**CHUYÊN ĐỀ 8 : HÌNH THOI**

1. **TÓM TẮT LÝ THUYẾT**

* **Định nghĩa:** Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

Nhận xét: Hình thoi cũng là một hình bình hành.

* **Tính chất:**
* Hình thoi có tất cả các tính chất của hình bình hành.
* Trong hình thoi:

+ Hai đường chéo vuông góc với nhau.

+ Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc ở đỉnh của hình thoi

* **Dấu hiệu nhận biết:**
* Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
* Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
* Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc là hình thoi.
* Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc ở đỉnh là hình thoi.

1. **BÀI TẬP CƠ BẢN**

**Bài 1:** Cho hình thoi ABCD có .

1. Tính số đo .
2. Tính số đo .

**Bài 2:** Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AB. Chứng minh:

1. AE =ED=DF= FA
2. Tứ giác AEDF là hình thoi.

**Bài 3:** Cho tam giác đều ABC có D, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AC< AB. Chứng minh các tứ giác AEDF, BFED, CDFE là các hình thoi.

**Bài 4:** Cho tam giác ABC cân tại A. Trên nửa mặt phẳng không chứa A có bờ là đường thẳng chứa cạnh BC, vẽ tia Bx // AC và tia Cy// AB. Gọi D là giao điểm của hai tia Bx và Cy. Chứng minh:

1. Tứ giác ACDB là hình bình hành.
2. Tứ giác ACDB là hình thoi.

**Bài 5:** Cho tam giác ABC cân tại A có đường trung tuyến AD. Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho DE= DA. Chứng minh:

1. Tứ giác ACDB là hình bình hành.
2. Tứ giác ACDB là hình thoi.

**Bài 6:** Cho tam giác ABC cân tại B có đường cao BE. Trên tia đối của tia EB lấy điểm D sao cho ED =EB. Chứng minh:

1. Tứ giác ABCD là hình bình hành.
2. Tứ giác ABCD là hình thoi.

**Bài 7:** Cho tam giác ABC có đường phân giác trong AD. Trên AC lấy điểm E sao cho DE// AB, trên AB lấy điểm F sao cho DF // AC. Chứng minh:

1. Tứ giác AEDF là hình bình hành.
2. Tứ giác AEDF là hình thoi.

**Bài 8:** Cho tam giác ABC cân tại B. Đường thẳng qua C song song với AB cắt tia phân giác của ABC tại D. Chứng minh:

1. AB =CD.
2. Tứ giác ABCD là hình thoi.

**Bài 9:** Cho tứ giác ABCD có . Biết rằng tia AC là tia phân giác của  và tia CA là tia phân giác của . Chứng minh:

1. Các tam giác ABC và ADC là các tam giác cân.
2. AB =DA.
3. Tứ giác ABCD là hình thoi.

**Bài 10:** Cho tứ giác ABCD có AC =BD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC,CD, DA. Chứng minh:

1. MN = NP= PQ =QM.
2. Tứ giác MNPQ là hình thoi.

**Bài 11:** Cho tứ giác ABCD có AD =BC. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, CD, BD. Chứng minh:

1. MN =NP =PQ =QM
2. Tứ giác MNPQ là hình thoi.

**Bài 12:** Cho hình thang cân ABCD (AB //CD). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình thoi.

**Bài 13:** Cho hình thang cân ABCD ( AB // CD). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, CD, BD. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình thoi.

**Bài 14:** Cho hình bình hành ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Đường thẳng d1 qua O cắt cạnh AB và CD lần lượt tại M và P, đường thẳng d2 qua O cắt cạnh BC và DA lần lượt tại N và Q. Biết rằng d1 ⊥ d2. Chứng minh:

1. Tứ giác MNPQ là hình bình hành.
2. Tứ giác MNPQ là hình thoi.

**Bài 15:** Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh: tứ giác MNPQ là hình thoi.

**Bài 16:** Cho hình thoi ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Trên đoạn OA lấy điểm E, trên đoạn OC lấy điểm F sao cho AE = CF. Chứng minh tứ giác BEDF là hình thoi.

**Bài 17:** Cho hình thoi ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn OA, OB, OC, OD. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình thoi.

**Bài 18:** Cho hình thoi ABCD có hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O. Biết rằng AC =8cm, BD =6cm. Tính độ dài các đoạn thẳng OA, OB, AB.

**Bài 19:** Cho hình thoi ABCD có AC =12cm, BD =16cm.

1. Tính diện tích hình thoi ABCD.
2. Tính độ dài các cạnh của hình thoi ABCD.

**Bài 20:** Cho hình thoi ABCD có AB =15cm, BD =24cm.

1. Tính độ dài AC.
2. Tính diện tích hình thoi ABCD.

**Bài 21:** Cho hình thoi ABCD có AB =BD =10cm.

1. Tam giác ABD là tam giác gì? Vì sao?
2. Tính số đo các góc của hình thoi ABCD.
3. Tính độ dài AC.
4. Tính diện tích hình thoi ABCD.

**Bài 22:** Cho hình thoi ABCD có diện tích bằng 120cm2 và AC =10cm.

1. Tính độ dài BD.
2. Tính chu vi của hình thoi ABCD.

**Bài 23:** Cho hình thoi ABCD có diện tích bằng  và AC =10cm.

1. Tính độ dài BD và AB.
2. Tính số đo các góc của hình thoi ABCD.

**Bài 24:** Cho tam giác ABC cân tại A có đường trung tuyến AD. Từ D, kẻ đường thẳng DE song song với AB ( E ∈ AC) và kẻ DF song song với AC ( F ∈ AB). Chứng minh AEDF là hình thoi.

**Bài 25:** Cho hình bình hành ABCD có 2 đường cao AH =AK. Chứng minh ABCD là hình thoi.

**Bài 26:** Cho hình thang cân ABCD (AB// CD, AB < CD). Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh EFGH là hình thoi.

**Bài 27:** Cho tứ giác ABCD có AB =CD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của BC, AC, AD, BD. Chứng minh:

1. EH = GF
2. Tứ giác EFGH là hình thoi.

**Bài 28:** Cho tứ giác ABCD có AC =BD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh tứ giác EFGH là hình thoi.

**Bài 29:** Cho hình thang cân ABCD (AD //BC). Gọi E, F, G, H, R, S lần lượt là trung điểm của BC, AC, AD, BD, AB, DC. Chứng minh:

1. Tứ giác RFSH là hình thoi.
2. Tứ giác ERGS là hình thoi.

**Bài 30:** Cho góc xOy và tia phân giác Oz. Từ điểm M ∈ Oz kẻ MA // Oy và MB // Ox ( với A ∈ Ox và B ∈ Oy). Chứng minh tứ giác OAMB là hình thoi.

**Bài 31:** Cho hình bình hành ABCD có AD ⊥ AC. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD.

1. Chứng minh: MN ⊥ AC.
2. Tứ giác AMCN là hình gì?

**Bài 32:** Cho hình bình hành ABCD có AB =AC. Gọi M là trung điểm BC. Trên tia đối của tia MA lấy ME =MA. Chứng minh:

1. Tứ giác ABEC là hình thoi.
2. D, C, E thẳng hàng.
3. C là trung điểm DE.

**Bài 33:** Cho hình thoi ABCD có góc A = 600, kẻ BH ⊥ AD ( H ∈ AD), rồi kéo dài một đoạn HE =BH. Nối E với A, E với D. Chứng minh:

1. H là trung điểm AD.
2. ABDE là hình thoi.

**Bài 34:** Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi E là điểm đối xứng với A qua B; F là điểm đối xứng với C qua B. Chứng minh AFEC là hình thoi.

**Bài 35:** Cho hình thang ABCD (AB //CD) có AD =CD. Từ C kẻ đường thẳng song song với AD, cắt cạnh AB tại E. Chứng minh AECD là hình thoi.

**Bài 36:** Cho tam giác ABC có D là điểm di động trên BC ( D ≠ B, C). Từ D, vẽ các đường thẳng song song với AB, AC và lần lượt cắt AC, AB tại M và N.

1. Chứng minh AMDN là hình bình hành.
2. Tìm vị trí của D để tứ giác AMDN là hình thoi.

**Bài 37:** Cho hình thang ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC< CD, DA.

1. Chứng minh: MNPQ là hình bình hành.
2. Hình thang ABCD có thêm tính chất gì thì MNPQ là hình thoi.

**Bài 38:** Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự trên các cạnh AB, AC sao cho BD =CE. Gọi M, N, I, K theo thứ tự là trung điểm của BE, CD, DE, BC. Chứng minh:

1. 
2. .

**Bài 39:** Cho hình thoi ABCD. Lấy 2 điểm E và F thuộc AC với AE = CF. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

1. Chứng minh: OE =OF.
2. Tứ giác BEDF là hình gì? Vì sao?

**Bài 40:** Cho hình thoi ABCD có AB =BD.

1. Tam giác ABD là tam giác gì? Vì sao?
2. Tính các góc của hình thoi ABCD.

**Bài 41:** Cho hình thoi ABCD. Kẻ hai đường cao AH và AK. Chứng minh AH = AK.

**Bài 42:** Cho tam giác ABC cân tại A. Kẻ Bx // AC, Cy //AB; sao cho 2 tia Bx và Cy cắt nhau tại D.

1. Chứng minh tứ giác ABCD là hình thoi.
2. Các đường trung tuyến BM và CN của tam giác ABC cắt nhau ở G, AG cắt BC tại O. Chứng minh: AO là đường cao của tam giác ABC.
3. Chứng minh: A, O, D thẳng hàng.

**Bài 43:** Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, AC, AB. Biết EF =3cm; AB =5cm.

1. Tính độ dài BC.
2. Tính độ dài AD.
3. Tứ giác AEDF là hình gì? Vì sao?

**Bài 44:** Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh:

1. 
2. MQ = MN, rồi suy ra MNPQ là hình thoi.

**Bài 45:** Cho hình thoi ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Chứng minh:

1. MN ⊥ MQ.
2. Tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

**Bài 46:** Hình bình hành ABCD có góc . Gọi M, N là trung điểm của AB, CD. Chứng minh:

1. AM = CN
2. AN = CN
3. Tứ giác AMCN là hình thoi.

**Bài 47:** Cho tam giác đều ABC. Kéo dài trung tuyến BM của tam giác ABC về phía M lấy điểm D sao cho M là trung điểm của BD. Kéo dài trung tuyến CN của tam giác ABC về phía N, lấy điểm E sao cho N là trung điểm của CE. Chứng minh:

1. Các tứ giác ABCD và ACBE là hình thoi
2. Ba điểm D, A, E thẳng hàng
3. Tứ giác BCDE là hình thang cân.
4. **BÀI TẬP LUYỆN TẬP**

**Bài 1:** Cho hình thoi ABCD có AB =BD.

1. Tam giác ABD là tam giác gì? Vì sao?
2. Tính các góc của hình thoi ABCD.

**Bài 2:** Hình thoi ABCD có . Kẻ 2 đường cao BE và BF ( E ∈ AD; F ∈DC).

1. Chứng minh BE = BF.
2. Tính số đo ?
3. Tính số đo . Tam giác BEF là tam giác đặc biệt gì? Vì sao?

**Bài 3:** Cho hình thoi ABCD có góc , kẻ BH ⊥ AD ( H ∈AD), rồi kéo dài một đoạn HE =BH. Nối E với A, E với D. Chứng minh:

1. H là trung điểm AD.
2. Tứ giác ABDE là hình thoi.
3. D là trung điểm CE.
4. AC = BE.

**Bài 4:** Cho hình thoi ABCD có AB =BD.

1. Chứng minh tam giác ABD đều.
2. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh: 
3. Biết chu vi của hình thoi ABCD là 8cm. Tính độ dài đường chéo BD; AC.
4. Tính diện tích hình thoi ABCD.

**Bài 5:** Cho hình thoi ABCD có chu vi là 8cm và .

1. Tính độ dài BD
2. Tính số đo các góc của hình thoi ABCD.

**Bài 6:** Cho hình thoi ABCD có chu vi là 8cm và AB =BD. Tính độ dài đường cao của hình thoi.

**Bài 7:** Cho hình thoi ABCD có chu vi là 24cm. Đường cao AH =3cm. Tính các góc của hình thoi.

**Bài 8:** Cho hình thang ABCD ( AB// CD) có AD = CD và AC ⊥ BC. Từ C kẻ đường thẳng song song với AD và cắt AB tại E.

1. Chứng minh tứ giác AECD là hình thoi.
2. Chứng minh tứ giác BEDC là hình bình hành.
3. Chứng minh tam giác CEB cân.
4. Giả sử tam giác CEB đều. Chứng minh tứ giác ABCD là hình thang cân.

**Bài 9:** Cho hình thang ABCD (AB //CD) có AD =CD và AC ⊥ BC. Từ C kẻ đường thẳng song song với AD và cắt AB tại E.

1. Chứng minh tam giác CEB cân.
2. Hình thang ABCD sẽ như thế nào để tam giác CEB đều.

**Bài 10:** Cho hình thoi ABCD có góc A bằng 600. Một góc xBy thay đổi sao cho tia Bx cắt cạnh AD tại M, tia By cắt cạnh CD tại N và góc xBy= 600. Chứng minh:

1. AB = BD.
2. .
3. Tổng độ dài ( DM +DN) không đổi.

**Bài 11:** Cho hình thoi ABCD có AB =BD. Gọi M và N lần lượt trên AB, BC sao cho AM = BN.

1. Chứng minh .
2. Chứng minh tam giác MDN là tam giác đều.

**Bài 12:** Cho hình thoi ABCD có AB =BD. Gọi M, N lần lượt trên các cạnh AB, BC sao cho AM +NC =AD.

1. Chứng minh AM =BN
2. Chứng minh 
3. Tính số đo các góc của tam giác DMN.

**Bài 13:** Cho hình thoi ABCD có góc A =600. Trên cạnh AD lấy điểm M, trên cạnh DC lấy điểm N sao cho AM =DN.

1. Chứng minh: 
2. Chứng minh 
3. Chứng minh: 
4. Tam giác BMN là tam giác gì? Vì sao?

**Bài 14:** Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của BC, AC, AB. Biết EF =3cm; AB =5cm.

1. Tính độ dài BC.
2. Tính độ dài AD
3. Tứ giác AEDF là hình gì? Vì sao?
4. Tính 

**Bài 15:** Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

1. Chứng minh 
2. Chứng minh MQ =MN, rồi suy ra tứ giác MNPQ là hình thoi.
3. Cho MP =3cm; NQ =5cm. Tính ?

**Bài 16:** Cho tứ giác ABCD có AC =BD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

1. Chứng minh 
2. So sánh EF,GF, EH và GH.
3. Chứng minh: .

**Bài 17:** Cho hình thoi ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

1. Chứng minh MN và PQ cùng bằng .
2. Chứng minh .
3. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.
4. Chứng minh tứ giác MBPD là hình bình hành, suy ra M, O, P thẳng hàng ( O là tâm hình thoi ABCD)
5. Biết . Tính .

**Bài 18:** Cho hình thang cân ABCD (AB //CD, AB < CD). Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

1. Chứng minh EF = GH; EH =GF.
2. Chứng minh tứ giác EFGH là hình thoi.
3. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BD, AC. Chứng minh 
4. Tứ giác ENGM là hình gì? Vì sao?

**Bài 19:** Cho hình thang cân ABCD ( AB //CD) có E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BD, CD, CA.

1. Chứng minh 
2. Chứng minh 
3. Chứng minh EG là tia phân giác của góc FEH.
4. Chứng minh .
5. Cho . Tính các góc của tứ giác EFGH?

**Bài 20:** Cho tứ giác ABCD có AB =CD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của BC, AC, AD, BD. Chứng minh:

1. EH = GF
2. Tứ giác EFGH là hình thoi.

**Bài 21:** Cho hình thang cân ABCD ( AD // BC). Gọi E, F, G, H, R, S lần lượt là trung điểm của BC, AC, AD, BD, AB, DC. Chứng minh:

1. Tứ giác EFGH là hình thoi.
2. Tứ giác ERGS là hình thoi.

**Bài 22:** Cho hình chữ nhật ABCD có M, N là trung điểm của AB và CD.

1. Chứng minh các tứ giác AMND và MBCN là hình chữ nhật.
2. Gọi P là giao điểm của AN và DM; Q là giao điểm của BN và CM. Chứng minh PQ //AB
3. Tứ giác MPNQ là hình gì?

**Bài 23:** Cho góc xOy và tia phân giác Oz. Từ điểm M ∈Oz kẻ MA // Oy và MB // Ox ( với A ∈ Ox và B ∈Oy).

1. Chứng minh tứ giác OAMB là hình thoi.
2. Từ điểm M kẻ đường thẳng vuông góc với Oz, cắt Ox tại C và cắt Oy tại D. Chứng minh AB //CD.
3. Chứng minh 

**Bài 24:** Cho tam giác ABC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự trên các cạnh AB, AC sao cho BD = CE. Gọi M, N, I, K theo thứ tự là trung điểm của BE, CD, DE, BC.

1. Chứng minh 
2. Chứng minh 
3. Biết IK =10cm, MN =2cm. Tính diện tích tứ giác MINK.

**Bài 25:** Cho hình thang ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

1. Chứng minh MNPQ là hình bình hành.
2. Hình thang ABCD có thêm tính chất gì thì MNPQ là hình thoi?

**Bài 26:** Hình bình hành ABCD có góc . Gọi M, N là trung điểm của AB, CD. Chứng minh:

1. AM =CN
2. AN =CN
3. Tứ giác AMCN là hình thoi.
4. Biết MN =6cm, AC =8cm. Tính độ dài đoạn AN

**Bài 27:** Cho hình thoi ABCD có AH là đường cao. M là trung điểm AD. Biết AD =4cm; AH =2cm.

1. Chứng minh HM =AM
2. Chứng minh tam giác AHM đều
3. Tính số đo góc D
4. Tính các góc hình thoi ABCD

**Bài 28:** Cho hình thoi ABCD (góc A tù). Từ A hạ các đường vuông góc AI, AK xuống các cạnh BC, CD. Giả sử ; O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh:

1. Tam giác IOK đều.
2. 
3. 
4. 

**Bài 29:** Cho hình thoi ABCD. Kẻ 2 đường cao AH và AK. Chứng minh: AH =AK.

**Bài 30:** Cho hình thoi ABCD có O là giao điểm của 2 đường chéo. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ O đến AB, BC, CD, DA.

1. Chứng minh E, O, G thẳng hàng và H, O, F thẳng hàng.
2. Chứng minh OE =OF =OH =OG.
3. Tứ giác EFGH là hình gì? Vì sao?

**Bài 31:** Cho hình thoi ABCD (góc A tù). Từ A hạ các đường vuông góc AI, AK xuống các cạnh BC, CD. Giả sử ; O là giao điểm của AC và BD.

1. Chứng minh: .
2. Chứng minh: tứ giác BOKI là hình bình hành.
3. Chứng minh: K là trung điểm CD.
4. Tính các góc của hình thoi ABCD.

**Bài 32:** Cho hình thoi ABCD (góc B tù). Từ B hạ BM, BN lần lượt vuông góc với AD và CD. Từ D hạ DP và DQ lần lượt vuông góc với AB và BC. Gọi H là giao điểm của MB và PD; K là giao điểm của BN và DQ, O là giao điểm của AC và BD. Chứng minh:

1. H là trực tâm tam giác ABD.
2. A, H, K, C thẳng hàng.
3. 
4. 
5. Tứ giác BHDK là hình thoi.

**Bài 33:** Cho hình bình hành ABCD, các đường chéo cắt nhau ở O. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là giao điểm của các đường phân giác của các . Chứng minh:

1. H, O, F thẳng hàng và E, O, G thẳng hàng.
2. 
3. OE =OG
4. Tứ giác EFGH là hình thoi.

**Bài 34:** Cho hình thoi ABCD (góc A nhọn) có AB =a ; kẻ  ( H∈AB).

1. Chứng minh 
2. Chứng minh 
3. Khi  có giá trị lớn nhất thì tứ giác ABCD là hình gì? Vì sao?