CHỦ ĐỀ 6. HÌNH THOI VÀ HÌNH VUÔNG

A. LÝ THUYẾT

**1. Định nghĩa**

• Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau (h.6.1).

• Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau (h.6.2).

Description: 6 Description: 6

*Hình 6.1 Hình 6.2*

**2. Tính chất**

\* Trong hình thoi:

• Hai đường chéo của hình thoi vuông góc với nhau;

• Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi;

\* Hình vuông có đủ các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

**3. *Dấu hiệu nhận biết***

\* *Nhận biết hình thoi*:

• Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi;

• Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi;

• Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi;

• Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

\* *Nhận biết hình vuông*:

• Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông;

• Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc là hình vuông;

• Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông;

• Hình thoi có một góc vuông là hình vuông;

• Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

**B. BÀI TẬP VẬN DỤNG.**

**I. MỘT SỐ VÍ DỤ.**

***Ví dụ 1.*** Cho hình thoi ABCD, độ dài mỗi cạnh là 13cm. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ OH ⊥ AD. Biết OH = 6cm, tính tỉ số của hai đường chéo BD và AC.

*Giải*

\* *Tìm cách giải*

Description: 6Vẽ thêm BK ⊥ AD để dùng định lí đường trung bình của tam giác, định lí Py-ta-go tính bình phương độ dài của mỗi đường chéo.

\* *Trình bày lời giải*

Vẽ BK ⊥ AD.

Xét ΔBKD có OH // BK (vì cùng vuông góc với AD) và OB = OD nên KH = HD.

Vậy OH là đường trung bình của ΔBKD.

Suy ra  do đó BK = 12cm.

Xét ΔABK vuông tại K có AK2 = AB2 – BK2 = 132 – 122 = 25 ⇒ AK = 5cm do đó KD = 8cm.

Xét ΔBKD vuông tại K có BD2 = BK2 + KD2 = 122 + 82 = 208.

Xét ΔAOH vuông tại H có OA2 = OH2 + AH2 = 62 + 92 = 117.



Do đó 

***Description: 6Ví dụ 2.*** Cho tam giác ABC cân tại A, hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Đường thẳng AH cắt EF tại D, cắt BC tại G. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của G trên AB và AC. Chứng minh rằng tứ giác DNGM là hình thoi.

*Giải*

\* *Tìm cách giải*

Dùng định lí đường trung bình của tam giác ta chứng minh được tứ giác DNGM là hình bình hành. Sau đó chứng minh hai cạnh kề bằng nhau.

\* *Trình bày lời giải*

ΔABE = ΔACF (cạnh huyền, góc nhọn)

⇒ AE = AF và BE = CF.

Vì H là trực tâm của ΔABC nên AH là đường cao, đồng thời là đường trung tuyến, từ đó GB = GC và DE = DF.

Xét ΔEBC có GN // BE (cùng vuông góc với AC) và GB = GC nên NE = NC.

Chứng minh tương tự ta được MF = MB.

Dùng định lí đường trung bình của tam giác ta chứng minh được DM // GN và DM = GN nên tứ giác DNGM là hình bình hành.

Mặt khác, DM = DN (cùng bằng  của hai cạnh bằng nhau) nên DNGM là hình thoi.

***Ví dụ 3.*** Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm M trên đường chéo AC. Vẽ ME ⊥ AD, MF ⊥ CD và MH ⊥ EF. Chứng minh rằng khi điểm M di động trên AC thì đường thẳng MH luôn đi qua một điểm cố định.

*Giải*

\* *Tìm cách giải*

Vẽ hình chính xác ta thấy đường thẳng MH đi qua một điểm cố định là điểm B. Vì thế ta sẽ chứng minh ba điểm H, M, B thẳng hàng bằng cách chứng minh 

\* *Trình bày lời giải*

Description: 6Gọi N là giao điểm của đường thẳng EM với BC.

Khi đó BN = AE; AE = ME (vì ΔAEM vuông cân) suy ra BN = ME.

Chứng minh tương tự ta được MN = MF.

Nối MB ta được ΔBMN = ΔEFM (c.g.c).

Suy ra  do đó 

Từ đó ba điểm H, M, B thẳng hàng.

Vậy đường thẳng MH luôn đi qua một điểm cố định là điểm B.

***Ví dụ 4.*** Cho hình vuông ABCD cạnh a. Trên cạnh BC lấy điểm M, trên cạnh CD lấy điểm N sao cho chu vi các tam giác CMN bằng 2a. Chứng minh rằng góc MAN có số đo không đổi.

*Giải*

\* *Tìm cách giải*

Description: 6Vẽ hình chính xác ta luôn thấy  Vì vậy ta vẽ hình phụ tạo ra góc 90o rồi chứng minh  bằng nửa góc vuông đó.

\* *Trình bày lời giải*

Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho DE = BM.

ΔBAM = ΔDAE (c.g.c) suy ra AM = AE và 

Ta có 

 hay 

Theo đề bài, CM + CN + MN = 2a mà CM + CN + MB + ND = 2a

nên MN = MB + ND hay MN = DE + ND = EN.

ΔMAN = ΔEAN (c.c.c) 

Vậy góc MAN có số đo không đổi.

***Ví dụ 5.*** Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho AM = BN = CP. Qua N vẽ một đường thẳng vuông góc với MP cắt AD tại Q. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.

*Giải*

\* *Tìm cách giải*

Description: 6Từ giả thiết ta nghĩ đến việc chứng minh các tam giác bằng nhau để suy ra bốn cạnh của tứ giác MNPQ bằng nhau, ta được tứ giác này là hình thoi. Sau đó chứng minh hai đường chéo bằng nhau để được hình vuông.

\* *Trình bày lời giải*

Vẽ ME ⊥ CD, NF ⊥ AD.

Gọi O là giao điểm của ME và NF.

Ta có AB = BC = CD = DA mà AM = BN = CP nên BM = CN = DP.

Dễ thấy tứ giác AMOF là hình vuông.

ΔEMP và ΔFNQ có:

 ME = NF (bằng cạnh hình vuông);

 (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc)

⇒ ΔEMP = ΔFNQ (g.c.g) ⇒ MP = NQ và EP = FQ.

Ta có DE = AM = AF ⇒ DP = AQ do đó DQ = CP.

Các tam giác BNM, CPN, DQP và AMQ bằng nhau suy ra MN = NP = PQ = QM.

Do đó tứ giác MNPQ là hình thoi. Hình thoi này có hai đường chéo bằng nhau nên là hình vuông.

**II. LUYỆN TẬP**

**• Hình thoi**

* 1. Một hình thoi có góc nhọn bằng 30o. Khoảng cách từ giao điểm của hai đường chéo đến mỗi cạnh bằng h. Tính độ dài mỗi cạnh của hình thoi.
  2. Cho hình thoi ABCD, chu vi bằng 8cm. Tìm giá trị lớn nhất của tích hai đường chéo.
  3. Cho hình thoi ABCD,  Gọi M là trung điểm của AB. Vẽ DH ⊥ CM. Tính số đo của góc MHB.
  4. Cho hình thoi ABCD. Trên nửa mặt phẳng bờ BD có chứa điểm C, vẽ hình bình hành BDEF có DE = DC. Chứng minh rằng C là trực tâm của tam giác AEF.
  5. Cho hình bình hành ABCD, hai đường chéo cắt nhau tại O. Gọi E, F, G, H lần lượt là giao điểm các đường phân giác của tam giác AOB, BOC, COD và DOA. Chứng minh tứ giác EFGH là hình thoi.
  6. Dựng hình thoi ABCD biết AC + BD = 8cm và 

**• Hình vuông**

* 1. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy các điểm E và F sao cho BE = EF = FC. Trên cạnh AD lấy điểm G sao cho  Tính tổng 
  2. Cho hình vuông ABCD. Trên đường chéo AC lấy một điểm M. Vẽ ME ⊥ AD, MF ⊥ CD. Chứng minh rằng ba đường thẳng AF, CE và BM đồng quy.
  3. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Vẽ ra phía ngoài tam giác này các hình vuông ABDE và ACFG. Chứng minh rằng:

a) Ba đường thẳng AH, DE và FG đồng quy;

b) Ba đường thẳng AH, BF và CD đồng quy.

* 1. Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E. Trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho AE = CF. Gọi O là trung điểm của EF. Vẽ điểm M sao cho O là trung điểm của DM. Chứng minh rằng tứ giác DEMF là hình vuông.
  2. Cho tam giác ABC,  Vẽ ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, HB và HC. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.
  3. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ ra phía ngoài của hình bình hành các hình vuông có một cạnh là cạnh của hình bình hành. Gọi E, F, G, H lần lượt là tâm (tức là giao điểm của hai đường chéo) của các hình vuông vẽ trên các cạnh AB, BC, CD và DA. Chứng minh rằng EG = HF và EG ⊥ HF.
  4. Dựng hình vuông ABCD biết đỉnh A và trung điểm M của CD.
  5. Một bàn cờ hình vuông có kích thước 6×6. Có thể dùng 9 mảnh gỗ hình chữ nhật có kích thước 1×4 để ghép kín bàn cờ được không?
  6. Một hình chữ nhật có kích thước 3×6. Hãy chia hình chữ nhật này thành nhiều phần (hình tam giác, tứ giác) để ghép lại thành một hình vuông (số phần được chia ra càng ít càng tốt).