2O_3O_4$ là hình chữ nhật.

Thí dụ 2. *Cho góc $\widehat{xOy} = 90^o$. Trên tia Ox có một điểm A cố định. Trên tia Oy có một điểm B chuyển động. Đường tròn nội tiếp tam giác AOB tiếp xúc với AB tại M và tiếp xúc với OB tại N. Chứng minh đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.*

Lời giải. Xét trường hợp $OA < OB$ (h. 3).


Hình 3

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AOB và H là giao điểm của OI với MN. Khi đó, theo tính chất trên ta có $\widehat{AIO} = 90^o + \frac{\widehat{ABO}}{2}$. Ta lại có tam giác BMN cân tại B, nên $\widehat{NMB} = 90^o - \frac{\widehat{ABO}}{2}$. Do đó $\widehat{AIO} + \widehat{NMB} = 180^o$. Suy ra $\widehat{AIH} + \widehat{AMH} = 180^o$, nên tứ giác $AIHM$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{IHA} = \widehat{IMA} = 90^o$ hay $\widehat{OHA} = 90^o$.

Ta lại có $\widehat{AOI} = 45^o$ hay $\widehat{AOH} = 45^o$, nên tam giác AOH vuông cân tại H và H thuộc nửa mặt phẳng bờ AO có chứa B.

Vì A, O cố định nên H cố định và do đó đường thẳng MN luôn luôn đi qua điểm H cố định.

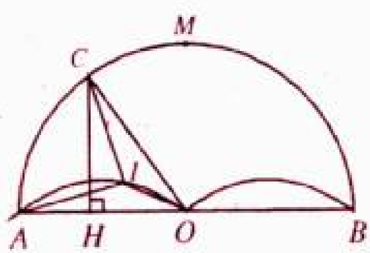
Trường hợp $OA \geq OB$ chứng minh tương tự.

Thí dụ 3. *Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB và C là một điểm chuyển động trên nửa đường tròn ấy. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ C xuống AB và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác COH. Tìm tập hợp điểm I.*

Lời giải. (h. 4).

• *Phần thuận.*

Gọi M là trung điểm của cung AB. Xét trường hợp C chuyển động trên cung nhỏ AM. Khi đó, vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác COH nên



Hình 4

$$\widehat{CIO} = 90^o + \frac{\widehat{CHO}}{2} = 90^o + \frac{90^o}{2} = 135^o.$$

Do $\Delta AIO = \Delta CIO$ (c.g.c) nên $\widehat{AIO} = \widehat{CIO} = 135^o$. Vậy I nằm trên cung chứa góc 135^o dựng trên đoạn AO.

Tương tự, nếu C chuyển động trên cung nhỏ MB thì I nằm trên cung chứa góc 135^o dựng trên đoạn OB.

• *Phần đảo.* Bạn đọc tự chứng minh .

• *Kết luận.* Vậy tập hợp điểm I khi C chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB là hai cung chứa góc 135^o dựng trên hai đoạn AO và OB (cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn đường kính AB đã cho).

Tương tự như tính chất trên, bạn đọc hãy chứng minh tính chất sau đây liên quan đến tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác:

"*Nếu J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC thì $\widehat{BJC} = 90^o - \frac{\widehat{BAC}}{2}$*".

Các bạn hãy áp dụng hai tính chất trên để giải các bài toán sau đây:

Bài 1. Giả sử điểm C chuyển động trên nửa đường tròn đường kính AB, H là chân đường vuông góc hạ từ C xuống AB. Phân giác các góc ACH và BCH thứ tự cắt AB tại E và F. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF. Chứng minh góc AIB không đổi và đường thẳng CI luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $\hat{A} - \hat{C} = 90^o$. Chứng minh các đường phân giác trong và phân giác ngoài góc B bằng nhau.

Bài 3. Cho đường tròn tâm O đường kính AB cố định và một điểm C chuyển động trên đường tròn. Tìm tập hợp các điểm I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn bàng tiếp góc C của tam giác ABC.

Bài 4. Cho AB là một dây cố định của đường tròn tâm O và C chuyển động trên cung lớn AB. Gọi M là trung điểm AC và H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống BC.

a) Chứng minh đường thẳng MH luôn luôn đi qua một điểm cố định. Tìm tập hợp điểm H.

b) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AHB. Chứng minh góc AIB không đổi. Tìm tập hợp điểm I.

c) Chứng minh đường thẳng HI luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. Dựng tam giác ABC biết vị trí các tâm đường tròn ngoại tiếp, đường tròn nội tiếp và đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác đó.

KẺ THÊM ĐƯỜNG VUÔNG GÓC ĐỂ GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC

VŨ HỮU BÌNH
(Hà Nội)

Việc kẻ thêm đường trong bài toán hình học nhằm tạo thêm những mối quan hệ giữa các yếu tố về cạnh và góc trong bài toán. Kẻ thêm đường vuông góc là một cách thường được nghĩ đến khi chưa tìm ngay được lời giải của bài toán.

Kẻ thêm đường vuông góc như thế nào ?

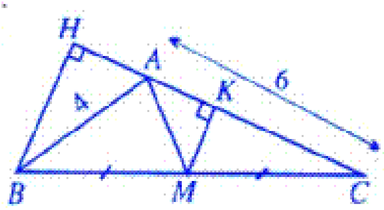
Ta thường kẻ thêm đường vuông góc trong các trường hợp sau đây.

1. Kẻ đường vuông góc nhằm tạo ra nửa tam giác đều

Thường dùng cách này khi giải bài toán có góc $60^o, 120^o, 30^o, 150^o$.

Thí dụ 1. (*Lớp 8*). Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 120^0$, $AB = 4$, $AC = 6$. Tính độ dài đường trung tuyến AM.

Lời giải.(h.1) Kẻ $BH \perp AC$. Tam giác ABH vuông tại H có $\widehat{BAH} = 60^o$ nên $AH = \dfrac{AB}{2} = 2$.


Hình 1

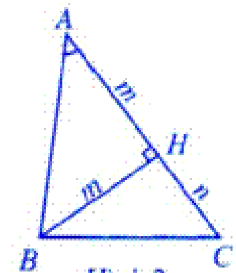
Áp dụng định lí Pythagore, ta tính được $BH = 2\sqrt{3}$. Còn $CH = HA + AC = 2 + 6 = 8$. Kẻ $MK \perp CH$ thì $HK = \dfrac{HC}{2} = 4$ nên $AK = 2$.

Ta lại có $MK = \dfrac{BH}{2} = \sqrt{3}$ nên $AM^2 = AK^2 + MK^2 = 4 + 3 = 7$. Vậy $AM = \sqrt{7}$.

2. Kẻ đường vuông góc nhằm tạo ra tam giác vuông cân

Thường dùng cách này khi giải bài toán có góc 45^0, 135^0.

Thí dụ 2.(Lớp 8). Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 45^0$. Chứng minh rằng diện tích của tam giác ABC bằng $\dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{4}$.

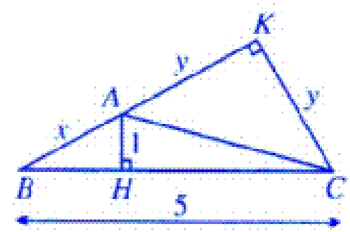

Hình 2

Lời giải (h. 2) Giả sử $AC \geq AB$. Kẻ $BH \perp AC$. Ta có tam giác ABH vuông cân tại H. Đặt $AH = BH = m$, $HC = n$. Khi đó

$$AB^2 + AC^2 - BC^2 =$$
$$= (m\sqrt{2})^2 + (m+n)^2 - (m^2 + n^2)$$
$$= 2m(m+n) = 2.BH.AC = 4S_{ABC}.$$

Thí dụ 3. (Lớp 8). Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 135^o$, $BC = 5$, đường cao $AH = 1$. Tính độ dài các cạnh AB và AC.

Lời giải. (h. 3) Kẻ $CK \perp AB$. Ta có $\widehat{CAK} = 45^o$ nên tam giác ACK vuông cân tại K. Đặt $AB = x$, $AK = KC = y$.


Hình 3

Ta có $\Delta HBA \backsim \Delta KBC$ (g.g) nên

$$\frac{AH}{KC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x}{5} \Rightarrow xy = 5 \qquad (1)$$

Xét tam giác BKC vuông, ta có

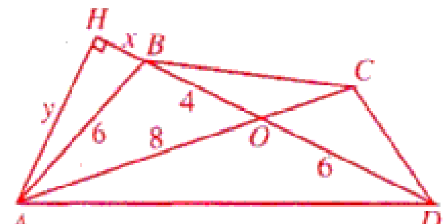
$$BK^2 + KC^2 = BC^2 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + 2y^2 = 25 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta tìm được $(x; y) = (\sqrt{5}; \sqrt{5})$ hoặc $(x; y) = \left(\sqrt{10}; \dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$. Từ đó suy ra $AB = \sqrt{5}$; $AC = \sqrt{10}$ hoặc $AB = \sqrt{10}$; $AC = \sqrt{5}$.

3. Kẻ đường vuông góc nhằm tạo ra tam giác vuông

Thí dụ 4.(Lớp 8). Tứ giác $ABCD$ có O là giao điểm hai đường chéo, $AB = 6$, $OA = 8$, $OB = 4$, $OD = 6$. Tính độ dài AD.

Lời giải. (h.4)



Hình 4

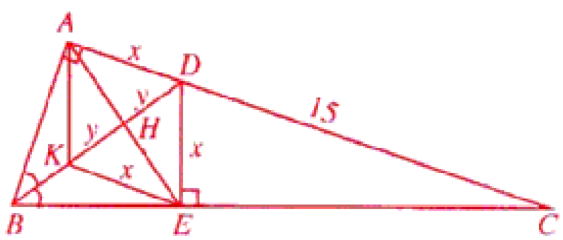
Kẻ $AH \perp OB$. Đặt $BH = x$, $AH = y$. Áp dụng định lí Pythagore vào các tam giác ABH và AOH, ta có $x^2+y^2=36$ và $(x+4)^2+y^2=64$.

Từ đó ta tìm được $x=\frac{3}{2}$, $y^2=\frac{135}{4}$. Do đó $AD^2=HD^2+AH^2=y^2+(x+10)^2=166$. Vậy $AD=\sqrt{166}$.

4. Kẻ đường vuông góc nhằm tạo ra hai tam giác vuông bằng nhau

Thí dụ 5. (Lớp 9). Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BD. Biết $BD = 7$, $DC = 15$. Tính độ dài AD.

Lời giải. (h. 5)



Hình 5

Kẻ $DE \perp BC$. Ta có $\Delta ABD = \Delta EBD$ (cạnh huyền – góc nhọn) nên $DA = DE$, $BA = BE$, suy ra BD là đường trung trực của AE. Gọi H là giao điểm của AE và BD. Lấy K đối xứng với D qua H. Tứ giác $AKED$ là hình thoi. Đặt $EK = ED = AD = x$; $DH = HK = y$. Tam giác EBD vuông nên $ED^2=DB.DH$, suy ra $x^2=7y$ (1). Do $EK//AC$ nên $\frac{EK}{CD}=\frac{BK}{BD} \Leftrightarrow \frac{x}{15}=\frac{7-2y}{7}$ (2).

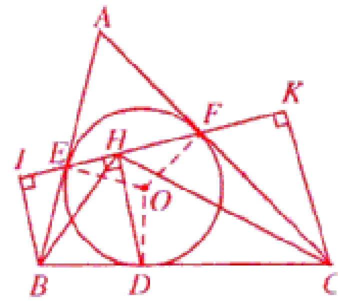
Từ (1) và (2) suy ra $30x^2+49x-735=0$.

Nghiệm dương của phương trình là $x = 4,2$. Vậy $AD = 4,2$.

5. Kẻ đường vuông góc nhằm tạo ra hai tam giác vuông đồng dạng

Thí dụ 6. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F theo thứ tự là tiếp điểm trên các cạnh BC, AB, AC. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ D đến EF. Chứng minh rằng $\widehat{BHE}=\widehat{CHF}$.

Lời giải.(h. 6)



Hình 6

Kẻ BI, CK vuông góc với EF. Tam giác AEF cân tại A nên $\widehat{BEI}=\widehat{CFK}$. Ta có $\Delta BEI \backsim \Delta CFK$ (g. g).

Từ đó suy ra $\frac{BI}{CK}=\frac{BE}{CF}=\frac{BD}{CD}=\frac{HI}{HK}$ nên $\Delta BHI \backsim \Delta CHK$. Do đó $\widehat{BHE}=\widehat{CHF}$.

Để luyện tập, các bạn hãy làm các bài tập sau:

Bài 1. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\hat{B}=120^o$, $AB = 7$, $BC = 8$. Tính độ dài AC.

Bài 2. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\hat{B}=45^o$, $\hat{C}=120^o$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính số đo góc ADB.

Bài 3. (Lớp 7). Cho tam giác ABC ($AC > AB$), đường phân giác AD. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $\widehat{CDE}=\widehat{BAC}$. Chứng minh rằng $DB = DE$.

Bài 4. (Lớp 8). Cho tam giác ABC vuông cân tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = AB$. Gọi M là trung điểm của BE. Chứng minh rằng HM là tia phân giác của góc AHC.

Bài 5. (Lớp 8). Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E, F theo thứ tự nằm trên các cạnh AB, BC, CA sao cho $\frac{AD}{DB}=\frac{BE}{EC}=\frac{CF}{FA}$. Chứng minh rằng AE vuông góc với DF.

Bài 6. (Lớp 9). Hai đường tròn (O) và (O') có cùng bán kính R, cắt nhau tại A và B, trong đó $\widehat{OAO'}=90^o$. Vẽ cát tuyến chung MAN. Tính tổng AM^2+AN^2 theo R.

SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ COTANG ĐỂ GIẢI TOÁN

NGUYỄN BÁ ĐANG
(Sở GD – ĐT Hải Dương)

Trong sách giáo khoa Hình học lớp 10 chúng ta đã làm quen với định lí cosin thể hiện sự liên quan giữa cạnh và góc của tam giác: *Với tam giác ABC bất kì,* $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ *ta có* $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (1). Từ định lí này ta có kết quả sau đây.

Định lí cotang. Với mọi tam giác ABC ta có

$\text{cotg}A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{4S_{ABC}}$. Từ đó suy ra

$$\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S_{ABC}}.$$

trong đó S_{ABC} kí hiệu diện tích tam giác ABC.

Chứng minh. Sử dụng công thức (1) và công thức $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A$, suy ra $\text{cotg}A = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4S_{ABC}}$.

Chứng minh tương tự câu a) ta có

$$\text{cotg}B = \frac{a^2+c^2-b^2}{4S_{ABC}}\ ;\ \text{cotg}C = \frac{a^2+b^2-c^2}{4S_{ABC}}.$$

Từ đó có

$$\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C = \frac{a^2+b^2+c^2}{4S_{ABC}} \text{ (đpcm).}$$

Bổ đề 1. Trong tam giác ABC với AM là trung tuyến, $\widehat{MAB} = \alpha$, $\widehat{MAC} = \beta$. Khi đó ta có hệ thức $\text{cotg}\alpha + \text{cotg}C = \text{cotg}\beta + \text{cotg}B$.

(Hệ thức này được suy trực tiếp từ định lí cotang cho các tam giác ABC, ABM, ACM với lưu ý rằng $S_{ABM} = S_{ACM} = \dfrac{1}{2}S_{ABC}$).

Bổ đề 2. Giả sử M là một điểm trên cạnh BC của tam giác ABC sao cho $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{m}{n}$; $\widehat{MAB} = \alpha$; $\widehat{AMB} = \beta$. Khi đó ta có

a) $(m+n)\text{cotg}\beta = m.\text{cotg}C - n\text{cotg}B$;

b) $m\text{cotg}\alpha = (m+n)\text{cotg}A + n.\text{cotg}B$.

Chứng minh. a) Dựng $AH \perp BC$, lúc đó H sẽ nằm trong đoạn BM hoặc đoạn MC, giả sử H thuộc đoạn BM. Lúc đó

$BM = BH + HM = AH(\text{cotg}B + \text{cotg}\beta)$;

$MC = HC - HM = AH(\text{cotg}C - \text{cotg}\beta)$. Do đó,

$$\frac{BM}{MC} = \frac{\text{cotg}B + \text{cotg}\beta}{\text{cotg}C - \text{cotg}\beta} = \frac{m}{n},$$

suy ra

$(m+n)\text{cotg}\beta = m.\text{cotg}C - n.\text{cotg}B$ (đpcm).

b) Từ M kẻ $ME // AC$ ($E \in AB$), lúc đó $\widehat{MEB} = \widehat{BAC}$, sử dụng câu a) vào tam giác ABM ta có hệ thức cần chứng minh.

Tiếp theo chúng ta sẽ sử dụng định lí cotang và các bổ đề trên để giải một số bài toán sau đây.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC, đường trung tuyến AM và $\widehat{AMB} = \alpha$. Chứng minh rằng

$$\text{cotg}\alpha = \frac{\sin(B-C)}{2\sin B\sin C}.$$

Lời giải. Hệ thức cần chứng minh tương đương với $2\text{cotg}\alpha = \text{cotg}C - \text{cotg}B$. Áp dụng bổ đề 2 cho trường hợp M là trung điểm của BC ta có điều phải chứng minh.

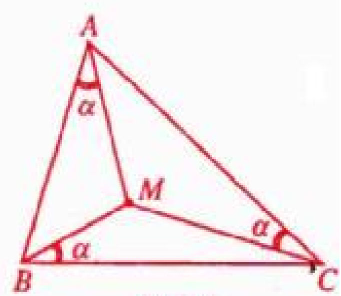
Bài toán 2. Giả sử M là điểm trong tam giác ABC sao $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA} = \alpha$ (M; α tương ứng được gọi là điểm và góc Brocard).

a) Chứng minh rằng

$$\text{cotg}\alpha = \text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C.$$

b) Xác định dạng tam giác ABC để góc α lớn nhất.

Lời giải. (h.1). Áp dụng định lí cotang cho các tam giác MAB, MBC, MCA ta được



Hình 1

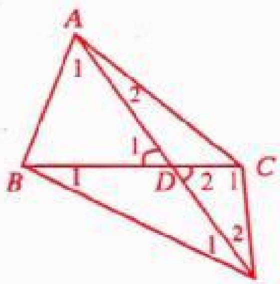
$$\text{cotg}\alpha = \frac{MA^2 + c^2 - MB^2}{4S_{MAB}} = \frac{MB^2 + a^2 - MC^2}{4S_{MBC}}$$
$$= \frac{MC^2 + b^2 - MA^2}{4S_{MCA}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}}.$$

Suy ra $\text{cotg}\alpha = \text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C$.

b) Ta có $\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}} = \text{cotg}\alpha .$$

Mặt khác $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S_{ABC}.\sqrt{3}$ (đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$) nên $\text{cotg}\alpha \geq \sqrt{3}$, suy ra $\alpha \leq 30^\circ$. Góc α lớn nhất bằng 30° khi tam giác ABC đều.



Hình 2

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có $\widehat{B} = 2\widehat{C}$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 2DC$, kéo dài AD về phía D sao cho $AD = DE$. Chứng minh $2\widehat{BCE} - \widehat{CBE} = 180^\circ$.

Lời giải. (h. 2) Vì $BD = 2DC$ nên theo bổ đề 2 ta có

$$3\text{cotg}D_1 = 2\text{cotg}C - \text{cotg}B = 3\text{cotg}D_2 \quad (1)$$

Trong tam giác ABE với BD là trung tuyến. Áp dụng các bổ đề trên, ta có

$$\text{cotg}B_1 = \text{cotg}B + \text{cotg}E_1 - \text{cotg}A_1 \quad (2)$$
$$2\text{cotg}D_1 = \text{cotg}E_1 - \text{cotg}A_1 \quad (3)$$

Tương tự trong tam giác ACE, ta có

$$\text{cotg}C_1 = \text{cotg}C + \text{cotg}E_2 - \text{cotg}A_2 \quad (4)$$
$$2\text{cotg}D_2 = \text{cotg}A_2 - \text{cotg}E_2 \quad (5)$$

Từ (1) và (3) thay vào (2) được

$$\text{cotg}B_1 = \text{cotg}B + \frac{2}{3}(2\text{cotg}C - \text{cotg}B)$$
$$= \frac{\text{cotg}B + 4\text{cotg}C}{3}.$$

Do $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ nên $\text{cotg}B = \dfrac{\text{cotg}^2 C - 1}{2\text{cotg}C}$ suy ra

$$\text{cotg}B_1 = \frac{9\text{cotg}^2 C - 1}{6\text{cotg}C} \quad (6)$$

Từ (1) và (5) thay vào (4) có

$$\text{cotg}C_1 = \text{cotg}C - \frac{2}{3}(2\text{cotg}C - \text{cotg}B)$$
$$= -\frac{1}{3\text{cotg}C} \quad (7)$$

Để có $2\widehat{BCE} - \widehat{CBE} = 180^\circ$ ta chứng minh $\text{cotg}2C_1 = \text{cotg}B_1$. Thật vậy

$$\text{cotg}2C_1 = \frac{\text{cotg}^2 C_1 - 1}{2\text{cotg}C_1} \quad (8)$$

Thay (7) vào (8) được

$$\text{cotg}2C_1 = \frac{9\text{cotg}^2 C - 1}{6\text{cotg}C} \quad (9)$$

Từ (6) và (9) có đpcm.

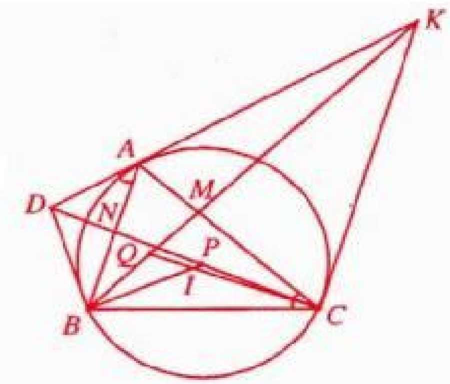
Bài toán 4. Tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại B và C cắt tiếp tuyến tại A với đường tròn đó theo thứ tự ở D và K. Đường thẳng BK cắt AC tại M, đường thẳng CD cắt cạnh AB tại N, gọi Q là trung điểm của BM, P là trung điểm CN, đường thẳng BP cắt đường thẳng CQ tại I. Chứng minh rằng tam giác BIC cân.

Lời giải. (h.3). Giả sử $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Ta có $\dfrac{CM}{AM} = \dfrac{S_{CBK}}{S_{ABK}} = \dfrac{BC\sin\widehat{BCK}}{AB\sin\widehat{BAK}}$

$$= \frac{BC\sin C}{AB\sin A} = \frac{a^2}{c^2}.$$

Từ đó theo bổ đề 2 phần b) ta có



Hình 3

$$a^2\text{cotg}\widehat{CBM} = (a^2 + c^2)\text{cotg}B + c^2\text{cotg}C.$$

Trong tam giác BCM, CQ là trung tuyến có

$$\text{cotg}\widehat{BCQ} = 2\text{cotg}C + \text{cotg}\widehat{CBM}$$
$$\text{cotg}\widehat{BCQ} = 2\text{cotg}C + \frac{a^2 + c^2}{a^2}\text{cotg}B + \frac{c^2}{a^2}\text{cotg}C$$
$$= 2\text{cotg}C + \text{cotg}B + \frac{c^2}{a^2}(\text{cotg}B + \text{cotg}C)$$
$$\text{cotg}\widehat{BCQ} = 2(\text{cotg}B + \text{cotg}C) + \text{cotg}A.$$

Tương tự

$$\text{cotg}\widehat{CBP} = 2(\text{cotg}B + \text{cotg}C) + \text{cotg}A$$

nên tam giác BIC là tam giác cân.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC và $AB = AM$. Chứng minh:

1) $3\text{cotg}B = \text{cotg}C$;

2) $\sin A = 2\sin(B - C)$.

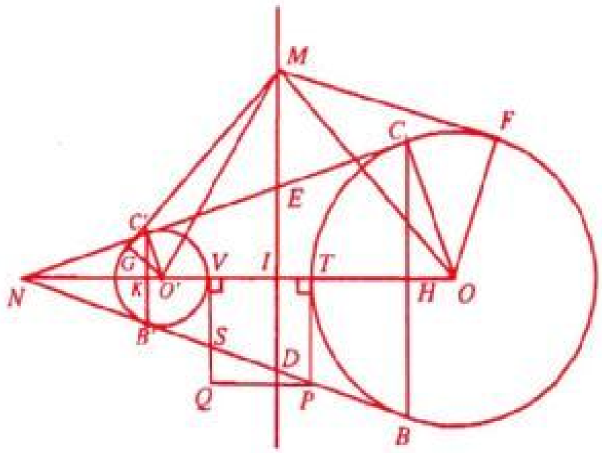
Bài 2. Chứng minh rằng hai trung tuyến BM và CN của tam giác ABC vuông góc với nhau khi và chỉ khi

$$\text{cotg}A = 2(\text{cotg}B + \text{cotg}C).$$

Bài 3. Tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A và B cắt nhau tại D, đường thẳng DC cắt cạnh AB ở E, gọi I là trung điểm của CE. Xác định dạng của tam giác ABC để góc IBC lớn nhất.

Bây giờ ta sẽ tổng quát hoá bài toán 1 bằng cách xem điểm A như một suy biến của đường tròn (O').

Bài toán 3. *Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Dựng các tiếp tuyến chung ngoài BB' và CC' của hai đường tròn (B, C thuộc (O); B', C' thuộc (O')). Gọi D, E tương ứng là trung điểm của BB' và CC'. Từ một điểm M thuộc đường thẳng DE, dựng các tiếp tuyến MF, MG với các đường tròn (O), (O') tương ứng (F, G là các tiếp điểm). Chứng minh rằng MF = MG.*



Hình 2

Lời giải

Gọi bán kính các đường tròn (O) và (O') tương ứng là R và r $(R \geq r)$.

- Nếu $R = r$ thì dễ thấy bài toán đúng.
- Nếu $R > r$ thì tia BB' cắt tia CC' tại N (nằm trên tia OO'). OO' cắt BC và $B'C'$ lần lượt tại H và K. DE cắt $O'O$ tại I. Dựng hình chữ nhật $VTPQ$ thì $B'S = VS < VQ = TP = PB$ (h.2) nên đường thẳng DE không có điểm chung với (O) và (O'), do đó M nằm ngoài (O) và (O'). Đặt $O'O = a$, ta có

$$\frac{NO'}{NO} = \frac{NC}{NC'} = \frac{NK}{NH} = \frac{r}{R} = \frac{O'K}{O'H} \Rightarrow \frac{NO'}{O'O} = \frac{r}{R-r}$$

$$\Rightarrow NO' = \frac{r.a}{R-r}.$$

Tương tự ta có $NO = \dfrac{R.a}{R-r}$.

Trong tam giác vuông $NO'C'$, ta có

$$O'K.O'N = r^2 \Rightarrow O'K = \frac{r(R-r)}{a};\ \ OH = \frac{R(R-r)}{a}.$$

Do đó $NK = NO' - KO' = \dfrac{r.a}{R-r} - \dfrac{r(R-a)}{a}$.

Tương tự ta được $NH = \dfrac{R.a}{R-r} - \dfrac{R(R-r)}{a}$.

Suy ra $2IH = KH = NH - NK = a - \dfrac{(R-r)^2}{a}$.

Ta có (nếu M trùng với I thì coi $MI = 0$).

$$MF^2 = MO^2 - OF^2 = MI^2 + IO^2 - R^2$$
$$= MI^2 + (IH + HO)^2 - R^2$$
$$= MI^2 + IH^2 + HO^2 + 2OH.HI - R^2$$
$$= MI^2 + \frac{[a^2-(R-r)^2]^2}{4a^2} + \frac{R^2(R-r)^2}{a^2} +$$
$$+ \frac{R(R-r)[a^2-(R-r)^2]}{a^2} - R^2$$
$$= MI^2 + \frac{(a+R+r)(a-R-r)(a-R+r)(a+R-r)}{4a^2}$$
$$= MI^2 + X \qquad (4)$$

(số hạng thứ hai của kết quả trên đặt là X)

Hoàn toàn tương tự ta cũng biến đổi được

$$MG^2 = MI^2 + X \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra $MF = MG$ (đpcm).

Nếu BB' và CC' là các tiếp tuyến chung trong thì ta có bài toán sau đây.

Bài toán 4. *Cho hai đường tròn (O) và (O') ở ngoài nhau. Vẽ các tiếp tuyến chung trong BB' và CC' (B, C thuộc (O); B', C' thuộc (O')). Gọi D, E tương ứng là trung điểm của BB' và CC', M là một điểm bất kì thuộc đường thẳng DE. Dựng các tiếp tuyến MF và MG với (O) và (O') tương ứng (F, G là các tiếp điểm). Chứng minh rằng MF = MG.*

Việc chứng minh xin dành cho bạn đọc.

Từ kết quả của bài toán 3 xuất hiện câu hỏi: Có điểm M nào nằm ngoài đường thẳng DE thoả mãn hai đoạn tiếp tuyến MF và MG bằng nhau không ? Các bạn hãy làm bài toán sau.

Bài toán 5. *Cho hai đường tròn (O) và (O') nằm ngoài nhau. Tìm tập hợp điểm M sao cho khi dựng các tiếp tuyến MF, MG với các đường tròn (O) và (O') tương ứng (F, G là các tiếp điểm) thì luôn có MF = MG.*

Để kiểm tra những dự đoán trong bài viết này, tôi đã sử dụng sự hỗ trợ của phần mềm hình học Cabri Geometry II Plus. Các bạn có thể tải từ mạng internet theo địa chỉ

http://www.cabri.com/v2/page/fr/logiciel.php#cabri2d.

HÌNH THÀNH CÁC BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC TỪ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

THÁI VIẾT THẢO
(Sở GD-ĐT Nghệ An)

Có rất nhiều hướng để hình thành các bất đẳng thức (BĐT) nói chung và BĐT trong hình học nói riêng. Trong bài viết này trình bày một cách hình thành một số BĐT trong tam giác từ một BĐT cơ bản trong hình học lớp 10.

Cho tam giác ABC với $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. Gọi S là diện tích ΔABC; r và R là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác; m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C theo thứ tự. Trong hình học 10 ta đã biết: Với mọi vectơ $\vec{a}$, ta luôn có $|\vec{a}|^2 \geq 0$. Giả sử M là một điểm bất kì cùng các số thực α β, γ, ta có $\left(\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}\right)^2 \geq 0$.

Bình phương vô hướng hai vế của

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$ dẫn tới

$2\,\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MA^2 + MB^2 - AB^2$.

Từ đó qua phép biến đổi tương đương ta đi đến bất đẳng thức sau:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2) \geq$$
$$\geq a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta \qquad (*)$$

Dấu bằng trong BĐT (*) xảy ra khi và chỉ khi $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=\vec{0}$.

Bây giờ ta xét các vị trí đặc biệt của M và chọn các số α, β, γ thích hợp để có các bất đẳng thức khác mang bản chất hình học hơn.

I. Các bất đẳng thức liên quan đến đường trung tuyến

a) Khi M là trọng tâm tam giác ABC, ta sẽ có các BĐT liên quan đến đường trung tuyến. Lúc đó BĐT (*) trở thành:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha m_a^2 + \beta m_b^2 + \gamma m_c^2)$$
$$\geq \frac{9}{4}(a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta) \qquad (1^*)$$

– Chọn $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ thay vào (1*) được:

$$am_a^2 + bm_b^2 + cm_c^2 \geq \frac{9}{4}abc \qquad (1)$$

Bất đẳng thức (1) có các dạng tương đương sau:

- $\dfrac{m_a^2}{h_a} + \dfrac{m_b^2}{h_b} + \dfrac{m_c^2}{h_c} \geq \dfrac{9}{2}R$

  (do $2S = \dfrac{abc}{2R} = ah_a = bh_b = ch_c$).

- $3(a^3 + b^3 + c^3) + 9abc$

  $\leq 2(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$

  (dùng công thức đường trung tuyến).

– Chọn $\alpha = p - a$, $\beta = p - b$, $\gamma = p - c$ với $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Thay vào (1*).

Ta biến đổi $a^2(p-b)(p-c)$

$$= ap(p-a)(p-b)(p-c)\left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p}\right)$$

$$= S^2\left(\frac{p}{p-a} - 1 - \frac{a}{p}\right) = S\left(\frac{p^2r}{p-a} - pr - ra\right).$$

Biến đổi tương tự với $b^2(p-a)(p-c)$ và $c^2(p-a)(p-b)$ rồi áp dụng hệ thức

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} = \frac{4R+r}{pr}$$

(Xem THTT số 337 tháng 7.2005 trang 6 hệ thức 17, hoặc quyển *Phương trình bậc ba và các hệ thức hình học trong tam giác* của Tạ Duy Phượng, hệ thức (16) ta thu được :

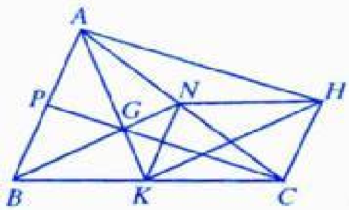
$$(p-a)m_a^2 + (p-b)m_b^2 + (p-c)m_c^2 \geq 9S(R-r).$$

– Chọn $\alpha = \dfrac{a}{m_a}$, $\beta = \dfrac{b}{m_b}$, $\gamma = \dfrac{c}{m_c}$ thay vào (1*) ta được

$$a.m_b.m_c + b.m_c.m_a + c.m_a.m_b \geq \frac{9}{4}abc \quad (3)$$

– Chọn $\alpha = bc$, $\beta = ca$, $\gamma = ab$, thay vào (1*) ta có

$$\frac{m_a^2}{a} + \frac{m_b^2}{b} + \frac{m_c^2}{c} \geq \frac{9}{4}\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{ab+bc+ca}\right) \quad (4)$$



b) Bây giờ ta gọi AK, BN, CP theo thứ tự là các đường trung tuyến của tam giác ABC; dựng hình bình hành $APCH$, dễ thấy

$AK = m_a$, $KH = m_b$, $HA = m_c$, $NH = \dfrac{a}{2}$, $NA = \dfrac{b}{2}$, $NK = \dfrac{c}{2}$ (hình vẽ).

Áp dụng bất đẳng thức (*) cho tam giác AKH với M trùng N, ta thu được:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2) \geq 4(m_a^2\beta\gamma + m_b^2\alpha\gamma + m_c^2\alpha\beta) \quad (2^*)$$

Từ BĐT này bằng cách chọn α, β, γ thích hợp ta được lớp các BĐT mới dưới đây:

– Chọn $\alpha = m_a$, $\beta = m_b$, $\gamma = m_c$ thay vào (2*) ta được:

$$a^2.m_a + b^2.m_b + c^2.m_c \geq 4m_a.m_b.m_c \quad (5)$$

– Chọn $\alpha = \dfrac{m_a}{a}$, $\beta = \dfrac{m_b}{b}$, $\gamma = \dfrac{m_c}{c}$ thay vào (2*) ta có:

$$bc.m_a + ac.m_b + ab.m_c \geq 4m_a.m_b.m_c \quad (6)$$

– Chọn $\alpha = a^2$, $\beta = b^2$, $\gamma = c^2$ thay vào (2*) sau khi biến đổi ta thu được:

$$bc.m_a + ac.m_b + ab.m_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)} \quad (7)$$

Áp dụng BĐT Ptolémée cho các tứ giác $GNAP$, $GKCN$, $GPBK$ và biến đổi ta được:

$$bc.m_a + ac.m_b + ab.m_c \geq a^2.m_a + b^2.m_b + c^2.m_c \quad (8)$$

Kết hợp (5), (7) và (8) ta được dãy BĐT kép sau:

$$4m_a.m_b.m_c \leq bc.m_a + ac.m_b + ab.m_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(a^4+b^4+c^4)} \quad (9)$$

– Chọn $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$ thay vào (2*), sau khi kết hợp với (4) ta có tiếp:

$$\frac{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)}{4abc} \geq \frac{m_a^2}{a} + \frac{m_b^2}{b} + \frac{m_c^2}{c} \geq \frac{9(a^3+b^3+c^3)}{4(ab+bc+ca)} \quad (10)$$

Áp dụng BĐT Bunhiacovski ta có

$$\frac{m_a^2}{a} + \frac{m_b^2}{b} + \frac{m_c^2}{c} \geq \frac{(m_a+m_b+m_c)^2}{a+b+c}.$$

Từ đây kết hợp với (10) suy ra

$$m_a + m_b + m_c \leq \frac{a+b+c}{2}\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}} \quad (11)$$

– Chọn $\alpha = b^2c^2$, $\beta = c^2a^2$, $\gamma = b^2a^2$ thay vào (2*), sau đó sử dụng BĐT

$3[(a.m_a)^2 + (b.m_b)^2 + (c.m_c)^2] \geq$
$\geq (a.m_a + b.m_b + c.m_c)^2$, ta được:

$$a.m_a + b.m_b + c.m_c \leq \frac{3}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \quad (12)$$

c) Gọi L là *điểm Lemoine* của tam giác ABC nghĩa là giao điểm của ba đường thẳng đối xứng với ba trung tuyến qua ba đường phân giác trong tương ứng theo từng đỉnh của ΔABC. Khi đó dễ thấy :

$$LA = \frac{2m_a bc}{a^2+b^2+c^2}, \quad LB = \frac{2m_b ac}{a^2+b^2+c^2}, \quad LC = \frac{2m_c ba}{a^2+b^2+c^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức (*) cho tam giác ABC với M trùng L ta được :

$$4(\alpha+\beta+\gamma)[\alpha(bcm_a)^2 + \beta(acm_b)^2 + \gamma(abm_c)^2] \geq (a^2+b^2+c^2)^2(a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta) \quad (3^*)$$

Trong BĐT này ta cũng chọn các bộ số α, β, γ thích hợp để được các BĐT mới.

– Chọn $\alpha = a$, $\beta = b$, $\gamma = c$, thay vào (3*) ta được BĐT:

$$4(bcm_a^2 + acm_b^2 + abm_c^2) \geq (a^2+b^2+c^2)^2 \quad (13)$$

BĐT này còn được viết ở dạng sau:

$ab(a-b)^2 + bc(b-c)^2 + ca(c-a)^2 \geq$
$\geq a^2(a-b)(a-c) + b^2(b-c)(b-a) + c^2(c-a)(c-b)$.

Kết hợp các BĐT (10) và (13), ta có

$(a+b+c)(a^3+b^3+c^3)$
$\geq 4(bcm_a^2 + acm_b^2 + abm_c^2) \geq (a^2+b^2+c^2)^2 \quad (14)$

– Chọn $\alpha = \beta = \gamma = 1$ thay vào (3*) ta được:

$$(bc.m_a)^2 + (ca.m_b)^2 + (ab.m_c)^2 \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^3}{12} \quad (15)$$

– Chọn $\alpha = a^3$, $\beta = b^3$, $\gamma = c^3$ thay vào (3*)

$$a.m_a^2 + b.m_b^2 + c.m_c^2 \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2(ab+bc+ca)}{4(a^3+b^3+c^3)} \quad (16)$$

Qua các kết quả trên ta thấy rằng để thu được các BĐT đẹp ta cần có sự lựa chọn bộ số α, β, γ thích hợp. Đồng thời sự chuyển hoá vị trí của M như đã xét ở các phần (b) và (c) cũng đưa tới các BĐT đẹp khác. Ta cần chú ý rằng, nếu điểm M thoả mãn $x\overline{MA} + y\overline{MB} + z\overline{MC} = \vec{0}$, thì không nên chọn các số α, β, γ tỉ lệ với x, y, z vì lúc đó xảy ra dấu đẳng thức.

(Kì sau đăng tiếp)

HÌNH THÀNH CÁC BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC TỪ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

(Tiếp theo kì trước)

THÁI VIẾT THẢO
(Sở GD-ĐT Nghệ An)

II. Các bất đẳng thức liên quan đến đường tròn ngoại tiếp

Khi cho M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, BĐT (*) trở thành

$$R^2(\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq a^2\beta\gamma + b^2\alpha\gamma + c^2\alpha\beta \qquad (4^*)$$

Đến đây bằng một số phép biến đổi, ta có một số trường hợp đặc biệt của nó.

– Chọn $\alpha=\beta=\gamma$ thay vào (4*) được
$R^2 \geq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{9}$;

– Chọn $\alpha=a,\ \beta=b,\ \gamma=c$ thay vào (4*) được
$R \geq 2r$;

– Chọn $\alpha=\beta=-\gamma$ thay vào (4*) được
$R^2+a^2+b^2 \geq c^2$;

– Chọn $\alpha=bc,\ \beta=ca,\ \gamma=ab$ thay vào (4*) ta được

$$(ab+bc+ca)\sqrt{\frac{abc}{a^3+b^3+c^3}} \geq 4S \qquad (17)$$

– Chọn $\alpha=b+c,\ \beta=c+a,\ \gamma=a+b$, thay vào (4*) và biến đổi ta được

$$8R(R-2r) \geq (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \qquad (18)$$

Để ý rằng $a=2R.\sin A,\ b=2R.\sin B,\ c=2R.\sin C$ thì BĐT (4*) có dạng

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq 4(\beta\gamma.\sin^2A+\alpha\gamma.\sin^2B+\alpha\beta.\sin^2C) \quad (5^*)$$

BĐT này gợi cho ta nhiều liên tưởng tới tính lượng giác của nó.

– Chọn $\alpha=c,\ \beta=a,\ \gamma=b$ thay vào (5*) có

$$p^2 \geq ab.\sin^2A + bc.\sin^2B + ca.\sin^2C \qquad (19)$$

– Chọn $\alpha=\cos A,\ \beta=\cos B,\ \gamma=\cos C$ thay vào (5*) với chú ý $\cos A+\cos B+\cos C=1+\dfrac{r}{R}$, ta được BĐT

$$(R+r)^2 \geq a^2.\cos B.\cos C + b^2.\cos C.\cos A + c^2.\cos A.\cos B \qquad (20)$$

III. Các bất đẳng thức về đường tròn nội tiếp

Áp dụng BĐT (*) cho trường hợp M trùng với tâm T đường tròn nội tiếp tam giác ABC được

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha TA^2+\beta TB^2+\gamma TC^2) \geq a^2\beta\gamma+b^2\alpha\gamma+c^2\alpha\beta. \qquad (6^*)$$

Từ BĐT này ta chọn các bộ số (α, β, γ) thích hợp sẽ đi tới các BĐT mới.

– Chọn $\alpha=\beta=\gamma$ thay vào (6*) được BĐT

$$TA^2+TB^2+TC^2 \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \qquad (21)$$

– Chọn $\alpha=\dfrac{a}{TA},\ \beta=\dfrac{b}{TB},\ \gamma=\dfrac{c}{TC}$ thay vào (6*) và biến đổi ta được

$$a.\sin\frac{A}{2}+b.\sin\frac{B}{2}+c.\sin\frac{C}{2} \geq p \qquad (22)$$

– Chọn $\alpha=p-a,\ \beta=p-b,\ \gamma=p-c$ thay vào (6*) ta được

$$\frac{TA^2}{r_a}+\frac{TB^2}{r_b}+\frac{TC^2}{r_c} \geq 8(R-r)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{r_a^3}+\frac{1}{r_b^3}+\frac{1}{r_c^3} \geq \frac{8R-9r}{S^2} \qquad (23)$$

– Chọn $\alpha=\sin\dfrac{A}{2},\ \beta=\sin\dfrac{B}{2},\ \gamma=\sin\dfrac{C}{2}$ thay vào (6*). Sau khi biến đổi ta có tiếp

$$\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right)$$

$$\geq \frac{1}{r}\left(a.\cos\frac{A}{2}+b.\cos\frac{B}{2}+c.\cos\frac{C}{2}\right) \qquad (24)$$

Như vậy mới chỉ qua năm trường hợp đặc biệt của điểm M mà ta đã đề xuất được 24 BĐT.

Dưới đây chúng tôi đưa ra một số BĐT khác có được bằng cách làm như trên, bạn đọc tự giải xem như bài tập.

Bài 1. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$r_a^2+r_b^2+r_c^2 \geq 6r^2+24Rr-p^2$$

trong đó r_a, r_b, r_c là các bán kính đường tròn bàng tiếp trong các góc A, B, C của tam giác ABC.

Bài 2. Cho tam giác ABC và một điểm P tùy ý trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 là hình chiếu vuông góc của P trên các cạnh BC, CA và AB theo thứ tự. Đặt $PA=d_1$, $PB=d_2$, $PC=d_3$, $PA_1=r_1$, $PB_1=r_2$, $PC_1=r_3$. Chứng minh rằng:

a) $3({r_1}^2+{r_2}^2+{r_3}^2) \geq {d_1}^2.\sin^2A+{d_2}^2.\sin^2B+{d_3}^2.\sin^2C$;

b) $(a^2+b^2+c^2)({S_a}^2+{S_b}^2+{S_c}^2) \geq S^2({R_1}^2+{R_2}^2+{R_3}^2)$;

c) $\sqrt{IA^2+IB^2+IC^2} \leq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$.

Ở đây I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, S, S_a, S_b, S_c là diện tích các tam giác ABC, PBC, PCA và PAB tương ứng.

Bài 3. Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì. Chứng minh rằng:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha MB^2.MC^2+\beta MC^2.MA^2+\gamma MA^2.MB^2) \geq a^2.MA^2.\beta\gamma+b^2.MB^2.\alpha\gamma+c^2.MC^2.\alpha\beta,$$

với α, β, γ là các số thực tùy ý.

Ứng dụng của HAI BẤT ĐẲNG THỨC

TRẦN TUẤN ANH
(GV Khoa Toán - Tin học
ĐHKHTN, - ĐHQG TP. HCM)

Trong bài viết này, chúng ta xem xét việc sử dụng hai bất đẳng thức (BĐT) sau để chứng minh một số bài toán về bất đẳng thức:

(i) $(1+z)^\alpha \le 1+\alpha z$ với $z>-1$ và $\alpha\in[0;1]$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\alpha=0$ hoặc $\alpha=1$ (bất đẳng thức Bernoulli).

(ii) $(1+z)^\alpha \le 1+z^\alpha$ với $z>0$ và $\alpha\le 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\alpha=1$.

***Chứng minh* (ii)**

Do $1>\dfrac{1}{1+z}>0$, $1>\dfrac{z}{1+z}>0$ và $\alpha\le 1$ nên

$$\left(\frac{1}{1+z}\right)^\alpha \ge \frac{1}{1+z} \quad\text{và}\quad \left(\frac{z}{1+z}\right)^\alpha \ge \frac{z}{1+z}.$$

Cộng theo vế hai BĐT trên ta được

$$\left(\frac{1}{1+z}\right)^\alpha+\left(\frac{z}{1+z}\right)^\alpha \ge \frac{1}{1+z}+\frac{z}{1+z}=1.$$

Từ đó suy ra $1+z^\alpha \ge (1+z)^\alpha$. □

Nhận xét

1) Trong BĐT (ii) cho $z=\dfrac{x}{y}$ (với x, y là số thực dương) ta nhận được các BĐT (ii) cho hai số thực dương x, y như sau:

$$(x+y)^\alpha \le x^\alpha+y^\alpha \quad \text{với } \alpha\le 1.$$

2) Bằng phương pháp quy nạp hoặc phương pháp như trên ta chứng minh được BĐT (ii) cho $(m\ge 2)$ số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_m$:

$$(x_1+x_2+\dots+x_m)^\alpha \le x_1^\alpha+x_2^\alpha+\dots+x_m^\alpha \quad \text{với } \alpha\le 1.$$

Bây giờ chúng ta vận dụng chúng để giải quyết các bài toán sau đây.

Bài 1. *Cho a là một số thực nằm trong đoạn $[0;1]$. Chứng minh rằng $1+a\ge 2^a\ge 1+a^2$.*

Chứng minh. Do $a\in[0;1]$ nên áp dụng bất đẳng thức (i) ta có

$$2^a=(1+1)^a\le 1+a.1=1+a \qquad (1)$$

Mặt khác, do $1-a\in[0;1]$ nên theo bất đẳng thức (1) ta có

$$2^{1-a}\le 1+(1-a)=2-a.$$

Từ đó suy ra
$$2^a\ge\frac{2}{2-a} \qquad (2)$$

Bây giờ ta chứng minh
$$\frac{2}{2-a}\ge 1+a^2 \qquad (3)$$

Thật vậy, dễ thấy BĐT (3) tương đương với BĐT đúng $a(a-1)^2\ge 0$.

Từ đó, kết hợp hai BĐT (2) và (3) ta có $2^a\ge 1+a^2$. □

Nhận xét. Sử dụng BĐT $2^a\ge 1+a^2$ với $a\in[0;1]$ ta sẽ giải được các bài toán sau đây.

1) Cho $a_1, a_2, \dots, a_m$ $(m\ge 1)$ là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a_1^2+a_2^2+\dots+a_m^2=1$. Chứng minh rằng $2^{a_1}+2^{a_2}+\dots+2^{a_m}\ge m+1$.

2) Cho $x_1, x_2, \dots, x_m$ $(m\ge 1)$ là các số thực. Chứng minh rằng

$2^{|\cos x_1|}+2^{|\sin x_1\cos x_2|}+...+2^{|\sin x_1\sin x_2...\sin x_{m-1}\cos x_m|}$
$+2^{|\sin x_1\sin x_2...\sin x_{m-1}\sin x_m|}\geq m+1$.

Hướng dẫn. Tổng bình phương các số mũ ở vế trái bằng 1.

Bài 2. *Cho a, b là các số thực dương nằm trong khoảng $(0;1)$. Chứng minh rằng*

1) $a^a>\frac{1}{2}$; 2) $a^b+b^a>1$.

Chứng minh

1) Do $a>\frac{a}{a+1}>0$ nên

$$a^a>\left(\frac{a}{a+1}\right)^a=\frac{1}{\left(\frac{a+1}{a}\right)^a}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^a} \qquad (4)$$

Vì $a\in(0;1)$ nên áp dụng BĐT (i) ta có

$$0<\left(1+\frac{1}{a}\right)^a\leq 1+a.\frac{1}{a}=2.$$

Kết hợp BĐT này và BĐT (4) ta nhận được BĐT cần chứng minh.

2) Do $a>\frac{a}{a+1}>0$ và $b>\frac{b}{b+1}>0$ nên

$$a^b+b^a>\left(\frac{a}{a+1}\right)^b+\left(\frac{b}{b+1}\right)^a=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^b}+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{b}\right)^a} \qquad (5)$$

Vì a, $b\in(0;1)$ nên áp dụng BĐT (i) ta có

$$0<\left(1+\frac{1}{a}\right)^b\leq 1+b.\frac{1}{a}=\frac{a+b}{a},$$
$$0<\left(1+\frac{1}{b}\right)^a\leq 1+a.\frac{1}{b}=\frac{a+b}{b}.$$

Kết hợp hai BĐT trên và BĐT (5) ta được

$$a^b+b^a>\frac{1}{\frac{a+b}{a}}+\frac{1}{\frac{a+b}{b}}=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=1.$$

Nhận xét. Bằng phương pháp trên ta có thể chứng minh bài toán tổng quát sau: Cho a_1, a_2, ..., a_m $(m\geq 2)$ là các số thực dương có tổng bằng S. Chứng minh rằng

$$(S-a_1)^{a_1}+(S-a_2)^{a_2}+...+(S-a_m)^{a_m}>m-1.$$

Hướng dẫn. Nếu tồn tại một chỉ số k $(1\leq k\leq m)$ sao cho $a_k\geq 1$ thì với mọi $i\neq k$ và $1\leq i\leq m$ ta có $S-a_i>a_k\geq 1$. Suy ra $(S-a_i)^{a_i}>1$. Từ đó có được BĐT cần chứng minh.

Trong trường hợp tất cả các số a_i $(1\leq i\leq m)$ đều nằm trong khoảng $(0;1)$ thì ta giải tương tự như trong câu 2) của bài toán này.

Bài 3. *Cho a_1, a_2, ..., a_m $(m\geq 2)$ là các số thực dương và α, β là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện $\alpha\geq\beta$. Chứng minh rằng*

$$(a_1^\alpha+a_2^\alpha+...+a_m^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\leq(a_1^\beta+a_2^\beta+...+a_m^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Chứng minh. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$(a_1^\alpha+a_2^\alpha+...+a_m^\alpha)^{\frac{\beta}{\alpha}}\leq a_1^\beta+a_2^\beta+...+a_m^\beta.$$

Hay $(x_1+x_2+...+x_m)^{\frac{\beta}{\alpha}}\leq x_1^{\frac{\beta}{\alpha}}+x_2^{\frac{\beta}{\alpha}}+...+x_m^{\frac{\beta}{\alpha}}$ với $x_i=a_i^\alpha>0$, $i=\overline{1,m}$.

Do $\alpha\geq\beta>0$ nên $\frac{\beta}{\alpha}\leq 1$. Lúc đó áp dụng BĐT (ii) cho các số thực dương x_1, x_2, ..., x_m và $\frac{\beta}{\alpha}\leq 1$ ta nhận được BĐT cần chứng minh.

Bài 4. *Cho a, b, c là các số thực dương và n là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng* $\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[n]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[n]{\frac{c}{a+b}}>2$.

Chứng minh. Vì $0<\frac{2}{n}\leq 1$ nên áp dụng BĐT (ii) ta có $0<(b+c)^{\frac{2}{n}}\leq b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}$.

Kết hợp BĐT trên và BĐT Cauchy cho hai số dương có

$$0<\sqrt[n]{a(b+c)}\leq\frac{a^{\frac{2}{n}}+(b+c)^{\frac{2}{n}}}{2}\leq\frac{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}{2}.$$

Từ đó suy ra $\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}}=\frac{a^{\frac{2}{n}}}{\sqrt[n]{a(b+c)}}$

$$\geq\frac{a^{\frac{2}{n}}}{\frac{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}{2}}=\frac{2a^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n=2$ và $a=b+c$.

Tương tự: $\sqrt[n]{\frac{b}{c+a}}\geq\frac{2b^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}$

và $\sqrt[n]{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{2c^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}$.

Cộng theo vế ba BĐT trên nhận được

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}}+\sqrt[n]{\frac{b}{c+a}}+\sqrt[n]{\frac{c}{a+b}}\geq\frac{2a^{\frac{2}{n}}+2b^{\frac{2}{n}}+2c^{\frac{2}{n}}}{a^{\frac{2}{n}}+b^{\frac{2}{n}}+c^{\frac{2}{n}}}=2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n=2$ và $a=b+c$, $b=c+a$, $c=a+b$.

Điều này không thể có vì a, b, c là các số thực dương. Từ đó suy ra đpcm.

Nhận xét: Bất đẳng thức trên đã được chứng minh trong THTT số 341, tháng 11/2005 khi $n=3$, nhưng phương pháp chứng minh trong đó khó mở rộng cho trường hợp n là một số nguyên dương lớn hơn 1 bất kì. Tuy nhiên, với việc sử dụng ý tưởng trong bài viết đó cùng với BĐT (ii) chúng ta có một chứng minh khá gọn trong trường hợp $n\geq 1$ nguyên dương tùy ý. Ngoài ra, cũng bằng cách sử dụng BĐT (ii) cho nhiều số chúng ta có thể chứng minh bài toán tổng quát sau:

Cho a_1, a_2, ..., a_m $(m\geq 3)$ là các số thực dương có tổng bằng S và n là một số nguyên dương lớn hơn 1. Chứng minh rằng

$$\sqrt[n]{\frac{a_1}{S-a_1}}+\sqrt[n]{\frac{a_2}{S-a_2}}+...+\sqrt[n]{\frac{a_m}{S-a_m}}>2.$$

NẾU CHƯA BIẾT VỀ đường tròn ...

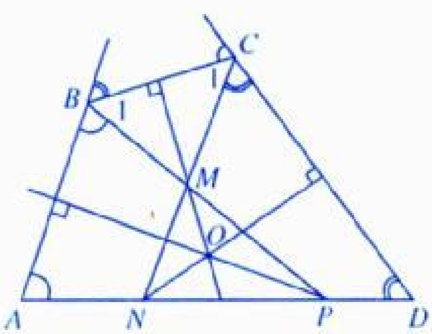
NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Khi đã được học các kiến thức về đường tròn (góc nội tiếp; tam giác nội tiếp, ngoại tiếp; tứ giác nội tiếp, ngoại tiếp; ...) thì việc giải một lớp các bài toán trở nên dễ dàng. Còn nếu chưa học về đường tròn thì các bài toán như vậy có giải quyết được không? Chúng ta hãy xét điều đó qua các kết quả sau.

✪ **Bài toán 1.** *Chứng minh rằng một tứ giác lồi có hai góc đối bù nhau khi và chỉ khi tồn tại một điểm cách đều bốn đỉnh của tứ giác. (Đó chính là tứ giác nội tiếp).*

Chứng minh. a) Giả sử tứ giác $ABCD$ có $\widehat{A}+\widehat{C}=\widehat{B}+\widehat{D}=180^o$. Không mất tính tổng quát

giả sử $\widehat{B}\ge\widehat{A}$. Nếu $\widehat{B}>\widehat{A}$ thì $\widehat{C}>\widehat{D}$, ta lấy điểm M sao cho $\widehat{MBA}=\widehat{A}$, $\widehat{MCD}=\widehat{D}$, các tia BM và CM cắt AD lần lượt tại P và N, suy ra $\widehat{B}_1=\widehat{C}_1$ nên tam giác MBC cân tại M (h. 1).



Hình 1

Từ các tam giác cân BMC, ABP, CDN suy ra các trung trực của AB, BC, CD chính là các phân giác của tam giác MNP nên chúng đồng quy tại O và rõ ràng $OA=OB=OC=OD$.

(Trường hợp điểm M trùng với N và P thì có $MA=MB=MC=MD$). Nếu $\widehat{B}=\widehat{A}$ thì $\widehat{C}=\widehat{D}$, tứ giác $ABCD$ là hình thang cân, kết luận hiển nhiên đúng.

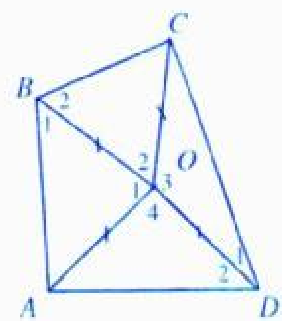
b) Ngược lại, Nếu tứ giác $ABCD$ có điểm O thỏa mãn $OA=OB=OC=OD$. Giả sử O nằm trong tứ giác (h. 2)(với các trường hợp còn lại chứng minh tương tự). Khi đó ta có

$$\widehat{B_1}=90^o-\frac{\widehat{O_1}}{2};$$

$$\widehat{B_2}=90^o-\frac{\widehat{O_2}}{2};$$

$$\widehat{D_1}=90^o-\frac{\widehat{O_3}}{2};$$

$$\widehat{D_2}=90^o-\frac{\widehat{O_4}}{2}$$



Hình 2

nên $\widehat{B}+\widehat{D}=360^o-\frac{1}{2}(\widehat{O}_1+\widehat{O}_2+\widehat{O}_3+\widehat{O}_4)$

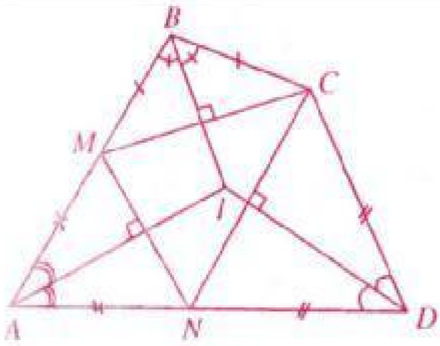
$$=360^o-180^o=180^o=\widehat{A}+\widehat{C}.\square$$

✪ **Bài toán 2.** *Chứng minh rằng một tứ giác lồi có tổng hai cạnh đối bằng nhau khi và chỉ khi tồn tại một điểm cách đều bốn cạnh của tứ giác. (Đó chính là tứ giác ngoại tiếp).*

Chứng minh. a) Giả sử tứ giác $ABCD$ có $AB+CD=AD+BC$ (h. 3).

Không mất tính tổng quát, giả sử $AB\ge BC$.

Nếu $AB>BC$ thì $AD>CD$, lấy M trên cạnh AB sao cho $BM=BC$, N thuộc cạnh AD sao



Hình 3

cho $DN = DC$, suy ra $AM = AN$. Từ các tam giác cân AMN, BMC, DCN suy ra phân giác của các góc $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{D}$ là các trung trực của tam giác CMN nên chúng đồng quy tại I. Rõ ràng I cách đều bốn cạnh của tứ giác.

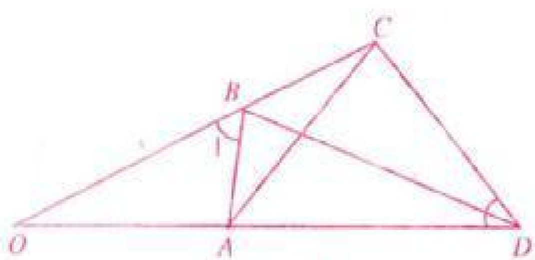
Trường hợp $AB = BC$, $AD = CD$ thì I là giao điểm của BD và phân giác góc $\widehat{A}$.

b) Ngược lại, nếu tứ giác $ABCD$ có điểm I cách đều bốn cạnh của tứ giác thì dễ thấy I là giao điểm bốn đường phân giác của các góc trong tứ giác. Do đó việc chứng minh $AB + CD = AD + BC$ hoàn toàn đơn giản. (các bạn tự vẽ hình và kiểm tra lại điều đó).

✪ **Bài toán 3.** *Cho tứ giác lồi ABCD. Chứng minh rằng tứ giác có hai góc đối bù nhau khi và chỉ khi* $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

Chứng minh. Trường hợp $BC \parallel AD$ dễ thấy hai điều kiện trên đều tương đương với tứ giác $ABCD$ là hình thang cân, nên điều cần chứng minh là hiển nhiên.

Giả sử hai đường thẳng BC và AD cắt nhau tại O sao cho B nằm giữa O và C (h. 4).



Hình 4

Ta có $\widehat{ABC}$ bù với $\widehat{ADC} \Leftrightarrow \widehat{B_1} = \widehat{ADC}$

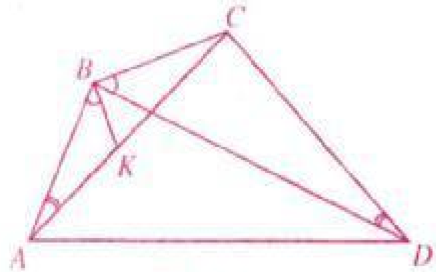
$\Leftrightarrow \Delta OAB \backsim \Delta OCD$ (g.g.) $\Leftrightarrow \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{OB}{OD}$

$\Leftrightarrow \Delta OAC \backsim \Delta OBD \Leftrightarrow \widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

* *Chú ý*. Từ $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ ta dễ dàng suy ra được: $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$, $\widehat{CBD} = \widehat{CAD}$, $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$.

✪ **Bài toán 4.** (Định lí Ptôlêmê) *Chứng minh rằng nếu tứ giác ABCD có hai góc đối bù nhau, thì AB.CD + AD.BC = AC.BD.*

Chứng minh. (h. 5)



Hình 5

Theo bài toán 3 ta có $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$, $\widehat{BCA} = \widehat{BDA}$.

Trên AC lấy K sao cho $\widehat{ABK} = \widehat{DBC}$

$\Rightarrow \Delta ABK \backsim \Delta DBC$ (g.g.) $\Rightarrow \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AK}{CD}$

$\Rightarrow AB.CD = BD.AK$ (1)

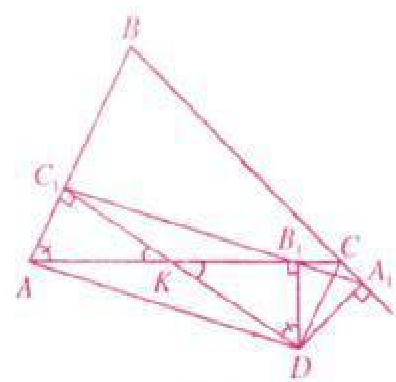
Cũng có $\Delta ABD \backsim \Delta KBC$ (g.g.)

$\Rightarrow AD.BC = BD.KC$ (2)

Cộng (1) và (2) theo từng vế ta được điều phải chứng minh.

✪ **Bài toán 5.** *Cho tứ giác ABCD có hai góc đối bù nhau. Hạ DA_1, DB_1, DC_1 theo thứ tự vuông góc với BC, CA, AB. Chứng minh rằng ba điểm A_1, B_1, C_1 thẳng hàng. (Đường thẳng Simson).*

Chứng minh. Nếu C_1 trùng với A và A_1 trùng với C thì kết luận là hiển nhiên. Nếu C_1 thuộc đoạn AB và các điểm được bố trí như hình 6



Hình 6

Vận dụng các quan điểm biện chứng của tư duy toán học trong dạy - học TOÁN

ĐÀO TAM
(GV khoa Toán ĐH Vinh)

❶ Phần lớn các bạn học sinh khá, giỏi toán mong muốn đạt kết quả tốt trong học tập môn Toán đã cố gắng tự học, tự tìm tòi lời giải các bài toán qua các sách tham khảo bồi dưỡng môn Toán ở trong nước và trên thế giới. Đặc biệt các dạng toán trong báo *Toán học và tuổi trẻ*, những lời giải phong phú đa dạng của nó đã có sức cuốn hút đông đảo học sinh trong cả nước.

Tuy nhiên, theo chúng tôi, để việc tự học, tự tìm tòi và phát triển kiến thức như đã nêu trên tốt hơn, các bạn cần quan tâm đúng mức đến việc khai thác tiềm năng kiến thức và kĩ năng sách giáo khoa (SGK) toán ở trường THPT.

Từ tiềm năng SGK, nếu các bạn có cách nhìn nhận biện chứng của tư duy toán học thì các bạn sẽ tìm được các phương thức phát triển, mở rộng kiến thức SGK, tạo bước ngoặt cho việc tiếp cận với các dạng toán khó.

❷ Chúng ta quan tâm một số quy luật biện chứng của tư duy toán học dưới đây và việc vận dụng chúng vào việc phát triển kiến thức SGK toán.

a. *Xem xét các đối tượng toán học, các quan hệ giữa chúng trong các mối liên hệ giữa cái chung và cái riêng*

Mỗi cái riêng có thể được chứa đựng trong nhiều cái chung, cái bao trùm nó theo một số quan hệ nào đó khác nhau và ngược lại, nhiều cái riêng có thể chứa đựng trong cùng một cái chung theo một mối quan hệ nào đó giữa các đối tượng.

Thí dụ 1. Từ bài toán sau đây trong SGK Hình học 10 :"Chứng minh rằng nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$" có thể phát triển theo hai hướng đến những cái chung, cái tổng quát khác nhau:

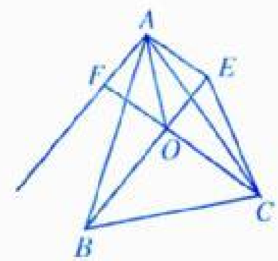
Hướng 1. Xem trọng tâm G của tam giác ABC theo quan điểm diện tích: $S_{GBC} = S_{GCA} = S_{GAB} = \frac{1}{3}S$, với S là diện tích của tam giác ABC.

Khi đó hệ thức cần chứng minh tương đương với hệ thức: $\frac{1}{3}S.\overrightarrow{GA}+\frac{1}{3}S.\overrightarrow{GB}+\frac{1}{3}S.\overrightarrow{GC}=\vec{O}$. Chú ý rằng tổng ba hệ số của biểu thức vectơ vế trái bằng S. Từ đó chúng ta có thể đề xuất bài toán tổng quát sau: "Gọi O là điểm bất kì trong tam giác ABC. Đặt $S_1 = S_{OBC}$, $S_2 = S_{OCA}$, $S_3 = S_{OAB}$; Chứng minh rằng $S_1\overrightarrow{OA}+S_2\overrightarrow{OB}+S_3\overrightarrow{OC}=\vec{0}$".

Hệ thức cần chứng minh tương đương với

$$\overrightarrow{OA}=-\frac{S_2}{S_1}\overrightarrow{OB}-\frac{S_3}{S_1}\overrightarrow{OC} \qquad (1)$$

Để chứng minh (1) ta dựng hình bình hành nhận OA làm đường chéo $OEAF$; trong đó hai cạnh OE, OF lần lượt thuộc các đường thẳng BO, CO (h. 1).



Hình 1

Theo quy tắc hình bình hành ta có: $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$.

Từ đó $\overrightarrow{OA}=-\frac{OE}{OB}\overrightarrow{OB}-\frac{OF}{OC}\overrightarrow{OC}$

hay $\overrightarrow{OA}=-\frac{S_{COE}}{S_1}\overrightarrow{OB}-\frac{S_{BOF}}{S_1}\overrightarrow{OC}$.

Do $AE//OC$ và $AF//OB$ nên

$$\overrightarrow{OA}=-\frac{S_2}{S_1}\overrightarrow{OB}-\frac{S_3}{S_1}\overrightarrow{OC}. \ \square$$

Nhận xét. 1. Nếu để ý $S_1+S_2+S_3=S$, khi đó có thể mở rộng cho trường hợp điểm O nằm ngoài tam giác ABC, thuộc miền góc tạo bởi hai tia CA, CB. Chúng ta có bài toán tổng quát khác sau:

"Gọi O là điểm nằm ngoài tam giác ABC, thuộc miền góc tạo bởi hai tia CA và CB; Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích các tam giác OBC, OAC, OAB. Chứng minh rằng $S_1\overrightarrow{OA} + S_2.\overrightarrow{OB} - S_3.\overrightarrow{OC} = \vec{O}$ "

Bạn đọc có thể tự chứng minh nhờ sử dụng hình bình hành $CMON$; trong đó M, N lần lượt thuộc các tia OA và OB.

2. Nếu để ý thêm $S_1 + S_2 - S_3 = S$ thì có thể tổng quát các trường hợp trên thành bài toán sau:

"Nếu O là điểm bất kì trong mặt phẳng (ABC), không thuộc đường thẳng chứa cạnh nào của tam giác ABC. Đặt $S_1 = S_{OBC}$, $S_2 = S_{OCA}$; $S_3 = S_{OAB}$ thì có thể chọn các dấu "+" hoặc "–" thích hợp sao cho đẳng thức $\pm S_1\overrightarrow{OA} \pm S_2\overrightarrow{OB} \pm S_3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ đúng".

Hướng 2. Có thể xem G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GK} = -\overrightarrow{GA}$, với M là trung điểm BC. Khi đó tương tự $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB} = -\overrightarrow{GC}$, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GB}$. Hay các vectơ $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{GC}$ đôi một khác phương và tổng hai vectơ bất kì trong ba vectơ trên cộng tuyến với vectơ còn lại. Khi đó $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Từ nhận xét trên chúng ta có bài toán tổng quát sau "Cho n vectơ đôi một khác phương và tổng của $n - 1$ vectơ bất kì trong n vectơ trên cộng tuyến với vectơ còn lại. Chứng minh rằng tổng n vectơ cho ở trên bằng vectơ không". Bạn đọc có thể tự kiểm tra tính đúng đắn của bài toán tổng quát trên.

Thí dụ 2. Xem xét các đối tượng, các quan hệ, các tính chất từ nhiều trường hợp riêng của một cái chung; Từ đó sử dụng các thao tác tư duy: so sánh, phân tích, tổng hợp, khái quát hóa, tổng quát hóa để đề xuất bài toán mới, bài toán tổng quát.

Chẳng hạn, chúng ta dễ dàng kiểm tra trong hình vuông hoặc hình thoi $ABCD$ có các đường chéo cắt nhau tại O thỏa mãn:

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2) \quad (2)$$

nhờ sử dụng định lí Pythagore và chỉ cần sử dụng hai đường chéo vuông góc với nhau.

Đối với hình chữ nhật hoặc hình bình hành $ABCD$ có các đường chéo cắt nhau tại O cũng thỏa mãn đẳng thức (2). Trong trường hợp này khi chứng minh chỉ cần sử dụng O là trung điểm của một đường chéo và sử dụng công thức độ dài đường trung tuyến tính theo ba cạnh của tam giác.

Phân tích, so sánh cách sử dụng các giả thiết của các trường hợp chứng minh cụ thể có thể đề xuất bài toán tổng quát sau:

"Tứ giác $ABCD$ có các đường chéo cắt nhau tại O, cần và đủ để $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2)$ là tứ giác đó có hai đường chéo vuông góc hoặc O là trung điểm của một trong hai đường chéo.

b. *Xem xét các đối tượng toán học, các quan hệ giữa chúng theo quan điểm vận động biến đổi*

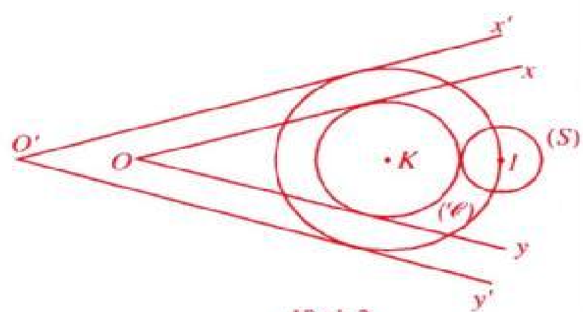
Chúng ta cần đặc biệt quan tâm xem xét các đối tượng, các quan hệ trong bài toán theo quan điểm vận động từ cái riêng đến cái chung (thể hiện trong giả thiết của bài toán) để tổng quát hóa các bài toán, tìm tòi kiến thức mới.

Thí dụ 3. Các bạn học sinh đã được làm quen với bài toán sau trong SGK Hình học lớp 10: "Cho góc xOy và điểm A nằm trong góc đó. Dựng đường tròn qua A và tiếp xúc với hai cạnh Ox, Oy".

Bài toán trên được giải nhờ sử dụng phép vị tự, bằng cách xem đường tròn cần dựng là ảnh của đường tròn ($\mathscr{C}$) bán kính R được chọn tùy ý và tiếp xúc với hai cạnh Ox, Oy của góc qua phép vị tự V_O^k với $k = \dfrac{OA}{OA'}$, A' là giao điểm của OA với đường tròn ($\mathscr{C}$).

Từ đó nếu xét điểm là trường hợp đặc biệt của đường tròn khi bán kính bằng 0 thì có thể phát biểu bài toán mới, tổng quát sau: "Cho góc xOy và đường tròn (S) tâm I bán kính R nằm trong góc đó. Hãy dựng đường tròn ($\mathscr{C}$) tiếp xúc với Ox, Oy và tiếp xúc với đường tròn (S)". Việc dựng đường tròn ($\mathscr{C}$) quy về dựng đường tròn tâm K đi qua I và tiếp xúc với $O'x'$ và $O'y'$, kí hiệu là (K). Trong đó $O'x'$ và $O'y'$ lần lượt song song với Ox, Oy và cách đều chúng một khoảng bằng R (đã xét ở bài toán ban đầu).

Giả sử đường tròn (K) có bán kính d. Khi đó đường tròn cần dựng có tâm K bán kính bằng $d - R$ (xem hình 2).



Hình 2

Dưới đây là những bài tập dành cho các bạn:

Bài tập 1. Hãy trình bày các cách tổng quát hóa bài toán sau, đề xuất các bài toán mới: "Gọi I là tâm vòng tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Với a, b, c là độ dài các cạnh của tam giác ABC".

Bài tập 2. Tổng quát hóa bài toán sau: "Cho tam giác MNP. Qua các đỉnh M, N, P vẽ các đường thẳng a, b, c lần lượt song song với NP; MP; MN. Các đường thẳng a, b, c đôi một cắt nhau tại A, B, C. Chứng minh rằng các cạnh của tam giác ABC nhận M, N, P là các trung điểm.

Nhiều cách giải cho một bài toán

Tìm nhiều cách chứng minh một hệ thức nhờ biến đổi tương đương

NGUYỄN VIỆT HẢI
(Hà Nội)

Từ một hệ thức nếu khéo sử dụng các phép biến đổi ta có thể nhận được nhiều hệ thức tương đương, mà mỗi hệ thức đó có một dạng riêng sẽ gợi cho ta tìm ra cách chứng minh tương ứng. Nếu ta chứng minh được một trong các hệ thức này thì suy ra được tất cả các hệ thức tương đương với nó. Như vậy, không những ta tìm được nhiều cách chứng minh hệ thức ban đầu mà còn có cách nhìn toàn diện hơn, hệ thống hơn về các hệ thức khác nhau về hình thức nhưng thống nhất với nhau về mối quan hệ toán học. Điều này được minh họa qua việc xét cách chứng minh một số hệ thức trong tam giác dưới đây.

Cho tam giác ABC với $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $a + b + c = 2p$. Gọi S, R, r theo thứ tự là diện tích, bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Gọi r_a, r_b, r_c là bán kính đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tương ứng với các góc CAB, ABC, BCA. Đặt $\widehat{CAB} = 2\alpha$, $\widehat{ABC} = 2\beta$, $\widehat{BCA} = 2\gamma$.

Trong bài này sẽ sử dụng một số hệ thức quen biết sau.

$$S = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \qquad \text{(I)}$$

Từ đó có $pr^2 = (p-a)(p-b)(p-c)$ (II)

Khai triển vế phải của (II) rồi thay $abc = 4Rrp$ vào và rút gọn được

$$ab + bc + ca - p^2 = 4Rr + r^2 \qquad \text{(III)}$$

Ta cũng biết:

$$\text{tg}\alpha = \frac{r}{p-a} = \frac{r_a}{p},\ \text{tg}\beta = \frac{r}{p-b} = \frac{r_b}{p},$$

$$\text{tg}\gamma = \frac{r}{p-c} = \frac{r_c}{p} \qquad \text{(IV)}$$

✪ **Bài toán.** *Chứng minh rằng trong tam giác ABC có hệ thức*

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} = \frac{4R+r}{pr} \qquad (1)$$

Chứng minh. (*Cách 1*)

Đặt $T = \dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c}$.

Ta có

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} = \frac{2p-a-b}{(p-a)(p-b)} = \frac{c}{(p-a)(p-b)}.$$

Tương tự có

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-c} = \frac{b}{(p-a)(p-c)};$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} = \frac{a}{(p-b)(p-c)}.$$

Từ đó

$$2T = \frac{c}{(p-a)(p-b)} + \frac{b}{(p-a)(p-c)} + \frac{a}{(p-b)(p-c)}$$

$$= \frac{c(p-c)+b(p-b)+a(p-a)}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2p^2-(a^2+b^2+c^2)}{pr^2}$$

$$= \frac{2p^2-(a+b+c)^2+2(ab+bc+ca)}{pr^2}$$

$$= \frac{2(ab+bc+ca)-2p^2}{pr^2}.$$

Thay hệ thức (III) vào phân thức cuối cùng nêu trên ta có điều phải chứng minh.

Biến đổi tương đương hệ thức (1) được,

$$\frac{pr}{p-a}+\frac{pr}{p-b}+\frac{pr}{p-c}=4R+r.$$

Áp dụng hệ thức (IV) ta chuyển việc chứng minh hệ thức (1) đến chứng minh hệ thức sau:

$$r_a+r_b+r_c=4R+r \qquad (2)$$

Chứng minh. (*Cách 2*)

Sử dụng hệ thức (I) và (IV) có

$$r_a=\frac{pr}{p-a}=\frac{S^2}{S(p-a)}=\frac{p(p-b)(p-c)}{S}.$$

Tương tự $r_b=\dfrac{p(p-a)(p-c)}{S}$,

$$r_c=\frac{p(p-a)(p-b)}{S},\ r=\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{S}.$$

Từ đó

$$S\big((r_a+r_b)+(r_c-r)\big)$$
$$= p(p-c)(p-a+p-b)+(p-a)(p-b)(p-(p-c))$$
$$= c\big(p(p-c)+(p-a)(p-b)\big)$$
$$= c\big(2p^2-p(a+b+c)+ab\big) = cab = 4RS.$$

Giản ước S ở vế đầu và vế cuối của dãy đẳng thức ta được (2).

Lại biến đổi tương đương hệ thức (1) theo cách khác được

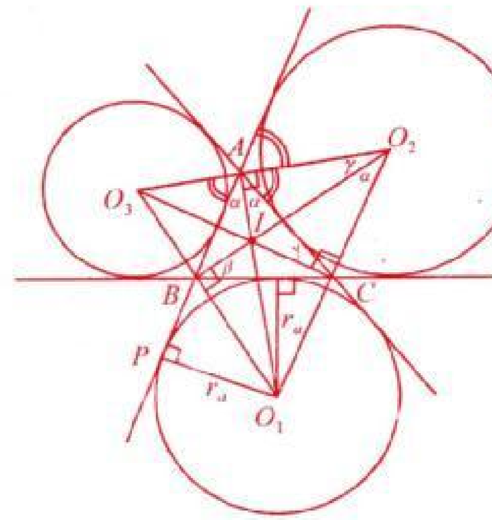
$$\frac{4R+r}{r}=\frac{p}{p-a}+\frac{p}{p-b}+\frac{p}{p-c}$$
$$=\left(\frac{a}{p-a}+1\right)+\left(\frac{b}{p-b}+1\right)+\left(\frac{c}{p-c}+1\right).$$

Từ đó ta chuyển việc chứng minh hệ thức (1) về chứng minh hệ thức

$$\frac{a}{p-a}+\frac{b}{p-b}+\frac{c}{p-c}=\frac{4R}{r}-2 \qquad (3)$$

Chứng minh. (*Cách 3*)

Gọi O_1, O_2, O_3 là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tương ứng với các góc CAB, ABC, BCA (xem hình vẽ).



Từ (I) và (IV) có

$$\frac{aS}{p-a}=\frac{apr}{p-a}=ar_a=2S_{O_1BC}.$$

Tương tự có

$$\frac{bS}{p-b}=2S_{O_2AC},\ \frac{cS}{p-c}=2S_{O_3AB}.$$

Dễ thấy $\widehat{O_1AC}+\widehat{O_2AC}=\dfrac{180^\circ}{2}=90^\circ$ nên $O_1A\perp O_2A$. Tương tự có $O_1A\perp O_3A$ và $O_1A\perp O_2O_3$, $O_2B\perp O_1O_3$, $O_3C\perp O_1O_2$.

Ta cũng có

$$\widehat{CO_2A}=\widehat{CIO_1}=\widehat{CAI}+\widehat{ACI}=\alpha+\gamma=\widehat{CBO_1}.$$

Từ đó có

$$\Delta O_1O_2O_3 \backsim \Delta O_1BC \text{ nên } \frac{O_2O_3}{a}=\frac{AO_1}{r_a}.$$

Ta có

$$2S_{O_1O_2O_3}=O_2O_3.AO_1=\frac{O_2O_3}{AO_1}.AO_1^2=\frac{a}{r_a}.AO_1^2$$

Chú ý rằng $AO_1 = \dfrac{AP}{\cos\alpha} = \dfrac{p}{\cos\alpha}$ và $r_a = p\mathrm{tg}\alpha$ (theo (IV)) nên

$$2S_{O_1O_2O_3} = \frac{ap^2}{p.\mathrm{tg}\alpha.\cos^2\alpha} = \frac{p.2R.\sin 2\alpha}{\sin\alpha.\cos\alpha} = 4Rp \quad \text{(V)}$$

Mặt khác sử dụng (I), (IV) có

$$2S_{O_1O_2O_3} = S + S_{O_1BC} + S_{O_2AC} + S_{O_3AB}$$

$$= S + \frac{a}{2}.r_a + \frac{b}{2}.r_b + \frac{c}{2}.r_c$$

$$= S + \frac{aS}{2(p-a)} + \frac{bS}{2(p-b)} + \frac{cS}{2(p-c)}$$

$$= \frac{S}{2}\left(2 + \frac{a}{p-a} + \frac{b}{p-b} + \frac{c}{p-c}\right) \quad \text{(VI)}$$

Từ (V), (VI) và $S = pr$ suy ra hệ thức (3).

Ta lại biến đổi hệ thức (1) tương đương với

$$\frac{r}{p-a} + \frac{r}{p-b} + \frac{r}{p-c} = \frac{4R+r}{p}.$$

Sử dụng (IV) ta chuyển việc chứng minh hệ thức (1) về chứng minh hệ thức

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma = \frac{4R+r}{p} \quad (4)$$

Chứng minh. (*Cách 4*)

Sử dụng (IV) ta có

$$p = (p-a) + a = \frac{r}{\mathrm{tg}\alpha} + 2R\sin 2\alpha.$$

Áp dụng công thức lượng giác của góc chia đôi với $\mathrm{tg}\alpha = t$ ta có $p = \dfrac{r}{t} + \dfrac{4Rt}{1+t^2}$.

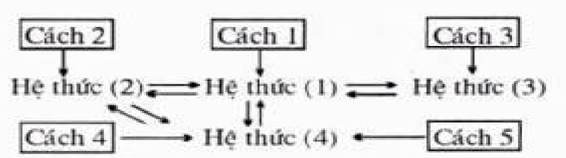
Quy đồng mẫu số rồi viết trong dạng phương trình đối với t ta được

$$pt^3 - (4R+r)t^2 + pt - r = 0 \quad \text{(VII)}$$

Như vậy $t = \mathrm{tg}\alpha$ là nghiệm của phương trình bậc ba (VII). Tương tự như thế $\mathrm{tg}\beta$, $\mathrm{tg}\gamma$ cũng là nghiệm của phương trình bậc ba (VII). Áp dụng định lí Viète cho tổng ba nghiệm của phương trình bậc ba (VII) ta có hệ thức (4).

Trong bài tập 1 dưới đây hướng dẫn cách chứng minh hệ thức (4) (coi là cách (5)) bằng các phép biến đổi lượng giác. Với mỗi hệ thức (1), (2), (3), (4) ta có cách chứng minh tương ứng nhưng vì các hệ thức này tương đương với nhau nên nếu xuất phát từ một trong năm cách chứng minh đã nêu thì đi theo mũi tên trong sơ đồ dưới ta chứng minh được hệ thức (1) và cả các hệ thức (2), (3), (4). Cũng dễ dàng thấy nếu sử dụng (IV) có thể biến đổi hệ thức (2) tương đương với hệ thức (4).

Sơ đồ liên hệ giữa các hệ thức và cách chứng minh



Mời các bạn làm các bài tập sau có liên quan đến các hệ thức trên và cách chứng minh chúng.

Bài 1. Sử dụng các phép biến đổi lượng giác để chứng minh các hệ thức sau:

a) $\dfrac{4R}{p} = \dfrac{8R}{2R(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)} = \dfrac{1}{\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma}$;

b) $\dfrac{r}{p} = \mathrm{tg}\alpha.\mathrm{tg}\beta.\mathrm{tg}\gamma$.

Từ đó suy ra hệ thức (4) (*cách* (5)).

Bài 2. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{p-a}$, $\dfrac{1}{p-b}$, $\dfrac{1}{p-c}$ là ba nghiệm của phương trình bậc ba

$$pr^2x^3 - (4R+r)rx^2 + px - 1 = 0.$$

Từ đó suy ra hệ thức (1).

Hướng dẫn. $\dfrac{4R}{p-(p-a)} = \dfrac{4R}{a} = \dfrac{4R}{2R\sin 2\alpha}$

$= \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{cotg}\alpha = \dfrac{r}{p-a} + \dfrac{p-a}{r}$,

đặt $x = \dfrac{1}{p-a}$ rồi quy đồng mẫu số.

Bài 3. Chứng minh các hệ thức sau:

a) $p\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{(p-b)(p-c)}{r}$;

b) $p(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta) = 4R\cos^2\gamma$;

c) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 1 + 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 1 + \dfrac{r}{R}$;

d) $2p(\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma) = 6R + 2R(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma)$.

Từ đó suy ra hệ thức (4).

Bài 4. Gọi O_1, O_2, O_3 theo thứ tự là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tương ứng với các góc CAB, ABC, BCA. Hãy dựa vào bài tập 3b và $S_{O_1O_2O_3} = S_{IO_1O_3} + S_{IO_2O_3}$ để chứng minh $S_{O_1O_2O_3} = 2Rp$ (V). Từ đó suy ra hệ thức (3).

Bài 5. a) Chứng minh rằng hệ thức (3) tương đương với mỗi hệ thức (5), (6) sau:

$$\frac{a^2}{p-a} + \frac{b^2}{p-b} + \frac{c^2}{p-c} = 4p\left(\frac{R}{r} - 1\right) \quad (5)$$

$$a^2\mathrm{tg}\alpha + b^2\mathrm{tg}\beta + c^2\mathrm{tg}\gamma = 4p(R-r) \quad (6)$$

b) Hãy chứng minh hệ thức (5) bằng cách quy đồng mẫu số và dựa vào khai triển công thức Heron theo a, b, c thành

$$16S^2 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4).$$

Hướng dẫn: a) Đặt $\dfrac{a^2}{p-a} + a = \dfrac{pa}{p-a}$.

Tiếp cận và khai thác MỘT BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC từ những phương cách khác nhau

(Tiếp theo kì trước)

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT
(Hà Nội)

II. Khai thác bài toán theo những hướng khác nhau

1. Bài toán cực trị xuất phát (gốc) là một bài toán cực trị hình học trong mặt phẳng, liên quan đến độ dài đoạn thẳng, cụ thể là chu vi của một tứ giác nội tiếp một đường tròn cho trước có hai đường chéo vuông góc ở một điểm cố định cho trước nằm trong đường tròn đó. Bây giờ thay chu vi bởi diện tích, ta có ngay bài toán tương tự phát biểu như sau:

Bài toán 1. *Trong các tứ giác lồi ABCD nội tiếp đường tròn (O; a) cho trước sao cho các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau ở một điểm P cố định nằm trong đường tròn (OP = d < a), hãy xác định tứ giác có diện tích lớn nhất và tứ giác có diện tích nhỏ nhất và tính các diện tích đó theo a và d.*

Nếu đặt $\widehat{AOB} = 2x$, $\widehat{BOC} = 2y$, $\widehat{COD} = 2z$, $\widehat{DOA} = 2t$ thì lúc đó $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = x$, ..., $\widehat{DBA} = \widehat{DCA} = t$, ta có $0 < x, y, z, t < \dfrac{\pi}{2}$, $x + z = y + t = \dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{AB}{\sin x} = \dfrac{BC}{\sin y} = \dfrac{CD}{\sin z} = \dfrac{DA}{\sin t} = 2a$.

Để ý rằng x, y được ràng buộc bởi điều kiện $\sin 2x.\sin 2y = \dfrac{b^2}{a^2}$. Ta có bài toán cực trị lượng giác sau:

Bài toán 2. *Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức lượng giác sau*

$$f(x, y) = \sin x + \cos x + \sin y + \cos y,$$

với $0 < x, y < \dfrac{\pi}{2}$ *thỏa mãn điều kiện*

$$\sin 2x.\sin 2y = k^2 \ (0 < k \leq 1).$$

2. Ngoài ra, lẽ tự nhiên chúng ta liên tưởng đến bài toán tương tự (mở rộng) trong hình học không gian. Sự tương tự này khá phong phú vì sự "liên tưởng" này có thể xuất phát từ những cách nhìn khác nhau hoặc xét theo những khía cạnh, góc độ khác nhau. Chẳng hạn, thay đường tròn bởi mặt cầu, góc vuông bởi góc tam diện vuông, tứ giác nội tiếp có hai đường chéo vuông góc bởi hình bát diện nội tiếp mặt cầu, là hợp của hai chóp tứ giác có chung đáy và có ba đường chéo (cũng là ba dây cung của mặt cầu) đồng quy tại một điểm cố định nằm trong mặt cầu và vuông góc với nhau từng đôi một. Thế thì ta có các bài toán tương tự trong không gian như sau:

Cho mặt cầu ($\mathscr{C}$) tâm O, bán kính a và một điểm P cố định nằm trong mặt cầu (OP = d < a). Xét các hình bát diện lồi $\mathscr{K}$(C.ABA'B'.C') nội tiếp mặt cầu ($\mathscr{C}$) nói trên sao cho các dây cung AA', BB', CC' của ($\mathscr{C}$) cũng là các đường chéo của $\mathscr{K}$, đôi một vuông góc với nhau ở điểm P.

Bài toán 3. *Hãy xác định hình bát diện có thể tích lớn nhất và hình bát diện có thể tích nhỏ nhất và tính các thể tích đó theo a và d.*

Bài toán 4. *Hãy xác định bát diện $\mathscr{K}_1$ có tổng độ dài các cạnh (trên các mặt) lớn nhất và hình bát diện $\mathscr{K}_2$ có tổng độ dài các cạnh nhỏ nhất và tính các độ dài lớn nhất l_M và nhỏ nhất l_m theo a và d.*

Bài toán 5. *Hãy xác định hình bát diện $\mathcal{K}_0$ có diện tích toàn phần lớn nhất và hình bát diện $\mathcal{K}'_0$ có diện tích toàn phần nhỏ nhất và tính các diện tích S_0, S'_0 đó theo a và d.*

Chú thích và gợi ý hướng giải bài toán 4 và tổng quát hóa bài toán đó

Để giải bài toán 4, trước hết chúng ta hãy phát biểu nội dung bài toán 4 sang ngôn ngữ đại số (trên cơ sở tổng quát hóa bài toán cực trị đại số được phát biểu trong lời giải 2 dưới dạng ngôn ngữ đại số của nội dung bài toán cực trị hình học gốc ở trên). Rồi từ đó chúng ta đề xuất được một *bài toán mới tổng quát hơn nữa về cực trị đại số* sau đây.

Bài toán 6. (*Bài toán cực trị đại số*).

a) Phát biểu bài toán

Xét 2n biến số thực dương x_i, x'_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ thỏa mãn các điều kiện sau:

$$\begin{cases} a-\sqrt{a^2-b^2} \le x_i, x'_i \le a+\sqrt{a^2-b^2} & (1) \\ x_i x'_i = b^2 \ (0 < b \le a) & (2) \\ \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2+x_i'^2\right) = 4a^2+2(n-2)b^2, (n \ge 2) & (3) \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất p_M và giá trị nhỏ nhất p_m của hàm 2n biến x_i, x'_i $(i \in \{1, 2, \dots, n\})$, $(n \ge 2)$ sau đây:

$$p(x_1; x'_1; \dots; x_n; x'_n) = \sum_{1\le i<j\le n}\left(\sqrt{x_i^2+x_j^2}+\sqrt{x_i^2+x_j'^2}+\sqrt{x_i'^2+x_j^2}+\sqrt{x_i'^2+x_j'^2}\right) (*)$$

Chú thích: Nếu đặt $p_{ij} = p_{ij}(x_i; x'_i; x_j; x'_j)$ thì (*) được viết gọn lại hơn như sau:

$$p(x_1; x'_1; \dots; x_n; x'_n) = \sum_{1\le i<j\le n} p_{ij}(x_i; x'_i; x_j; x'_j)$$

và dưới dấu $\sum$ có tất cả $\frac{1}{2}(n-1)n = C_n^2$ hàm $p_{ij}(x_i; x'_i; x_j; x'_j)$ của bốn biến x_i, x'_i, x_j, x'_j với $1 \le i < j \le n$, trong đó $p_{ij}(x_i; x'_i; x_j; x'_j)$ có dạng là tổng của bốn căn thức bậc hai ở vế phải của (*).

b) Gợi ý phương án giải

Đặt $X_i = x_i + x'_i$, $X_j = x_j + x'_j$;

$$x_i^2 + x_i'^2 + x_j^2 + x_j'^2 = 4a_{ij}^2;\ x_0 = 2b,\ X_0 = 2a.$$

Thế thì $4b^2 = 4x_i x'_i \le X_i^2 \le 4a_{ij}^2$;

$$X_i^2 + X_j^2 = 4a_{ij}^2 + 4b^2.$$

Từ đó, hãy thiết lập các BĐT và ĐT sau:

$$2b = x_0 \le X_i \le 2a_{ij} \le 2a$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 4a^2 + 2(n-2)b^2 + 2nb^2$$

$$= 4a^2 + 4(n-1)b^2 = X_0^2 + (n-1)x_0^2$$

$$p_{ij}^2 = (X_i + X_j)^2 + 4a_{ij}(X_i + X_j) + 4(a_{ij}^2 + b^2)$$

$$p_{ij} \le p_{ij_M} = 2\left(a_{ij}\sqrt{2} + \sqrt{a_{ij}^2 + b^2}\right)$$

$$p_{ij} \ge p_{ij_m} = 4\sqrt{a_{ij}(a_{ij} + b)}.$$

c) Đáp số

$$p_M = (n-1)\left(\sqrt{2n(2a^2+(n-2)b^2)} + \right.$$
$$\left. + \sqrt{2n(a^2+(n-1)b^2)}\right) \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow X_1 = X_2 = \dots = X_n = \frac{2}{n}\sqrt{na^2 + n(n-1)b^2};$$

$$p_m = 4\left((n-1)\sqrt{a(a+b)} + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)b\sqrt{2}\right) (5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_i = x_i + x'_i = 2a, (i \in \{1, 2, \dots n\}) \\ X_j = 2b, j \ne i. \end{cases}$$

Chú thích.

* Với $n = 2$ thì $p_M = 2\left(a\sqrt{2} + \sqrt{a^2+b^2}\right)$ và $p_m = 4\sqrt{a(a+b)}$; ta thấy lại kết quả đã thu được ở phần I (các lời giải 1, 2).

* Với $n = 3$ (và do đó $2n = 6$) thì nội dung bài toán 6 chính là *nội dung ngôn ngữ đại số của bài toán 4*. Bởi vậy, cho $n = 3$ vào các vế phải của các biểu thức (4) và (5) ở trên ta được ngay tức khắc đáp số của bài toán 4.

*) Tương đối *dễ hơn cả* là các bài toán 1, 2, 3 dành cho bạn đọc tự giải xem là *bài tập*. Bạn nào có điều kiện về thời gian và muốn tập thể thao về trí tuệ, xin *hãy thử sức* với các bài toán 4 và 5. Chúc các bạn thành công.

TRUNG HỌC CƠ SỞ

Mò mẫm, dự đoán ... đến lời giải

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(GV TP Hồ Chí Minh)

Trong giải toán và đặc biệt là giải các bài toán về cực trị, việc mò mẫm và dự đoán kết quả bài toán có vẻ thiếu tự nhiên để từ đó "điều chỉnh" thích hợp tìm ra lời giải bài toán là một suy nghĩ rất độc đáo và sáng tạo.

Bài viết này nhằm trao đổi cùng bạn đọc về việc tìm kiếm lời giải cho ba bài toán cực trị hay và khó sau đây.

✪**Bài toán 1.** *Tìm kích thước của tam giác có diện tích lớn nhất nội tiếp đường tròn (O; R) cho trước.*

(Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT chuyên Lê Hồng Phong TP. Hồ Chí Minh, 1993 - 1994)

Mò mẫm và dự đoán. Tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, vẽ đường cao AH thì $S_{ABC} = \frac{1}{2}AH.BC$. Nếu cố định BC thì S_{ABC} lớn nhất khi AH lớn nhất, lúc đó A nằm chính giữa cung BC và tam giác ABC cân tại A. Tương tự, nếu cố định AB thì S_{ABC} lớn nhất khi tam giác ABC cân tại C. Vì vậy, ta dự đoán S_{ABC} lớn nhất khi tam giác ABC là tam giác đều, lúc đó

$$S_{ABC} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

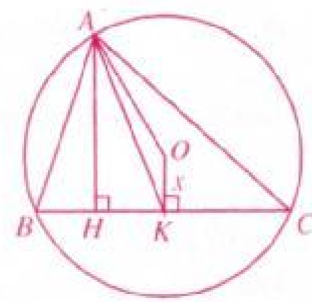
Từ đó gợi ý cho ta đi chứng minh $S_{ABC} \le \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

Lời giải. (h.1)

Với tam giác ABC bất kì nội tiếp đường tròn $(O; R)$, kẻ AH và OK cùng vuông góc với BC. Đặt $OK = x$ $(0 \le x < R)$, ta có

$BC = 2\sqrt{R^2 - x^2}$;

$AH \le AK \le OA + OK = R + x.$



Hình 1

Do đó $S_{ABC} = \frac{1}{2}.AH.BC$

$$\le \frac{1}{2}(R+x).2\sqrt{R^2-x^2} = R\sqrt{R^2-x^2} + x\sqrt{R^2-x^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{\sqrt{3}R}{2}\sqrt{R^2-x^2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{3}x.\sqrt{R^2-x^2}\right).$$

Áp dụng BĐT Cauchy với hai số không âm dẫn đến

$$S_{ABC} \le \frac{2\sqrt{3}}{3}.\frac{1}{2}\left(\frac{3R^2}{4} + R^2 - x^2\right) + \frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{1}{2}\left(3x^2 + R^2 - x^2\right)$$

$$S_{ABC} \le \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} H \equiv K \\ O \text{ nằm giữa } A \text{ và } K \\ \frac{\sqrt{3}}{2}R = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ \widehat{BAC} = 60^o. \end{cases}$$

Tức là tam giác ABC đều có cạnh bằng $R\sqrt{3}$. ❐

✪**Bài toán 2.** *Xét các tứ giác lồi ABCD có AB = BC = CD = a. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác ABCD.*

Mò mẫm và dự đoán. Nhận thấy

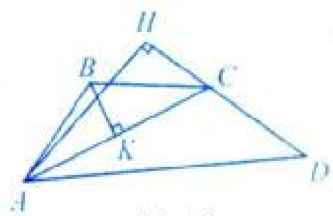
$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} \le S_{ABC} + \frac{1}{2}AH.CD.$$

Nếu cố định tam giác ABC thì S_{ABCD} lớn nhất khi $\widehat{ACD}=90^o$. Tương tự, cố định tam giác BCD thì S_{ABCD} lớn nhất khi $\widehat{ABD}=90^o$. Vì vậy, ta dự đoán S_{ABCD} lớn nhất khi $\widehat{ABC}=\widehat{ACD}=90^o$, tứ giác $ABCD$ là hình thang cân ($AD//BC$) nội tiếp đường tròn đường kính $AD = 2a$ có $AB = BC = CD = a$, lúc đó $S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Từ đó gợi ý cho ta đi chứng minh $S_{ABCD} \le \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Lời giải. (h.2).

Vẽ $AH \perp CD$, $BK \perp AC$. Đặt $AC = x$ $(0 < x < 2a)$. khi đó



Hình 2

$$BK = \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}$$

và $AH \le AC = x$. Ta có

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}BK.AC + \frac{1}{2}AH.CD$$

$$\le \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}.x + \frac{1}{2}.x.a$$

$$= \frac{1}{2}.2\sqrt{3}\left(\sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}}.\frac{\sqrt{3}}{6}x\right) + \frac{1}{2}.\sqrt{3}\left(a.\frac{\sqrt{3}}{3}x\right).$$

Áp dụng BĐT Cauchy với hai số không âm dẫn đến

$$S_{ABCD} \le \frac{1}{2}.2\sqrt{3}.\frac{1}{2}\left(a^2 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{12}\right) + \frac{1}{2}.\sqrt{3}.\frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{x^2}{3}\right)$$
$$= \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} H \equiv C \\ \sqrt{a^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{6}x \\ a = \frac{\sqrt{3}}{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{ACD} = 90^o \\ AC = \sqrt{3}a. \end{cases}$$

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ABCD$ là $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$ đạt được khi nó là hình thang cân ($AD//BC$) có $AB = BC = CD = \frac{DA}{2} = a$. ❐

✪**Bài toán 3.** *Cho x, y là hai số dương. Đặt S là số nhỏ nhất trong các số x, $y + \frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$. Tìm giá trị lớn nhất của S.*

Mò mẫm và dự đoán. Khi cho $x = y + \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$ thì ta có $xy = 1$; $x^2 = xy + 1 = 2$. Khi đó

$S = x = \sqrt{2}$. Ta dự đoán S lớn nhất bằng $\sqrt{2}$. Gợi ý cho việc đi chứng minh $S \le \sqrt{2}$.

Lời giải. Giả sử $S > \sqrt{2}$ thì $x > \sqrt{2}$, $\frac{1}{y} > \sqrt{2}$, $y + \frac{1}{x} > \sqrt{2}$ (1). Suy ra $\frac{1}{x} < \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y < \frac{\sqrt{2}}{2}$, do đó $y + \frac{1}{x} < \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Mâu thuẫn với (1).

Vậy $S > \sqrt{2}$ là sai, suy ra $S \le \sqrt{2}$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \sqrt{2}$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. ❐

Các bạn hãy rèn luyện thêm bằng cách tìm lời giải cho các bài toán sau đây.

Bài 1. Cho điểm I cố định nằm trong đường tròn $(O; R)$ với I không trùng với O. AC, BD là hai dây cung di động qua I và vuông góc với nhau. Xác định vị trí của các dây AC, BD để diện tích tam giác ICD lớn nhất.

Bài 2. Tìm kích thước của tam giác có chu vi lớn nhất nội tiếp trong đường tròn $(O; R)$ cho trước.

Bài 3. Cho S là số nhỏ nhất trong các số x, $\frac{y}{z}$, $\frac{z}{t}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{x}$, t (với x, y, z, t là các số dương). Hãy tìm giá trị lớn nhất của S.

Bài 4. Cho x, y là các số dương. Giả sử S là số lớn nhất trong ba số x, $\frac{1}{y}$, $y + \frac{1}{x}$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của S.

TRUNG HỌC CƠ SỞ

VẼ TIA PHÂN GIÁC CỦA MỘT GÓC ĐỂ GIẢI TOÁN

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Trong một số bài toán hình học có liên quan đến góc, nhiều khi vẽ tia phân giác của một góc nhằm tạo thêm mối quan hệ về góc, cạnh sẽ giúp giải bài toán dễ dàng hơn. Ta thường vẽ tia phân giác của một góc trong các trường hợp dưới đây.

1 Trong bài toán có đề cập tới mối quan hệ góc này với nửa góc kia, ta thường vẽ tia phân giác của góc lớn.

✪ **Bài toán 1.** *Cho tam giác ABC cân tại A. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho CD = 2.BD. So sánh* $\widehat{BAD}$ *và* $\frac{1}{2}\widehat{DAC}$.

Nhận xét. Để so sánh $\widehat{BAD}$ và $\frac{1}{2}\widehat{DAC}$, ta vẽ tia phân giác AE của $\widehat{DAC}$ (h. 1).

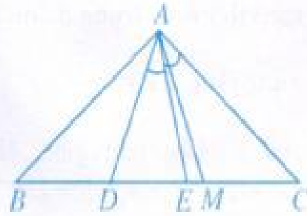
Lời giải. Do $\widehat{ADC} > \widehat{B} = \widehat{C}$ nên $AC > AD$. Vẽ tia phân giác AE và trung tuyến AM của tam giác DAC. Ta có

• $\dfrac{ED}{EC} = \dfrac{AD}{AC} < 1$,

suy ra $ED < EC$

nên $CE > \dfrac{CD}{2} = CM$.

Từ đó $\widehat{CAE} > \widehat{CAM}$ (1)



Hình 1

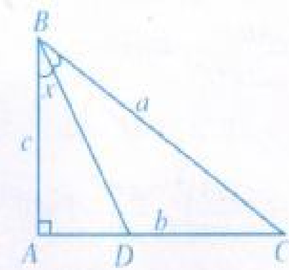
• $\Delta BAD = \Delta CAM$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{CAM}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BAD} < \frac{1}{2}\widehat{DAC}$. ❐

✪ **Bài toán 2.** *Chứng minh rằng:*
$$\sin 2x = 2\sin x.\cos x \; (0^\circ < x < 45^\circ).$$

Nhận xét. Bài toán đề cập tới góc $2x$ và góc x. Ta vẽ tia phân giác của góc $2x$.

Lời giải. (h.2). Vẽ tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 2x$ và tia phân giác BD. Gọi độ dài các cạnh BC, CA, AB thứ tự là a, b, c.



Hình 2

Ta có

$$\frac{DA}{c} = \frac{DC}{a} = \frac{b}{c+a}$$

$$\Rightarrow DA = \frac{bc}{c+a};\; DC = \frac{ab}{c+a}.$$

Ta có công thức về đường phân giác (xem THTT số 340 tháng 10.2005):

$$BD^2 = BA.BC - DA.DC = ca - \frac{ab^2c}{(c+a)^2}$$

$$= \frac{ca(c^2+2ca+a^2-b^2)}{(c+a)^2} = \frac{ca(c^2+2ca+c^2)}{(c+a)^2}$$

$$= \frac{2c^2a}{c+a}.$$

Từ đó $2\sin x.\cos x = \dfrac{2AD}{BD}.\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{2bc^2}{c+a} : \dfrac{2c^2a}{c+a}$

$= \dfrac{b}{a} = \sin 2x$. ❐

2 Vẽ tia phân giác của một góc để tạo ra được các quan hệ về góc và về cạnh mới.

✪ **Bài toán 3.** *Cho tam giác ABC cân tại A có* $\widehat{A} = 36^\circ$. *Tính* $\dfrac{AB}{BC}$.

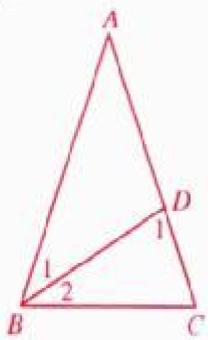
Nhận xét. Vẽ tia phân giác BD thì tạo ra được quan hệ về góc $\widehat{B_1} = \widehat{A}$, $\widehat{D_1} = \widehat{C}$ và quan hệ về cạnh $AD = BD = BC$. (h.3).

Lời giải. Vẽ tia phân giác BD. Ta có $\widehat{B_1} = 72^\circ : 2 = 36^\circ = \widehat{A}$; $\widehat{D_1} = \widehat{A} + \widehat{B_1} = 72^\circ = \widehat{C}$ nên $AD = BD = BC$.

Theo tính chất đường phân giác thì

$$\frac{DA}{AB} = \frac{DC}{BC} = \frac{AC}{AB+BC}$$

suy ra $DC = \dfrac{AB.BC}{AB+BC}$.



Hình 3

Mặt khác $DC = AC - AD = AB - BC$ nên

$$\frac{AB.BC}{AB+BC} = AB - BC$$

$\Rightarrow AB.BC = AB^2 - BC^2$

$$\Rightarrow \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - \frac{AB}{BC} - 1 = 0.$$

Từ đó, tính được $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. ❐

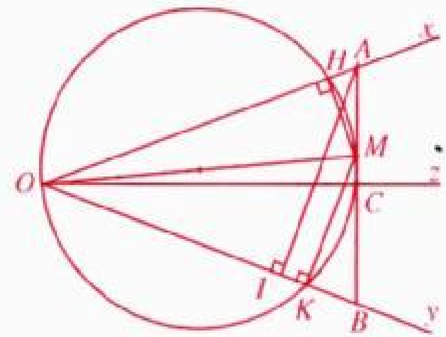
❸ Vẽ tia phân giác của một góc khi dự đoán được một đường đi qua một điểm cố định nằm trên tia phân giác của một góc cố định.

✪ **Bài toán 4.** *Cho góc* $\widehat{xOy}$ *khác* 180° *và một điểm M trong góc đó sao cho MH + MK = a (a là độ dài cho trước) với H và K theo thứ tự là chân đường vuông góc kẻ từ M xuống Ox và Oy. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MHK đi qua hai điểm cố định khi M di động trong góc xOy.*

Nhận xét. Vẽ hai vị trí của hình ta dự đoán được đường tròn (MHK) đi qua C thuộc tia phân giác của góc xOy. (h. 4).

Lời giải. Do $\widehat{OHM} = \widehat{OKM} = 90^\circ$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác MHK đi qua điểm cố định O.

Vẽ tia phân giác Oz của góc xOy.



Hình 4

Qua M kẻ $AB \perp Oz$ tại C với $A \in Ox$, $B \in Oy$.

Kẻ $AI \perp Oy$ tại I thì $OA = OB$. Nếu C khác M thì C thuộc đường tròn (MHK) do $\widehat{MCO} = 90^\circ$.

Ta có: $S_{AOB} = S_{AOM} + S_{MOB}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}OB.AI = \frac{1}{2}OA.MH + \frac{1}{2}OB.MK$$

$\Rightarrow AI = MH + MK = a \Rightarrow A$ cố định

$\Rightarrow B$ và C cố định.

Vậy đường tròn (MHK) đi qua hai điểm cố định O và C. ❐

Mời các bạn tham gia giải một số bài toán sau đây.

Bài 1. Cho góc x với $0^\circ < x < 45^\circ$. Chứng minh rằng: a) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$;

b) $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$; c) $\sin 2x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$.

Bài 2. Giả sử M là một điểm ở trong tam giác ABC sao cho $CM = CB$. Chứng minh rằng $AB > AM$.

Bài 3. Cho tam giác ABC ($AC > AB$). Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của AD và BC. Chứng minh rằng $\widehat{CEF} = \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

Bài 4. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 2(\widehat{B} - \widehat{C})$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Chứng minh rằng

$$a^2 b = (b-c)(b+c)^2.$$

Bài 5. Cho tứ giác $ABCD$ có $\widehat{DAC} = 130^\circ$, $\widehat{DBC} = 110^\circ$, $\widehat{ABD} = \widehat{BAC} = 30^\circ$. Tính $\widehat{ADC}$ và $\widehat{BCD}$.

PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH CHÂN ĐƯỜNG VUÔNG GÓC HẠ TỪ MỘT ĐIỂM XUỐNG MỘT MẶT PHẲNG

ĐỖ THANH SƠN
(GV ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Có nhiều bài toán hình học không gian mà khi giải các bài toán đó ta cần tìm chân đường vuông góc hạ từ một điểm xuống một mặt phẳng. Chẳng hạn, khi tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, tính góc tạo bởi một đường thẳng với một mặt phẳng, xác định số đo góc phẳng của nhị diện, tìm thiết diện của một hình chóp bị cắt bởi một mặt phẳng đi qua một đường thẳng và vuông góc với một mặt phẳng nào đó... Việc xác định được chân đường vuông góc có vai trò quan trọng để tìm ra lời giải các bài toán. Nhiều học sinh thường bối rối trước các dạng toán như vậy. Bài viết này nhằm phân loại một số dạng toán thường gặp và đưa ra phương pháp giải chúng. Tác giả hi vọng qua bài báo cung cấp cho các bạn học sinh phương pháp nhận biết và giải quyết được các bài toán tương tự và hơn nữa là giải được đề thi vào Đại học và Cao đẳng.

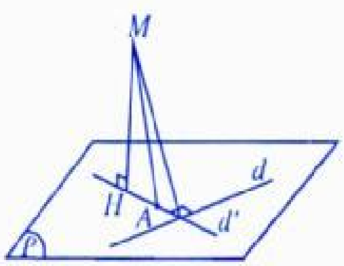
✪ **Bài toán.** *Cho mặt phẳng (P) và điểm M không thuộc mặt phẳng đó (M hoặc (P) thỏa mãn điều kiện cho trước). Xác định chân đường vuông góc H hạ từ M xuống (P).*

Trước hết, cần hiểu rằng xác định H không đơn thuần là thể hiện vị trí của H trên hình vẽ mà ta phải chỉ ra được các tính chất của H. Điểm H có nhiều tính chất thì càng có lợi cho ta khi giải toán. Dưới đây là một số trường hợp thường gặp và phương pháp xử lí trong mỗi trường hợp đó.

1. Trong mặt phẳng (P) có một điểm A và một đường d không đi qua A sao cho $MA \perp d$

Để xác định H ta tiến hành các bước sau: (h.1)

- Trong mặt phẳng (P) kẻ đường thẳng d' đi qua A và $d' \perp d$.



Hình 1

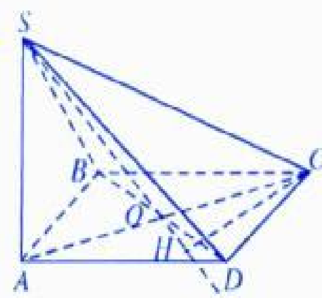
- Trong mặt phẳng (M, d'), dựng $MH \perp d'$. H là điểm cần tìm.

Thí dụ 1. *Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ xác định chân đường vuông góc hạ từ A đến mặt phẳng (SBC).*

Lời giải. Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều ABC và chân đường cao hạ từ S xuống mặt phẳng (ABC) trùng với trực tâm tam giác ABC. Từ đó $SA \perp BC$. Trên BC lấy điểm I sao cho $SI \perp BC$ và trên SI lấy điểm H sao cho $AH \perp SI$. Khi đó H là điểm phải tìm.

Thí dụ 2. *Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định chân đường vuông góc hạ từ C xuống mặt phẳng (SBD).*

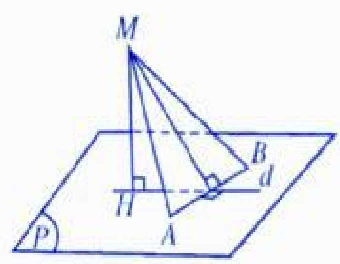
Lời giải. (h. 2) Ta có $SA \perp BD$, $AC \perp BD$ nên $BD \perp \text{mp}(SAC)$, suy ra $BD \perp SC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, khi đó $SO \perp BD$. Chân đường vuông góc hạ từ C xuống mặt phẳng (SBD) nằm trên SO. Hạ $CH \perp SO$ thì H là điểm cần tìm.



Hình 2

2. Trong mặt phẳng (P) có hai điểm A, B sao cho $MA = MB$

Để tìm H ta tiến hành các bước sau (h.3):



Hình 3

• Trong mặt phẳng (P) kẻ đường trung trực d của đoạn thẳng BC.

• Trong mặt phẳng $(M; d)$ dựng $MH \perp d$. H là điểm cần tìm.

Thí dụ 3. *Cho hình chóp S.ABC, đáy ABC là tam giác cân tại A và* $\widehat{SAB} = \widehat{SAC}$. *Xác định chân đường cao của hình chóp.*

Lời giải. Hai tam giác SAB và SAC bằng nhau (c.g.c), do đó $SB = SC$. Dựng đường cao AM của tam giác ABC, khi đó AM là đường trung trực của BC. Chân đường cao H hạ từ S của hình chóp nằm trên AM.

Thí dụ 4. *Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có các cạnh AB = AD và* $\widehat{A'AB} = \widehat{A'AD}$. *Xác định chân đường vuông góc hạ từ đỉnh A' xuống mặt phẳng (ABCD).*

Lời giải. Từ giả thiết ta suy ra $A'B = A'D$. Vì $ABCD$ là một hình thoi, nên đường chéo AC của hình thoi cũng là đường trung trực của đoạn BD. Chân đường vuông góc kẻ từ A' xuống mặt phẳng $(ABCD)$ thuộc đường thẳng AC.

Thí dụ 5. *Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Một mặt phẳng (α) đi qua AB cắt các cạnh SC và SD lần lượt tại các điểm M và N. Xác định chân đường vuông góc hạ từ S xuống mặt phẳng (α).*

Lời giải. Ta có $MN // CD // AB$. Tứ giác $ABMN$ là một hình thang cân. Vì vậy đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy là đường trung trực của hai cạnh đáy đó. Vì $SA = SB$, nên theo trên chân đường vuông góc H kẻ từ S nằm trên đường thẳng đi qua trung điểm hai đáy hình thang $ABMN$.

Thí dụ 6. *Cho ba tia Ox, Oy, Oz không cùng nằm trong một mặt phẳng thỏa mãn điều kiện* $\widehat{xOy} = \widehat{xOz}$. *Xác định chân đường vuông góc hạ từ một điểm M thuộc Ox xuống mặt phẳng (yOz).*

Lời giải. Ta lấy trên các tia Oy, Oz các điểm A, B sao cho $OA = OB$. Các tam giác OMA và OMB bằng nhau, do đó $MA = MB$. Chân đường vuông góc H hạ từ M xuống mặt phẳng (yOz) nằm trên đường thẳng đi qua O và trung điểm của đoạn thẳng AB.

3. Tồn tại một đường thẳng *a* vuông góc với mặt phẳng (*P*)

Để tìm H ta cần tiến hành các bước sau đây.

• Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) đi qua a và M.

• Kẻ qua M đường thẳng song song với a cắt giao tuyến tại H. Đó là điểm cần tìm.

Thí dụ 7. *Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Bên trong tam giác SAB ta lấy điểm M. Xác định chân đường vuông góc kẻ từ M xuống mặt phẳng (ABCD).*

Lời giải. Gọi O là giao điểm của AC và BD, ta có $SO \perp$ mp $(ABCD)$. Đường thẳng SM cắt AB tại N. Đường thẳng đi qua M song song với SO cắt ON tại H. H là điểm cần tìm.

Thí dụ 8. *Cho hình chóp S.ABC có đáy là tam giác ABC vuông tại C và cạnh SA vuông góc với mp (ABC). Xác định chân đường vuông góc hạ từ điểm M thuộc cạnh AB xuống mặt phẳng (SBC).*

Lời giải. Ta có $BC \perp$ mp (SAC). Vì vậy nếu chọn trên SC điểm K sao cho $AK \perp SC$, thì $AK \perp$ mp (SBC). Nối B với K và chọn trên đường BK điểm H sao cho $MH // AK$. H là điểm cần tìm.

4. Điểm *M* thuộc mặt phẳng (*Q*) vuông góc với mặt phẳng (*P*)

Để tìm H ta cần

• Xác định giao tuyến d của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q).

• Chọn trên d điểm H sao cho $MH \perp d$. H là điểm cần tìm.

Thí dụ 9. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật ABCD. Cạnh bên SA ⊥ mp(ABCD).*

1) Xác định chân đường vuông góc hạ từ điểm M nằm trên đường SA xuống mặt phẳng (SBC).

2) Gọi O là giao điểm của AC và BD và (α) là mặt phẳng đi qua O song song với BC. Xác định chân đường vuông góc hạ từ S xuống mặt phẳng (α).

Lời giải. 1) Từ giả thiết bài toán suy ra mp$(SAB) \perp$ mp(SBC). M thuộc mặt phẳng (SAB), nên chân đường vuông góc hạ từ M xuống mặt phẳng (SBC) nằm trên đường thẳng SB.

2) Vì $BC \perp$ mp(SAB) và $BD //$ mp(α) nên mp$(\alpha) \perp (SAB)$. S thuộc mp(SAB), do đó chân đường vuông góc hạ từ S xuống mp(α) nằm trên giao tuyến của (α) và (SAB).

Để kết thúc bài viết, đề nghị các bạn hãy giải các bài tập sau đây.

Bài 1. Cho một lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân tại A. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và trung điểm hai cạnh bên BB', CC'. Xác định chân đường vuông góc hạ từ một trong các điểm sau đây xuống mặt phẳng (α):

1) Từ các đỉnh A', B, C' của hình lăng trụ;

2) Từ trung điểm I của BC;

3) Từ trọng tâm G của tam giác $A'B'C'$.

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$. Trên đường thẳng d đi qua A vuông góc với mặt phẳng hình vuông, ta lấy điểm S (khác A). Xác định chân đường vuông góc hạ từ điểm C và trung điểm của cạnh BC xuống mặt phẳng (SBD).

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = SC$, $SB = SD$ và đáy $ABCD$ là hình thoi.

1) Xác định chân đường vuông góc hạ từ giao điểm các đường chéo đáy xuống một mặt bên.

2) Xác định chân đường vuông góc hạ từ A xuống mặt bên (SBC).

VỀ BÀI TOÁN IMO lần thứ 44

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG
(GV THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)

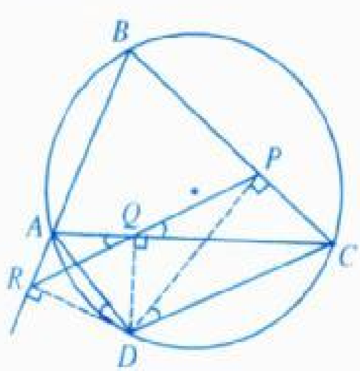
Trong kì thi Toán Quốc tế – IMO lần thứ 44 được tổ chức tại Tokyo Nhật Bản ngày 13–14/7/2003 có một bài toán hình học do Phần Lan đề nghị (Bài 4, thi ngày 14/7/2003) như sau:

✪**Bài toán(*).** *Cho ABCD là một tứ giác nội tiếp. Gọi P, Q và R tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ D xuống các đường thẳng BC, CA và AB. Chứng minh rằng PQ = QR khi và chỉ khi các đường phân giác của các góc* $\widehat{ABC}$ *và* $\widehat{ADC}$ *cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng AC.*

Khi vẽ hình bài toán (*), chúng ta nhận thấy rằng có nét của bài toán đường thẳng Simson. Trước hết chúng ta chứng minh bài toán đó.

✪**Bài toán 1.** *Cho ABCD là một tứ giác nội tiếp. Gọi P, Q và R tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ D xuống các đường thẳng BC, CA và AB. Chứng minh rằng P, Q, R thuộc một đường thẳng* (gọi là *đường thẳng Simson*).

Lời giải. (h.1)



Hình 1

Nối Q với R, Q với P. Ta phải chứng minh $\widehat{AQR} = \widehat{CQP}$.

Thật vậy, từ đề bài ta có các tứ giác $AQDR$, $DCPQ$, $BPDR$ đều là tứ giác nội tiếp.

Do đó $\widehat{AQR} = \widehat{ADR}$ (1); $\widehat{CQP} = \widehat{PDC}$ (2).

Mặt khác $\widehat{RDP} = \widehat{ADC}$ (cùng bù với $\widehat{ABC}$).

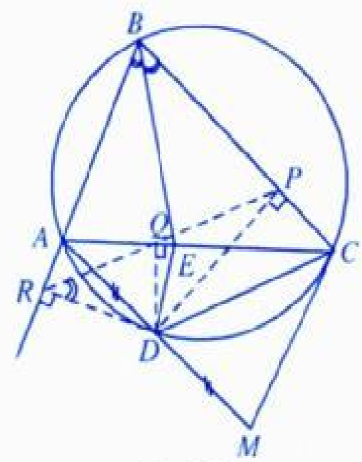
Nên $\widehat{ADR} = \widehat{PDC}$ (3).

Vậy từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{AQR} = \widehat{CQP}$. ❐

• Trở lại bài toán (*). Ta thấy rằng để $PQ = QR$ thì $RQ = \frac{1}{2}PR$. Vậy phải chăng các đường phân giác của các góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ADC}$ cắt nhau tại E trên AC sẽ tạo ra tính chất tỉ lệ đoạn thẳng?

Thật vậy, chúng ta có một lời giải đẹp sau đây.

Trên tia đối của tia DA lấy điểm M sao cho $DM = DA$ (h.2).



Hình 2

Theo tính chất phân giác trong của tam giác, ta có E thuộc AC khi và chỉ khi

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DA}{DC}\left(= \frac{AE}{EC}\right) \Leftrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{DM}{DC}.$$

Mặt khác $\widehat{ABC} = \widehat{MDC}$ (cùng bù với $\widehat{ADC}$) nên $\Delta ABC \backsim \Delta MDC \Leftrightarrow \widehat{ACB} = \widehat{MCD}$, $\widehat{CAB} = \widehat{CMD}$; mà tứ giác $AQDR$ nội tiếp nên $\widehat{DRQ} = \widehat{DAQ}$ và $\widehat{RDQ} = \widehat{CMD}\ (= \widehat{CAB})$

$$\Leftrightarrow \Delta DRQ \backsim \Delta MAC \text{ (g.g)} \Leftrightarrow \frac{RQ}{AC} = \frac{DR}{MA} = \frac{DR}{2.AD} \quad (4)$$

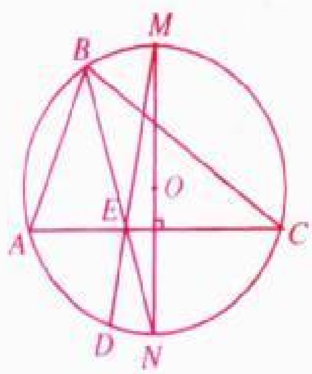
Dễ thấy $\Delta ADC \backsim \Delta RDP$ (g.g) nên $\frac{RP}{AC}=\frac{RD}{AD}$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $RQ=\frac{1}{2}RP \Leftrightarrow RQ=QP$.

Khi giải xong bài toán (*). Chúng ta có thể phát biểu bài toán dựng hình sau đây.

✪**Bài toán 2.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Hãy dựng điểm D trên cung $\overset{\frown}{AC}$ sao cho: Nếu P, Q, R tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ D xuống các đường thẳng BC, CA, AB thì PQ = QR.*

Lời giải. Dựa vào bài toán (*) ta có cách dựng như sau (h.3) :



Hình 3

– Dựng đường kính MN vuông góc với AC.

– Nối BN cắt AC tại E.

– Nối ME cắt đường tròn (O) tại D. Điểm D là điểm phải dựng.

Bài toán luôn dựng được và có một nghiệm hình.

Nếu cho D bất kì trên đường tròn ta có bài toán tổng quát hơn sau đây.

✪**Bài toán 3.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tìm tất các điểm D trên đường tròn sao cho thỏa mãn điều kiện: Nếu P, Q, R tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ D xuống các đường thẳng BC, CA, AB thì tồn tại hai trong ba đoạn PQ, QR, PR là bằng nhau.*

Qua lời giải bài toán 2, ta thấy bài toán 3 sẽ có ba nghiệm hình (xin dành cho bạn đọc).

Khi phát triển từ bài toán (*) đến bài toán 3, bất chợt tôi phát hiện ra rằng $\frac{AB}{BC}=\frac{DA}{DC}$ nếu viết lại là $\frac{AB}{DA}=\frac{BC}{DC}$ thì gợi ý cho ta đến đường phân giác của các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$. Lại sử dụng bài toán (*) thì hai đường phân giác của các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BCD}$ cắt nhau tại một điểm nằm trên BD. Ta có bài toán sau đây.

✪**Bài toán 4.** *Cho ABCD là một tứ giác nội tiếp. Gọi P, Q, R tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ D xuống các đường thẳng BC, CA, AB. Gọi I, K, H tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ C xuống các đường thẳng AB, BD, DA. Chứng minh rằng PQ = QR khi và chỉ khi IK = OH.*

Tuy nhiên, nếu chưa biết được bài toán (*) thì bài toán 4 còn cách giải nào khác chăng? (Xin dành bạn đọc).

Để kết thúc bài viết này, mời các bạn tham khảo một số bài tập sau đây.

Bài 1. Cho tam giác ABC nhọn và nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thay đổi trên (O). Gọi H, I, K lần lượt là các điểm đối xứng với M qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng:

a) I, H, K thẳng hàng.

b) Đường thẳng IHK luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Chứng minh rằng không tồn tại hai điểm M, N trên đường tròn (O) sao cho hai đường thẳng Simson của M, N đối với tam giác ABC song song với nhau.

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi R, P tương ứng là chân đường vuông góc của D xuống AB, BC. Gọi I, H tương ứng là chân đường vuông góc của C xuống AB, AD. Chứng minh rằng $RP = IH$.

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi R, P tương ứng là chân đường vuông góc của D xuống AB, BC. Gọi I, H tương ứng là chân đường vuông góc của C xuống AB, AD. Gọi E, F tương ứng là chân đường vuông góc của B xuống AD, DC. Chứng minh rằng IH, RP, EF cắt nhau tại một điểm.

Phương pháp giải một dạng bất đẳng thức lượng giác trong tam giác

NGUYỄN LÁI
(GV THPT Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Giả sử f(A, B, C) là biểu thức chứa các hàm số lượng giác của các góc trong tam giác ABC.

Giả sử các góc A, B, C thỏa mãn hai điều kiện:

1) $f(A)+f(B)\geq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)$

hoặc $f(A).f(B)\geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$ (1)

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A=B$;

2) $f(C)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)\geq 2f\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$

hoặc $f(C).f\left(\frac{\pi}{3}\right)\geq f^2\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}\right)$ (2)

đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $C=\frac{\pi}{3}$.

Khi cộng (hoặc nhân) (1), (2) ta sẽ có BĐT

$f(A)+f(B)+f(C)\geq 3f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (3)

hoặc $f(A).f(B).f(C)\geq f^3\left(\frac{\pi}{3}\right)$ (4)

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C$.

Tương tự ta cũng có bất đẳng thức với chiều ngược lại.

Để minh họa cho phương pháp trên ta xét các bài toán sau đây.

Thí dụ 1. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có*

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}\geq\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}.$$

Lời giải. Ta có

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}\geq\frac{4}{2+\sqrt{\sin A}+\sqrt{\sin B}}$$

$$\geq\frac{4}{2+\sqrt{2(\sin A+\sin B)}}=\frac{4}{2+2\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}.\cos\frac{A-B}{2}}}$$

$$\geq\frac{2}{1+\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}\geq\frac{2}{1+\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}}\quad(5)$$

$$\left(\text{có dạng } f(A)+f(B)\geq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)\right).$$

Tương tự

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin 60^o}}\geq\frac{2}{1+\sqrt{\sin\frac{C+60^o}{2}}}\quad(6)$$

Cộng theo vế (5) và (6) ta có

$$\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin 60^o}}$$

$$\geq 2\left(\frac{1}{1+\sqrt{\sin\frac{A+B}{2}}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin\frac{C+60^o}{2}}}\right)$$

$$\geq\frac{4}{1+\sqrt{\sin 60^o}}.$$

Suy ra $\frac{1}{1+\sqrt{\sin A}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin B}}+\frac{1}{1+\sqrt{\sin C}}$

$\geq \frac{3}{1+\sqrt{\sin 60^\circ}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Thí dụ 2. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có*

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)\geq\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Lời giải. Ta có

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)$$

$$=1+\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin A\sin B}$$

$$\geq 1+\frac{2}{\sqrt{\sin A.\sin B}}+\left(\frac{1}{\sqrt{\sin A.\sin B}}\right)^2$$

$$=\left(1+\frac{1}{\sqrt{\sin A\sin B}}\right)^2=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos(A-B)-\cos(A+B)}}\right)^2$$

$$\geq\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos(A+B)}}\right)^2=\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right)\geq\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right)^2 \quad (7)$$

$\left(\text{có dạng } f(A).f(B)\geq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)$.

Tương tự

$$\left(1+\frac{1}{\sin C}\right).\left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)\geq\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C+60^\circ}{2}}\right)^2 \quad (8)$$

Nhân theo vế của (7) và (8) ta có

$$\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right).\left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)$$

$$\geq\left(\left(1+\frac{1}{\sin\frac{A+B}{2}}\right).\left(1+\frac{1}{\sin\frac{C+60^\circ}{2}}\right)\right)^2\geq\left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)^4.$$

Suy ra $\left(1+\frac{1}{\sin A}\right).\left(1+\frac{1}{\sin B}\right).\left(1+\frac{1}{\sin C}\right)$

$$\geq\left(1+\frac{1}{\sin 60^\circ}\right)^3=\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Thí dụ 3. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có*

$$\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2}\geq\frac{3}{64}.$$

Lời giải. Trường hợp tam giác ABC tù hoặc vuông.

Giả sử $A=\max\{A,B,C\}\geq 90^\circ$, lúc đó

$\cos\frac{A+B}{2}>0$ và $\cos\left(\frac{C+60^\circ}{2}\right)>0.$

Ta có

$$\frac{\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}}{2}\geq\left(\frac{\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{8}\left(1-\frac{\cos A+\cos B}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(1-\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^3$$

$$\geq\frac{1}{8}\left(1-\cos\frac{A+B}{2}\right)^3=\sin^6\frac{A+B}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}\geq 2\sin^6\frac{A+B}{4} \quad (9)$$

$\left(\text{có dạng } f(A)+f(B)\geq 2f\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)$.

Tương tự

$$\sin^6\frac{C}{2}+\sin^6\frac{60^\circ}{2}\geq 2\sin^6\frac{C+60^\circ}{4} \quad (10)$$

Cộng theo vế của (9) và (10) có

$$\sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2}+\sin^6\frac{60^\circ}{2}$$

$$\geq 2\left(\sin^6\frac{A+B}{4}+\sin^6\frac{C+60^\circ}{4}\right)$$

$$\geq 4\sin^6\frac{A+B+C+60^\circ}{8} = 4\sin^6\frac{60^\circ}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^6\frac{A}{2}+\sin^6\frac{B}{2}+\sin^6\frac{C}{2} \geq 3\sin^6\frac{60^\circ}{2}=\frac{3}{64} \quad (11)$$

Trường hợp tam giác ABC nhọn, các BĐT (9), (10) và (11) luôn đúng.

Thí dụ 4. *Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có*

$$(\cos A + \sin A).(\cos B + \sin B).(\cos C + \sin C)$$
$$\leq 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3.$$

Lời giải. Ta có

$$(\cos A + \sin A).(\cos B + \sin B).(\cos C + \sin C)$$
$$= 2.\sqrt{2}\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right).$$

Nên BĐT đã cho được viết lại dưới dạng

$$\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)\leq\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3 \quad (*)$$

- Nếu $\max\{A; B; C\} \geq \frac{3\pi}{4}$ thì vế trái của biểu thức (*) không dương nên BĐT đã cho luôn đúng.

- Nếu $\max\{A; B; C\} < \frac{3\pi}{4}$ thì

$$\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right)>0;\ \cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)>0;\ \cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)>0,$$

nên $\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(A-B)\right]$$

$$\leq\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(A+B-\frac{\pi}{2}\right)\right] \leq \cos^2\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right)\leq\cos^2\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \quad (12)$$

$$\left(\text{có dạng } f(A).f(B)\leq f^2\left(\frac{A+B}{2}\right)\right).$$

Tương tự

$$\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\leq\cos^2\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}-\frac{\pi}{4}\right) \quad (13)$$

Do đó nhân theo vế của (12) và (13) và tương tự ta có

$$\cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\leq\left[\cos^2\left(\frac{A+B}{2}-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(\frac{C+\frac{\pi}{3}}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2$$

$$\leq\cos^4\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \cos\left(A-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(B-\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(C-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\leq\cos^3\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3.$$

Do đó

$$(\cos A + \sin A).(\cos B + \sin B).(\cos C + \sin C)$$
$$\leq 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Mời các bạn tiếp tục giải các bài toán sau đây theo phương pháp trên.

Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC, ta có

1) $\tan^3\frac{A}{2}+\tan^3\frac{B}{2}+\tan^3\frac{C}{2}\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$;

2) $\dfrac{1}{\sin^n\frac{A}{2}}+\dfrac{1}{\sin^n\frac{B}{2}}+\dfrac{1}{\sin^n\frac{C}{2}}\geq 3.2^n$

(n là số thực dương);

3) $A.\cos\frac{A}{4}+B.\cos\frac{B}{4}+C.\cos\frac{C}{4}\leq\frac{\pi\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$;

4) Nếu tam giác ABC nhọn thì

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-A\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-B\right).\cos\left(\frac{\pi}{4}-C\right)$$
$$\geq\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{3})^3.\cos A.\cos B.\cos C.$$

TỪ MỘT BÀI TOÁN trong sách giáo khoa

PHẠM ĐỨC HÒE
(GV trường THCS Nguyễn Lương Bằng, Thanh Miện, Hải Dương)

Trong Sách giáo khoa Hình học 9 tập hai trang 105 có bài toán số 9, nội dung như sau

✪**Bài toán 1.** *Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy một điểm M và vẽ đường tròn $\mathscr{C}_1$ đường kính MC. Đường thẳng BM cắt $\mathscr{C}_1$ tại D. Đường thẳng DA cắt $\mathscr{C}_1$ tại S. Chứng minh rằng:*

a) *ABCD là tứ giác nội tiếp.*

b) *CA là tia phân giác của góc SCB.*

Lời giải. a) Do tam giác ABC vuông tại A nên

$\widehat{BAC} = 90^o$ (1)

D nằm trên đường tròn $\mathscr{C}_1$ nên $\widehat{BDC} = 90^o$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $\mathscr{C}_0$ đường kính BC.

b) Ta có $\widehat{BCA} = \widehat{BDA}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AB}$ của $\mathscr{C}_0$) (3)

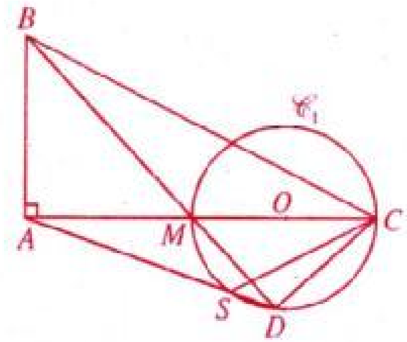
Xét ba trường hợp:

+) Trường hợp S nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{MD}$ (h. 1).

Xét đường tròn ($\mathscr{C}_1$):

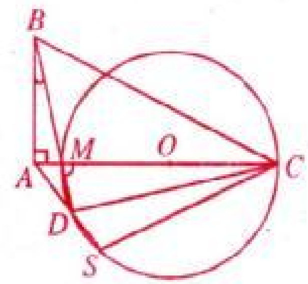
$\widehat{MDS} = \widehat{MCS}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{MS}$) (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{MCS}$.



Hình 1

+) Trường hợp D nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{MS}$ (h. 2).



Hình 2

Xét đường tròn ($\mathscr{C}_1$):

$\widehat{MDA} = \widehat{MCS}$ (cùng bù với $\widehat{MDS}$) (5)

Từ (3) và (5) suy ra $\widehat{BCA} = \widehat{MCS}$.

+) Trường hợp D trùng với S. Khi đó AD là tiếp tuyến của đường tròn ($\mathscr{C}_1$). Ta có $\widehat{BCA} = \widehat{BDA} = \widehat{MCS}$.

Khi giải câu b) nhiều bạn thường chỉ xét một trường hợp (tùy thuộc vào hình vẽ ra). Hơn nữa chắc ít bạn đặt được các câu hỏi: Vị trí của điểm M thế nào để điểm D nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{MS}$? Điểm S nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{MD}$? Điểm S trùng với D?

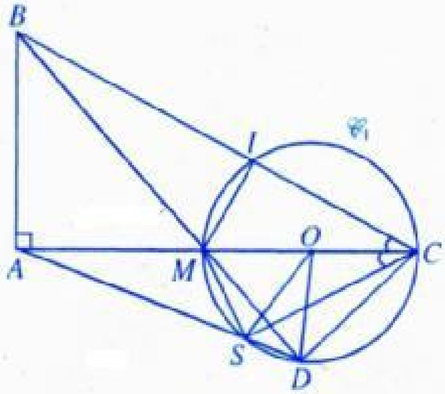
✪**Bài toán 2.** *Cho tam giác ABC vuông tại A. Điểm M di động trên cạnh AC, vẽ đường tròn $\mathscr{C}_1$ đường kính MC, BM cắt $\mathscr{C}_1$ tại D, đường thẳng AD cắt $\mathscr{C}_1$ tại S. Xác định vị trí của điểm M trên cạnh AC để:*

a) *Điểm S nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{MD}$.*

b) *Điểm D nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{MS}$.*

Lời giải. a) (h. 3) S thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{MD}$ khi và chỉ khi $\widehat{MOS} < \widehat{MOD}$.

Do hai tam giác OMS và OSD đều cân tại O nên suy ra $\widehat{OMS} > \widehat{OMD} \Leftrightarrow \widehat{OMS} > \widehat{AMB}$ (6)



Hình 3

Nếu gọi giao điểm của $\mathscr{C}_1$ với BC là I thì $\widehat{MIC} = 90^0$ dẫn đến tứ giác $ABIM$ nội tiếp được, nên $\widehat{ABC} = \widehat{IMC}$ (cùng bù với $\widehat{AMI}$) (7)

Lại do $\widehat{ICM} = \widehat{MCS}$ (bài toán 1 câu b) và MC là đường kính của đường tròn $\mathscr{C}_1$ nên I và S đối xứng nhau qua MC có $\widehat{IMC} = \widehat{CMS}$ (8)

Từ (7) và (8) dẫn đến $\widehat{OMS} = \widehat{ABC}$ (9)

Từ (6) và (9) suy ra $\widehat{ABC} > 90^o - \widehat{ABM}$

$\Leftrightarrow 90^o - \widehat{ACB} > 90^o - \widehat{ABM} \Leftrightarrow \widehat{ABM} < \widehat{ACB}$.

b) Lập luận tương tự ta có kết quả D thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{MS}$ khi và chỉ khi $\widehat{ABM} > \widehat{ACB}$. Vì M thuộc cạnh AC nên cần có điều kiện $AC > AB$.

Từ bài toán 2 dẫn đến suy nghĩ:
Khi nào hai điểm S và D trùng nhau? Từ đó ta có bài toán sau.

✪**Bài toán 3.** *Cho tam giác ABC vuông tại A, Điểm M thuộc cạnh AC, vẽ đường tròn $\mathscr{C}_1$ đường kính MC, BM cắt $\mathscr{C}_1$ tại D. Xác định vị trí của điểm M trên cạnh AC để AD là tiếp tuyến của đường tròn $\mathscr{C}_1$.*

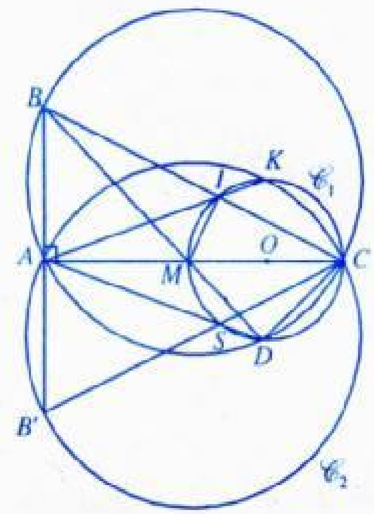
Lập luận tương tự bài toán 2 ta thấy AD là tiếp tuyến của đường tròn $\mathscr{C}_1$ khi và chỉ khi $\widehat{ABM} = \widehat{ACB}$. Để cho M thuộc cạnh AC nên cần có điều kiện $AC > AB$.

Đến đây ta thấy đáng phải suy nghĩ về vị trí của điểm M. Do điểm M có thể thay đổi trên cạnh AC nên nhiều điểm khác cũng thay đổi theo. Các bạn hãy quan sát tia AI, nó thay đổi nên giao điểm K của nó với đường tròn $\mathscr{C}_1$ cũng thay đổi theo. Dẫn ta đến bài toán sau.

✪**Bài toán 4.** *Cho tam giác ABC vuông tại A. Điểm M thay đổi trên cạnh AC. Dựng đường tròn $\mathscr{C}_1$ đường kính CM. Gọi giao điểm của BC với đường tròn $\mathscr{C}_1$ là I, giao điểm của AI với đường tròn $\mathscr{C}_1$ là K. Tìm tập hợp điểm K.*

Lời giải. (h. 4).

Do hai tia AI và AS đối xứng nhau qua đường kính MC của đường tròn $\mathscr{C}_1$ và A thuộc đường thẳng MC nên ta dễ dàng chứng minh được K và D đối xứng nhau qua AC.



Hình 4

Do $\widehat{BDC} = 90^o$ nên có thể chỉ ra được quỹ tích điểm D khi M chuyển động trên cạnh AC là cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ của đường tròn đường kính BC.

Từ đó ta dự đoán quỹ tích điểm K khi M chuyển động trên cạnh AC là hình đối xứng với cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ qua cạnh AC. Quỹ tích này là một cung tròn của đường tròn $\mathscr{C}_2$ đối xứng với đường tròn đường kính BC qua cạnh AC. Từ đó ta xác định được đường tròn $\mathscr{C}_2$ như sau:

– Lấy B' đối xứng với B qua cạnh AC;

– Dựng đường tròn $\mathscr{C}_2$ đường kính $B'C$.

Sử dụng kết quả của các bài tập trên ta dễ dàng chứng minh được B', M, K thẳng hàng suy ra $\widehat{B'KC} = \widehat{MKC} = 90^o$.

Vậy quỹ tích điểm K khi M chuyển động trên cạnh AC là cung nhỏ $\overset{\frown}{AC}$ của đường tròn đường kính $B'C$.

Như vậy nếu quan sát tốt, nghiên cứu kĩ thì chỉ từ một bài tập trong sách giáo khoa, chúng ta có thể khai thác được nhiều kết quả thú vị. Chúc các bạn gặt hái được nhiều kết quả.

Nhiều cách giải cho một bài toán

Năm cách giải CHO MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC

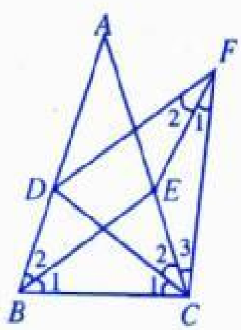
PHẠM BẢO
(32 Nguyễn Khuyến, Hà Nội)

Trong chương trình hình học Trung học cơ sở có định lí: "*Trong một tam giác cân, đường phân giác của hai góc đáy bằng nhau*". Chứng minh định lí này quá dễ. Tuy nhiên định lí đảo: "*Nếu một tam giác có hai đường phân giác trong bằng nhau thì tam giác đó cân*" thì không phải vậy. Hơn nữa nếu đào sâu suy nghĩ vẫn có thể phát hiện ra nhiều cách chứng minh cho định lí đảo này.

Cách thứ nhất. Tam giác ABC có hai đường phân giác trong BE và CE bằng nhau, $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$; $\widehat{C_1} = \widehat{C_2}$ (h. 1).

Từ D kẻ DF song song và bằng BE, ta có ΔCDF cân ($CD = DF$) nên $\widehat{DFC} = \widehat{DCF}$ ($\widehat{F_2} + \widehat{F_1} = \widehat{C_1} + \widehat{C_3}$).

Tứ giác $BDFE$ là hình bình hành nên $\widehat{B_2} = \widehat{F_2}$, $BD = EF$.



Hình 1

Giả sử $\widehat{B_2} \neq \widehat{C_2}$, không giảm tổng quát ta coi $\widehat{B_2} > \widehat{C_2}$ thì $\widehat{F_2} > \widehat{C_2} \Rightarrow \widehat{F_1} < \widehat{C_3}$ lúc đó $EF > CE$ hay $BD > CE$.

ΔBDC và ΔBEC có cạnh BC chung, $DC = BE$, $BD > CE$ nên $\widehat{C_1} > \widehat{B_1}$ mâu thuẫn với $\widehat{B_2} > \widehat{C_2}$. Vậy $\widehat{B_2} = \widehat{C_2}$ nên $\hat{B} = \hat{C}$ tức là ΔABC cân.

Cách thứ hai. Xét ΔBDC và ΔBEC có BC chung; $CD = BE$. So sánh cạnh BD và CE. Đặt $BC = a$; $CA = b$; $AB = c$ (h. 1).

Theo tính chất đường phân giác trong $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{a}{b}$

nên $\dfrac{BD}{DA + BD} = \dfrac{a}{a+b}$.

Suy ra $BD = \dfrac{ac}{a+b}$. Tương tự $CE = \dfrac{ab}{a+c}$.

Nếu $BD > CE$ thì

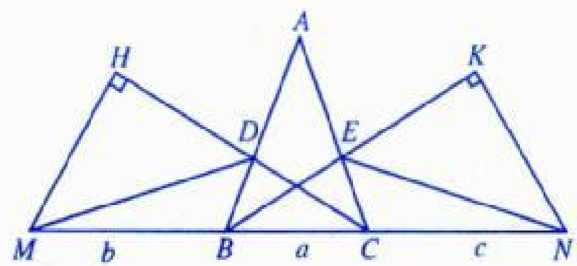
$$\frac{ac}{a+b} > \frac{ab}{a+c} \Rightarrow c(a+c) > b(a+b), \text{ hay}$$

$$a(c-b) + c^2 - b^2 > 0 \Rightarrow (c-b)(a+b+c) > 0$$

nên $c > b$.

Tương tự nếu $BD < CE$ thì $c < b$. Do đó $BD = CE \Leftrightarrow c = b$. Vậy ΔABC cân.

Cách thứ ba. Tạo hai tam giác MDC và NBE có diện tích bằng diện tích tam giác ABC bằng cách trên cạnh BC kéo dài về phía B lấy đoạn $BM = b$, về phía C lấy đoạn $CN = c$ (h. 2).



Hình 2

Khi đó D cách đều hai cạnh BC và AC nên $S_{ADC} = S_{DMB}$. Từ đó suy ra $S_{DMC} = S_{ABC}$, tương tự $S_{EBN} = S_{ABC}$, do đó $S_{DMC} = S_{EBN}$; $S_{DMC} = \dfrac{1}{2} CD.MH$;

$S_{EBN} = \dfrac{1}{2} BE.NK$; $CE = BE$ nên $BH = NK$.

Mặt khác

$$MH = (a+b)\sin\frac{C}{2};\ NK = (a+c)\sin\frac{B}{2}.$$

Suy ra $(a+b)\sin\dfrac{C}{2} = (a+c)\sin\dfrac{B}{2}$ nên

$$a\left(\sin\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\right) + b\sin\frac{C}{2} - c\sin\frac{B}{2} = 0 \quad (1)$$

Thay $b = 2R\sin B = 4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$,

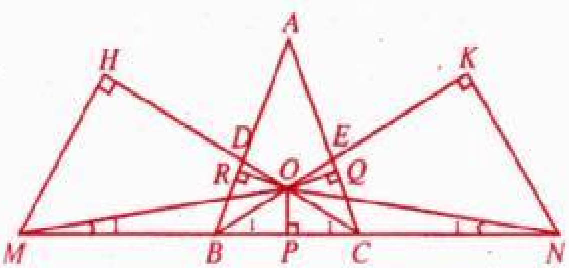
$$c = 2R\sin C = 4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \text{ vào (1)}$$

ta có

$$a\left(\sin\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\right)+4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)=0.$$

Vì $4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}>0$, còn $\left(\sin\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\right)$ và $\left(\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)$ là hai đại lượng cùng dấu nên đẳng thức trên chỉ đúng khi $\frac{B}{2}=\frac{C}{2}$ tức là ΔABC cân.

Cách thứ tư. Gọi O là giao của BE và CD, tức O là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. P, Q, R lần lượt là hình chiếu của O trên BC, CA, AB. Ta có $BP = BR$; $CP = CQ$; $AQ = AR$. (h. 3).



Hình 3

Mặt khác $PM = PB + BM = PB + CQ + QA$;
$PN = PC + CN = PC + BR + AR$.

Do đó $PM = PN$, $OP \perp MN$, ΔMON cân, $OM = ON$, $\widehat{M_1} = \widehat{N_1}$, $\Delta MHO = \Delta NOK$ (vì $OM = ON$; $MH = NK$ theo chứng minh ở cách trên), Suy ra $\widehat{HOM} = \widehat{KON}$, $\widehat{HOM} = \widehat{C_1} + \widehat{M_1}$, $\widehat{KON} = \widehat{B_1} + \widehat{N_1}$ nên $\widehat{C_1} = \widehat{B_1}$. Vậy ΔABC cân.

Cách thứ năm. Dùng công thức tính diện tích tam giác: $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C$, $S_{ACD} = \frac{1}{2}b.CD\sin\frac{C}{2}$, $S_{BCD} = \frac{1}{2}a.CD\sin\frac{C}{2}$

ta tính được $CD = \dfrac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$

tương tự $BE = \dfrac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c}$

nên $BE = CD$

$$\Leftrightarrow \frac{2ac\cos\frac{B}{2}}{a+c} = \frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow c(a+b)\cos\frac{B}{2} - b(a+c)\cos\frac{C}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow bc\left(\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}\right)+a\left(c\cos\frac{B}{2}-b\cos\frac{C}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow bc\left(\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}\right) +$$

$$+ 2aR\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\left(\sin\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\right) = 0$$

Lập luận tương tự như cách thứ hai ta có $\frac{B}{2}=\frac{C}{2}$ và do vậy ΔABC cân.

Nhận xét. Trong năm cách giải trên ngoài việc sử dụng chung giả thiết đường phân giác $BE = CD$ thì cách thứ nhất sử dụng định nghĩa đường phân giác chia góc thành hai phần bằng nhau, cách thứ hai sử dụng tính chất đường phân giác chia cạnh đối diện thành hai phần tỉ lệ với cạnh bên; cách thứ ba sử dụng tính chất một điểm trên đường phân giác cách đều hai cạnh của góc (để tạo những tam giác có diện tích bằng nhau); cách thứ tư sử dụng triệt để tính chất cách đều hai cạnh để nhận ra điểm O là tâm đường tròn nội tiếp; cách thứ năm sử dụng công thức diện tích tam giác để khai thác tính chất chia góc thành hai phần bằng nhau. Tóm lại từ một giả thiết đơn giản *Độ dài hai đường phân giác trong của một tam giác bằng nhau* ta có nhiều cách khai thác khác nhau để từ đó sáng tạo được nhiều cách giải khác nhau.

ỨNG DỤNG HÌNH HỌC để giải một số bài toán đại số

LÊ BÁ HOÀNG
(Phòng GD–ĐT Tx.Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Việc ứng dụng hình học để giải bài toán đại số ở chương trình THCS quả là còn khá mới mẻ và lạ lẫm đối với học sinh. Nhưng việc ứng dụng này nhiều khi mang lại cho người học kết quả khá thú vị với lời giải ngắn gọn và độc đáo. Xin mời các bạn đọc và tham khảo vài ví dụ sau đây:

Thí dụ 1. *Cho hai số dương a và b. Chứng minh rằng* $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$.

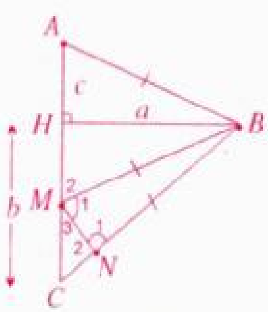
Lời giải. Nhận thấy $(\sqrt{a})^2=a$; $(\sqrt{b})^2=b$ nên ta nghĩ đến việc tạo ra tam giác ABC vuông tại A có cạnh $AB=\sqrt{a}$; $AC=\sqrt{b}$. Khi đó theo định lí Pythagore ta có $BC=\sqrt{a+b}$.

Do $AB+AC>BC$ nên $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$.

Thí dụ 2. *Cho các số thực dương a, b, c với b > c. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}<b-c.$$

Lời giải. Từ các biểu thức $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2+c^2}$ và các số dương a, b, c ta nghĩ đến việc tạo ra các tam giác vuông HAB và HBC có hai cạnh góc vuông tương ứng là a, c và a, b (h. 1). Khi đó ta có $AB=\sqrt{a^2+c^2}$, $BC=\sqrt{a^2+b^2}$. Do $b>c>0$ nên $BC>AB$, $HC>AH$. Bài toán đưa về chứng minh rằng $BC-AB<HC-HA$.

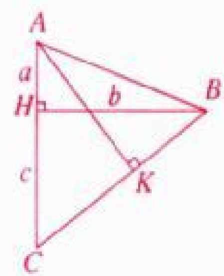


Hình 1

Trên HC, BC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $HM=AH$, $BN=AB$. Dễ thấy $AB=MB=BN$ suy ra ΔBMN cân tại B nên $\widehat{M}_1=\widehat{N}_1$. Mặt khác $\widehat{N}_1+\widehat{N}_2=\widehat{M}_1+\widehat{M}_2+\widehat{M}_3$ $(=180^o)$ nên $\widehat{N}_2>\widehat{M}_3 \Leftrightarrow BC-AB<HC-HA$.

Thí dụ 3. *Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng* $\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{b^2+c^2}\geq b(a+c)$. *Đẳng thức xảy ra khi nào?*

Lời giải. Vẽ tam giác AHB vuông tại H với $AH=a$, $BH=b$. Trên tia đối của tia HA lấy điểm C sao cho $HC=c$. Nối B với C (h. 2). Hạ AK vuông góc với BC. Khi đó ta có



Hình 2

$$2S_{ABC}=BH.AC$$

$$=AK.BC\leq AB.BC$$

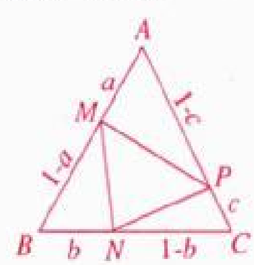
hay $b(a+c)\leq\sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{b^2+c^2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $AK=AB \Leftrightarrow K\equiv B$ $\Leftrightarrow \Delta ABC$ vuông tại $B \Leftrightarrow b^2=ac$.

Thí dụ 4. *Cho các số thực dương a, b, c thuộc khoảng* $(0\,;1)$. *Chứng minh rằng*

$$a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)<1.$$

Lời giải. Mỗi số hạng ở vế trái $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$ có thể xem là tích độ dài hai cạnh của một tam giác nên gợi ý đến vẽ tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Trên các cạnh AB, BC



Hình 3

và CA lấy các điểm M, N và P sao cho $AM = a$, $BM = b$, $CP = c$.

Ta có $2S_{AMP} + 2S_{BMN} + 2_{CPS} < 2S_{ABC}$

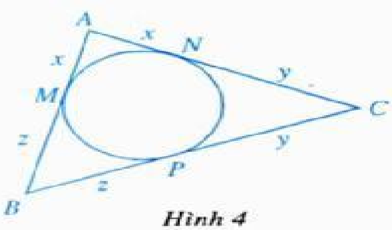
hay $\quad a(1-b)\sin 60^o + b(1-c)\sin 60^o$
$\quad + c(1-a)\sin 60^o < 1.1.\sin 60^o$

Suy ra $a(1-b) + b(1-c) + c(1-a) < 1$.

Thí dụ 5. *Cho ba số dương x, y, z, thỏa mãn hệ thức $xyz(x+y+z) = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x+y)(x+z)$.*

Lời giải. Từ tích $xyz(x+y+z)$ ta nghĩ đến công thức Héron tính diện tích tam giác.

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với a, b, c là độ dài cac cạnh của tam giác ABC, p là nửa chu vi.



Hình 4

Với x, y, z là các số dương nên lấy các đoạn thẳng có độ dài lần lượt là $x+y$, $y+z$, $z+x$ luôn là độ dài ba cạnh của một tam giác ABC (h.4) và $x = AM = AN$, $y = CN = CP$, $z = BM = BP$ với M, N, P là các tiếp điểm của AB, AC và BC với đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Khi đó ta có $p = x + y + z$

$\Rightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) = (x+y+z)xyz = 4$.

Suy ra

$2S_{ABC} = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = AB.AC.\sin A$

hay $4 = (x+y)(x+z).\sin A$.

Mà $0 < \sin A \le 1$ nên $P = (x+y)(x+z) \ge 4$.

$\quad (x+y)(x+z) = 4 \Leftrightarrow \sin A = 1 \Leftrightarrow \widehat{A} = 90^o$

$\Leftrightarrow (x+y)^2 + (x+z)^2 = (y+z)^2$

$\Leftrightarrow x(x+y+z) = yz$.

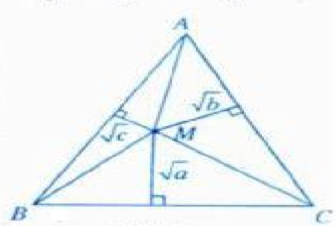
Kết hợp $xyz(x+y+z) = 4$ có $yz = 2$. Chọn $y = z = \sqrt{2}$ thì $x = 2 - \sqrt{2}$. Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng 4, chẳng hạn khi $x = 2 - \sqrt{2}$; $y = z = \sqrt{2}$.

Thí dụ 6. *Cho các số dương a, b, c và $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Chứng minh rằng hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:*

$$\begin{cases} \sqrt{y-a} + \sqrt{z-a} = 1 \\ \sqrt{z-b} + \sqrt{x-b} = 1 \\ \sqrt{x-c} + \sqrt{y-c} = 1. \end{cases}$$

Lời giải. Xét tam giác đều ABC có cạnh bằng 1. Áp dụng kết quả sau: "*Nếu M là một điểm bất kì nằm trong tam giác đều, thì tổng các khoảng cách từ M xuống ba cạnh bằng chiều cao của nó*".

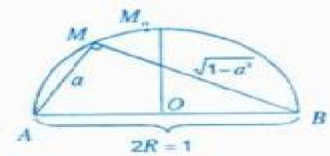
Vẽ đường thẳng song song với BC cách BC một khoảng $\sqrt{a}$ và đường thẳng song song với AC cách AC một khoảng $\sqrt{b}$ chúng cắt nhau tại M (h. 5). Từ kết quả trên và giả thiết suy ra khoảng cách từ M xuống AB là $\sqrt{c}$. Từ định lí Pythagore ta nhận thấy $x = MA^2$; $y = MB^2$; $z = MC^2$ là một nghiệm của hệ đã cho. Bằng phản chứng ta có thể dễ dàng chứng minh được hệ đã cho có nghiệm duy nhất trên.



Hình 5

Thí dụ 7. *Cho a, b, c là các số dương thuộc khoảng $(0\,;1)$ và $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{3}{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = \dfrac{1}{1-a^2} + \dfrac{1}{1-b^2} + \dfrac{1}{1-c^2}$.*

Lời giải. Dựng nửa đường tròn tâm O, đường kính $AB = 1$. Do $0 < a < 1$ nên trên nửa đường tròn đó lấy điểm M sao cho $AM = a$ ta có $\widehat{AMB} = 90^o$ $\Leftrightarrow AM \perp BM$ nên $2S_{ABM} = AM.BM$ $= a.\sqrt{1-a^2}$.



Hình 6

Dễ thấy $2S_{ABM} \le 2S_{ABM_o}$ (với M_o là điểm chính giữa của nửa đường tròn đã cho) (h. 6).

$a.\sqrt{1-a^2} \le OM.AB = \dfrac{1}{2}.1 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a^2(1-a^2) \le \dfrac{1}{4}$

hay $\dfrac{1}{1-a^2} \ge 4a^2$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv M_o \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{1}{2}$.

Hoàn toàn tương tự ta cũng có $\dfrac{1}{1-b^2} \ge 4b^2$; $\dfrac{1}{1-c^2} \ge 4c^2$ do đó $M = \dfrac{1}{1-a^2} + \dfrac{1}{1-b^2} + \dfrac{1}{1-c^2}$ $\ge 4(a^2+b^2+c^2) = 4.\dfrac{3}{2} = 6$.

Vậy M đạt giá trị nhỏ nhất bằng 6 khi $a^2 = b^2 = c^2 = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow a = b = c = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Để kết thúc bài viết chúng tôi xin mời các bạn làm quen với phương pháp đã trình bày ở trên qua các bài tập sau:

Bài 1. Cho $a > b > c > 0$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{a-b}.$$

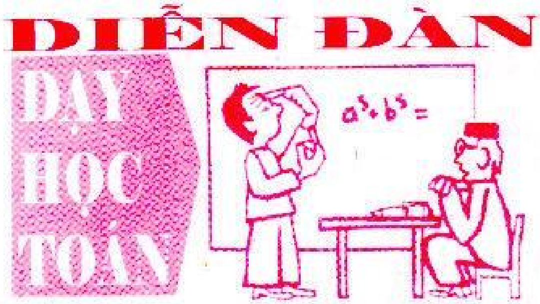
Bài 2. Cho $a > c$; $b > c > 0$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{c(a-c)} + \sqrt{(c(b-c)} < \sqrt{ab}.$$

Bài 3. Cho x, y, z, t là các số thực dương thuộc khoảng $(0\,;1)$. Chứng minh rằng
$$x(1-y) + y(1-z) + z(1-t) + t(1-x) < 2.$$

Bài 4. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c, d ta luôn có
$$\sqrt{a^2+c^2)(b^2+c^2)} + \sqrt{(a^2+d^2)(b^2+d^2)}$$
$$\ge \ (a+b)(c+d).$$

Bài 5. Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta luôn có
$$\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| < |b-c|.$$

Bài 6. Cho a, b, c là các số dương thuộc khoảng $(0\,;1)$ và $a + b + c = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. Chứng minh rằng
$$M = \frac{1}{a(1-a^2)} + \frac{1}{b(1-b^2)} + \frac{1}{c(1-c^2)} \ge 6\sqrt{2}.$$



Khai thác MỘT ĐỊNH LÍ HÌNH HỌC ở trường phổ thông

ĐÀO TAM
(GV khoa Toán, ĐH Vinh)

Chương trình và sách giáo khoa (SGK) toán hiện hành ở bậc THCS và THPT đã chú trọng các hoạt động của học sinh để tự họ phát hiện, hình thành và chứng minh các định lí toán học.

Trong bài viết này chúng tôi quan tâm đến việc luyện tập cho học sinh các hoạt động trí tuệ nhằm khai thác các ứng dụng của định lí. Từ đó góp phần củng cố sâu sắc định lí Thales và vận dụng giải toán ở mức độ phát triển tiềm năng SGK toán nhằm bồi dưỡng học sinh khá giỏi.

Việc luyện tập các hoạt động khai thác các thể hiện khác nhau của một định lí toán học được tiến hành theo trình tự sau:

1. Phát hiện thêm các dạng toán ứng dụng định lí và xây dựng thuật giải tương ứng.

2. Lựa chọn các bài toán gốc nhằm vận dụng khắc sâu cách giải ở trên.

3. Lựa chọn và phát triển các bài toán nâng cao mức độ khó khăn nhằm rèn luyện năng lực huy động kiến thức trong quá trình giải toán.

Dưới đây chúng tôi mô tả dạng toán *Chứng minh ba điểm thẳng hàng nhờ sử dụng định lí Thales*. (Dạng toán này chưa được đề cập một cách hệ thống khi vận dụng định lí trên trong SGK Hình học 8).

I. Các cách vận dụng định lí Thales để chứng minh ba điểm thẳng hàng

Cách 1. Để chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng ta làm theo các bước sau:

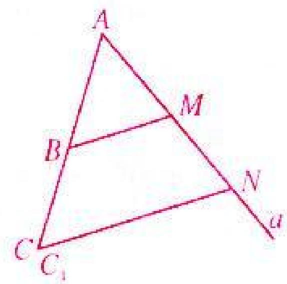
– Vẽ đường thẳng a đi qua A, sao cho B và C thuộc một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng a.

– Vẽ các đường thẳng BM và CN song song với nhau sao cho M, N thuộc a.

– Chứng tỏ $\dfrac{BM}{CN}=\dfrac{AM}{AN}$ (1) (h. 1)

Có thể kiểm tra tính đúng đắn của chứng minh bằng cách sau:

Vẽ đường thẳng AB cắt tia CN tại C_1. Khi đó vì $BM // C_1N$ nên theo định lí Thales trong tam giác AC_1N ta có $\dfrac{BM}{C_1N}=\dfrac{AM}{AN}$ (2)



Hình 1

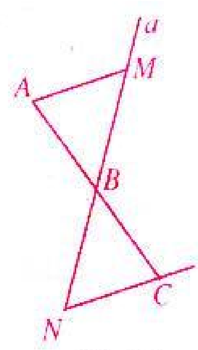
Từ các hệ thức (1) và (2) suy ra $\dfrac{BM}{CN}=\dfrac{BM}{C_1N}$.

Từ đó $CN = C_1N$ suy ra hai điểm C và C_1 trùng nhau.

Cách 2. Chứng minh A, B, C thẳng hàng theo các bước sau:

– Vẽ đường thẳng a đi qua điểm B, sao cho A và C thuộc hai nửa mặt phẳng khác nhau với bờ là a.

– Vẽ AM và CN song song với nhau sao cho các điểm M, N thuộc a.



Hình 2

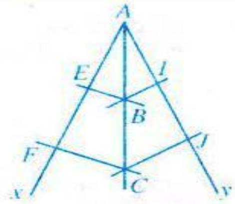
– Chứng minh $\dfrac{AM}{CN}=\dfrac{BM}{BN}$ (h. 2)

Cách 3. Chứng minh các điểm A, B, C thẳng hàng theo các bước sau:

– Xác định góc xAy sao cho B, C thuộc miền trong của góc đó.

– Vẽ BE song song với CF; Các điểm E, F thuộc tia Ax; vẽ BI song song với CJ, I và J thuộc tia Ay.

– Chứng tỏ $\frac{BE}{CF} = \frac{BI}{CJ}$ (h. 3)

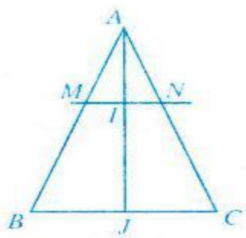


Hình 3

Bạn đọc có thể kiểm tra tính đúng đắn của các cách 2 và cách 3 nhờ sử dụng định lí Thales.

II. Lựa chọn các bài toán gốc nhằm khắc sâu cách giải 1

✪**Bài toán 1.** *Cho tam giác ABC. Đường thẳng MN song song với cạnh BC; M, N lần lượt thuộc các cạnh AB và AC. Gọi I và J tương ứng là trung điểm của đoạn MN và cạnh BC. Chứng minh ba điểm A, I, J thẳng hàng.*



Hình 4

Lời giải. Do I, J nằm về một phía của đường thẳng AB và $MI // BJ$, nên hai bước đầu của cách 1 đã thỏa mãn. Vậy để chứng minh ba điểm A, I, J thẳng hàng chỉ cần chứng tỏ $\frac{MI}{BJ} = \frac{AM}{AB}$ (h. 4).

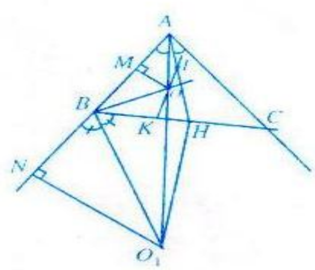
Thật vậy, do $MN // BC$ nên theo định lí Thales áp dụng cho tam giác ABC ta có

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{\frac{1}{2}MN}{\frac{1}{2}BC} = \frac{MI}{BJ}.$$

Chú ý. Có thể diễn đạt bài toán 1 trên như bổ đề về hình thang: Với hình thang $MBCN$, các cạnh bên cắt nhau tại A; các điểm I, J là các trung điểm hai cạnh đáy, thì A, I, J thẳng hàng.

✪**Bài toán 2.** *Cho tam giác ABC. Gọi O là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác đó; O_1 là giao của AO với phân giác ngoài của góc B. Giả sử các điểm H và K là hình chiếu của O_1 và O lên BC. Điểm I là điểm đối xứng của K qua tâm O. Chứng minh rằng A, I, H là ba điểm thẳng hàng.*

Lời giải. Do các điểm I, H nằm về một phía đường AO và $OI // O_1H$ nên theo cách 1 để lập luận A, I, H thẳng hàng chỉ cần chứng tỏ $\frac{OI}{O_1H} = \frac{AO}{AO_1}$.



Hình 5

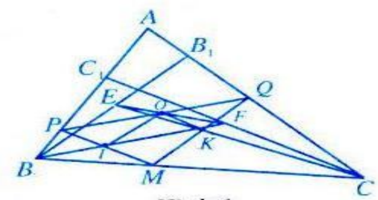
Thật vậy, gọi các điểm M và N là các hình chiếu của O và O_1 lên đường thẳng AB. Khi đó $\frac{AO}{AO_1} = \frac{AM}{AN} = \frac{OM}{O_1N} = \frac{OK}{O_1H} = \frac{OI}{O_1H}$ (áp dụng định lí Thales cho tam giác AO_1N và tính chất của đường phân giác). (h. 5).

III. Các bài toán nâng cao mức độ khó khăn được giải nhờ vận dụng cách 1 và các bài toán gốc

✪**Bài toán 3.** *Cho tam giác ABC nhọn. M là điểm di động trên cạnh BC. Các điểm P, Q lần lượt là hình chiếu của M lên các cạnh AB, AC. Tìm quỹ tích trung điểm của đoạn PQ.*

Có thể lập luận chứng tỏ phần thuận của bài toán quỹ tích trên chuyển về chứng minh ba điểm thẳng hàng như sau:

Chỉ dẫn. Gọi O là trung điểm của đoạn PQ. Các điểm B_1, C_1 là chân các đường cao của tam giác ABC vẽ từ B và C.



Hình 6

Khi M trùng với các điểm B hoặc C thì O trùng với trung điểm E của BB_1 hoặc trung điểm F của CC_1. Phần thuận dẫn tới chứng minh O, E, F thẳng hàng (h. 6).

Gọi K là giao điểm của MQ và CE; I là giao điểm của MP và BF; Khi đó theo bài toán 2 các bộ ba điểm (B, I, F) và (C, K, E) là các bộ ba điểm thẳng hàng và I là trung điểm của PM, K là trung điểm của MQ.

Để chứng minh E, O, F thẳng hàng theo cách 1, ta chứng minh $OI // EB$ và $\frac{OI}{EB} = \frac{FI}{FB}$.

Thật vậy, do OI là đường trung bình của tam giác PMQ và $KM = KQ$. Suy ra tứ giác $OIMK$ là hình bình hành.

Từ $OI // MK$ suy ra $OI // EB$. Ta lại có $\frac{OI}{EB} = \frac{MK}{EB} = \frac{CM}{CB} = \frac{FI}{FB}$. Từ đó suy ra đpcm.

✪**Bài toán 4.** *Cho tam giác nhọn ABC. Hình chữ nhật MNPQ nội tiếp trong tam giác đó, sao cho các đỉnh M và N lần lượt thuộc các cạnh AB và AC; Các đỉnh P và Q thuộc cạnh BC. Tìm quỹ tích tâm O của hình chữ nhật MNPQ khi M chạy trên cạnh AB.*

Chỉ dẫn. Phần thuận của bài toán quỹ tích được lập luận như sau: Gọi E, F, I lần lượt là trung điểm của các đoạn MN; PQ và BC. Khi M trùng với A thì hình chữ nhật suy biến thành đường cao AH, khi đó O trùng với trung điểm K của AH. Khi M trùng với B thì O trùng với trung điểm I của đoạn BC. Bạn đọc có thể chứng minh E, O, F thẳng hàng nhờ vận dụng cách 1, suy ra A, E, I thẳng hàng và O thuộc đoạn IK.

Bạn đọc có thể vận dụng các cách 1, 2, 3 để giải các bài toán sau:

Bài toán 5. Cho tam giác ABC có các trung tuyến BB_1 và CC_1. M là điểm di động trên cạnh BC. Các đường thẳng MP, MQ lần lượt song song với CC_1, BB_1 và P, Q lần lượt thuộc các cạnh AB, AC. Tìm quỹ tích các điểm S sao cho tứ giác $MPSQ$ là hình bình hành.

Bài toán 6. Chứng minh rằng trong một tam giác thì trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đó thẳng hàng.

Bài toán 7. Tứ giác $ABCD$ vừa nội tiếp trong một đường tròn tâm O vừa ngoại tiếp một đường tròn tâm I và có các đường chéo cắt nhau tại P. Chứng minh rằng các điểm P, O, I thẳng hàng.

Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

Một số bài toán XÁC ĐỊNH CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC

ĐẶNG THANH HẢI - TRẦN TUYẾT THANH
(GV Học viện Phòng không - Không quân)

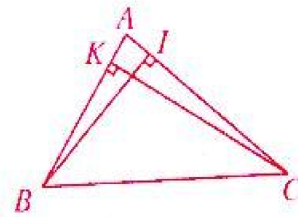
Trong những năm gần đây, bài toán xác định các yếu tố trong tam giác khi biết trước một số yếu tố nào đó, xuất hiện trong Đề thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng khá nhiều. Nhằm giúp các bạn chuẩn bị thi vào Đại học nắm vững kiến thức phần này, bài viết giới thiệu một số dạng toán thường gặp và phương pháp tọa độ trong mặt phẳng để giải các bài toán đó.

LOẠI 1. *Xác định các yếu tố trong tam giác khi biết trước tọa độ của một đỉnh và phương trình của hai đường có cùng tính chất (hai đường trung tuyến, hai đường cao, hai đường phân giác trong) đi qua hai đỉnh còn lại.*

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC có đỉnh $A(2\,;\,2)$ và hai đường cao lần lượt có phương trình $9x - 3y - 4 = 0$; $x + y - 2 = 0$. Lập phương trình của các đường thẳng AB, BC và CA.*

Lời giải. Thử trực tiếp tọa độ của A vào phương trình (PT) của hai đường cao, ta thấy không thỏa mãn nên các đường cao xuất phát từ đỉnh B và C (h. 1).

Giả sử đường cao BI có PT $9x - 3y - 4 = 0$; đường cao CK có PT $x + y - 2 = 0$.



Hình 1

Đường thẳng AB qua $A(2;2)$ và nhận vectơ chỉ phương của CK là $\vec{u} = (-1\,;1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có PT

$(-1).(x-2) + 1.(y-2) = 0 \Leftrightarrow x - y = 0$.

Đường thẳng AC qua $A\ (2\ ;\ 2)$ và nhận vectơ chỉ phương của BI là $\vec{v} = (1\ ;\ 3)$ làm vectơ pháp tuyến nên có PT

$1.(x-2) + 3.(y-2) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 8 = 0$.

Tọa độ của C là nghiệm của hệ PT

$$\begin{cases} x + 3y - 8 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow C(-1;3).$$

Tọa độ của B là nghiệm của hệ PT

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 9x - 3y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right).$$

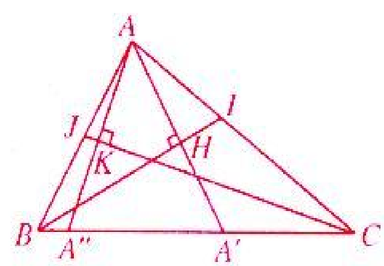
Từ đó đường thẳng BC có PT $7x + 5y - 8 = 0$.

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC có $A(2\ ;\ -1)$ và các đường phân giác trong của các góc B và C lần lượt có phương trình*

$$x - 2y + 1 = 0; \qquad x + y + 3 = 0.$$

Lập phương trình đường thẳng BC.

Lời giải. Gọi A', A'' lần lượt là các điểm đối của xứng A qua các đường phân giác BI, CJ (h. 2). Khi đó A', A'' nằm trên đường thẳng BC.



Hình 2

Gọi $H = AA' \cap BI$. Do $H \in BI$ nên $H(2t-1\ ;\ t)$ (chuyển PT BI về dạng tham số), lúc đó

$\overrightarrow{AH} = (2t - 3\ ;\ t + 1)$. Mặt khác BI có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2\ ;\ 1)$, và do $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ nên $\overrightarrow{AH}.\vec{u} = 0$, suy ra

$2(2t - 3) + 1(t + 1) = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow H(1\ ;\ 1)$.

Vì H là trung điểm của AA', nên

$$\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = 0 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 3 \end{cases} \Rightarrow A'(0;3).$$

Tương tự, gọi $K = AA'' \cap CJ$ ta tìm được $K(0\ ;\ -3)$ và từ đó $A''(-2;-5)$.

Vậy đường thẳng BC qua A' và A'' có PT

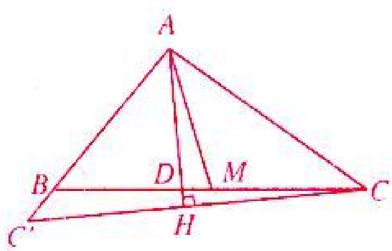
$$4x - y + 3 = 0.$$

LOẠI 2. *Xác định các yếu tố trong tam giác khi biết trước tọa độ của một đỉnh và phương trình của hai đường khác tính chất (đường trung tuyến và đường cao, đường cao và đường phân giác trong, đường trung tuyến và đường phân giác trong).*

Bài toán 3. *Xác định tọa độ đỉnh B của tam giác ABC, biết C(4 ; 3) và các đường phân giác trong, trung tuyến kẻ từ đỉnh A lần lượt có phương trình*

$$x + 2y - 5 = 0\ ; \qquad 4x + 13y - 10 = 0.$$

Lời giải. (h. 3)


Hình 3

Gọi C' là điểm đối xứng của C qua đường phân giác AD. Khi đó $C' \in AB$.

Gọi $H = AD \cap CC'$ thì $H(5 - 2t\ ;\ t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{CH} = (1 - 2t\ ;\ t - 3)$ (chuyển PT AD về dạng tham số). Mặt khác AD có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (-2;1)$, và do $\overrightarrow{CH} \perp \vec{u}$ suy ra $\overrightarrow{CH}.\vec{u} = 0$.

Từ đó $-2(1 - 2t) + 1(t - 3) = 0$

$\Leftrightarrow 5t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(3\ ;\ 1)$.

Do H là trung điểm của CC', nên

$$\begin{cases} x_{C'} = 2x_H - x_C = 2 \\ y_{C'} = 2y_H - y_C = -1 \end{cases} \Rightarrow C'(2\ ;\ -1).$$

Vì $A = AD \cap AM$ (M là trung điểm của BC) nên tọa độ của A là nghiệm của hệ PT

$$\begin{cases} x + 2y - 5 = 0 \\ 4x + 13y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow A(9;-2).$$

Khi đó đường thẳng AB có PT $x + 7y + 5 = 0$ nên $B(-7t - 5\ ;\ t)$ (chuyển PT AB về dạng tham số).

Vì $M \in AM$ suy ra $M\left(\dfrac{-13s + 10}{4};s\right)$ (chuyển PT của AM về dạng tham số).

Lại vì M là trung điểm của BC nên

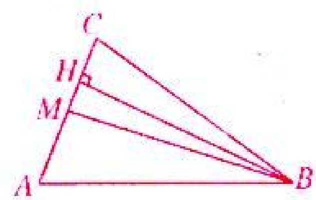
$$\begin{cases} -13s + 10 = -14t - 2 \\ 2s = 3 + t. \end{cases}$$

Suy ra $B(-12\ ;\ 1)$.

Bài toán 4. *Xác định tọa độ đỉnh A của tam giác ABC, biết C(4 ; −1) và đường cao, trung tuyến kẻ từ đỉnh B lần lượt có phương trình*

$$2x - 3y + 12 = 0;\ 2x + 3y = 0.$$

Lời giải. (h. 4). Ta có đường thẳng AC qua $C\ (4\ ;\ -1)$ và nhận vectơ chỉ phương của đường cao BH là $\vec{u} = (3;2)$ làm vectơ pháp tuyến.


Hình 4

Do đó đường thẳng AC có PT

$3.(x - 4) + 2(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 10 = 0$.

Do $A \in AC$ nên $A\left(\dfrac{-2t + 10}{3};t\right)$ (chuyển PT AC về dạng tham số).

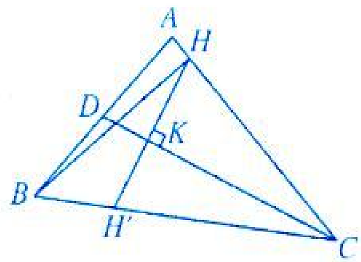
Vì $M \in BM$ suy ra $M(3s\ ;\ -2s)$ (chuyển PT BM về dạng tham số).

Mặt khác, do M là trung điểm của AC nên

$$\begin{cases} 2x_M = x_A + x_C \\ 2y_M = y_A + y_C \end{cases} \Rightarrow A\ (8\ ;\ -7).$$

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC có A(−1 ; 3), đường cao BH nằm trên đường thẳng y = x, phân giác trong góc C nằm trên đường thẳng*

$x + 3y + 2 = 0$. *Viết phương trình đường thẳng BC.*



Hình 5

Lời giải. (h. 5) Đường thẳng AC qua $A(-1\,;\,3)$, và nhận vectơ chỉ phương của đường cao BH là $\vec{u} = (1\,;\,1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có PT

$$1.(x+1) + 1.(y-3) = 0 \Leftrightarrow x + y - 2 = 0.$$

Do $C = AC \cap CD$ nên tọa độ của C là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + 3y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow C(4;-2).$$

Gọi H' là điểm đối xứng của H qua CD và $K = CD \cap HH'$. Khi đó $H' \in BC$.

Do $K \in CD$ suy ra $K(-3t-2;t)$ (chuyển PT CD về dạng tham số). Từ đó $\overrightarrow{HK} = (-3t-3\,;\,t-1)$.

Mặt khác, CD có vectơ chỉ phương là $\vec{v} = (-3;1)$.

Do $\overrightarrow{HK} \perp \vec{v}$ suy ra $\overrightarrow{HK}.\vec{v} = 0$

$$\Leftrightarrow 10t + 8 = 0 \Rightarrow t = -\frac{4}{5} \Rightarrow K\left(\frac{2}{5};-\frac{4}{5}\right).$$

Do K là trung điểm của HH', nên

$$\begin{cases} x_{H'} = 2x_K - x_H \\ y_{H'} = 2y_K - y_H \end{cases} \Rightarrow H'\left(-\frac{1}{5}\,;-\frac{13}{5}\right).$$

Vậy đường thẳng BC qua C và H' có PT

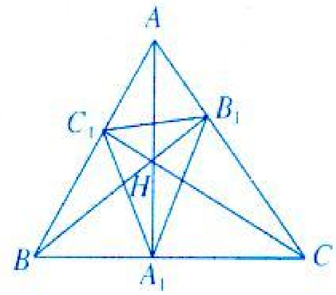
$$\frac{x+\frac{1}{5}}{4+\frac{1}{5}} = \frac{y+\frac{13}{5}}{-2+\frac{13}{5}} \Leftrightarrow x - 7y - 18 = 0.$$

LOẠI 3. *Xác định các yếu tố trong tam giác khi biết trước tọa độ của một số điểm đặc biệt nào đó của tam giác (chẳng hạn, chân ba đường trung tuyến, chân ba đường cao, chân ba đường phân giác trong,...).*

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC có cả ba góc đều nhọn. Viết phương trình đường thẳng chứa cạnh AC của tam giác, biết tọa độ chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C tương ứng là* $A_1(-1\,;\,-2)$; $B_1(2\,;\,2)$; $C_1(-1\,;\,2)$.

Lời giải. (h. 6).
Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.

Từ tính chất của tứ giác nội tiếp, ta chứng minh được H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A_1B_1C_1$.



Hình 6

Đường thẳng A_1B_1 có PT $4x - 3y - 2 = 0$.

Đường thẳng B_1C có PT $y - 2 = 0$.

Khi đó PT cặp đường phân giác của góc $\widehat{A_1B_1C_1}$ là $\dfrac{4x-3y-2}{5} = \pm(y-2)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2y + 2 = 0 \quad (\Delta_1) \\ 2x + y - 6 = 0 \quad (\Delta_2). \end{array}\right.$$

Thay tọa độ của A_1, C_1 vào phương trình của (Δ_1) ta được $\begin{cases} -1 - 2.(-2) + 2 = 5 > 0 \\ -1 - 2.2 + 2 = -3 < 0 \end{cases}$

$\Rightarrow A_1, C_1$ nằm về hai phía khác nhau của (Δ_1).

Hay (Δ_1) là phân giác trong của góc $\widehat{A_1B_1C_1}$ (tức là BB_1).

Suy ra đường thẳng AC là phân giác ngoài của góc $\widehat{A_1B_1C_1}$. Hay đường thẳng AC chính là (Δ_2) và có PT $2x + y - 6 = 0$.

Lưu ý. 1) Hoàn toàn tương tự, các phân giác ngoài của các góc $\widehat{B_1A_1C_1}$, $\widehat{B_1C_1A_1}$ tương ứng là các đường thẳng BC, AB của tam giác ABC.

2) Cách giải trên vẫn còn hiệu lực khi tam giác ABC có dạng bất kì. Khi đó đường thẳng BC là phân giác ngoài của góc $\widehat{B_1A_1C_1}$, còn các đường thẳng AB, AC lần lượt là các đường

phân giác trong của các góc $\widehat{B_1C_1A_1}$; $\widehat{A_1B_1C_1}$. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Vì khuôn khổ của bài báo, bài toán xác định các yếu tố của tam giác, khi biết tọa độ chân của các phân giác trong của tam giác đó xin dành cho bạn đọc.

Để luyện tập, mời các bạn làm các bài tập trắc nghiệm sau đây.

Hãy khoanh tròn vào các chữ cái đứng trước câu trả lời đúng.

1. Cho tam giác *ABC*, có $B(2\ ;\ -1)$; đường cao và phân giác trong của các góc *A* và *C* tương ứng có phương trình:

$3x - 4y + 27 = 0$; $x + 2y - 5 = 0$.

Khi đó toạ độ của đỉnh *A* là:

A) $\left(\frac{79}{13};\frac{147}{13}\right)$ B) $\left(\frac{79}{13};-\frac{147}{13}\right)$

C) $\left(-\frac{79}{13};\frac{147}{13}\right)$

D) Cả ba đáp án trên đều sai.

2. Cho tam giác *ABC* có $A(-2\ ;\ 3)$; hai phân giác trong của các góc *B* và *C* tương ứng có phương trình $4x - 2y - 1 = 0$; $x + 3y - 2 = 0$. Khi đó phương trình đường thẳng *BC* là:

A) $x = 0$ B) $y = 0$.

C) $x + y = 0$ D) Một đáp án khác.

3. Cho tam giác *ABC* có góc *B* tù và toạ độ chân các đường cao hạ từ các đỉnh *A*, *B*, *C* tương ứng là $M(-1\ ;\ -1)$; $N(1\ ;\ 9)$; $P(9\ ;\ 1)$. Khi đó phương trình đường thẳng *AC* là:

A) $\left(5-\sqrt{13}x\right)-\left(1+\sqrt{13}\right)y-4+10\sqrt{13}=0$;

B) $\left(5-\sqrt{13}x\right)+\left(1+\sqrt{13}\right)y-4+10\sqrt{13}=0$;

C) $\left(5-\sqrt{13}x\right)+\left(1+\sqrt{13}\right)y-4-10\sqrt{13}=0$;

D) Một đáp số khác.

4. Cho tam giác *ABC* có $A(-2;\ 1)$ và các đường cao có phương trình:

$2x - y + 1 = 0$; $3x + y + 2 = 0$.

Khi đó đường trung tuyến qua đỉnh *A* của tam giác *ABC* có phương trình là:

A) $x - 18y + 20 = 0$; B) $x + 18y + 20 = 0$;

C) $x - 18y - 20 = 0$; D) $x + 18y - 20 = 0$.

5. Cho tam giác *ABC* có phân giác trong *AD*, đường cao *CH* lần lượt có phương trình

$x - y = 0$, $x + 2y + 3 = 0$.

$M(0\ ;\ -1)$ là trung điểm của *AC* và $AB = 2AM$. Khi đó toạ độ của điểm *B* là:

A) $\left(-\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right)$ B) $\left(\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right)$

C) $\left(\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right)$ D) $\left(-\frac{5}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Sử dụng tỉ số lượng giác để giải bài toán bất đẳng thức hình học

HOÀNG HẢI DƯƠNG
(GV trường THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, Hưng Yên)

Bài toán bất đẳng thức hình học cùng với các phương pháp giải đã được đề cập nhiều trong các sách báo. Trong bài viết này chúng tôi nêu cách sử dụng tỉ số lượng giác để giải dạng toán trên nhằm làm phong phú cách nhìn, cách suy luận, từ đó tạo hứng thú trong quá trình giải toán.

Trước hết ta nhắc lại một nhận xét trong *Sách giáo khoa Toán 9 tập một, trang 78*:

* Với $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ thì $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;

$0 < \sin\alpha < 1$; $0 < \cos\alpha < 1$.

* Với $0^\circ < \alpha \le \beta < 90^\circ$ thì $\sin\alpha \le \sin\beta$;

$\tan\alpha \le \tan\beta$; $\cos\alpha \ge \cos\beta$; $\cot\alpha \ge \cot\beta$.

Điều ngược lại cũng đúng.

Dưới đây là một số bài toán minh họa.

✪**Bài toán 1.** *Chứng minh rằng với hai cung nhỏ trong một đường tròn, cung lớn hơn căng dây lớn hơn, dây lớn hơn căng cung lớn hơn.*

Lời giải.(h.1)

Xét đường tròn $(O\,;R)$ và hai dây AB và CD.

Kẻ $OH \perp AB$, $OK \perp CD$

thì $CK = KD$; $AH = HB$.

$AB = 2HB = 2R.\sin O_2$

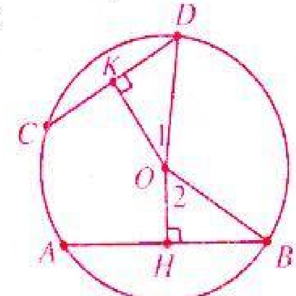
$CD = 2KD = 2R.\sin O_1$.

Ta có $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$

$\Leftrightarrow \widehat{AOB} > \widehat{COD}$

$\Leftrightarrow \hat{O}_2 > \hat{O}_1 \Leftrightarrow \sin O_2 > \sin O_1$

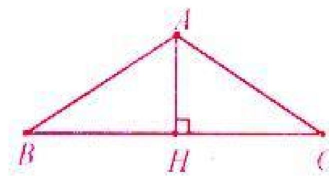
$\Leftrightarrow AB > CD$.



Hình 1

✪**Bài toán 2.** *Chứng minh rằng trong các tam giác cân có cùng diện tích, tam giác có cạnh đáy nhỏ hơn là tam giác có góc ở đỉnh nhỏ hơn.*

Lời giải. Xét tam giác ABC cân tại A có cùng diện tích S. Kẻ đường cao AH (h.2).



Hình 2

Trong tam giác vuông AHC, ta có

$AH = HC.\cot\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{2}BC.\cot\dfrac{A}{2}$.

Do đó $S = \dfrac{1}{2}BC.AH = \dfrac{1}{4}BC^2.\cot\dfrac{A}{2}$.

Do S không đổi nên BC nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ $\cot\dfrac{A}{2}$ lớn nhất $\Leftrightarrow$ $\widehat{BAC}$ nhỏ nhất. ❒

✪**Bài toán 3.** *Cho điểm M cố định nằm trên đoạn thẳng AB. Trên cùng nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các tia Ax, By vuông góc với AB. Một góc vuông đỉnh M thay đổi cắt hai tia Ax, By lần lượt tại C, D. Xác định vị trí C, D để tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất.*

Lời giải.(h.3)

Đặt $\widehat{AMC} = \widehat{BDM} = \alpha$

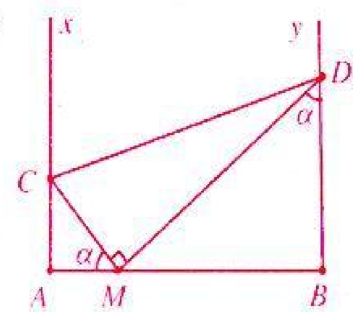
thì $MC = \dfrac{AM}{\cos\alpha}$;

$MD = \dfrac{MB}{\sin\alpha}$.

Ta có

$S_{MCD} = \dfrac{1}{2}MC.MD$

$= \dfrac{MA.MB}{2\sin\alpha.\cos\alpha}$.



Hình 3

Áp dụng BĐT Cauchy cho hai số $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$, ta có

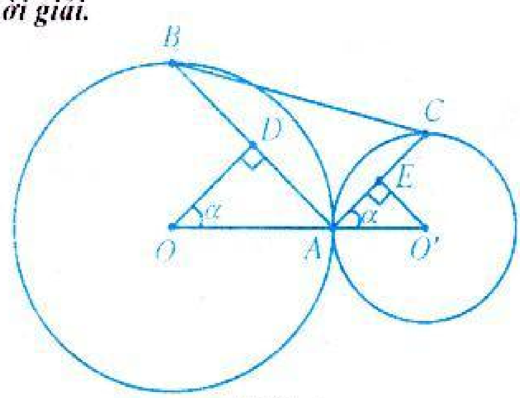
$$S_{MCD} \geq \frac{MA.MB}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = MA.MB\,.$$

$S_{MCD} = MA.MB \Leftrightarrow \sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$.

Vậy tam giác MCD có diện tích nhỏ nhất bằng $MA.MB$ khi các điểm C, D được xác định trên các tia Ax, By sao cho $AC = AM$; $BD = BM$.

✪**Bài toán 4.** *Cho hai đường tròn $(O\,;\,R)$ và $(O'\,;\,R')$ tiếp xúc ngoài nhau tại A. Qua A vẽ hai tia vuông góc với nhau, chúng cắt $(O;\,R)$ và $(O',\,R')$ theo thứ tự tại B, C. Xác định vị trí các tia đó để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.*

Lời giải.



Hình 4

Kẻ $OD \perp AB$, $O'E \perp AC$ (h.4). Đặt $\widehat{AOD} = \widehat{O'AE} = \alpha$ $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$thì $AB = 2AD = 2R.\sin\alpha$, $AC = 2AE = 2R'.\cos\alpha$.

Vậy $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = R.R'.2\sin\alpha.\cos\alpha$

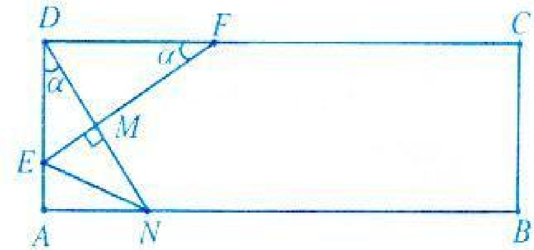
$$\leq R.R'(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = R.R'$$

$S_{ABC} = R.R'$ khi $\sin\alpha = \cos\alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$.

Vậy tam giác ABC có diện tích lớn nhất bằng $R.R'$ khi các tia AB, AC lần lượt tạo với các tia AO, AO' thành các góc $\widehat{OAB} = \widehat{O'AC} = 45^\circ$.

✪**Bài toán 5.** *Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $BC = 1$ và $AB = 3$. Trên cạnh AB lấy điểm N sao cho $0{,}2 < AN < 1$. Đường trung trực của DN lần lượt cắt AD, DC ở E, F. Chứng minh rằng $S_{EFD} \geq \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.*

Lời giải. (h.5)



Hình 5

Đặt $\widehat{EFD} = \alpha\,(0^\circ < \alpha < 90^\circ) \Rightarrow \widehat{ADN} = \alpha$.

Gọi $DN \cap EF = M$, ta có

$$MD = \frac{1}{2}DN = \frac{1}{2}.\frac{AD}{\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}$$

$$EF = ME + MF = MD.\tan\alpha + MD.\cot\alpha$$

$$= MD(\tan\alpha + \cot\alpha) = \frac{1}{2\sin\alpha.\cos^2\alpha}$$

$$S_{EFD} = \frac{1}{2}.EF.MD = \frac{1}{8\sin\alpha\cos^3\alpha}\,.$$

Áp dụng BĐT Cauchy cho bốn số dương

$\sin^2\alpha\,;\ \dfrac{\cos^2\alpha}{3}\,;\ \dfrac{\cos^2\alpha}{3}\,;\ \dfrac{\cos^2\alpha}{3}$ ta có

$$\sin^2\alpha.\frac{\cos^2\alpha}{3}.\frac{\cos^2\alpha}{3}.\frac{\cos^2\alpha}{3} \leq \left(\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{4}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2\alpha.\cos^6\alpha}{27} \leq \frac{1}{256} \Leftrightarrow \frac{1}{8\sin\alpha\cos^3\alpha} \geq \frac{2\sqrt{3}}{9}\,.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\sin\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \alpha = 30^\circ$.

BÀI TẬP

Bài 1. Cho đường tròn $(O\,;\,R)$. Hai dây AB và CD cắt nhau tại điểm P ở ngoài đường tròn. Biết $\widehat{APO} > \widehat{CPO}$. So sánh khoảng cách từ O đến AB và CD.

Bài 2. Cho đường tròn $(O\,;\,R)$, điểm P ở miền trong đường tròn. Hai dây APB và CPD thay đổi nhưng luôn vuông góc với nhau. Xác định giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác $ACBD$.

Bài 3. Hai anh em chia tài sản là một miếng đất hình tam giác. Họ muốn chia đôi diện tích miếng đất này bằng một bờ rào ngắn nhất. Tính độ dài bờ rào này theo diện tích tam giác và góc nhỏ nhất của tam giác đó.

Điểm SCHIFFLER của tam giác

LÊ ĐỨC THỊNH
(GV THPT NK Trần Phú, Hải Phòng)

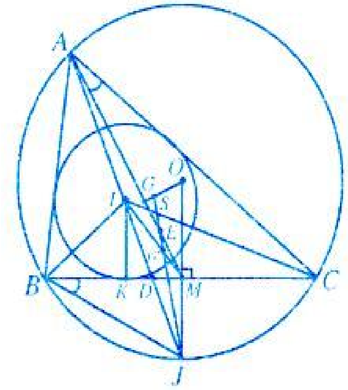
Trong quá trình tự tìm tòi về các loại điểm đặc biệt trong tam giác tôi bắt gặp một số tính chất về điểm Schiffler của tam giác. Tôi cảm thấy rất tâm đắc với các tính chất này. Tuy nhiên, có một điểm tôi cảm thấy không thật sự vừa ý là các tính chất và định lí được phát biểu một cách rất đơn giản nhưng các cách chứng minh lại phải sử dụng đến công cụ tâm tỉ cự, phương pháp toạ độ - một phương pháp hiện đại nhưng không tiện dụng đối với học sinh, kể cả học sinh giỏi. Mong muốn trình bày vấn đề cho trong sáng hơn đã thôi thúc tôi đi tìm lời giải sơ cấp hơn, «đẹp mắt" hơn cho bài toán. Đến nay tôi đã thu được những kết quả nhất định xin được trình bày cùng bạn đọc trong bài viết này.

Ta bắt đầu bằng bài toán sau về định nghĩa điểm Schiffler của tam giác:

✪Bài toán 1. *Giả sử I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Khi đó bốn đường thẳng Euler của các tam giác BIC, CIA, AIB, ABC đồng quy tại một điểm S gọi là điểm Schiffler của tam giác ABC.*

Chứng minh. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, G là trọng tâm tam giác, M là trung điểm BC, G' là trọng tâm tam giác BIC, AI cắt BC tại D, cắt đường tròn (O) tại J, đường tròn (I) tiếp xúc với cạnh BC tại K, JG' cắt OG tại S, cắt AM tại E (h.1).

Rõ ràng J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Do đó JG' là đường thẳng Euler của tam giác BIC.



Hình 1

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác GOM với cát tuyến SEJ ta có

$$\frac{SG}{SO}\cdot\frac{JO}{JM}\cdot\frac{EM}{EG}=1.$$

Suy ra

$$\frac{SG}{SO}=\frac{JM}{JO}\cdot\frac{EG}{EM}=\frac{JM}{R}\cdot\frac{EG}{EM}$$

(R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Sử dụng định lí Menelaus cho tam giác IAM với cát tuyến $JG'E$, ta có $\frac{JI}{JA}\cdot\frac{EA}{EM}\cdot\frac{G'M}{G'I}=1$.

Do G' là trọng tâm ΔBIC nên

$$\frac{EA}{EM}=2\cdot\frac{JA}{JI}=2\cdot\frac{JA}{JB}=2\cdot\frac{JB}{JD}=2\cdot\frac{JI}{JD}$$

(do $JI^2=JB^2=JA.JD$). Do đó

$$\frac{EG}{EM}=\frac{GM}{EM}-1=\frac{1}{3}\cdot\frac{AM}{EM}-1$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{EA}{EM}+1\right)-1=\frac{1}{3}\cdot\frac{EA}{EM}-\frac{2}{3}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{JI}{JD}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{ID}{JD}=\frac{2}{3}\cdot\frac{IK}{JM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{r}{JM}$$

(r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC)

$$\frac{SG}{SO}=\frac{JM}{R}\cdot\frac{EG}{EM}=\frac{JM}{R}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{r}{JM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{r}{R} \qquad (1)$$

Tương tự, ta thấy các đường thẳng Euler của các tam giác CIA, AIB cũng cắt OG tại S (xác định bởi hệ thức (1)).

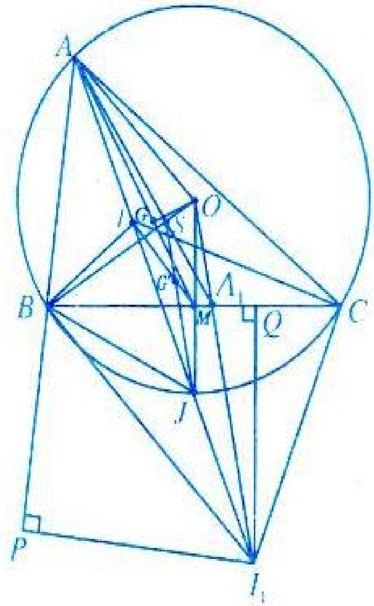
Vậy các đường thẳng Euler của bốn tam giác ABC, BIC, CIA, AIB đồng quy tại S. ❐

Một tính chất khác của điểm Schiffler được mô tả trong bài toán sau:

✪Bài toán 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và I_1, I_2, I_3 lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với các góc A, B, C của tam giác. A_1, B_1, C_1 tương ứng là giao điểm của các cặp đường (OI_1, BC), (OI_2, CA), (OI_3, AB). Khi đó các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm Schiffler S của tam giác ABC.*

(Xem tiếp trang 27)

Chứng minh. (h. 2).



Hình 2

Ta chứng minh A, S, A_1 thẳng hàng. Thật vậy

$$\frac{\sin\widehat{AJG'}}{\sin\widehat{OJG'}}\cdot\frac{\sin\widehat{JOG}}{\sin\widehat{AOG}}\cdot\frac{\sin\widehat{OAA_1}}{\sin\widehat{JAA_1}}$$

$$=\frac{\sin\widehat{IJG'}}{\sin\widehat{MJG'}}\cdot\frac{\sin\widehat{MOG}}{\sin\widehat{AOG}}\cdot\frac{\sin\widehat{OAA_1}}{\sin\widehat{I_1AA_1}}$$

$$=\frac{\dfrac{2S_{IJG'}}{IJ.JG'}}{\dfrac{2S_{MJG'}}{MJ.JG'}}\cdot\frac{\dfrac{2S_{MOG}}{MO.OG}}{\dfrac{2S_{AOG}}{AO.OG}}\cdot\frac{\dfrac{2S_{OAA_1}}{OA.AA_1}}{\dfrac{2S_{I_1AA_1}}{I_1A.AA_1}}$$

$$=\frac{2MJ}{IJ}\cdot\frac{AO}{2OM}\cdot\frac{OA_1}{I_1A_1}\cdot\frac{I_1A}{OA}$$

$$=\frac{2MJ}{BJ}\cdot\frac{BO}{2OM}\cdot\frac{OM}{I_1P}\cdot\frac{I_1P}{OA\sin\dfrac{A}{2}}$$

$$=2\sin\frac{A}{2}\left(\frac{1}{2\sin\dfrac{A}{2}}\right)=1.$$

Do đó theo định lí Ceva dạng lượng giác trong tam giác AOJ, suy ra AA_1, OG, JG' đồng quy.

Tức là AA_1 đi qua S. Tương tự, ta kết luận rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại S.

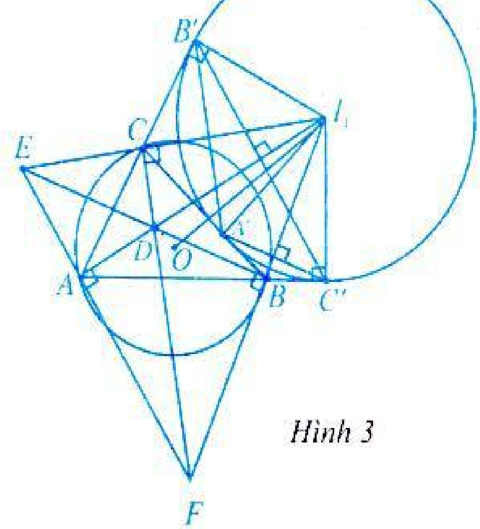
Như vậy từ hai bài toán trên ta thu được điểm Schiffler S của tam giác ABC là điểm đồng quy của 7 đường thẳng, gồm có: 4 đường thẳng Euler của các tam giác BIC, CIA, AIB, ABC và 3 đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1.

Bây giờ ta hãy theo dõi một cách mô tả khác của điểm Schiffler được nêu trong bài toán:

✪**Bài toán 3.** *Giả sử đường tròn bàng tiếp ứng với góc A của tam giác ABC tiếp xúc với các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C'. Gọi A" là điểm đối xứng của A' qua B'C'. Tương tự ta định nghĩa điểm B", C". Khi đó AA", BB", CC" đồng quy tại điểm Schiffler S của tam giác ABC.*

Chứng minh.

Bổ đề 1. Với các kí hiệu như ở bài toán 1 thì OI_1 *là đường thẳng Euler của tam giác A'B'C'.*



Hình 3

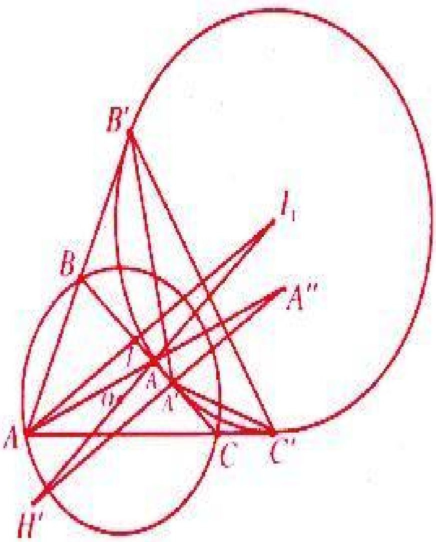
Chứng minh. Dựng các đường thẳng qua A và song song $B'C'$, qua B và song song $C'A'$, qua C và song song $A'B'$. Các đường này cắt nhau tạo ra tam giác DEF (h. 3). Ta có

$AI_1 \perp B'C' \Rightarrow AI_1 \perp EF, BI_1 \perp A'C' \Rightarrow BI_1 \perp DE$.

Do đó I_1 là trực tâm tam giác DEF. Nhận thấy O là tâm đường tròn Euler của tam giác DEF. Nên OI_1 là đường thẳng Euler của tam giác DEF. Mà đường thẳng Euler của hai tam giác $A'B'C'$ và DEF cùng phương, và đều đi qua I_1 nên OI_1 cũng là đường thẳng Euler của tam giác $A'B'C'$ (đpcm).

Bổ đề 2. *Ba điểm* A, A_1, A'' *thẳng hàng.*

Chứng minh. (h. 4) Theo *bổ đề 1*, nếu gọi H' là giao điểm của OI_1 và $A'A''$ thì H' là trực tâm tam giác $A'B'C'$.



Hình 4

Gọi I là chân đường phân giác hạ từ A xuống BC. Ta có $\dfrac{II_1}{IA} = \dfrac{r_a}{h_a} = \dfrac{a}{b+c-a}$ (2)

(trong đó r_a, h_a tương ứng là bán kính đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A, độ dài đường cao hạ từ A của tam giác ABC; $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$). Mặt khác

$$\frac{A'H'}{A'A''} = \frac{A'H'.B'C'}{A'A''.B'C'} = \frac{-2r_a.\cos A'.2r_a.\sin A'}{4S_{A'B'C'}}$$

$$= \frac{-2r_a^2.\sin 2A'}{8r_a^2.\sin A'.\sin B'.\sin C'} = \frac{-\sin 2A'}{\sin 2A' + \sin 2B' + \sin 2C'}.$$

Hơn nữa

$\widehat{B}' = \widehat{A'C'A} = \dfrac{\widehat{C}}{2}, \widehat{C}' = \widehat{A'B'A} = \dfrac{\widehat{B}}{2}$, suy ra

$\widehat{A}' = 180^0 - \widehat{B}' - \widehat{C}' = 90^o + \dfrac{\widehat{A}}{2}$.

Do đó

$$\frac{A'H'}{A'A''} = \frac{\sin A}{-\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{a}{b+c-a} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra $\dfrac{II_1}{IA} = \dfrac{A'H'}{A'A''}$.

Vậy A, A_1, A'' thẳng hàng.

Rõ ràng theo bổ đề 2 và kết quả bài toán 2 thì bài toán 3 được chứng minh.

Qua chứng minh trên ta thấy rằng bài toán 3 là một bài toán khó và lời giải của nó vẫn phải dùng đến kết quả của bài toán 2. Hi vọng rằng bạn đọc có thể đưa ra một lời giải đẹp hơn nữa cho bài toán 3. Rất mong nhận được sự góp ý của các bạn để hoàn chỉnh hơn nữa bài viết này.

MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC TRONG KHÔNG GIAN

NGUYỄN THỊ THU HƯƠNG
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

Học sinh THPT thường lúng túng khi gặp các bài toán cực trị, nhất là cực trị hình học. Bài viết sau đây sẽ góp phần giúp các bạn tự tin hơn khi gặp các dạng toán này trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng.

Các bài toán tổng quát được xét trong không gian với hệ trục toạ độ Descartes vuông góc $Oxyz$. Ở phần áp dụng, ngoài thí dụ 1, thí dụ 2 được giải chi tiết, các thí dụ khác chúng tôi chỉ hướng dẫn giải hoặc đưa ra kết quả để bạn đọc tự giải.

✪**Bài toán 1.** *Trong không gian với hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz cho mặt phẳng* (α) *có phương trình (PT)* $Ax + By + Cz + D = 0$ *và hai điểm* $M(x_1\,;\,y_1\,;\,z_1)$, $N(x_2\,;\,y_2\,;\,z_2)$ *không thuộc* (α). *Tìm điểm I trên mặt phẳng* (α) *sao cho:*

a) $IM + IN$ *là nhỏ nhất ;*

b) $|IM - IN|$ *là lớn nhất.*

Cách giải. a) Trước hết ta xác định vị trí tương đối giữa M và N so với mặt phẳng (α) bằng cách xét

$T = (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D)$

• Nếu $T > 0$ thì M, N cùng phía đối với mp(α);

Khi M, N cùng phía với nhau đối với mp(α) ta làm như sau:

Xác định điểm M' đối xứng với M qua mp(α), lúc đó $IM = IM'$. Ta có $IM + IN = IM' + IN \geq M'N$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi I, M, N thẳng hàng. Do đó điểm I thỏa mãn a) là giao điểm của $M'N$ và mp(α).

• Nếu $T < 0$ thì M, N khác phía đối với mp(α).

Khi đó điểm I cần tìm chính là giao điểm của đường thẳng MN với mp(α).

b) • Nếu M và N nằm về cùng một phía đối với mp(α) và MN // mp(α) thì có $|IM - IN| \leq MN$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi I, M, N thẳng hàng. Điểm I cần tìm là giao của MN với mp(α). Còn nếu MN//mp(α) thì không xác định được điểm I.

• Nếu M và N khác phía đối với mp(α) thì lấy điểm M' đối xứng với M qua mp(α). Khi đó $|IM - IN| = |IM' - IN| \leq M'N$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi I, M', N thẳng hàng. Điểm I cần tìm là giao của $M'N$ với mp(α).

★**Thí dụ 1.** *Trong không gian với hệ tọa độ Descartes Oxyz cho hai điểm* $M(1\,;\,2\,;\,3)$ *và* $N(4\,;\,4\,;\,5)$. *Tìm điểm I thuộc mặt phẳng (xOy) sao cho* $IM + IN$ *nhỏ nhất.*

Lời giải. PT mặt phẳng (xOy) là $z = 0$ ($A = B = D = 0$, $C = 1$). Ta có $T = 3.5 > 0$, do đó M, N nằm về cùng một phía đối với mặt phẳng (xOy). Ta xác định I như sau:

Gọi M' là điểm đối xứng với M qua mp(xOy). Đường thẳng (d) qua M vuông góc với mp(xOy) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (0\,;\,0\,;\,1)$ nên

PT tham số có dạng $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 + t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$.

Giả sử $H = d \cap$ mp(xOy) thì $H(1\,;\,2\,;\,3 + t)$. Lúc đó $3 + t = 0$, suy ra $H(1\,;\,2\,;\,0)$.

Do đó $M'(1\,;\,2\,;\,-3) \Rightarrow \overrightarrow{M'N} = (3\,;\,2\,;\,8)$. Ta có $IM + IN = IM' + IN \geq M'N$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $I = M'N \cap$ mp(xOy). PT của $M'N$: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{8}$.

Điểm $I(1 + 3m ; 2 + 2m ; -3 + 8m)$ cần tìm thuộc $M'N$, và mp(xOy) nên $-3 + 8m = 0$.

Vậy $I\left(\frac{17}{8};\frac{11}{4};0\right)$.

★**Thí dụ 2.** *Trong không gian với hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz, cho mặt phẳng (α) có PT $2x - y + z + 1 = 0$ và hai điểm $M(3 ; 1 ; 0)$, $N(-9 ; 4 ; 9)$. Tìm điểm I trên mp(α) sao cho $|IM - IN|$ đạt giá trị lớn nhất.*

Lời giải. Ta có $T = 6.(-12) < 0$ nên M, N nằm về hai phía của mp(α). Gọi R là điểm đối xứng của M qua mp(α), khi đó đường thẳng MR qua $M(3 ; 1 ; 0)$ vuông góc với mp(α) có PT

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}.$$

Gọi $H = MR \cap$ mp(α), suy ra $H(3 + 2t ; 1 - t ; t) \in MR$. Vì $H \in$ mp(α) nên $H(1 ; 2 ; -1)$, suy ra $R(-1 ; 3 ; -2)$.

Ta có $|IM - IN| = |IR - IN| \le RN$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi I, N, R thẳng hàng. Lại có $\overrightarrow{RN} = (-8 ; 1 ; 11)$, do đó RN có PT tham số

$$\begin{cases} x = -1 - 8t \\ y = 3 + t \\ z = -2 + 11t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Điểm I cần tìm là giao của RN với mp(α).

$I(-1 - 8t ; 3 + t ; -2 + 11t) \in$ mp(α) suy ra $I(7 ; 2 ; -13)$.

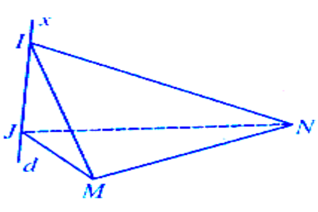
✪**Bài toán 2.** *Trong không gian với hệ trục tọa độ Descartes Oxyz cho đường thẳng d và các điểm $M(x_1 ; y_1 ; z_1)$ và $N(x_2 ; y_2 ; z_2)$ không thuộc d. Tìm điểm I trên đường thẳng d sao cho IM + IN bé nhất.*

Cách giải.

• *Trường hợp 1. M, N* và *d* nằm trong một mặt phẳng. Khi đó ta thực hiện bài toán trong mặt phẳng: Nếu đoạn MN cắt d thì giao điểm đó chính là điểm I cần tìm. Nếu đoạn MN không cắt d thì lấy M' đối xứng với M qua d khi đó $IM = IM'$. Ta có $IM + IN = IM' + IN \ge M'N$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi I, M', N thẳng hàng, khi đó $IM + IN$ bé nhất. Từ đó I là giao điểm của $M'N$ và d, suy ra tọa độ điểm I.

• *Trường hợp 2. MN* và *d* chéo nhau. Có hai khả năng:

*) Nếu $MN \perp d$ (h. 1) thì ta làm như sau: Gọi (P) là mặt phẳng qua MN vuông góc với d tại J, khi đó $MJ \perp d$; $NJ \perp d$ và $MJ + NJ = k$ (không đổi). Với mọi $I \in d$: $IM \ge JM$; $IN \ge JN \Rightarrow IM + IN \ge JM + JN$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $I \equiv J$, từ đó tìm được tọa độ điểm I, giao của (P) và d.

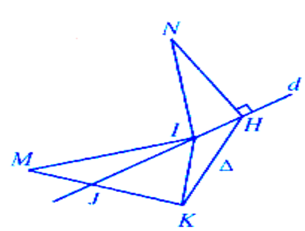


Hình 1

*) Nếu MN không vuông góc với d ta chuyển bài toán về mặt phẳng để giải như sau (xem h.2):

– Xác định hình chiếu vuông góc H của N xuống d.

– Gọi (R) là mặt phẳng $(N ; d)$; (P) là mặt phẳng qua H vuông góc d ; (Q) là mặt phẳng chứa d và điểm M ; $\Delta = (P) \cap (Q) \Rightarrow \Delta \perp d$ tại H. Trên Δ lấy K sao cho $KH = NH$ và K, M nằm về hai phía so với mặt phẳng (R). Khi đó với mọi $J \in d$ thì $\Delta NJH = \Delta KJH \Rightarrow JK = JN \Rightarrow JM + JN = JM + JK \ge MK$. Đẳng thức xảy ra khi J, M, K thẳng hàng từ đó tìm được tọa độ điểm $I \equiv J$ giao của MK và d là điểm cần tìm.



Hình 2

★**Thí dụ 3.** *Trong không gian với hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz, cho $M(1 ; 2 ; -1)$, $N(7 ; -2 ; 3)$ và đường thẳng d có PT*

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{2}.$$

Tìm điểm I thuộc d sao cho IM + IN nhỏ nhất.

Hướng dẫn. Đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3 ; -2 ; 2)$; $\overrightarrow{MN} = (6 ; -4 ; 4) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = 2\vec{u}$; $M \notin d$ nên $MN \parallel d$, do đó trên mặt phẳng (d, MN) gọi M' là điểm đối xứng của M thì mặt phẳng (α) qua $M(1 ; 2 ; -1)$ với vectơ chỉ phương $(3 ; -2 ; 2)$ có phương trình:

$$3x - 2y + 2z + 3 = 0.$$

Gọi $H = d \cap (\alpha) \Rightarrow H(-1 ; 2 ; 2) \Rightarrow M'(-3 ; 2 ; 5)$.

$I = d \cap M'N \Rightarrow HI // MN \Rightarrow I$ trung điểm MN nên $I(2 ; 0 ; 4)$ là điểm cần tìm.

★**Thí dụ 4.** *Trong không gian với hệ tọa độ Descartes vuông góc Oxyz, cho $M(3 ; 1 ; 1)$, $N(4 ; 3 ; 4)$ và đường thẳng d có PT* $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-9}{1}$. *Tìm I thuộc d sao cho IM + IN nhỏ nhất.*

Hướng dẫn. Ta có $\overrightarrow{MN} = (1 ; 2 ; 3)$; d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1 ; -2 ; 1)$ nên $\overrightarrow{MN}.\vec{u} = 1.1 + 2.(-2) + 3.1 = 0$, suy ra $MN \perp d$.

Mặt phẳng (P) qua MN vuông góc với d tại I có PT $x - 2y + z - 2 = 0$.

Điểm $I = (P) \cap d$ nên $I\left(\frac{17}{3};\frac{17}{3};\frac{23}{3}\right)$.

Cuối cùng mời các bạn giải một số bài toán tương tự trên hệ trục tọa độ $Oxyz$.

1) Cho mặt phẳng (α) có PT $2x - y + z + 1 = 0$ và hai điểm $M(3 ; 1 ; 0)$; $N(-9 ; 4 ; 9)$.

a) Tìm điểm I thuộc mặt phẳng (α) sao cho $\left|\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

b) Tìm điểm I' thuộc mặt phẳng (α) sao cho $|I'M - I'N|$ đạt giá trị lớn nhất.

2) Cho $M(1 ; 1 ; 0)$, $N(3 ; -1 ; 4)$ và đường thẳng d có PT $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{2}$. Tìm điểm I trên d sao cho $IM + IN$ bé nhất.

3) Cho $M(-1 ; 3 - 2)$, $N(-9 ; 4 ; 9)$ và mặt phẳng (P) có PT $2x - y + z + 1 = 0$. Tìm điểm I trên mặt phẳng (P) sao cho $IM + IN$ bé nhất.

Nét đẹp CỦA ĐỊNH LÍ 4 ĐIỂM

NGÔ ĐỨC MINH
(GV THCS Ngô Gia Tự, Hồng Bàng, Hải Phòng)

Trong quá trình mở rộng định lí Pythagore, ta được định lí 4 điểm như sau:

Với 4 điểm A, B, C, D ta luôn có: AC vuông góc với BD khi và chỉ khi $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$.

Hai ứng dụng của định lí này về mối quan hệ giữa các cạnh với hai đường chéo của một tứ giác là :

1) *Nếu tổng bình phương các cặp cạnh đối diện của tứ giác bằng nhau thì hai đường chéo của nó vuông góc với nhau và ngược lại.*

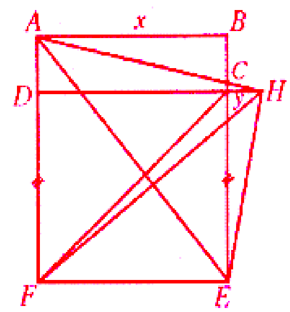
2) *Nếu tổng bình phương hai cạnh đối diện của tứ giác bằng tổng bình phương hai đường chéo thì hai cạnh đối diện còn lại của tứ giác vuông góc với nhau.*

Nét đẹp của định lí 4 điểm là các tứ giác mà chúng ta xét trong hai ứng dụng không nhất thiết là tứ giác lồi mà có thể là tứ giác lõm, đơn hay không đơn.

Việc chứng minh định lí này, các bạn có thể tham khảo bài viết của tác giả Võ Kim Huệ đăng trên số báo tháng 3 (237)/1997. Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu ứng dụng của định lí 4 điểm vào giải quyết tốt một lớp bài toán chứng minh hai đường thẳng vuông góc. Mong muốn sẽ tiếp sức cho bạn đọc một phương pháp giải toán.

✪**Bài toán 1.** *Cho hình chữ nhật ABCD. Trên tia đối của tia DA và tia đối của tia CB lần lượt lấy hai điểm F và E sao cho DF = CE = CD. Trên tia đối của tia CD lấy điểm H sao cho CH = CB. Chứng minh rằng AE vuông góc với FH.*

Lời giải. (h. 1). Đặt $AB = x$; $BC = y$. Theo bài ra ta có $DF = CE = CD = EF = x$, $CH = BC = y$.



Hình 1

Sử dụng định lí Pythagore, ta tính được

$AH^2 + EF^2$
$= 2x^2 + 2xy + 2y^2 \ (1)$

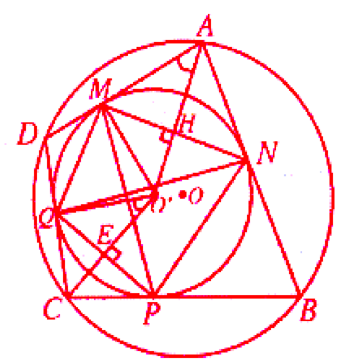
$AF^2 + HE^2$
$= 2x^2 + 2xy + 2y^2 \ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $AH^2 + EF^2 = AF^2 + HE^2$.

Theo ứng dụng 1) ta có $AE \perp FH$. ❐

✪**Bài toán 2.** *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) đồng thời ngoại tiếp một đường tròn khác (O') có các tiếp điểm M, N, P, Q lần lượt với các cạnh DA, AB, BC, CD. Chứng minh rằng MP vuông góc với NQ.*

Lời giải. (h. 2). Gọi H là giao điểm của $O'A$ và MN; E là giao điểm của $O'C$ và PQ.



Hình 2

Ta có tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) nên $\hat{A}+\hat{C}=180^\circ$; tứ giác $ABCD$ lại ngoại tiếp (O') nên

$\widehat{O'AM}+\widehat{O'CQ}=\frac{1}{2}\hat{A}+\frac{1}{2}\hat{C}=90^\circ$, suy ra

$\widehat{O'AM}=\widehat{CO'Q}$ (cùng phụ với $\widehat{O'CQ}$).

Vậy $\Delta O'MA \backsim \Delta CQO'$. Do đó $\frac{O'M}{CQ}=\frac{MA}{QO'}$.

Đặt $MA = AN = x$, $BN = BP = y$, $CP = CQ = z$, $DQ = DM = t$, $O'M = O'Q = r$, khi đó ta có $\frac{r}{z} = \frac{x}{r} \Leftrightarrow r^2 = xz$. Tương tự, ta có $r^2 = yt$ suy ra $r^2 = xz = yt$.

Do AM và AN là hai tiếp tuyến của (O') nên $O'A \perp MN$ và $HM = HN$. Trong tam giác $O'MA$ vuông tại M có

$$\frac{1}{MH^2} = \frac{1}{MA^2} + \frac{1}{O'M^2} \Rightarrow \frac{4}{MN^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{r^2}$$

$$\Rightarrow MN^2 = \frac{4x^2r^2}{x^2+r^2} = \frac{4x^2.(xz)}{x^2+xz} = \frac{4x^2z}{x+z}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$PQ^2 = \frac{4xz^2}{x+z};\ NP^2 = \frac{4y^2t}{y+t};\ MQ^2 = \frac{4yt^2}{y+t}.$$

Suy ra $MN^2 + PQ^2 = \frac{4x^2z}{x+z} + \frac{4xz^2}{x+z} = 4xz = 4r^2$.

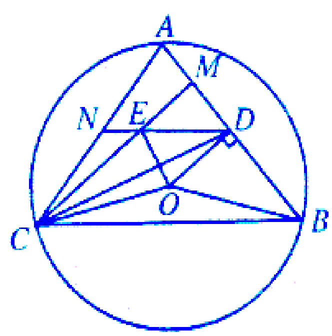
$$NP^2 + MQ^2 = \frac{4y^2t}{y+t} + \frac{4yt^2}{y+t} = 4yt = 4r^2.$$

Như vậy $MN^2 + PQ^2 = NP^2 + MQ^2$. Theo định lí 4 điểm thì $MP \perp NQ$.

Bài toán 3. *Giả sử O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. D là trung điểm của cạnh AB, còn E là trọng tâm của tam giác ACD. Chứng minh rằng nếu AB = AC thì OE vuông góc với CD.*

Lời giải. (h. 3).

Gọi M là giao điểm của CE và AB; N là giao điểm của DE và AC. Đặt $BC = a$ và $AB = AC = b$.



Hình 3

Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến, ta có

$$CM^2 = \frac{CA^2 + CD^2}{2} - \frac{AD^2}{4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}CE\right)^2 = \frac{b^2 + \frac{b^2+a^2}{2} - \frac{b^2}{4}}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}b\right)^2}{4}$$

$$= \frac{5b^2+2a^2}{8} - \frac{b^2}{16} = \frac{9b^2+4a^2}{36}$$

suy ra $CE^2 = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{9}a^2$.

Do $DA = DB$ nên $OD \perp AB$. Trong tam giác vuông ODB ta có

$$OD^2 = OB^2 - BD^2 = OC^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = OC^2 - \frac{1}{4}b^2.$$

Vậy $CE^2 + OD^2 = OC^2 + \frac{1}{9}a^2$ (3)

Dễ thấy ND là đường trung bình của tam giác ABC nên $DN = \frac{1}{2}BC$, suy ra $DE = \frac{1}{3}a$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $CE^2 + OD^2 = OC^2 + DE^2$. Theo định lí 4 điểm thì $OE \perp CD$.

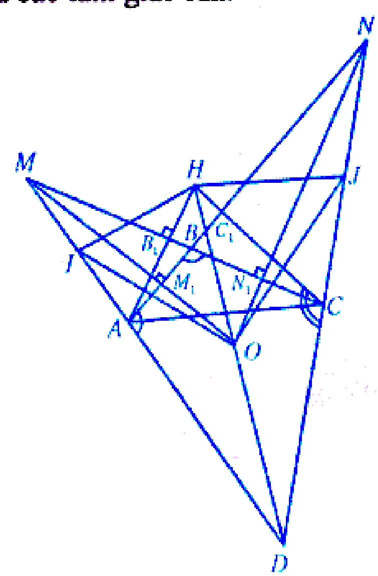
Bài toán 4. *Cho tứ giác ABCD có $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD} > 90°$. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác ABC đi qua D.*

Lời giải. (h. 4).

Gọi $DA \cap CB = M$; $AB \cap DC = N$; các đường cao MM_1, NN_1 của các tam giác AMB và BNC cắt nhau tại O. Do $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD}$ nên AMB, BNC đều là các tam giác cân.

Từ đó suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Vì $\widehat{ABC} > 90°$ nên H nằm ngoài ΔABC và $HA \perp BC$ tại B_1, $HC \perp AB$ tại C_1. Như vậy, ta sẽ có các tứ giác AM_1B_1M, AB_1C_1C, CN_1C_1N và $MACN$ là các tứ giác nội tiếp.



Hình 4

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của MA và CN.

Khi đó I, J sẽ lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp tứ giác AM_1B_1M và CN_1C_1N.

Từ đó dễ thấy

$HB_1.HA = HI^2 - IA^2$; $HC_1.HC = HJ^2 - JC^2$;

$HB_1.HA = HC_1.HC$ suy ra

$HI^2 - IA^2 = HJ^2 - JC^2 \Rightarrow HI^2 - HJ^2 = IA^2 - JC^2$ (5)

Tương tự ta có $OI^2 - OJ^2 = IA^2 - JC^2$ (6)

Từ (5) và (6) suy ra $HI^2 + OJ^2 = OI^2 + HJ^2$

Theo định lí 4 điểm thì $OH \perp IJ$ (7)

Mặt khác, do tứ giác $MACN$ nội tiếp nên $DA.DM = DC.DN \Rightarrow (DI - IA)(DI + IA) = (DJ - JC)(DJ + JC) \Rightarrow DI^2 - DJ^2 = IA^2 - JC^2$ (8)

Từ (5) và (8) suy ra $HI^2 + DJ^2 = DI^2 + HJ^2$. Theo định lí 4 điểm thì $DH \perp IJ$ (9)

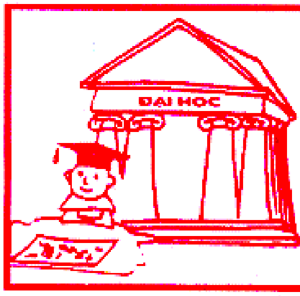
Từ (7) và (9) suy ra H, O, D thẳng hàng.Ta biết đường thẳng Euler của tam giác ABC đi qua trực tâm H, trọng tâm G và tâm O của đường tròn ngoại tiếp. Từ đó suy ra đường thẳng Euler của tam giác ABC đi qua D.

Mời các bạn sử dụng định lí 4 điểm để giải quyết các bài toán sau đây.

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn có hai đường chéo cắt nhau tại I. Hạ IP, IQ lần lượt vuông góc với AD và BC. Gọi M, N lần lượt là các trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng PQ vuông góc với MN.

Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Các tam giác OAD, OBC lần lượt có trực tâm là H và K. Chứng minh rằng HK vuông góc với MN.

Bài 3. Trên cung nhỏ AB của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ người ta lấy điểm M khác A và B. Gọi P, Q, R và S thứ tự là hình chiếu của M trên các đường thẳng AD, AB, BC và CD. Chứng minh rằng hai đường thẳng PQ và RS vuông góc với nhau và giao điểm của chúng nằm trên một trong hai đường chéo hình chữ nhật.



Chuẩn bị cho kì thi tốt nghiệp THPT và thi vào Đại học

SỰ PHÂN LOẠI TỨ DIỆN và ứng dụng

LÊ QUỐC HÁN
(GV Đại học Vinh)

Tứ diện là một mô hình cơ bản và thường gặp nhất trong hình học không gian, đặc biệt là trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học hay kì thi Olympic Toán. Sự phân loại các tứ diện theo những tiêu chuẩn nào đó sẽ giúp chúng ta xác định nhanh kết quả hay phương pháp giải các bài toán liên quan đến tứ diện thể hiện một cách tường minh hay chìm khuất. Bài viết này không có ý định phân lớp các tứ diện một cách triệt để mà chỉ nêu lên những kinh nghiệm giải các bài toán liên quan đến tứ diện được phân loại theo những đặc trưng khác nhau (nhưng không loại trừ lẫn nhau).

I. TỨ DIỆN ĐỀU

Định nghĩa. *Tứ diện đều* là tứ diện có tất cả các cạnh bằng nhau.

Tính chất. *Trong một tứ diện đều:*

a) *Sáu mặt là những tam giác đều bằng nhau.*

b) *Chân đường cao hạ từ một đỉnh bất kì xuống mặt đối diện là trực tâm, trọng tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp của mặt đó.*

Mệnh đề 1. *Giả sử ABCD là tứ diện đều cạnh bằng a. Khi đó*

1) *Tâm mặt cầu ngoại tiếp, tâm mặt cầu nội tiếp và trọng tâm của tứ diện trùng nhau.*

2) *Đường cao của tứ diện bằng* $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ *và thể tích của tứ diện bằng* $\frac{a^3\sqrt{2}}{24}$.

3) *Bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện* $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ *và bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện* $r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$.

4) *Các cặp cạnh đối diện của tứ diện đôi một vuông góc với nhau.*

5) *Đoạn thẳng nối hai trung điểm của hai cạnh đối diện bất kì là đoạn vuông góc chung của các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.*

6) *Khoảng cách giữa hai cạnh đối diện bất kì bằng* $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

7) *Hình hộp ngoại tiếp tứ diện đều ABCD cạnh a là hình lập phương có cạnh bằng* $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Việc chứng minh mệnh đề trên khá đơn giản, đề nghị các bạn tự giải xem như những bài tập.

Bây giờ chúng tôi sẽ nêu một số thí dụ từ đơn giản đến phức tạp để bạn đọc bước đầu thấy lợi ích của việc nắm vững các kiến thức nêu trên.

★***Thí dụ 1.*** *Trong không gian với hệ trục tọa độ vuông góc Oxyz cho* $A(a\,;0\,;0)$, $B(0\,;a\,;0)$, $C(0\,;0\,;a)$ *với* $a > 0$.

a) *Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O xuống mặt phẳng (ABC). Tìm tọa độ điểm H.*

b) *Gọi D là điểm đối xứng của H qua O. Chứng minh ABCD là tứ diện đều.*

Lời giải. a) Vì $AB = BC = CA = a\sqrt{2}$ nên ABC là tam giác đều. Ta lại có $OA = OB = OC = a$ nên $OABC$ là hình chóp đều. Do đó H là trọng tâm tam giác ABC. Suy ra $H\left(\frac{a}{3};\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$.

b) Vì $O(0\,;0\,;0)$ là trung điểm của DH nên $D\left(-\frac{a}{3};-\frac{a}{3};-\frac{a}{3}\right)$. Do đó $\overrightarrow{DA}=\left(\frac{4a}{3};\frac{a}{3};\frac{a}{3}\right)$.

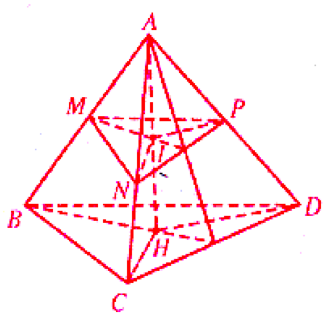
Suy ra $|\overrightarrow{DA}| = \sqrt{\frac{16a^2}{9}+\frac{a^2}{9}+\frac{a^2}{9}} = a\sqrt{2}$. Tương tự $|\overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DC}| = a\sqrt{2}$ nên $ABCD$ là tứ diện đều.

★*Thí dụ 2. Cho tứ diện đều ABCD cạnh bằng a.*

a) *Gọi (α) là mặt phẳng chứa BD và song song với AC. Chứng minh rằng AB, AD, CB, CD tạo với mp(α) những góc bằng nhau.*

b) *Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) và I là trung điểm của AH. Mặt phẳng (π) quay quanh I, cắt các cạnh AB, AC và AD tại M, N, P. Chứng minh rằng* $\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}+\frac{1}{AP}$ *nhận một giá trị không đổi.*

Lời giải. a) Vẽ hình hộp $AB_1CD_1.A_1BC_1D$ ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Khi đó, dễ thấy AB, AD, CB và CD đều tạo với mp(α) một góc bằng 45° (mặt phẳng (α) chính là mặt đáy A_1BC_1D của hình lập phương).



Hình 1

b) (h. 1) Gọi V là thể tích tứ diện $ABCD$. Khi đó

$$V_{ABCH}=V_{ACDH}=V_{ABDH}=\frac{1}{3}V.$$

Ta có $\frac{V_{AMNP}}{V_{ABCD}}=\frac{AM}{AB}\cdot\frac{AN}{AC}\cdot\frac{AP}{AD}$

hay $\frac{V_{AMNP}}{V}=\frac{AM.AN.AP}{a^3}$ (1)

$\frac{V_{AMNI}}{V_{ABCH}}=\frac{AM}{AB}\cdot\frac{AN}{AC}\cdot\frac{AI}{AH}$ hay $\frac{V_{AMNI}}{V}=\frac{1}{6}\cdot\frac{AM.AN}{a^2}$.

Tương tự $\frac{V_{ANPI}}{V}=\frac{1}{6}\cdot\frac{AN.AP}{a^2}$; $\frac{V_{AMPI}}{V}=\frac{1}{6}\cdot\frac{AM.AP}{a^2}$.

Cộng từng vế ba đẳng thức cuối cùng, ta có

$$\frac{V_{AMNP}}{V}=\frac{AM.AN+AN.AP+AM.AP}{6a^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{AM.AN.AP}{a^3}=\frac{AM.AN+AN.AP+AM.AP}{6a^2}.$$

Do đó $\frac{AM.AN+AN.AP+AM.AP}{AM.AN.AP}=\frac{6a^2}{a^3}$ hay

$\frac{1}{AM}+\frac{1}{AN}+\frac{1}{AP}=\frac{6}{a}$ (đpcm).

II. TỨ DIỆN GẦN ĐỀU

Định nghĩa. *Tứ diện gần đều* là tứ diện có các cặp cạnh đối diện bằng nhau từng đôi một (Tứ diện gần đều còn gọi là *tứ diện cân*).

Tính chất. *Trong một tứ diện gần đều, có*

1) *Các mặt của tứ diện là những tam giác bằng nhau.*

2) *Các mặt của tứ diện là những tam giác có ba góc đều nhọn.*

3) *Đoạn thẳng nối hai trung điểm của hai cạnh đối diện bất kì là đoạn vuông góc chung của các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.*

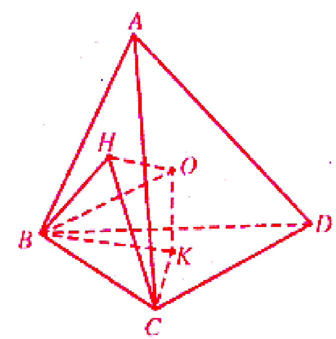
4) *Tâm mặt cầu ngoại tiếp, tâm mặt cầu nội tiếp và trọng tâm của tứ diện trùng nhau.*

5) *Hình hộp ngoại tiếp tứ diện là hình hộp chữ nhật.*

Việc xét mệnh đề đảo của các tính chất trên rất hữu ích và nhiều khi việc chứng minh (hay bác bỏ) tính đúng đắn của chúng không phải lúc nào cũng dễ dàng. Chẳng hạn xét mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 2. *Cho tứ diện ABCD có tâm mặt cầu ngoại tiếp và tâm mặt cầu nội tiếp trùng nhau. Chứng minh ABCD là tứ diện gần đều.*

Chứng minh. Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Kẻ $OH \perp$ mp(ABC), $OK \perp$ mp(BCD). Khi đó H và K thứ tự là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và BCD (h.2), nên $\widehat{BHC}=2\widehat{BAC}$



Hình 2

và $\widehat{BKC}=2\widehat{BDC}$. Vì hai tam giác vuông OHB và OKB bằng nhau, nên $BH = BK$. Kết hợp với $HB = HC$ và $KB = KC$ suy ra $\Delta BHC = \Delta BKC$ (c.c.c).

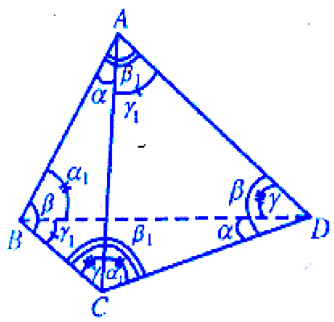
Do đó $\widehat{BHC}=\widehat{BKC}$, dẫn đến $\widehat{BAC}=\widehat{BDC}$.

Vậy ta có thể đặt $\widehat{BAC}=\widehat{BDC}=\alpha$.

Tương tự $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}=\beta$; $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}=\gamma$;

$\widehat{ABD}=\widehat{ACD}=\alpha_1$; $\widehat{CAD}=\widehat{CBD}=\gamma_1$

và $\widehat{BAD}=\widehat{BCD}=\beta_1$.



Hình 3

Ta có

$\alpha+\beta+\gamma=180^o$ (1)

$\alpha_1+\beta+\gamma_1=180^o$ (2)

$\alpha+\gamma_1+\beta_1=180^o$ (3)

$\alpha_1+\beta_1+\gamma=180^o$ (4)

Từ (1) và (2) suy ra

$\alpha+\gamma=\gamma_1+\alpha_1$ (5)

Từ (2) và (3) suy ra

$\alpha+\gamma_1=\gamma+\alpha_1$ (6)

Cộng từng vế (5) và (6) được $\alpha=\alpha_1$. Tương tự, có $\beta=\beta_1$ và $\gamma=\gamma_1$. Do đó $\Delta ABC=\Delta DCB$ (g.c.g) suy ra $AB=CB$ và $AC=DB$. Tương tự có $AD=BC$ nên $ABCD$ là tứ diện gần đều (h. 3).

★***Thí dụ 3.*** *Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc Oxyz cho* $A(1\,;2\,;2)$, $B(-1\,;2\,;-1)$, $C(1\,;6\,;-1)$, $D(-1\,;6\,;2)$.

a) *Chứng minh ABCD là tứ diện gần đều.*

b) *Xác định tọa độ trọng tâm của tứ diện ABCD.*

c) *Lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp tứ diện ABCD.*

Lời giải. a) Vì $\overrightarrow{AB}=(-2;0;-3)$, $\overrightarrow{CD}=(-2;0;3)$ nên $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{13}$. Tương tự, có $\overrightarrow{AC}=(0;4;-3)$, $\overrightarrow{BD}=(0;4;3)$ nên $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|=5$; $\overrightarrow{AD}=(-2;4;0)$, $\overrightarrow{BC}=(2;4;0)$ nên $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{5}$. Do đó $ABCD$ là tứ diện gần đều.

b) Vì G là trọng tâm của tứ diện $ABCD$ nên $G\left(0;4;\frac{1}{2}\right)$.

c) Vì $\overrightarrow{GA}=\left(1;-2;\frac{3}{2}\right)$, $\overrightarrow{GB}=\left(-1;-2;-\frac{3}{2}\right)$, $\overrightarrow{GC}=\left(1;2;-\frac{3}{2}\right)$, $\overrightarrow{GD}=\left(1;2;\frac{3}{2}\right)$ nên $|\overrightarrow{GA}|=|\overrightarrow{GB}|=|\overrightarrow{GC}|=|\overrightarrow{GD}|=\frac{\sqrt{29}}{2}$. Do đó tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là G và bán kính $R=\frac{\sqrt{29}}{2}$, nên PT mặt cầu đó là

$$x^2+(y-4)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{29}{4}.$$

Ta lại có $d(G,(ABC))=d(G,(ABD))=d(G,(ACD))=d(G,(BCD))=\frac{6}{\sqrt{61}}$.

Do đó G cũng là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ và bán kính mặt cầu đó là $r=\frac{6}{\sqrt{61}}$.

Vậy PT mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ là

$$x^2+(y-4)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{36}{61}.$$

III. TỨ DIỆN VUÔNG

Định nghĩa. *Tứ diện vuông* là tứ diện có một góc tam diện ba mặt vuông.

Tính chất. *Giả sử OABC là tứ diện vuông, $OA\perp OB$, $OA\perp OC$, $OB\perp OC$; $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$. Khi đó*

1) *Tam giác ABC có ba góc nhọn;*

2) *Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Thế thì OH là đường cao của tứ diện OABC và*

$$\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}.$$

3) *Gọi α, β, γ là các góc tạo bởi OH với OA, OB, OC. Khi đó* $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$;

4) $S^2_{OAB}=S_{HAB}.S_{ABC}$; $S^2_{OAC}=S_{HAC}.S_{ABC}$; $S^2_{OBC}=S_{HBC}.S_{ABC}$.

5) $S^2_{OAB}+S^2_{OAC}+S^2_{OBC}=S^2_{ABC}$

(Định lí Pythagore trong không gian).

6) $V_{OABC}=\frac{1}{6}abc$ và

$$S_{tp}=\frac{1}{2}\left(ab+ac+bc+\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\right).$$

7) *Gọi M, N, P là trung điểm của BC, CA và AB, khi đó OMNP là tứ diện gần đều và* $V_{OMNP}=\frac{1}{4}V_{OABC}=\frac{1}{24}abc$.

★***Thí dụ 4.*** *Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc Oxyz cho* $M(1\,;0\,;2)$, $N(1\,;1\,;0)$, $P(0\,;1\,;2)$.

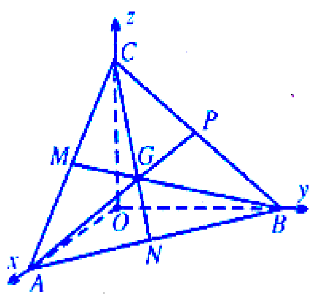
a) *Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua M, N, P.*

b) Gọi A, B, C là giao điểm của mặt phẳng (α) với các trục Ox, Oy, Oz. Tính V_{OABC} và S_{ABC}.

c) Chứng minh AP, BM, CN đồng quy tại một điểm G. Tìm tọa độ điểm G.

d) Gọi φ_1, φ_2, φ_3 là các góc tạo bởi $\overrightarrow{OG}$ với $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Chứng minh

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1.$$



Hình 4

Lời giải. (h. 4) Phương trình mặt phẳng (α) là $2x + 2y + z - 4 = 0$ nên $A(2\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$ và $C(0\,;0\,;4)$.

Khi đó $x_P = \dfrac{x_B + x_C}{2} = 0$, $y_P = \dfrac{y_B + y_C}{2} = 1$, $z_P = \dfrac{z_B + z_C}{2} = 2$ nên P là trung điểm của BC.

Do đó AP là trung tuyến của tam giác ABC. Tương tự, BM và CN là trung tuyến của tam giác ABC nên AP, BM và CN đồng quy tại G, trọng tâm tam giác ABC. Từ đó $G\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)$,

suy ra $\overrightarrow{OG} = \left(\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{2}{3}\vec{u}$, trong đó

$\vec{u} = (1\,;1\,;2)$. Vì $\overrightarrow{OA} = (2\,;0\,;0) = 2\vec{e}_1$, với

$\vec{e}_1 = (1\,;0\,;0)$. Từ đó $\cos\varphi_1 = \dfrac{\vec{u}.\vec{e}_1}{|\vec{u}|.|\vec{e}_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Tương tự $\cos\varphi_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$; $\cos\varphi_3 = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$ nên

$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1$.

★***Thí dụ 5.*** *Trong không gian với hệ tọa độ vuông góc Oxyz cho $A(a\,;0\,;0)$, $B(0\,;b\,;0)$, $C(0\,;0\,;c)$ với a, b, c là các số dương.*

a) Gọi R và r thứ tự là bán kính các mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp tứ diện OABC. Chứng minh rằng $\dfrac{2R}{r} \ge 3(1+\sqrt{3})$.

b) Giả sử a, b, c thay đổi nhưng luôn thỏa mãn điều kiện $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$. Chứng minh mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải. a) $\dfrac{2R}{r} =$

$$= \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.(ab+ac+bc+\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2})}{abc}$$

$$\ge \frac{\sqrt{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}\,(3\sqrt[3]{ab.ac.bc}+\sqrt{3\sqrt[3]{a^2b^2.a^2c^2.b^2c^2}})}{abc}$$

$= 3(1+\sqrt{3})$ (theo BĐT Cauchy).

b) Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$.

Theo giả thiết $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$ nên $\dfrac{2}{a}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{2}{c}=1$.

Vậy mặt phẳng (ABC) luôn đi qua điểm $M\,(2\,;2\,;2)$ cố định.

Để kết thúc bài báo. Xin mời các bạn ôn tập lại bằng cách giải các bài toán sau đây.

1. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Gọi I, M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC và CD.

a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BM và AN.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AN và CI.

2. Cho tứ diện gần đều $ABCD$.

a) Chứng minh các mặt của tứ diện là những tam giác bằng nhau.

b) Gọi α, β, γ tương ứng là các góc tạo bởi các mặt phẳng (ABC), (ACD), (ABD) với mặt phẳng (BCD). Tìm hệ thức liên hệ giữa $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

3. Trong không gian với hệ tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ cho $A(a\,;0\,;0)$, $B(0\,;b\,;0)$ và $C(0\,;0\,;c)$, trong đó a, b, c là các số thực dương và $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=2$.

a) Chứng minh mặt phẳng (ABC) luôn đi qua một điểm cố định. Tìm tọa độ điểm đó.

b) Xác định tâm, tìm bán kính r của mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$. Đồng thời chứng minh rằng $\dfrac{1}{4} < r \le \dfrac{\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})}$.

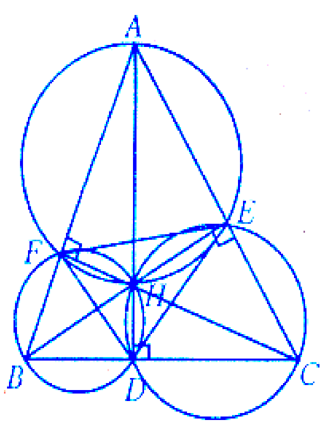
BA ĐƯỜNG TRÒN CẮT NHAU TẠI MỘT ĐIỂM

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(*GV THCS Nguyễn Văn Trỗi, Khánh Hoà*)

Trong chương trình hình học THCS ta hay gặp các bài toán chứng minh ba đường tròn cắt nhau tại một điểm, tức là ba đường tròn có chung một điểm và đôi một cắt nhau (mỗi cặp có thêm một điểm chung khác). Dưới đây là một số phương pháp thường dùng trong bài toán chứng minh ba đường tròn cắt nhau tại một điểm.

PHƯƠNG PHÁP 1. Dự đoán điểm chung của ba đường tròn (từ hình vẽ) rồi chứng minh điểm đó thuộc mỗi đường tròn. Tiếp theo chứng tỏ rằng ba đường tròn đó đôi một cắt nhau.

✪Thí dụ 1. *Cho tam giác ABC không vuông có ba đường cao AD, BE, CF. Chứng minh rằng ba đường tròn ngoại tiếp của ba tam giác AEF, BDF, CDE cắt nhau tại một điểm.*



Hình 1

Lời giải. (h. 1). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.

Vì $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^0$ nên A, E, H, F cùng thuộc đường tròn đường kính AH.

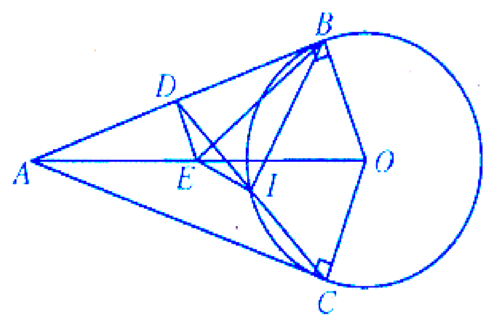
Tương tự B, D, H, F cùng thuộc đường tròn đường kính BH và C, D, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính CH.

Do đó ba đường tròn ngoại tiếp của ba tam giác AEF, BDF, CDE có chung điểm H và đôi một cắt nhau (vì có hai điểm chung) nên chúng cắt nhau tại H.

PHƯƠNG PHÁP 2. Tìm một điểm thuộc một đường tròn rồi chứng minh điểm đó thuộc hai đường tròn còn lại. Tiếp theo chứng tỏ rằng ba đường tròn đó đôi một cắt nhau.

✪Thí dụ 2. *Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O ; R) với OA ≠ 2R kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn đó (B và C là tiếp điểm). Gọi E là trung điểm của AO. Chứng minh rằng đường tròn (O), đường tròn đường kính BE và đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC cắt nhau tại một điểm.*

Lời giải. (h. 2). Gọi D là trung điểm cạnh AB; I là giao điểm thứ hai của CD và (O), suy ra $I \neq E$ (vì $OE \neq R$).



Hình 2

Xét $AO > 2R$ (chứng minh tương tự khi $AO < 2R$). Ta có tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn tâm E đường kính AO nên $ED \perp AB$ và $\widehat{BED} = \frac{1}{2}\widehat{BEA} = \widehat{BOA} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{BID}$.

Suy ra tứ giác $BDEI$ nội tiếp đường tròn đường kính BE (1)

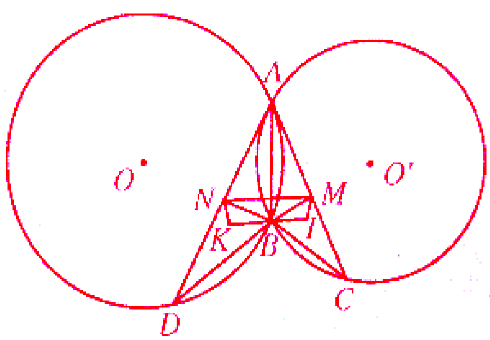
Từ đó, $\widehat{DIE} = \widehat{DBE} = \widehat{DAE} = \widehat{EAC}$, suy ra tứ giác $AEIC$ nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) ta thấy đường tròn (O), đường tròn đường kính BE và đường tròn ngoại tiếp tam giác AEC có chung điểm I. Hiển nhiên ba đường tròn trên đôi một cắt nhau (vì có hai điểm chung), do đó ba đường tròn trên cắt nhau tại I.

PHƯƠNG PHÁP 3. Tìm một điểm chung của hai trong ba đường tròn rồi chứng minh điểm đó thuộc đường tròn còn lại. Tiếp theo chứng tỏ rằng ba đường tròn đó đôi một cắt nhau.

✪**Thí dụ 3.** *Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B sao cho $\widehat{OAO'} \neq 90^o$. Vẽ dây AC của (O') là tiếp tuyến của (O), vẽ dây AD của (O) là tiếp tuyến của (O'). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AC và AD. Chứng minh rằng ba đường tròn ngoại tiếp của ba tam giác AMN, BCM và BDN cắt nhau tại một điểm.*

Lời giải. (h. 3). Xét O và O' ở khác phía đối với AB (chứng minh tương tự khi O và O' ở cùng phía đối với AB).



Hình 3

Ta có $\Delta ABC \backsim \Delta DBA$ (g.g).

Suy ra $\Delta AMB \backsim \Delta DNB$, nên $\widehat{AMB} = \widehat{DNB}$.

Vậy tứ giác $AMBN$ nội tiếp, do đó ba đường tròn ngoại tiếp của ba tam giác BCM, BDN và BDN có điểm chung B. Gọi I và K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCM và BDN.

Giả sử I, B, K thẳng hàng, ta có $\widehat{ADB} = \widehat{CAB} = \widehat{MNB}$. Suy ra MN là tiếp tuyến của đường tròn (K), do đó $MN \perp KN$. Tương tự có

$MN \perp IM \Rightarrow \widehat{MIK} + \widehat{NKI} = 180^o$

mà $\widehat{MIK} = 2\widehat{MCB} = 2\widehat{DAB}$ và $\widehat{NKI} = 2\widehat{NDB} = 2\widehat{CAB}$ nên $\widehat{DAB} + \widehat{CAB} = 90^o$ hay $\widehat{CAD} = 90^o$, suy ra $N \equiv O$ và $M \equiv O'$. Do đó $\widehat{OAO'} = 90^o$ trái giả thiết. Vậy I, B, K không thẳng hàng.

Do đó các đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM và BDN cắt nhau. Dễ thấy đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCM và BDN.

Vậy ba đường tròn ngoại tiếp ba tam giác AMN, BCM, BDN cắt nhau tại B.

Bài tập

1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Hai đường phân giác BF và CE. Chứng minh rằng đường tròn đường kính BF, đường tròn đường kính CE và đường tròn $(A; AB)$ cắt nhau tại một điểm.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là trung điểm của AC. Đường vuông góc với MB tại M và đường vuông góc với AC tại C cắt nhau tại D. Chứng minh rằng ba đường tròn với ba đường kính MB, MD và AC cắt nhau tại một điểm.

3. Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B sao cho $\widehat{OAO'} \neq 90^o$. Đường OA cắt (O') tại $C \neq A$. Chứng minh rằng ba đường tròn (O), (O') và $(OO'C)$ cắt nhau tại một điểm.

4. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Trên tia đối của tia AB lấy điểm $M \neq A$. Vẽ cát tuyến MCD không qua O (C nằm giữa M và D). Chứng minh ba đường tròn (MAD), (OAC) và (OBD) cắt nhau tại một điểm.

5. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Về phía nửa mặt phẳng bờ OO' chứa B vẽ tiếp tuyến chung EF ($E \in (O)$ và $F \in (O')$). Qua A vẽ cát tuyến CD ($C \in (O)$ và $D \in (O')$) song song với EF. CE và DF cắt nhau tại I. Chứng minh rằng ba đường tròn (O), (O') và (IEF) cắt nhau tại một điểm.

6. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn đó (B và C là tiếp điểm). Trên tia đối của tia OA và ở ngoài (O) lấy điểm D. Qua O kẻ đường vuông góc với CD cắt AC ở F. Chứng minh rằng ba đường tròn (BOD), (COF) và (O) cắt nhau tại một điểm.

7. Cho tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn $(O ; R)$. Trên tia đối của tia OA lấy điểm F sao cho $OF = \dfrac{R}{2}$. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác AFM, BFC và đường tròn (O) cắt nhau tại một điểm.

8. Cho hai đường tròn $(O ; R)$ và $(O' ; R')$ cắt nhau tại A và B với $R < R'$ và $\widehat{OAO'} \neq 90^o$. Tia OA cắt (O') tại $C \neq A$, tia $O'A$ cắt (O) tại $D \neq A$. Trên tia BD lấy $BE = BC$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác CED và hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại một điểm.

9. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Vẽ tiếp tuyến chung CD ($C \in (O)$, $D \in (O')$) gần điểm A hơn điểm B. Vẽ dây AF của đường tròn (O') là tiếp tuyến của đường tròn (O), CA cắt DF tại I. Chứng minh rằng ba đường tròn (CDI), (O) và (O') cắt nhau tại một điểm.

Về một tứ giác "ĐẸP"

VŨ HỮU BÌNH
(*Hà Nội*)

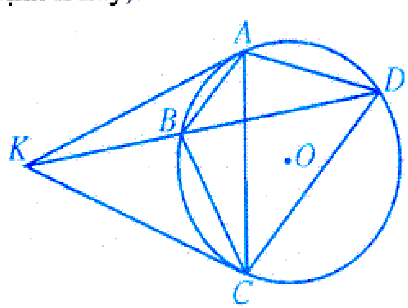
Trong nhiều bài toán, ta gặp tình huống sau: Từ điểm K nằm ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến KA, KC và cát tuyến KBD với đường tròn đó (h. 1). Tứ giác $ABCD$ ở hình 1 có nhiều tính chất thú vị, ta gọi nó là một "Tứ giác đẹp". Tứ giác đặc biệt này đã được nghiên cứu trên THTT số tháng 1/2001. Sau đây, chúng ta cùng tìm hiểu thêm một số tính chất của "tứ giác đẹp".

A. Vài tính chất của tứ giác "đẹp"

Tính chất sau đây đã nhận được trên THTT số tháng 1/2001.

Tính chất 1. *Trong tứ giác "đẹp", các tích của hai cạnh đối bằng nhau.*

Tính chất 1 có liên quan đến tích của hai cạnh đối của một tứ giác nội tiếp, điều đó làm ta nhớ đến định lí Ptolemy: *Trong một tứ giác nội tiếp, tích của hai đường chéo bằng tổng các tích của hai cạnh đối* (bạn đọc tự chứng minh định lí này).



Hình 1

Xét tứ giác $ABCD$ (h. 1), ta có $AB.CD = AD.BC$. Theo định lí Ptolemy ta có

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD.$$

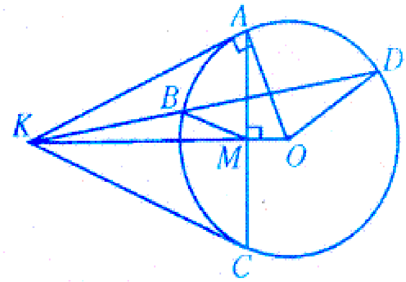
Từ hai đẳng thức trên suy ra

$$AB.CD = AD.BC = \frac{1}{2}AC.BD.$$

Từ đó ta nhận được tính chất sau.

Tính chất 2. *Trong tứ giác "đẹp", tích của hai cạnh đối bằng nửa tích của hai đường chéo.*

Xét tứ giác "đẹp" $ABCD$ nói trên, gọi M là giao điểm của AC và KO (h. 2).



Hình 2

Do KA là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên

$$KA^2 = KB.KD \qquad (1)$$

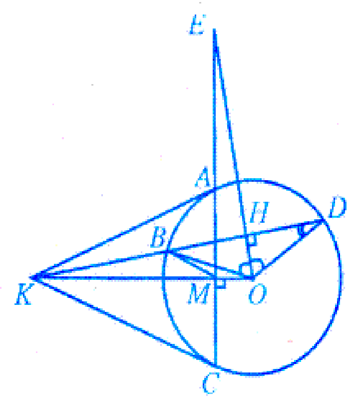
Mặt khác, AM là đường cao của tam giác vuông AKO nên $KA^2 = KO.KM$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $KB.KD = KO.KM$.

Từ đó dễ dàng chứng minh được tính chất sau.

Tính chất 3. *Tứ giác BMOD là tứ giác nội tiếp.*

Xét tứ giác "đẹp" $ABCD$, gọi M là giao điểm của AC và KO, kẻ OH vuông góc với BD. Kéo dài OH cắt CA ở E (h. 3).



Hình 3

Theo tính chất 3, tứ giác $BMOD$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{BMO} = 180° - \widehat{BDO}$, suy ra $\widehat{BME} = \widehat{BMO} - 90°$

$$= 180° - \widehat{BDO} - 90° = 90° - \widehat{BDO} \qquad (3)$$

Ta lại có $\widehat{BOE} = \widehat{DOE} = 90° - \widehat{BDO}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\widehat{BME} = \widehat{BOE}$, do đó ta có

Tính chất 4. *Tứ giác BMOE là tứ giác nội tiếp.*

Từ các tính chất 3 và 4, ta suy ra năm điểm E, B, M, O, D thuộc cùng một đường tròn, do đó ta chứng minh được $\widehat{OBE}=90°$, $\widehat{ODE}=90°$, hay EB và ED là các tiếp tuyến của đường tròn (O).

Tính chất 5. *EB và ED là các tiếp tuyến của đường tròn (O).*

Nhận xét. Có thể diễn đạt tính chất 5 như sau:

Nếu tứ giác nội tiếp $ABCD$ có các tiếp tuyến tại A và C đồng quy với đường thẳng BD thì các tiếp tuyến tại B và C cũng đồng quy với đường thẳng AC.

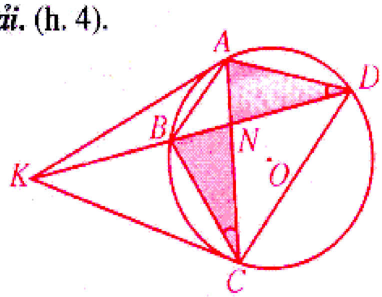
B. Khai thác các tính chất của tứ giác "đẹp"

Tứ giác "đẹp" còn nhiều tính chất lí thú thể hiện trong các bài toán sau.

✪**Bài toán 1.** *Xét tứ giác "đẹp" $ABCD$. Gọi N là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng*

$$\frac{NA}{NC}=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2=\left(\frac{AD}{CD}\right)^2.$$

Lời giải. (h. 4).



Hình 4

Theo tính chất 1 ta có

$AB.CD = AD.BC$, suy ra $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}=k$.

Dễ thấy

$\Delta AND \backsim \Delta BNC$ (g.g) nên $\frac{NA}{NB}=\frac{AD}{BC}$ (5)

$\Delta ANB \backsim \Delta DNC$ (g.g) nên $\frac{NB}{NC}=\frac{AB}{CD}$ (6)

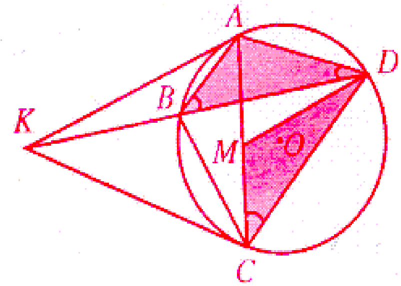
Nhân theo vế (5) với (6) có $\frac{NA}{NB}.\frac{NB}{NC}=\frac{AD}{BC}.\frac{AB}{CD}$

hay $\frac{NA}{NC}=\frac{AB}{BC}.\frac{AD}{CD}=k.k=k^2$.

Vậy $\frac{NA}{NC}=\left(\frac{AB}{BC}\right)^2=\left(\frac{AD}{CD}\right)^2$.

✪**Bài toán 2.** *Xét tứ giác "đẹp" $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AC. Chứng minh rằng $\widehat{ADB}=\widehat{MDC}$.*

***Lời giải.** Cách 1.* (h. 5).



Hình 5

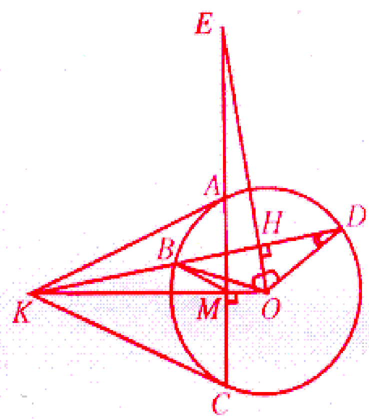
Ta có $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$).

Từ tính chất 2 ta có $AB.CD=\frac{1}{2}.AC.BD = MC.BD$.

Suy ra $\frac{AB}{BD}=\frac{MC}{CD}$. Từ đó $\Delta ABD \backsim \Delta MCD$ (c.g.c), suy ra $\widehat{ADB}=\widehat{MDC}$.

Cách 2.(h. 6).

Kẻ $OH \perp BD$, cắt CA ở E. Theo tính chất 5, BE là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{BCD}=\widehat{EBD}$ (7)



Hình 6

Theo các tính chất 3 và 4, các điểm E, B, M, D thuộc cùng một đường tròn nên

$$\widehat{EMD}=\widehat{EBD} \qquad (8)$$

Từ (7) và (8) suy ra $\widehat{BCD}=\widehat{EMD}$, dẫn đến $\widehat{BAD}=\widehat{CMD}$.

Xét hai tam giác BAD và CMD có

$\widehat{BAD}=\widehat{CMD}$ (chứng minh trên),

$\widehat{ABD}=\widehat{MCD}$ (góc nội tiếp).

Do đó $\widehat{ADB}=\widehat{MDC}$.

Nhận xét

a) Trong bài toán trên $\widehat{ADB}=\widehat{MDC}$, tức là góc tạo bởi DB và cạnh DA bằng góc tạo bởi trung tuyến DM và cạnh DC, ta gọi DB là đường đối trung của tam giác DAC. Bằng cách chứng minh tương tự như chứng minh bài toán 2, ta cũng có các kết quả sau:

Tính khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

TRẦN ĐỨC THIỆN
(GV THPT chuyên Hưng Yên)

Trong SGK Hình học lớp 11 ta đã biết các phương pháp tính khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Có hai bài toán cơ bản sau đây.

✪**Bài toán 1.** *Trong không gian cho điểm M không thuộc mặt phẳng (α), tính khoảng cách $d(M\,;(\alpha))$ từ M đến mặt phẳng (α).*

Phương pháp giải

Cách 1. + Dựng $MH \perp$ mp(α) tại H.
+ Tính độ dài đoạn thẳng MH.
Khi đó $d(M;(\alpha)) = MH$.

Cách 2. Tìm đường thẳng Δ qua M và Δ cắt mp(α) tại I, trên Δ chọn điểm A ($A \neq I$; $A \neq M$), lúc đó $\dfrac{d(M;(\alpha))}{d(A;(\alpha))} = \dfrac{IM}{IA}$, dẫn đến kết quả:

$$d(M\,;(\alpha)) = \frac{IM}{IA}.\,d(A\,;(\alpha)).$$

Chú ý. 1) Nếu trên mp (α) ta tìm được đường thẳng a thích hợp nào đó mà $a \perp$ mp(β), với mp(β) chứa M thì ta nên làm theo cách 1.
2) Nếu tìm được một đường thẳng thích hợp đi qua M cắt mp(α) tại I thì ta nên làm theo cách 2.

✪**Bài toán 2.** *Trong không gian cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Tính khoảng cách giữa a và b (kí hiệu $d(a;\,b)$ là khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b).*

Phương pháp giải

Cách 1. (Áp dụng cho trường hợp $a \perp b$).
+ Dựng mặt phẳng(α) chứa b và $(\alpha) \perp a$ tại A.
+ Dựng $AB \perp b$ tại B.
Khi đó $d(a\,;\,b) = AB$.

Cách 2. Dựng mp(α) chứa b và mp$(\alpha)//a$, khi đó $d(a\,;\,b) = d(a\,;(\alpha)) = d(M\,;(\alpha))$ với $M \in a$.

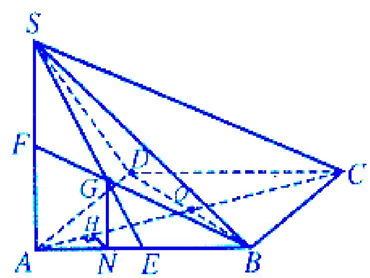
Cách 3. + Dựng mp(α) chứa a và mp$(\alpha)//b$.
+ Dựng mp(β) chứa b và mp$(\beta)//a$.
Khi đó $d(a\,;\,b) = d((\alpha)\,;(\beta))$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a; $SA \perp mp(ABCD)$; $SA = a\sqrt{3}$. Gọi G là trọng tâm tam giác SAB. Tính khoảng cách từ điểm G đến mp(SAC).*

Lời giải

Cách 1. Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Đường thẳng BG cắt mp(SAC) tại F (h. 1).



Hình 1

Khi đó

$$\frac{d(G;(SAC))}{d(B;(SAC))} = \frac{FG}{FB} = \frac{1}{3}, \text{ mà } \begin{cases} OB \perp SA \\ OB \perp AC \end{cases}$$

$\Rightarrow OB \perp$ mp(SAC) nên $d(B\,;(SAC)) = OB = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $d(G\,;(SAC)) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{6}$.

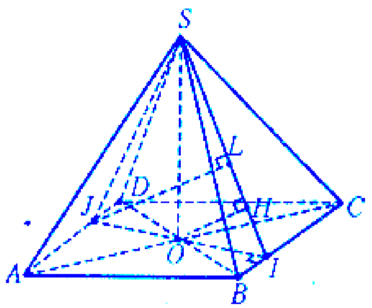
Cách 2. Dựng đường thẳng đi qua G và song song với SA, cắt AB tại N khi đó $d(G\,;(SAC)) = d(GN\,;(SAC)) = d(N\,;(SAC))$. Dựng $NH \perp AC$ tại H, ta có $NH \perp$ mp(SAC), suy ra $d(N\,;(SAC)) = NH$. Mà $\dfrac{NH}{OB} = \dfrac{AN}{AB} = \dfrac{FG}{FB} = \dfrac{1}{3}$ nên

$$NH = \frac{1}{3}.OB = \frac{a\sqrt{2}}{6}. \text{ Vậy } d(G\,;(SAC)) = \frac{a\sqrt{2}}{6}.$$

Bài 2. *Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm O, cạnh a,* $\widehat{BAD} = 60^\circ$, $SO \perp mp(ABCD)$ và $SO = \frac{3a}{4}$.

a) *Tính khoảng cách từ O và từ A đến mp(SBC).*

b) *Tính khoảng cách giữa AD và SB.*



Hình 2

Lời giải.

a) Dựng $OI \perp BC$ tại I (h. 2).

Nhận thấy $BC \perp mp(SOI)$. Dựng $OH \perp SI$ tại H, lúc đó do $\begin{cases} OH \perp SI \\ OH \perp BC \end{cases}$ nên $OH \perp mp(SBC)$. Vậy $d(O\,;(SBC)) = OH$. Từ giả thiết, ta thấy $OI = \frac{OC}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Kéo dài OI cắt AD tại J, lúc đó $IJ \perp AD$ và $IJ = 2OI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ta thấy ΔISJ đều, dựng $JL \perp SI$ tại L thì $JL \perp mp(SBC)$ và $JL = SO = \frac{3a}{4}$.

Vì $AD//mp(SBC)$ nên $d(A\,;(ABC)) = d(J;(ABC))$ $= JL = \frac{3a}{4}$. Lại có $OH = \frac{1}{2}JL = \frac{3a}{8}$, suy ra $d(O\,;(SBC)) = \frac{3a}{8}$ và $d(A\,;(SBC)) = \frac{3a}{4}$.

b) Do $AD//mp(SBC)$ suy ra

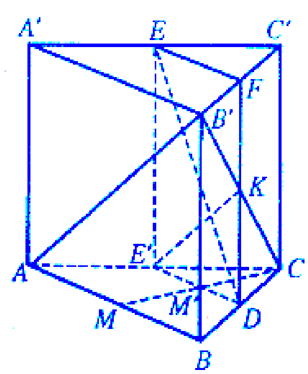
$d(AD\,;SB) = d(AD\,;(SBC)) = JL = \frac{3a}{4}$.

Bài 3. *Cho lăng trụ ABC.A'B'C' có các mặt bên đều là hình vuông cạnh a. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, A'C', C'B'. Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng sau:*

a) *DE và AB';*

b) *A'B và B'C'.*

Lời giải. a) (h.3) Ta thấy DF cắt $B'C$ tại K là trung điểm của mỗi đường. Gọi E' là trung điểm AC thì $E'K//AB'$, mà $B'C$ cắt mp($DFEE'$) tại K và $AB'//$mp($DFEE'$), suy ra $d(AB'\,;DE) = d(AB'\,;DFEE')$ $= d(B'\,;(DFEE')) = d(C\,;(DFEE'))$.



Hình 3

Lấy M' là trung điểm DE' và CM' cắt AB tại M. Ta có $d(C\,;(DFEE')) = CM' = \frac{1}{2}CM = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $d(AB'\,;DE) = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

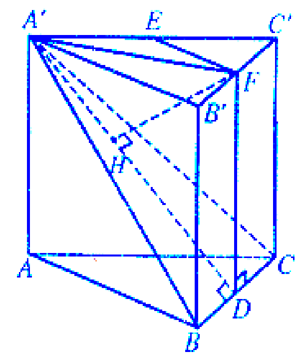
b) (h. 4).

Vì $B'C'//$mp($BA'C$) và $A'B$ thuộc mp($BA'C$) nên

$d(A'B\,;B'C')$

$= d(B'C';(BA'C))$

$= d(F;(BA'D))$.



Hình 4

Dựng $FH \perp A'D$ tại H thì FH vuông góc với mặt phẳng $(A'BC)$, do đó $d(F\,;(BA'D)) = FH$.

Mà $\frac{1}{FH^2} = \frac{1}{A'F^2} + \frac{1}{FD^2} = \frac{7}{3a^2}$,

nên $FH^2 = \frac{3a^2}{7}$, suy ra $FH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Vậy $d(A'B\,;B'C') = \frac{a\sqrt{21}}{7}$.

CÁC BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ và $AA' = 1$; đáy ABC là tam giác vuông tại A có $BC = 2$; $AB = \sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$.

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$.

Bài 2. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a; I là trung điểm cạnh AB. Dựng $SI \perp mp(ABCD)$ và $SI = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD, SB. Tính khoảng cách giữa các cặp đường thẳng NP và AC; MN và AP.

Bài 3. Cho hai tia Ax và By chéo nhau, góc giữa Ax và By bằng 60° và $AB = a$ là đoạn vuông góc chung của chúng. Trên By lấy điểm C sao cho $BC = a$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của C trên Ax.

a) Tính khoảng cách từ C đến mp(ABD) ;

b) Tính khoảng cách giữa AC và BD.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O, $SO \perp mp(ABCD)$; $AC = 4$; $BD = 2$; $SO = \sqrt{3}$ ..

Gọi M là trung điểm của SC. Tính:

a) Tính khoảng cách từ A đến mp(SBC);

b) Tính khoảng cách giữa SA và BM.

Cùng lượng giác
HÀNH HƯƠNG VỀ CỘI NGUỒN
"Thánh địa Hình học phẳng Euclide"

LÊ QUỐC HÂN
(GV ĐH Vinh, Nghệ An)

Lượng giác có nguồn gốc từ Hình học, điều này ai cũng biết. Nhưng càng học lên, đặc biệt là khi thiết lập được các công thức liên hệ giữa các hàm số lượng giác, người học cảm thấy Lượng giác như một bộ phận của Đại số (và Giải tích). Các dạng toán cơ bản của Lượng giác hoàn toàn mất đi hình ảnh đặc trưng của Hình học phẳng, vốn là cội nguồn của chúng. Hơn nữa, chúng ta dường như chỉ thấy vai trò quan trọng của việc sử dụng công cụ lượng giác để giải các bài toán hình học, mà ít thấy vai trò của hình học trong việc giải các bài toán lượng giác. Dưới đây, chúng ta với hành trang là các bài toán lượng giác sẽ trở về "Thánh địa Hình học phẳng Euclide". Một cuộc trở về nguồn khá thú vị, vì các bạn sẽ thấy một loạt bài toán lượng giác không đơn giản được giải bằng công cụ chính là các kiến thức hình học phẳng với một kiến thức lượng giác duy nhất: *Định nghĩa hàm số lượng giác của các góc nhọn.*

1. Tính giá trị hàm số lượng giác của một số góc gần đặc biệt

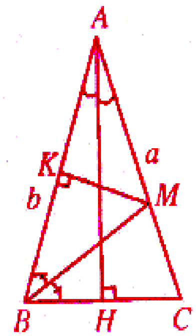
Khi mới tiếp xúc với môn Lượng giác, các bạn đã biết cách tính hàm số lượng giác của các góc nhọn đặc biệt như 30°, 45°, 60°, ... Với những góc có mối liên quan với các góc đó (chẳng hạn: $15° = 45° - 30°$; $18° = 90° : 5$; ...), ta tạm gọi là góc *gần đặc biệt*.

✪**Bài toán 1.** a) *Tính* sin 18°.

b) *Chứng minh đẳng thức* $\cos 36°.\cos 72° = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải. a) *Nhận xét.* $18° = \dfrac{36°}{2}$ và $36° = \dfrac{180°}{5}$.

Dựng tam giác ABC có $AB = AC = b$ và $\widehat{BAC} = 36°$. Khi đó $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 72°$. Dựng đường phân giác BM của tam giác ABC. Khi đó ΔBCM cân tại B (do $\widehat{BMC} = \widehat{ABM} + \widehat{BAM}$ $= 36° + 36° = 72° = \widehat{BCA}$, từ đó $BM = BC = a$ (h. 1).



Hình 1

Hơn nữa ΔABM cân tại M, vì có $\widehat{ABM} = \widehat{BAM} = 36°$ nên $AM = BM = a$.

Vì BM là phân giác trong của ΔABC nên

$\dfrac{AM}{MC} = \dfrac{BA}{BC}$ hay $\dfrac{a}{b-a} = \dfrac{b}{a}$,

suy ra $a^2 + ab - b^2 = 0$, từ đó $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Kẻ $AH \perp BC$, khi đó $BH = HC = \dfrac{a}{2}$ và $\widehat{BAH}$ $= \widehat{HAC} = 18°$ nên $\sin 18° = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{a}{2b} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

b) Kẻ $MK \perp AB$, khi đó $AK = KB = \dfrac{b}{2}$ nên

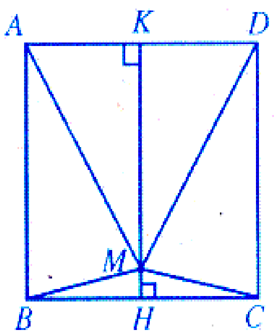
$\cos 36° = \cos \widehat{KAM} = \dfrac{MK}{AM} = \dfrac{b}{2a}$.

Mặt khác $\cos 72° = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{a}{2b}$

nên $\cos 36°.\cos 72° = \dfrac{b}{2a}.\dfrac{a}{2b} = \dfrac{1}{4}$.

Chú ý rằng nếu chỉ sử dụng kiến thức lượng giác thì lời giải của bài toán trên cũng không đơn giản chút nào.

✪Bài toán 2. *Tính* $\tan 15°$.



Hình 2

Lời giải. Ta sử dụng bài toán quen thuộc sau đây: *"Trong hình vuông ABCD cạnh bằng a lấy điểm M sao cho* $\widehat{MBC} = \widehat{MCB} = 15°$. *Khi đó tam giác ADM là tam giác đều".*

Gọi H và K thứ tự là trung điểm AD và BC (h. 2). Khi đó HK đi qua M, $HK = AB = a$ và $MH \perp BC$ nên

$$\tan 15° = \tan \widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} \qquad (1)$$

Vì ΔAMD là tam giác đều cạnh a và MK là đường cao nên $MK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Do đó

$$MH = KH - MK = a - \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a(2-\sqrt{3})}{2}.$$

Ta lại có $BH = HC = \dfrac{a}{2}$ nên thay vào (1) ta có

$$\tan 15° = 2 - \sqrt{3}.$$

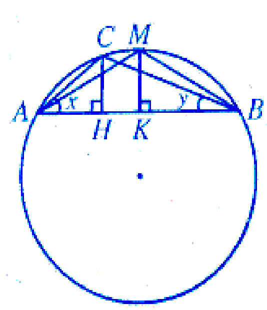
2. Chứng minh bất đẳng thức và đẳng thức lượng giác

✪Bài toán 3. *Cho x và y là hai góc nhọn thoả mãn điều kiện* $x + y = 30°$. *Chứng minh bất đẳng thức*

$$\cot x + \cot y \geq 2\left(2+\sqrt{3}\right).$$

Lời giải. Dựng tam giác ABC có $\widehat{CAB} = x$, $\widehat{CBA} = y$ và $AB = a$ tuỳ ý.

Gọi M là điểm chính giữa của cung $\overset{\frown}{ACB}$. Khi đó $\overset{\frown}{ACB} = 150°$ (vì $x + y = 30°$) và $\overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{ACB} = 150°$, suy ra $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 15°$ (h. 3).



Hình 3

Gọi H và K thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ C và M xuống AB. Khi đó

$CH \leq MK = AK.\tan 15° = \dfrac{a}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$ (xem kết quả bài toán 2).

Lại có $AH = CH.\cot x$, $HB = CH.\cot y$ nên

$AH + HB = CH.\left(\cot x + \cot y\right)$

$\leq MK(\cot x + \cot y)$

$\Rightarrow a \leq \dfrac{a\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}(\cot x + \cot y)$. Suy ra

$\cot x + \cot y \geq 2(2+\sqrt{3})$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 15°$.

Chú ý 1) Từ bài toán 3 có thể suy ra kết quả như sau:

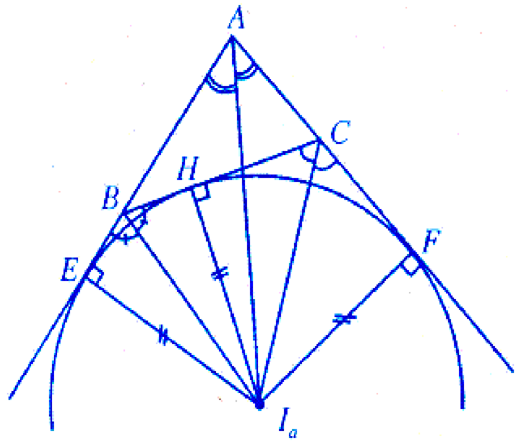
Nếu x và y là hai góc nhọn thay đổi nhưng luôn thoả mãn điều kiện $x + y = 30°$ thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\cot x + \cot y$ bằng $2\left(2+\sqrt{3}\right)$ khi $x = y = 15°$.

2) *Tổng quát.* Nếu x, y là hai góc nhọn thay đổi nhưng luôn luôn thoả mãn điều kiện $x + y = \alpha$, trong đó α là góc nhọn cho trước thì $\cot x + \cot y$ đạt giá trị nhỏ nhất là $2\cot\dfrac{\alpha}{2}$ khi $x = y = \dfrac{\alpha}{2}$.

3. Chứng minh một số hệ thức trong tam giác

Trước hết, ta đưa vào một khái niệm mới so với sách giáo khoa toán THCS hiện hành.

Cho tam giác ABC. Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của tam giác và hai cạnh kia kéo dài được gọi là đường tròn bàng tiếp của tam giác. Như vậy, một tam giác ABC có ba đường tròn bàng tiếp ứng với ba góc A, B, C của tam giác đó. Xét đường tròn bàng tiếp góc A. Tâm I_a của đường tròn này là giao điểm của đường phân giác trong của góc BAC và hai đường phân giác ngoài của các góc ABC và ACB của tam giác ABC. Gọi H, E, F theo thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ I_a xuống BC, AB, AC. Khi đó $I_aH = I_aE = I_aF = r_a$ là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A (h. 4).



Hình 4

Đặt $AB = c$, $CA = b$, $BC = a$ và $2p = a + b + c$.

Ta có $AE + AF = AB + BE + AC + CF$

$= BC + AC + AB = a + b + c$.

Do đó $AE = AF = p$.

Trong tam giác vuông AEI_a có

$\tan\frac{A}{2} = \frac{I_aE}{AE} = \frac{r_a}{p}$ nên $r_a = p\tan\frac{A}{2}$.

Tương tự có $r_b = p\tan\frac{B}{2}$, $r_c = p\tan\frac{C}{2}$.

Gọi S là diện tích tam giác ABC. Theo công thức Heron có $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Mặt khác $S = S_{\Delta AI_aE} + S_{\Delta AI_aF} - S_{\Delta BI_aC}$ nên

$2S = b.r_a + c.r_a - a.r_a = (b + c - a).r_a$

$=(a + b + c - 2a).r_a = (2p - 2a).r_a$.

Vậy $S = (p - a)r_a$, hay $r_a = \frac{S}{p-a}$.

Tương tự có $r_b = \frac{S}{p-b}$, $r_c = \frac{S}{p-c}$,

từ đó $r_a.r_b = \frac{S^2}{(p-a)(p-b)} = p(p-c)$.

Tương tự

$r_b.r_c = p(p-a)$; $r_c.r_a = p(p-b)$.

Do đó

$r_a.r_b + r_b.r_c + r_c.r_a = p((p-a) + (p-b) + (p-c))$.

$= p(3p - (a + b + c)) = p^2$ (1)

Lại có

$r_a.r_b + r_b.r_c + r_c.r_a$

$= p.\tan\frac{A}{2}.p.\tan\frac{B}{2} + p.\tan\frac{B}{2}.p.\tan\frac{C}{2} + p.\tan\frac{C}{2}.p.\tan\frac{A}{2}$

$= p^2\left(\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) ta đã giải được bài toán sau.

✪**Bài toán 4.** *Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có hệ thức*

$$\tan\frac{A}{2}.\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}.\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}.\tan\frac{A}{2} = 1.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

1. a) Tính $\sin 15°$ và $\cos 15°$.

b) Chứng minh rằng $\tan 36°.\tan 72° = \sqrt{5}$.

2. Cho α và β là hai góc nhọn thoả mãn điều kiện $\alpha + \beta = 45°$.

a) Chứng minh hệ thức

$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\alpha.\tan\beta = 1$.

b) Chứng minh bất đẳng thức

$\tan\alpha + \tan\beta \geq \sqrt{2} - 1$.

3. Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có các hệ thức:

a) $\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}$

$= \cot\frac{A}{2} . \cot\frac{B}{2} . \cot\frac{C}{2}$.

b) $\cos^2A + \cos^2B + \cos^2C + 2\cos A.\cos B.\cos C = 1$.