**CHƯƠNG I: TỨ GIÁC**

**I. TỨ GIÁC**

**VẤN ĐỀ I. Sử dụng tính chất về các góc của một tứ giác để tính góc**

1. Cho tứ giác ABCD có . Tính góc A và góc ngoài tại đỉnh A.
2. Cho tứ giác ABCD có AB = AD, CB = CD, .

a) Chứng minh AC là đường trung trực của BD. b) Tính .

*ĐS: b)* *.*

1. Cho tứ giác ABCD có phân giác trong của góc A và góc B cắt nhau tại E, phân giác ngoài của góc A và góc B cắt nhau tại F. Chứng minh:  và .
2. Cho tứ giác ABCD có . Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho DE = AB. Chứng minh:

a) Các tam giác ABC và EDC bằng nhau.

b) AC là phân giác của góc A.

1. Cho tứ giác ABCD biết số đo của các góc  tỉ lệ thuận với 5; 8; 13 và 10.

a) Tính số đo các góc của tứ giác ABCD.

b) Kéo dài hai cạnh AB và DC cắt nhau ở E, kéo dài hai cạnh AD và BC cắt nhau ở F. Hai tia phân giác của các góc AED và góc AFB cắt nhau ở O. Phân giác của góc AFB cắt các cạnh CD và AB tại M và N. Chứng minh O là trung điểm của đoạn MN.

1. Cho tứ giác ABCD có , AC là tia phân giác của góc A. Chứng minh CB = CD.
2. Cho tứ giác ABCD có . Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại E, hai đường thẳng AB và DC cắt nhau tại F. Các tia phân giác của hai góc AEB và AFD cắt nhau tại I. Tính góc  theo .

**VẤN ĐỀ II. Sử dụng bất đẳng thức tam giác**

**để giải các bài toán liên hệ đến các cạnh của một tứ giác**

1. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh:

a)  b) .

1. Cho tứ giác ABCD có . Chứng minh: .
2. Cho tứ giác ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

a) Chứng minh: .

b) \* Khi O là điểm bất kì thuộc miền trong của tứ giác ABCD, kết luận trên có đúng không?

1. Chứng minh rằng trong một tứ giác thì:

a) Tổng độ dài 2 cạnh đối diện nhỏ hơn tổng độ dài hai đường chéo.

b) Tổng độ dài hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi của tứ giác.

**II. HÌNH THANG – HÌNH THANG VUÔNG**

**1. Định nghĩa:**

*Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.*

*Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.*

**2. Tính chất:**

*Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau.*

*Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.*

**VẤN ĐỀ I. Tính chất các góc của một hình thang**

1. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có . Tính các góc của hình thang.
2. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AB < CD, AD = BC = AB, . Tính các góc của hình thang.
3. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AB < CD. Chứng minh rằng: .
4. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Hai đường phân giác của góc A và B cắt nhau tại điểm K thuộc đáy CD. Chứng minh AD + BC = DC.
5. Cho hình thang ABCD (AB // CD).

a) Chứng minh rằng nếu hai tia phân giác của hai góc A và D cùng đi qua trung điểm F của cạnh bên BC thì cạnh bên AD bằng tổng hai đáy.

b) Chứng minh rằng nếu AD = AB + CD thì hai tia phân giác của hai góc A và D cắt nhau tại trung điểm của cạnh bên BC.

1. Cho hình thang ABCD có  và . Lấy điểm M thuộc đáy nhỏ BC. Kẻ M*x* ⊥ MA, M*x* cắt CD tại N. Chứng minh rằng tam giác AMN vuông cân.

**VẤN ĐỀ II. Chứng minh một tứ giác là hình thang, hình thang vuông**

1. Cho tứ giác ABCD có AB = BC và AC là tia phân giác của góc A. Chứng minh ABCD là hình thang.
2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy điểm M thuộc cạnh BC sao cho , N là trung điểm cạnh AB. Chứng minh:

a) Tam giác AMB cân.

b) Tứ giác MNAC là hình thang vuông.

1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH. Từ H kẻ HD  AC, HE AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng HB, HC. Chứng minh tứ giác DEMN là hình thang vuông.

**III. HÌNH THANG CÂN**

**1. Định nghĩa:**

*Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.*

**2. Tính chất:** *Trong hình thang cân:*

*Hai cạnh bên bằng nhau.*

*Hai đường chéo bằng nhau.*

**3. Dấu hiệu nhận biết:**

*Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.*

*Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.*

**VẤN ĐỀ I. Sử dụng tính chất của hình thang cân để tính toán và chứng minh**

1. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD, AB < CD). Kẻ các đường cao AE, BF của hình thang. Chứng minh rằng DE = CF.
2. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD).

a) Chứng minh: .

b) Gọi E là giao điểm của AC và BD. Chứng minh: .

1. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD, AB > CD) có , . Đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC.

a) Tính các góc của hình thang.

b) Chứng minh AC là phân giác của góc .

c) Tính diện tích của hình thang.

1. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD) có . Gọi O là giao điểm của AC và BD.

a) Chứng minh tam giác DOC vuông cân.

b) Tính diện tích của hình thang ABCD, biết BD = 6 (cm).

*ĐS: b) .*

**VẤN ĐỀ II. Chứng minh một tứ giác là hình thang cân**

1. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường phân giác BD, CE (D AC, E AB). Chứng minh rằng BEDC là hình thang cân có đáy nhỏ bằng cạnh bên.
2. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có . Chứng minh rằng ABCD là hình thang cân.
3. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh AB, AC lấy lần lượt các điểm D và E sao cho AD = AE.

a) Chứng minh BDEC là hình thang cân.

b) Tính các góc của hình thang cân đó, biết .

*ĐS: b) .*

1. Cho hình thang ABCD (AB // CD) có AC = BD. Qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng DC tại E. Chứng minh:

a) Tam giác BDE là tam giác cân.

b) Các tam giác ACD và BDC bằng nhau.

c) ABCD là hình thang cân.

1. Cho tam giác đều ABC và điểm M thuộc miền trong của tam giác. Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB ở D, đường thẳng song song với AC cắt BC ở E, đường thẳng song song với AB cắt AC ở F. Chứng minh:

a) Các tứ giác BDME, CFME, ADMF là các hình thang cân.

b) Chu vi của tam giác DEF bằng tổng các khoảng cách từ M đến các đỉnh của tam giác ABC.

c) .

*ĐS: c)* .

1. Cho hình thang ABCD (AD // BC, AD > BC) có đường chéo AC vuông góc với cạnh bên CD,  và .

a) Chứng minh ABCD là hình thang cân.

b) Tính độ dài cạnh đáy AD, biết chu vi hình thang bằng 20 cm.

*ĐS: b) .*

**IV. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, CỦA HÌNH THANG**

**1. Đường trung bình của tam giác:**

*Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.*

*Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.*

*Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.*

**2. Đường trung bình của hình thang**

*Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.*

*Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.*

*Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.*

1. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Trên cạnh AB, lấy hai điểm D, E sao cho AD = DE = EB. Gọi I là giao điểm của AM với CD. Chứng minh: AI = IM.
2. Cho tam giác ABC và hai đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BG, CG. Chứng minh tứ giác MNDE có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau.
3. Cho tam giác ABC. Trên tia BA lấy điểm D sao cho A là trung điểm BD. Trên tia CB lấy điểm E sao cho B là trung điểm CE. Hai đường thẳng AC và DE cắt nhau tại I. Chứng minh rằng: .
4. Cho tứ giác ABCD có góc , , AD = BC. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Tính góc nhọn tạo bởi đường thẳng FE với các đường thẳng AD và BC.
5. Cho A, B, C theo thứ tự nằm trên đường thẳng *d* (AB > BC). Trên cùng nửa mặt phẳng bờ là *d*, vẽ các tam giác đều AMB và BNC. Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của BM, CM, BN, AN. Chứng minh:

a) PQRS là hình thang cân.

b) .

1. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM, D là giao điểm của BI và AC.

a) Chứng minh: .

b) So sánh độ dài BD và ID.

1. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BC, AC, BD.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q nằm trên một đường thẳng.

b) Tính MN, PQ, biết các cạnh đáy của hình thang .

c) Chứng minh rằng nếu MP = PQ = QN thì .

1. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, BD. Chứng minh ba điểm E, K, F thẳng hàng.
2. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC. Đường thẳng EF cắt BD ở I, cắt AC ở K.

a) Chứng minh: AK = KC, BI = ID.

b) Cho AB = 6, CD = 10. Tính EI, KF, IK.

1. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, AC.

a) So sánh độ dài các đoạn thẳng EK và CD, KF và AB.

b) Chứng minh: .

c) Khi  thì tứ giác ABCD là hình gì.

*ĐS: c) ABCD là hình thang.*

1. Tính độ dài đường trung bình của một hình thang cân biết rằng các đường chéo của nó vuông góc với nhau và đường cao bằng 10 cm.
2. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Vẽ đường thẳng *d* đi qua G cắt các đoạn thẳng AB, AC. Gọi A’, B’. C’ thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên *d*. Tìm liên hệ giữa các độ dài AA’, BB’, CC’.
3. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Vẽ đường thẳng *d* nằm ngoài tam giác ABC. Gọi A’, B’. C’, G’ thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên *d*. Tìm liên hệ giữa các độ dài AA’, BB’, CC’ , GG’.

**V. ĐỐI XỨNG TRỤC**

1. Cho góc  và điểm A nằm trong góc đó. Vẽ điểm B đối xứng với A qua , điểm C đối xứng với A qua .

a) So sánh các độ dài OB và OC.

b) Tính số đo góc .

*ĐS: b)* .

1. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC.

a) Chứng minh hai tam giác BHC và BKC bằng nhau.

b) Cho . Tính số đo góc .

*ĐS: b) .*

1. Cho hình thang vuông ABCD (). Gọi K là điểm đối xứng với B qua AD, E là giao điểm của CK và AD. Chứng minh .
2. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K lần lượt là điểm đối xứng với điểm H qua các cạnh AB, AC. Chứng minh:

a) Ba điểm I, A, K thẳng hàng.

b) Tứ giác BIKC là hình thang.

c) .

1. Cho tam giác ABC, các phân giác BM và CN cắt nhau tại I. Từ A vẽ các đường vuông góc với BM và CN, chúng cắt BC thứ tự ở E và F. Gọi I là hình chiếu của I trên BC. Chứng minh rằng E và F đối xứng nhau qua II.
2. Cho hai điểm A, B nằm trong một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng *d*. Tìm điểm  sao cho  ngắn nhất.
3. Cho góc  và điểm A nằm trong góc đó. Gọi B, C lần lượt là hai điểm đối xứng với điểm A qua .

a) Chứng minh tam giác BOC là tam giác cân. Tính các góc của tam giác đó.

b) Tìm điểm  và điểm  sao cho tam giác AIK có chu vi nhỏ nhất.

*ĐS: a)  b) I, K là giao điểm của đường thẳng BC với các tia Ox và Oy.*

1. cho tam giác abc, c*x* là phân giác ngoài của góc c. trên c*x* lấy điểm m (khác c). Chứng minh rằng: Ma + mb > ca + cb.
2. Cho góc nhọn  và điểm A ở trong góc đó . Tìm điểm B ở trên tia O*x* và điểm C ở trên tia O*y* sao cho chu vi tam giác abc là nhỏ nhất.

**VI. HÌNH BÌNH HÀNH**

**1. Định nghĩa:**

*Hình bình hành là tứ giác có các cặp cạnh đối song song.*

**2. Tính chất:** *Trong hình bình hành:*

*Các cạnh đối bằng nhau.*

*Các góc đối bằng nhau.*

*Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.*

**3. Dấu hiệu nhận biết:**

*Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành.*

*Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.*

*Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.*

*Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.*

**VẤN ĐỀ I. Vận dụng tính chất của hình bình hành để chứng minh tính chất hình học**

1. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là trung điểm của AD, F là trung điểm của BC.

a) Chứng minh  và .

b) Chứng minh tứ giác EBFD là hình bình hành.

c) Chứng minh các đường thẳng EF, DB và AC đồng qui.

1. Cho hình bình hành ABCD (AB > BC). Tia phân giác của góc D cắt AB ở E, tia phân giác của góc B cắt CD ở F.

a) Chứng minh . b) Tứ giác DEBF là hình gì?

1. Cho hình bình hành ABCD. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AB vad CD, M và N là giao điểm của AI và CK với BD.

a) Chứng minh: . b) Chứng minh: .

Link tài liệu tải nhiều tài liệu hay hơn vào đây [https://www.facebook.com/groups/880025629048757/?ref=share](https://www.facebook.com/groups/880025629048757/?fref=mentions)

**VẤN ĐỀ II. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình bình hành**

1. Cho hình bình hành ABCD, đường chéo BD. Kẻ AH vuông góc với BD ở H, CK vuông góc với BD ở K. Chứng minh tứ giác AHCK là hình bình hành.
2. Cho hình bình hành ABCD. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Qua điểm O, vẽ đường thẳng *a* cắt hai đường thẳng AD, BC lần lượt tại E, F, vẽ đường thẳng *b* cắt hai cạnh AB, CD lần lượt tại K, H. Chứng minh tứ giác EKFH là hình bình hành.
3. Cho tam giác ABC. Từ một điểm E trên cạnh AC vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB tại F và đường thẳng song song với AB cắt BC tại D. Giả sử AE = BF.

a) Chứng minh tam giác AED cân. b) Chứng minh AD là phân giác của góc A.

1. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA và I, K là trung điểm các đường chéo AC, BD. Chứng minh:

a) Các tứ giác MNPQ, INKQ là hình bình hành.

b) Các đường thẳng MP, NQ, IK đồng qui.

1. Cho tam giác ABC và H là trực tâm. Các đường thẳng vuông góc với AB tại B, vuông góc với AC tại C cắt nhau ở D.

a) Chứng minh tứ giác BDCH là hình bình hành.

b) Tính số đo góc , biết .

1. Cho hình bình hành ABCD, . Từ C vẽ CE vuông góc với AB. Nối E với trung điểm M của AD. Từ M vẽ MF vuông góc với CE, MF cắt BC tại N.

a) Tứ giác MNCD là hình gì? b) Tam giác EMC là tam giác gì?

c) Chứng minh: .

1. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AB và CD, AD và BC; M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AE, EC, CF, FA. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.
2. Cho hình bình hành ABCD. Các điểm E, F thuộc đường chéo AC sao cho AE = EF = FC. Gọi M là giao điểm của BF và CD; N là giao điểm của DE và AB. Chứng minh rằng:

a) M, N theo thứ tự là trung điểm của CD, AB. b) EMFN là hình bình hành.

1. Cho hình thang vuông ABCD, có  và AD = 2BC. Kẻ AH vuông góc với BD (H thuộc BD). Gọi I là trung điểm của HD. Chứng minh rằng: CI ⊥ AI.
2. Cho tam giác ABC và O là một điểm thuộc miền trong của tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và L, M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn OA, OB, OC. Chứng minh rằng: các đoạn thẳng EL, FM và DN đồng qui.

**VII. ĐỐI XỨNG TÂM**

1. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là điểm đối xứng với D qua A, F là điểm đối xứng với D qua C. Chứng minh:

a) . b) Điểm E đối xứng với điểm F qua điểm B.

1. Cho tam giác ABC, các trung tuyến BD, CE. Gọi H là điểm đối xứng với B qua D, K là điểm đối xứng với C qua E. Chứng minh điểm H đối xứng với điểm K qua điểm A.
2. Cho hình bình hành ABCD và điểm E trên cạnh AB, I và K là các trung điểm của cạnh AD và BC. Gọi các điểm M, N lần lượt đối xứng với điểm E qua điểm I và điểm K.

a) Chứng minh các điểm M, N thuộc đường thẳng CD.

b) Chứng minh .

1. Cho góc vuông , điểm A nằm trong góc đó. Gọi B là điểm đối xứng với A qua , C là điểm đối xứng với A qua . Chứng minh B đối xứng với C qua O.
2. Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Một đường thẳng đi qua O cắt các cạnh AB và CD theo thứ tự ở M và N. Chứng minh điểm M đối xứng với điểm N qua O.
3. Cho hình bình hành ABCD có tâm đối xứng là O, một điểm E ở trên đoạn OD. Gọi F là điểm đối xứng của điểm C qua E.

a) Chứng minh tứ giác ODFA là hình thang.

b) Xác định vị trí điểm E trên OD để hình thang ODFA là hình bình hành.

1. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Gọi M, N, P theo thứ tự là các điểm đối xứng của A, B, C qua tâm G.

a) Chứng minh tứ giác BPNC là hình bình hành.

b) Chứng minh các tam giác ABC, MNP bằng nhau.

c) Chứng minh các tam giác ABC, MNP có cùng trọng tâm.

1. Cho tam giác abc, H là trực tâm, I là giao điểm các đường trung trực. K là điểm đối xứng với H qua trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh K đối xứng với A qua I.
2. Cho hình bình hành ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Trên AB lấy điểm E, trên CD lấy điểm F sao cho AE = CF.

a) Chứng minh E đối xứng với F qua O.

b) Từ E dựng E*x* // AC cắt BC tại I, dựng F*y* // AC cắt AD tại K. Chứng minh rằng: EF = FK; I và K đối xứng với nhau qua O.

1. Cho tam giác ABC. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua C, B' là điểm đối xứng với B qua A, C' là điểm đối xứng với C qua B. Gọi BM là trung tuyến của tam giác ABC, B'M' là trung tuyến của tam giác A'B'C'.

a) Chứng minh rằng ABM'M là hình bình hành.

b) Gọi G là giao điểm của BM và B'M'. Chứng minh rằng G là trọng tâm của hai tam giác ABC và tam giác A'B'C'.

**VIII. HÌNH CHỮ NHẬT**

Link tài liệu tải nhiều tài liệu hay hơn vào đây [https://www.facebook.com/groups/880025629048757/?ref=share](https://www.facebook.com/groups/880025629048757/?fref=mentions)

**1. Định nghĩa:**

*Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.*

**2. Tính chất:**

*Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.*

**3. Dấu hiệu nhận biết:**

*Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.*

*Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.*

*Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.*

*Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.*

**4. Áp dụng vào tam giác:**

*Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.*

*Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.*

**VẤN ĐỀ I. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình chữ nhật**

1. Cho tam giác ABC, đường cao AH. Gọi I là trung điểm của AC, E là điểm đối xứng với H qua I. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HC, CE. Các đường thẳng AM, AN cắt HE tại G và K.

a) Chứng minh tứ giác AHCE là hình chữ nhật.

b) Chứng minh HG = GK = KE.

1. Cho tứ giác ABCD có hai đường chéo vuông góc với nhau. Gọi E, F, G, H theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Tứ giác EFGH là hình gì?

*ĐS: EFGH là hình chữ nhật.*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác ABC, vẽ hai tam giác vuông cân ADB (DA = DB) và ACE (EA = EC). Gọi M là trung điểm của BC, I là giao điểm của DM với AB, K là giao điểm của EM với AC. Chứng minh:

a) Ba điểm D, A, E thẳng hàng.

b) Tứ giác IAKM là hình chữ nhật.

c) Tam giác DME là tam giác vuông cân.

1. Cho hình thang cân ABCD (AB // CD, AB < CD). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AD, BD, AC, BC.

a) Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.

b) Chứng minh tứ giác ABPN là hình thang cân.

c) Tìm một hệ thức liên hệ giữa AB và CD để ABPN là hình chữ nhật.

*ĐS: c)  thì ABPN là hình chữ nhật.*

1. Cho tam giác ABC. Gọi O là một điểm thuộc miền trong của tam giác, M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OB, OC, AC, AB.

a) Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.

b) Xác định vị trí của điểm O đế tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

*ĐS: b) O thuộc đường cao AH của ABC.*

1. Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Trên các cạnh AC, BC lấy lần lượt các điểm P, Q sao cho AP = CQ. Từ điểm P vẽ PM song song với BC (M AB).

a) Chứng minh tứ giác PCQM là hình chữ nhật.

b) Gọi I là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng khi P di chuyển trên cạnh AC, Q di chuyển trên cạnh BC thì điểm I di chuyển trên một đoạn thẳng cố định.

*ĐS: b) I di chuyển trên đường trung bình của ABC.*

1. Cho hình chữ nhật ABCD. Nối C với một điểm E bất kỳ trên đường chéo BD. Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho EF = EC. Vẽ FH và FK lần lượt vuông góc với AB và AD. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác AHFK là hình chữ nhật.

b) AF song song với BD và KH song song với AC.

c) Ba điểm E, H, K thẳng hàng.

1. Cho tam giác ABC và H là trực tâm. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và CA; D, E, F lần lượt là trung điểm các đoạn HA, HB và HC.

a) Chứng minh rằng các tứ giác MNFD và MEFP là các hình chữ nhật.

b) Để các đoạn MD, ME và DP bằng nhau thì tam giác ABC phải là tam giác gì?

Link tài liệu tải nhiều tài liệu hay hơn vào đây [https://www.facebook.com/groups/880025629048757/?ref=share](https://www.facebook.com/groups/880025629048757/?fref=mentions)

**VẤN ĐỀ II. Vận dụng kiến thức hình chữ nhật để giải toán**

1. Tính độ dài trung tuyến ứng với cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 7cm và 24cm.
2. *ĐS: .*
3. Cho tam giác ABC cân tại A, CH là đường cao (H AB). Gọi D là điểm đối xứng với điểm B qua A.

a) Chứng minh tam giác DCB là tam giác vuông.

b) Chứng minh .

1. Cho hình chữ nhật ABCD. Vẽ BH AC (H AC). Gọi M, K lần lượt là trung điểm của AH và DC; I, O lần lượt là trung điểm của AB và IC.

a) Chứng minh  và .

b) Tính số đo góc .

*ĐS: b)* *.*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A. M là điểm bất kì thuộc cạnh BC. Vẽ MD AB, ME AC. O là trung điểm của DE.

a) Chứng minh ba điểm A, O, M thẳng hàng.

b) Khi điểm M di chuyển trên cạnh BC thì điểm O di chuyển trên đường nào?

c) Điểm M ở vị trí nào trên cạnh BC thì AM có độ dài ngắn nhất.

*ĐS: b) O di chuyển trên đường trung bình của ABC c)  (AH BC).*

1. Cho hình chữ nhật ABCD, AB = 2AD. Vẽ tia AM (M thuộc cạnh DC) sao cho . Chứng minh tam giác ABM là tam giác cân.
2. Cho tam giác ABC vuông tại A, AC > AB. AH là đường cao. Trên tia HC lấy HD = HA, đường vuông góc với BC tại D cắt AC ở E .

a) Chứng minh AE = AB.

b) Gọi M trung điểm BE . Tính số đo góc .

1. Cho tam giác ABC vuông tại A và AC = 3AB. Trên cạnh góc vuông AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho AD = DE = EC. Tính .
2. Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ AH ⊥ BD. Gọi I là trung điểm của DH. Kẻ đường thẳng vuông góc với AI tại I cắt cạnh BC ở K. Chứng minh K là trung điểm cạnh BC.

**IX. HÌNH THOI**

**1. Định nghĩa:**

*Hình thoi là một tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.*

**2. Tính chất:** *Trong hình thoi:*

*Hai đường chéo vuông góc với nhau.*

*Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.*

**3. Dấu hiệu nhận biết:**

*Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.*

*Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.*

*Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.*

*Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.*

**VẤN ĐỀ I. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình thoi**

1. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, AD. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình thoi.
2. Cho tứ giác ABCD có , , . Gọi E, F, M, N lần lượt là trung điểm của AB, DC, DB, AC.

a) Chứng minh tứ giác EMFN là hình thoi.

b) Tính góc .

*ĐS: b)* *.*

1. Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi E, F, G, H lần lượt là các giao điểm của các phân giác trong của các tam giác OAB, OBC, ODC, ODA.

a) Chứng minh: ba điểm E, O, G thẳng hàng, ba điểm H, O, F thẳng hàng.

b) Chứng minh các tam giác AEB và CGD bằng nhau.

c) Chứng minh tứ giác EFGH là hình thoi.

1. Cho tam giác ABC và một điểm M thuộc cạnh BC. Qua M vẽ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở E và đường thẳng song song với AC, cắt AB ở F.

a) Chứng minh tứ giác AFME là hình bình hành.

b) Xác định vị trí điểm M trên cạnh BC để tứ giác AFME là hình thoi.

*ĐS: b) M là chân đường phân giác góc B của ABC.*

1. Cho hình bình hành ABCD có AB = 2AD, . Vẽ BH AD (H AD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh CD, AB.

a) Chứng minh tứ giác ANMD là hình thoi.

b) Tính góc .

*ĐS: b)* *.*

1. Cho tam giác đều ABC. Gọi H là trực tâm của tam giác, AD là đường cao. Trên cạnh BC lấy điểm M. Từ M vẽ ME AB (E AB) và MF AC (F AC). Gọi I là trung điểm của AM.

a) Chứng minh tứ giác DEIF là hình thoi.

b) Chứng minh các đường thẳng MH, ID, EF đồng qui.

1. Cho hình bình hành ABCD, hai đường chéo cắt nhau ở O. Hai đường thẳng d1 và d2 cùng đi qua O và vuông góc với nhau. Đường thẳng d1 cắt các cạnh AB và CD ở M và P. Đường thẳng d2 cắt các cạnh BC và AD ở N và Q. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình thoi

**VẤN ĐỀ II. Vận dụng kiến thức hình thoi để giải toán**

1. Cho hình thoi ABCD có AC = 8cm, BD = 10cm. Tính độ dài của cạnh hình thoi.

*ĐS: .*

1. Cho hình thoi ABCD có . Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho BM = CN. Chứng minh tam giác MDN là tam giác đều.
2. Cho hình thoi ABCD có . Trên AD và CD lấy các điểm M, N sao cho AM + CN = AD. Gọi P là điểm đối xứng của N qua BC, MP cắt BC tại Q. Tứ giác MDCQ là hình gì ?
3. Cho P là một điểm chuyển động trong tam giác ABC sao cho . Hạ PM ⊥ AB; PN ⊥ AC (M ∈ AB; N ∈ AC). Gọi K, S là hai đỉnh khác của hình thoi KMSN. Chứng minh KS đi qua một điểm cố định.

**X. HÌNH VUÔNG**

**1. Định nghĩa:**

*Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau.*

**2. Tính chất:**

*Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.*

**3. Dấu hiệu nhận biết:**

*Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.*

*Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.*

*Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.*

*Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.*

*Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.*

*Một tứ giác vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi thì tứ giác đó là hình vuông.*

Link tài liệu tải nhiều tài liệu hay hơn vào đây [https://www.facebook.com/groups/880025629048757/?ref=share](https://www.facebook.com/groups/880025629048757/?fref=mentions)

**VẤN ĐỀ I. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình vuông**

1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Phân giác trong AD của góc A (D BC). Vẽ DF AC, DE AB. Chứng minh tứ giác AEDF là hình vuông.
2. Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho AE = BF = CG = DH. Chứng minh tứ giác EFGH là hình vuông.
3. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là một điểm thuộc cạnh BC. Qua M vẽ các đường thẳng song song với AB và AC, chúng cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại E và F.

a) Tứ giác AFME là hình gì?

b) Xác định vị trí điểm M trên cạnh BC để tứ giác AFME là hình vuông.

1. Cho hình chữ nhật ABCD có AB = 2AD. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE.

a) Tứ giác ADFE là hình gì?

b) Tứ giác EMFN là hình gì?

1. Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABCD và ACEF. Gọi Q, N lần lượt là giao điểm các đường chéo của ABCD và ACEF; M, P lần lượt là trung điểm BC và DF. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.

**VẤN ĐỀ II. Vận dụng kiến thức hình vuông để giải toán**

1. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh các AD, DC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho AE = DF. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của EF, BF.

a) Chứng minh các tam giác ADF và BAE bằng nhau.

b) Chứng minh MN vuông góc với AF.

1. Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E, trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho AE = CF.

a) Chứng minh tam giác EDF vuông cân.

b) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh BI = DI.

c) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh O, C, I thẳng hàng.

1. Cho tam giác ABC, dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABCD và ACEF. Vẽ đường cao AH kéo dài HA gặp DF tại E. Chứng minh rằng DI = IF.
2. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ về phía ngoài hình bình hành, hai hình vuông ABEF và ADGH. Chứng minh:

a) AC = FH và AC FH.

b) Tam giác CEG là tam giác vuông cân.

1. Cho đoạn thẳng AB và điểm M thuộc đoạn thẳng đó. Vẽ về một phía của AB, các hình vuông AMCD, BMEF.

a) Chứng minh AE vuông góc với BC.

b) Gọi H là giao điểm của AE và BC. Chứng minh ba điểm D, H, F thẳng hàng.

c) Chứng minh đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên đoạn thẳng cố định AB.

*ĐS: c) DF đi qua K (K = AF AC).*

1. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh CD lấy điểm M. Tia phân giác của góc  cắt AD ở I. Chứng minh rằng: BI ≤ 2 MI.
2. Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm E thuộc đường chéo AC. Kẻ EF ⊥ AD, EG ⊥ CD.

a) Chứng minh rằng: EB = FG và EB ⊥ FG.

b) Chứng minh rằng: Các đường thẳng BE, AG, CF đồng qui.

1. Cho tam giác ABC. Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC, các hình vuông ABDE và ACFG. Vẽ hình bình hành EAGH. Chứng minh rằng:

a) AK = BC và AH ⊥ BC.

b) Các đường thẳng KA, BF, CD đồng qui.

**TỔNG ÔN**

1. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Các đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD thoả điều kiện gì thì tứ giác EFGH là:

a) Hình chữ nhật. *ĐS: AC BD.*

b) Hình thoi. *ĐS: AC = BD.*

c) Hình vuông. *ĐS: AC = BD và AC BD.*

1. Cho tam giác ABC cân tại A, trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AC, K là điểm đối xứng của điểm M qua điểm I.

a) Tứ giác AMCK là hình gì?

b) Tứ giác AKMB là hình gì?

c) Có trường hợp nào của tam giác ABC để tứ giác AKMB là hình thoi.

*ĐS: a) AMCK là hình chữ nhật b) AKMB là hình bình hành c) Không.*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phia ngoài tam giác, vẽ các hình vuông ABDE, ACGH.

a) Chứng minh tứ giác BCHE là hình thang cân.

b) Vẽ đường cao AK của tam giác ABC. Chứng minh AK, DE, GH đồng qui.

*ĐS: b) Đồng qui tại F với .*

1. Cho hình thang cân ABCD với AB // CD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

a) Tứ giác MNPQ là hình gì?

b) Cho biết diện tích tứ giác ABCD bằng . Tính diện tích tứ giác MNPQ.

*ĐS: a) MNPQ là hình thoi b) .*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, trung tuyến AM. Gọi D là trung điểm của AB, E là điểm đối xứng của điểm M qua điểm D.

a) Chứng minh điểm E đối xứng với điểm M qua đường thẳng AB.

b) Các tứ giác AEMC, AEBM là hình gì?

c) Cho BC = 4cm. Tính chu vi tứ giác AEBM.

d) Tam giác vuông thoả điều kiện gì thì AEBM là hình vuông.

*ĐS: b) AEMC là hình bình hành, AEBM là hình thoi c)  d) ABC vuông cân.*

1. Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm hai đường chéo. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC. Các đường thẳng BM, DN cắt đường chéo AC tại P, Q.

a) Chứng minh AP = PQ = QC.

b) Tứ giác MPNQ là hình gì?

c) Xác định tỉ số  để MPNQ là hình chữ nhật.

d) Xác định góc  để MPNQ là hình thoi.

e) Tam giác ACD thoả mãn điều kiện gì để MPNQ là hình vuông.

*ĐS: b) MPNQ là hình bình hành c)*  *d)* 

*e) ACD vuông tại C và .*

1. Cho hình thoi ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ đường thẳng qua B song song với AC, đường thẳng qua C song song với BD, hai đường thẳng đó cắt nhau ở K.

a) Tứ giác OBKC là hình gì?

b) Chứng minh AB = OK.

c) Tìm điều kiện của hình thoi ABCD để OBKC là hình vuông.

*ĐS: a) OBKC là hình chữ nhật c) ABCD là hình vuông.*

1. Cho hình bình hành ABCD có BC = 2AB và . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và AD.

a) Tứ giác ECDF là hình gì?

b) Tứ giác ABED là hình gì?

c) Tính số đo của góc .

*ĐS: a) ECDF là hình thoi b) ABED là hình thang cân c)* *.*

1. Cho hình thang ABCD (AB // CD). Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi O là trung điểm của EF. Qua O vẽ đường thẳng song song với AB, cắt AD và BC theo thứ tự tại M và N.

a) Tứ giác EMFN là hình gì?

b) Hình thang ABCD có thêm điều kiện gì để EMFN là hình thoi.

c) Hình thang ABCD có thêm điều kiện gì để EMFN là hình vuông.

*ĐS: a) EMFN là hình bình hành b) ABCD là hình thang cân*

*c) ABCD là hình thang cân và có hai đường chéo vuông góc.*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A với AB = AC = *a*.

a) Lấy điểm D trên cạnh AC và điểm E trên cạnh AB sao cho AD = AE. Các đường thẳng vuông góc với EC vẽ từ A và D lần lượt cắt cạnh BC ở K và L. Chứng minh BK = KL.

b) Một hình chữ nhật APMN thay đổi có đỉnh P trên cạnh AB, đỉnh N trên cạnh AC và có chu vi luôn bằng . Điểm M di chuyển trên đường nào?

c) Chứng minh khi hình chữ nhật APMN thay đổi thì đường vuông góc vẽ từ M xuống đường chéo PN luôn đi qua một điểm cố định.

*ĐS: b) M di chuyển trên cạnh BC c) HM đi qua điểm I cố định (với ACIB là hình vuông).*

1. Cho hình vuông ABCD. E là điểm trên cạnh DC, F là điểm trên tia đối của tia BC sao cho BF = DE.

a) Chứng minh tam giác AEF vuông cân.

b) Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh I thuộc BD.

c) Lấy điểm K đối xứng với A qua I. Chứng minh tứ giác AEKF là hình vuông.

1. Cho hình bình hành ABCD có AD = 2AB, . Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BC và AD.

a) Chứng minh AEBF.

b) Chứng minh tứ giác BFDC là hình thang cân.

c) Lấy điểm M đối xứng của A qua B. Chứng minh tứ giác BMCD là hình chữ nhật.

d) Chứng minh ba điểm M, E, D thẳng hàng.

1. Cho tam giác ABC vuông tại A có . Kẻ tia A*x* song song với BC. Trên A*x* lấy điểm D sao cho AD = DC.

a) Tính số đo các góc .

b) Chứng minh tứ giác ABCD là hình thang cân.

c) Gọi E là trung điểm của BC. Chứng minh tứ giác ADEB là hình thoi.

1. Cho ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi K là giao điểm của AC và DM, L là trung điểm của BD và CM.

a) Tứ giác MNPQ là hình gì?

b) Tứ giác MDPB là hình gì?

c) Chứng minh: AK = KL = LC.

1. Cho hình bình hành ABCD có AB = 2AD. Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB và CD.

a) Các tứ giác AEFD, AECF là hình gì?

b) Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE. Chứng minh rằng tứ giác EMFN là hình chữ nhật.

c) Hình bình hành ABCD nói trên có thêm điều kiện gì để EMFN là hình vuông?

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM. Gọi H là điểm đối xứng với M qua AB, E là giao điểm của MH và AB. Gọi K là điểm đối xứng với M qua AC, F là giao điểm của MK và AC.

a) Xác định dạng của tứ giác AEMF, AMBH, AMCK.

b) Chứng minh rằng H đối xứng với K qua A.

c) Tam giác vuông ABC có thêm điều kiện gì thì AEMF là hình vuông?

---------------////-------------



