**Đề 64**

**ĐỀ HSG TOÁN 9 LAI CHÂU 2023-2024**

**Câu 1.** (4,0 điểm)

 Cho biểu thức: $P=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}-\frac{\sqrt{x}+3}{2-\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}\right):\left(2-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$

1. Rút gọn biểu thức $P.$
2. Tìm $x$ để $\frac{1}{P}\leq -\frac{5}{2}$ .

**Câu 2.** (4,0 điểm)

1. Tìm số chính phương có bốn chữ số, chữ số hàng đơn vị khác 0, biết rằng số tạo bởi hai chữ số đầu (không đổi thứ tự) và tạo bởi hai chữ số cuối (không đổi thứ tự) đều là các số chính phương.
2. Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{x^{2}+7x+10}\right)=3$.

**Câu 3.** (5,0 điểm)

1. Tìm $m$ sao cho phương trình $x^{2}-(2m+1)x+m^{2}+1=0$ có hai nghiệm $x\_{1}, x\_{2}$ với $x\_{1}=2x\_{2}$
2. Giải hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{c}x^{2}-xy+y^{2}=7\\x^{4}+x^{2}y^{2}+y^{4}=21\end{array}\right.$

**Câu 4.** (5,0 điểm)

Cho đường tròn tâm $O$ bán kính $R, AB$ là đường kính cố định và $MN$ là đường kính thay đổi sao cho $MN$ không vuông góc với $AB$ và $M\ne A, M\ne B.$ Các đường thẳng $AM, AN$ cắt tiếp tuyến tại $B$ lần lượt tại $C$ và $D$. Gọi I là trung điểm của $CD, H $là giao điểm của $AI $và $MN$.

1. Chứng minh tứ giác $CMND$ nội tiếp.
2. Chứng minh rằng$ AI⊥MN$.
3. Gọi $J$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $∆HBI$. Chứng minh rằng 𝐽 luôn thuộc một đường thẳng cố định.

**Câu 5.** (2,0 điểm)

 Cho $x,y,z$ là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

 $P=\left(\frac{x}{y+z}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{y}{z+x}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{z}{x+y}+\frac{1}{2}\right)$

**---Hết---**

**ĐÁP ÁN**

**Câu 1. (4,0 điểm)**

1. ĐKXĐ: $x\geq 0;x\ne 4;x\ne 9$

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}+\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}-\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-3}\right):\left(\frac{2\sqrt{x}+2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}+2+\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)-(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}\right): \left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}+2+x-9+4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}\right).\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}\right)$$

$$P=\left(\frac{\sqrt{x}-3}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}\right).\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}\right)$$

$$P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-4}$$

1. $Với x\geq 0;x\ne 4;x\ne 9, ta có$

$$\frac{1}{P}\leq -\frac{5}{2}⇔\frac{x-4}{\sqrt{x}+1}\leq -\frac{5}{2}⇔\frac{x-4}{\sqrt{x}+1}+\frac{5}{2}\leq 0$$

$$⇔\frac{2x-8+5\sqrt{x}+5}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\leq 0⇔\frac{2x+5\sqrt{x}-3}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\leq 0$$

$$⇔\frac{\left(2\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}{2\left(\sqrt{x}+1\right)}\leq 0$$

$$⇔\left\{\begin{array}{c}x\geq 0\\2\sqrt{x}-1\leq 0\end{array}vì \sqrt{x}\right.+3\geq 0 và 2\sqrt{x}-1\geq 0$$

$$⇔\left\{\begin{array}{c}x\geq 0\\2\sqrt{x}\leq 1\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}x\geq 0\\4x\leq 1\end{array}\right.⇔0\leq x\leq \frac{1}{4} (thỏa mãn điều kiện)$$

**Câu 2. (4,0 điểm)**

1. Gọi số phải tìm là $\overbar{abcd}=n^{2}$

Đặt $\overbar{ab}=x^{2} \left(4\leq x\leq 9\right). Đặt \overbar{cd}=y^{2}, do d\ne 0 nên 1\leq y\leq 9$

Ta có $n^{2}=100. \overbar{ab}+ \overbar{cd}=100x^{2}+y^{2}\geq 100x^{2}⇒n>10x ⇒n\geq 10x+1$

Do $x\geq 4 nên n\geq 41.$ (1)

Do $n\geq 10x+1 nên y^{2}=n^{2}-100x^{2}\geq \left(10x+1\right)^{2}-100x^{2}=20x+1$

Kết hợp với $y\leq 9 ta có:20x+1\leq 81⇒x\leq 4$

Ta lại có $x\geq 4 nên x=4.$

Do $y\leq 9 nên n^{2}= 100x^{2}+y^{2}\leq 100.4^{2}+9^{2}=1681=41^{2}⇒n\leq 41 (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $n$ = 41. Khi đó $n^{2}= $1681

1. Giải phương trình: $\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2}\right)\left(1+\sqrt{x^{2}+7x+10}\right)=3.$

Điều kiện: $x\geq -2$

$$Đặt \sqrt{x+5}=a; \sqrt{x+2}=b \left(a,b\geq 0\right), ta có:$$

$$a^{2}-b^{2}=x+5-\left(x+2\right)=3, \sqrt{x^{2}+7x+10}=\sqrt{\left(x+5\right)\left(x+2\right)}=a.b$$

1. $⇔\left(a-b\right)\left(1+ab\right)=a^{2}-b^{2}$

$$⇔\left(a-b\right)\left(1-a+ab-b\right)=0$$

$$⇔\left(a-b\right)\left(1-a)(1-b\right)=0$$

$$⇔\left[\begin{matrix}a-b=0\\1-a=0\\1-b=0\end{matrix}\right.⇔\left[\begin{matrix}a=b\\a=1\\b=1\end{matrix}\right.Do đó \left[\begin{matrix}\sqrt{x+2}=\sqrt{x+5}\\\sqrt{x+2}=1\\\sqrt{x+5}=1\end{matrix}\right.⇔\left[\begin{matrix}\sqrt{x+2}=\sqrt{x+5} (VN)\\x=-4 (L)\\x=-1 (TM)\end{matrix}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm x = −1.

**Câu 3. (5,0 điểm)**

1. Tìm m sao cho phương trình $x^{2}-\left(2m+1\right)x+m^{2}+1=0 có hai nghiệm x\_{1},x\_{2} với x\_{1}=2x\_{2}$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi

$$Δ\geq 0⇔\left(2m+1\right)^{2}-4\left(m^{2}+1\right)\geq 0⇔4m-3\geq 0⇔m\geq \frac{3}{4}$$

Áp dụng hệ thức Viet ta có: $\left\{\begin{array}{c} x\_{1}+x\_{2}=2m+1\\x\_{1}.x\_{2}=m^{2}+1\end{array}\right.$

Do $x\_{1}=2x\_{2} $nên $\left\{\begin{array}{c}3x\_{2}=2m+1 (1)\\2x\_{2}^{2}=m^{2}+1 (2)\end{array}\right.$

Từ (1) ta có: $x\_{2}=\frac{2m+1}{3} thay vào \left(2\right) ta được:2.\left(\frac{2m+1}{3}\right)^{2}=m^{2}+1$

$⇔2.\left(2m+1\right)^{2}=9m^{2}+9⇔8m^{2}+8m+2=9m^{2}+9⇔m^{2}+8m+7=0⇔\left[\begin{matrix}m=1 \\m=7 \end{matrix}(thỏa mãn)\right.$

$$Vậy giá trị m sao cho phương trình x^{2}-\left(2m+1\right)x+m^{2}+1=0 có hai nghiệm x\_{1},x\_{2} với $$

$x\_{1}=2x\_{2} là m=1;m=7$.

1. $\left\{\begin{array}{c}x^{2}-xy+y^{2}=7\\x^{4}+x^{2}y^{2}+y^{4}=21\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}x^{2}+y^{2}-xy=7\\ \left(x^{2}+y^{2}\right)^{2}-x^{2}y^{2}=21\end{array}\right.$

Đặt $x^{2}+y^{2}=a, xy=b HPT trên trở thành:$

$$\left\{\begin{array}{c}a-b=7\\a^{2}-b^{2}=21\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}a-b=7\\\left(a-b\right)\left(a+b\right)=21\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}a-b=7\\a+b=3\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}a=5\\b=-2\end{array}\right.\right.\right. $$

$$\left\{\begin{array}{c}x^{2}+y^{2}=5\\xy=-2\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}x^{2}+y^{2}=5\\ 2xy=-4\end{array}\right.$$

Cộng theo từng vế hai phương trình của hệ ta được:

$$x^{2}+y^{2}+2xy=1 ⇔ \left(x+y\right)^{2}=1⇔ \left[\begin{matrix}x+y=1 \\x+y=-1 \end{matrix}\right.$$

\* Trường hợp 1:$\left\{\begin{array}{c}x+y=1\\xy=-2\end{array} x,y là nghiệm của phương trình:\right. t^{2}-t-2=0 ⇔ \left[\begin{matrix}t\_{1}=-1 \\t\_{2}=2 \end{matrix}\right.$

\* Trường hợp 1:$\left\{\begin{array}{c}x+y=-1\\xy=-2\end{array} x,y là nghiệm của phương trình:\right. t^{2}+t-2=0 ⇔ \left[\begin{matrix}t\_{1}=1 \\t\_{2}=-2 \end{matrix}\right.$

Vậy HPT có 4 nghiệm: $\left(x;y\right)\in \left\{\left(-1;2\right);\left(2;-1\right);\left(1;-2\right);(-2;1)\right\}$

**Câu 4. (5,0 điểm)**

****

1. Có ∆𝐴CD vuông tại A nên $\hat{ACD}$ +$\hat{ADC}=90°$

∆𝐴BC vuông tại B nên $\hat{ACD}$ +$\hat{BAC}=90°$

Nên $\hat{BAC}= \hat{ADC} hay \hat{OAM}= \hat{ADC} $

Vì ∆OAM cân tại O nên $\hat{OAM}=\hat{OMA}. Do đó \hat{ADC}=\hat{OMA}$

Mà $\hat{OMA}+ \hat{CMN}=180°$

Suy ra tứ giác CMND nội tiếp

1. Vì ∆𝐴DC vuông tại A, AI là đường trung tuyến nên ∆𝐴ID cân tại I

Nên $\hat{IAD}=\hat{IDA}. Lại có \hat{ANH}=\hat{C} $**(1)**$ (cùng bù với \hat{MND})$

Mà $\hat{IDA}+\hat{C}=90° nên \hat{IAD}+\hat{C}=90°$ **(2)**

Từ (1) và (2) suy ra $\hat{IDA}+\hat{ANH}=90°$

Suy ra tam giác AHN vuông tại H, hay AH ⊥ MN. Vậy AI ⊥ MN.

1. Ta có tứ giác OBIH nội tiếp đường tròn đường kính OI. Vì J là tâm đường tròn ngoại tiếp ∆𝐻BI nên 𝐽O = 𝐽I = 𝐽B = 𝐽C.

Suy ra J thuộc đường trung trực của BC

Do A, O, B cố định nên đường trung trực của OB cố định

Vậy 𝐽 luôn thuộc đường thẳng cố định là đường trung trực của OB.

**Câu 5. (2,0 điểm)**

$$Ta có:P=\frac{\left(2x+y+z\right)\left(2y+z+y\right)\left(2z+x+y\right)}{8\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)}$$

$Mà:2x+y+z=\left(x+y\right)+(x+z)\geq 2\sqrt{(x+y)(x+z)}$ (1)

$ 2y+x+z=\left(y+z\right)+(x+y)\geq 2\sqrt{(y+z)(x+y)}$ (2)

$ 2z +x+y=\left(x+z\right)+(y+z)\geq 2\sqrt{(x+z)(y+z)}$ (3)

Nhân từng vế của (1), (2), (3) ta được:

$$\left(2x+y+z\right)\left(2y+x+z\right)\left(2z +x+y\right)\geq 8\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(x+z\right)$$

Suy ra P ≥ 1 Dấu “=” xảy ra khi *x=y=z*

Vậy minP = 1$⇔x=y=z$