|  |  |
| --- | --- |
| SỞ GD&ĐT NGHỆ AN**CỤM TRƯỜNG DIỄN CHÂU** | **KỲ THI KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG** **ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI LẦN 2****NĂM HỌC 2023 - 2024****MÔN: TOÁN** *(Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề)* |

**Câu 1.** (*6,0 điểm*)

a. Xét hàm số  với  là tham số. Tìm tất các giá trị của  sao cho tổng độ dài của các khoảng nghịch biến của hàm số  trên  là 2

b. Cho hàm số  với  là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của  sao cho  với mọi ?.

**Câu 2.** (*5,0 điểm*)

1. Cho hàm số  có đạo hàm . Tìm tất cả các giá trị thực của  để hàm số  có đúng  điểm cực trị sao cho , trong đó , ,  là hoành độ của ba cực trị đó.

**Câu 3.** (*6,0 điểm*) Cho hình lăng trụ đứng  có đáy là tam giác  vuông cân tại , cạnh . Góc giữa mặt phẳng  và mặt phẳng  bằng . Tính thể tích  của khối đa diện .

**Câu 5 (1.5 điểm).**

 Trên sa mạc có một khu đất hình chữ nhật có chiều dài, chiều rộng . Vận tốc trung bình của xe máy trên khu đất này là , riêng đi trên cạnh thì vận tốc là . Hãy xây dựng phương án di chuyển trên khu đất từ  đến để hết ít thời gian nhất.

**Câu 5. (*2,0 điểm*)** Cho hình chóp , đáy  là hình thoi tâm , cạnh .  tạo với đáy một góc ;  tạo với đáy một góc .  là đường cao của hình chóp , Điểm M, N, P và Q lần lượt thuộc cạnh SA, SB, SC và SD sao cho  ,  và  Trên các tia  lấy các điểm H, E, K và G sao cho giao  tại  sao cho ; ;. Tính , biết rằng bốn điểm  cùng nằm trên một mặt phẳng và  lần lượt 4 đỉnh của một hình bình hành.

 Cho các số thực  thuộc đoạn  và thỏa mãn điều kiện . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức .

|  |
| --- |
| **b) Tìm tất cả các giá trị của tham số  để đồ thị hàm số  có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có ba góc nhọn.** |
| Ta có . Hàm số có ba cực trị .  |
| Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị của hàm số là   và Suy ra. |
| Tam giác  luôn cân tại . Do đó tam giác  nhọn khi và chỉ khi góc  nhọn  |
| Kết hợp điều kiện , ta được .Vậy  là giá trị cần tìm. |

|  |  |
| --- | --- |
| **2a)** | *Cho hàm số*  *với*  *là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của*  *sao cho*  *với mọi* *?* |
|  |  |
| Xét hàm số . Ta có: Suy ra hàm số  đồng biến trên . |
|  |
|  Hàm số  nghịch biến trên  Vậy trên đoạn  có  giá trị nguyên của  thỏa mãn. |

|  |
| --- |
| ***Cho các số thực  thuộc đoạn  và thỏa mãn điều kiện . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*** ***.*** |
| Đặt Ta có  |
| Suy ra : .Ta có: . Suy ra**.** |
|  |
| Xét hàm số Nên hàm số nghịch biến trên**.** Vậy **.** Vậy  , đạt tại  và .  |

Xét hàm số  với  là tham số

Tìm tất các giá trị của  sao cho tổng độ dài của các khoảng nghịch biến của hàm số  trên  là 

**Lời giải**

Ta có



Khi đó  và 

Để hàm số có các khoảng nghịch biến thì  phải có  nghiệm phân biệt. Ta thấy phương trình  luôn có hai nghiệm trái dấu là  thỏa mãn

 và 

Ta xét các trường hợp sau:

(1) Nếu  thì bằng cách vẽ bảng biến thiên, ta thấy hàm số nghịch biến trên  và  Tổng độ dài hai khoảng này là



nên  hay  Thử lại ta có , thỏa mãn.

(2) Nếu  thì bằng cách vẽ bảng biến thiên, ta thấy hàm số nghịch biến trên  và  Tổng độ dài hai khoảng này là



nên  Bình phương lên, ta được

 hay 

* Với  thì ta tính được  không thỏa mãn.
* Với  thì ta tính được  thỏa mãn.

Vậy tất cả các giá trị cần tìm của  là  và .

**Cách 1.**

**Trường hợp:** xe máy không chạy trên CD, khi đó thời gian ngắn nhất đi từ A đến B là chạy trên AB suy ra .

**Trường hợp:** xe máy có chạy trên CD. Giả sử xe chạy từ A đến B qua EF.

Đặt .

Khi đó thời gian xe chạy là:



 (áp dụng )

Xét ; 

 

|  |  |
| --- | --- |
|  | 0  70 |
|   |  – 0 +  |
|  |  |

Dựa vào BBT



Từ 2 trường hợp trên ta có thể kết luận: Sau 3h xe có thể chạy từ  đến  được, với thời gian chạy ngắn nhất  khi .

Gọi 



+)  song song  

Để  cùng thuộc một mặt phẳng thì 



.

Ta có:







Mà 













Mà 



Chứng minh tương tự, ta suy ra 

Từ  suy ra 

Trong hình chóp , để đáy  là hình bình hành trong khi  cùng thuộc một mặt phẳng khi và chỉ khi 





Ta có: 





Từ  .