

Câu 1. (2,0 điểm)

$$M = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$$

a) Rút gọn biểu thức sau:
với $x > 1$ và $x \neq 2$.

b) Cho x, y là các số dương thoả mãn: $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = \sqrt{2024}$

Tính giá trị của biểu thức: $S = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}$

Câu 2 (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $(x + \sqrt{x} + 1)\sqrt{2-x} = x^2 + x + 1$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + xy = y^2 - 3y + 2 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số tự nhiên a để $a + 1$, $4a^2 + 8a + 5$ và $6a^2 + 12a + 7$ đồng thời là các số nguyên tố.

b) Cho x và y là các số hữu tỉ dương và thoả mãn đẳng thức $x^3 + y^3 = 2x^2y^2$

Chứng minh rằng $\sqrt{1 - \frac{1}{xy}}$ là một số hữu tỉ

Câu 4 (3,0 điểm) :

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm S cố định bên ngoài đường tròn (O) . Từ S kẻ các tiếp tuyến SA, SB và cắt tuyến SCD đến đường tròn (O) , với A, B là tiếp điểm và C, D thuộc (O) sao cho $SC < SD$, $CD < 2R$, $\angle ASC < \angle BSC$. Gọi E là trung điểm của CD ; H, F lần lượt là giao của AB với SO và OE .

a) Chứng minh rằng FC là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

b) Qua C kẻ đường thẳng song song với AD cắt AS, AB lần lượt tại P và Q . Chứng minh rằng $PC = CQ$.

c) Gọi G là điểm nằm trên cung nhỏ $\widehat{AB}$ của đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại G của đường tròn (O) cắt SA, SB tại T, J . Tìm vị trí của G cung nhỏ $\widehat{AB}$ để diện tích tam giác STJ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}} + \frac{1}{\sqrt{bc+b+2}} + \frac{1}{\sqrt{ca+c+2}} \leq \frac{3}{2}$$

-----Hết-----

Câu	ý	Nội dung	Điểm
1 (2,0đ)	a (1đ)	$M = \frac{\sqrt{x - \sqrt{4(x-1)}} + \sqrt{x + \sqrt{4(x-1)}}}{\sqrt{x^2 - 4(x-1)}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$ $= \frac{\sqrt{x-2}\sqrt{(x-1)} + \sqrt{x+2}\sqrt{(x-1)}}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} \cdot \left(1 - \frac{1}{x-1}\right)$	0,25
		$= \frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}}{\sqrt{(x-2)^2}} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right)$ $= \frac{ \sqrt{x-1}-1 + \sqrt{x-1} + 1}{ x-2 } \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right)$	0,25
		TH1: $x > 2$ $M = \frac{\sqrt{x-1}-1 + \sqrt{x-1} + 1}{x-2} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right) = \frac{2}{\sqrt{x-1}}$	0,25
		TH2: $1 < x < 2$ $M = \frac{-\sqrt{x-1} + 1 + \sqrt{x-1} + 1}{-(x-2)} \cdot \left(\frac{x-2}{x-1}\right) = \frac{-2}{x-1}$	0,25
	b (1đ)	Với $x, y > 0$	
		$2024 = \left(x \cdot y + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}\right)^2$ $= x^2 y^2 + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} + (1+x^2)(1+y^2)$	0,25
		$= x^2 y^2 + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} + 1 + x^2 + y^2 + x^2 \cdot y^2$ $= \left[x^2(1+y^2) + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} + y^2(1+x^2) \right] + 1$	0,25
		$= \left(x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\right)^2 + 1$	0,25

		Do đó: $2024 = S^2 + 1$ suy ra $S = \sqrt{2023}$ (Vì $S > 0$) Vậy $S = \sqrt{2023}$	0,25
--	--	--	------

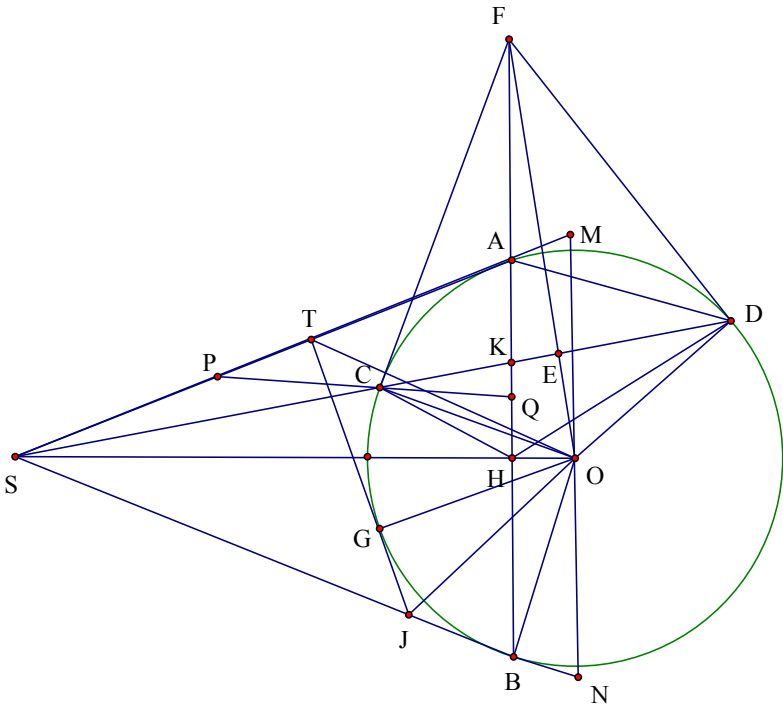
Câu	ý	Nội dung	Điểm
2 (2,0đ)	a (1đ)	$(x + \sqrt{x} + 1)\sqrt{2-x} = x^2 + x + 1$ ĐK: $0 \leq x \leq 2$ $\Leftrightarrow (x + \sqrt{x} + 1)\sqrt{2-x} = (x + \sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)$	0,25
		$\Leftrightarrow (x + \sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1 - \sqrt{2-x}) = 0$ $\Leftrightarrow x - \sqrt{2-x} + 1 - \sqrt{x} = 0 \quad (x + \sqrt{x} + 1 > 0)$	0,25
		$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x + \sqrt{2-x}} - \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} = 0 \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{x+2}{x + \sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) = 0$	0,25
		Vì $0 \leq x \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} x+2 > x + \sqrt{2-x} > 0 \\ \sqrt{x}+1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x+2}{x + \sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} > 1 - 1 = 0$ (Không chứng minh được -0,25) $\Rightarrow x = 1$ (TM). Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$	0,25
	b (1đ)	$2x^2 + xy = y^2 - 3y + 2 \Leftrightarrow y^2 - (x+3)y + 2 - 2x^2 = 0$ $\Leftrightarrow (y-2x-2)(y+x-1) = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -x + 1 \end{cases}$	0,25
		$+) \begin{cases} y = 2x + 2 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x + 2 \\ (3x+4)^2 + 5 = 0 \text{ (V « nghiệm)} \end{cases}$	0,25
		$+) \begin{cases} y = -x + 1 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x; y) = (2; -1)$	0,25

3 (2,0 điểm)	a) Tìm tất cả các số tự nhiên a để $a + 1$, $4a^2 + 8a + 5$ và $6a^2 + 12a + 7$ đồng thời là các số nguyên tố.	1,00
	Đặt $a + 1 = p$. $\Rightarrow 4a^2 + 8a + 5 = 4(a + 1)^2 + 1 = 4p^2 + 1$ và $6a^2 + 12a + 7 = 6(a + 1)^2 + 1 = 6p^2 + 1$ Do p là số nguyên tố nên $4p^2 + 1 > 5$ và $6p^2 + 1 > 5$	0,25
	Ta có $4p^2 + 1 = 5p^2 - (p - 1)(p + 1)$ và $6p^2 + 1 = 5p^2 + 5 + (p + 2)(p - 2)$ Nếu p chia 5 dư 1 hoặc 4 thì $(p - 1)(p + 1) \vdots 5$ $\Rightarrow 4p^2 + 1$ là không số nguyên tố	0,25
	Nếu p chia cho 5 dư 2 hoặc 3 thì $(p - 2)(p + 2) \vdots 5$ $\Rightarrow 6p^2 + 1$ không là số nguyên tố	0,25
	Vậy để $4p^2 + 1$ và $6p^2 + 1$ là nguyên tố thì $p \vdots 5$ Mà p là số nguyên tố nên $p = 5 \Rightarrow a = 4$ Thử lại với $a = 4$ thì $a + 1 = 5$ nguyên tố; $4a^2 + 8a + 5 = 101$ nguyên tố; $6a^2 + 12a + 7 = 151$ nguyên tố. Vậy $a = 4$ là giá trị cần tìm.	0,25

3 (2,0 điểm)	b) Cho x và y là các số hữu tỉ dương và thỏa mãn đẳng thức $x^3 + y^3 = 2x^2y^2$ Chứng minh rằng $\sqrt{1 - \frac{1}{xy}}$ là một số hữu tỉ	1,00
	Ta có $x^3 + y^3 = 2x^2y^2$ Hay $(x^3 + y^3)^2 = 4x^4y^4$	0,25
	$\Leftrightarrow x^6 + 2x^3y^3 + y^6 = 4x^4y^4$ $\Leftrightarrow x^6 - 2x^3y^3 + y^6 = 4x^4y^4 - 4x^3y^3$ $\Leftrightarrow (x^3 - y^3)^2 = 4x^3y^3(xy - 1)$	0,25

	$\Leftrightarrow (x^3 - y^3)^2 = 4x^4y^4 \left(1 - \frac{1}{xy}\right) \text{ vì } x, y \text{ dương}$	0,25
	$\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{xy} = \left(\frac{x^3 - y^3}{2x^2y^2}\right)^2$ $\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{1}{xy}} = \frac{ x^3 - y^3 }{2x^2y^2} \text{ là số hữu tỉ}$	0,25

Câu 4 (3,0 điểm)

Phần	Đáp án	Điểm
		
a	Ta có : $OH.OS = OB^2 = OC^2$	0,25
	$\Rightarrow \frac{OE}{OH} = \frac{OS}{OF} \Rightarrow OH.OS = OE.OF$	0,25
	$\Delta OES \sim \Delta OHF$ (g.g) Suy ra $OE.OF = OC^2 \Rightarrow \Delta OCF \sim \Delta OEC$ (c.g.c)	0,25
	$\Rightarrow \angle C = \angle E = 90^\circ \Rightarrow FC \perp CO$ nên FC là tiếp tuyến của (O).	0,25
	Từ $OH.OS = OC^2 \Rightarrow \Delta OHC \sim \Delta OCS$ $\Rightarrow \angle H = \angle C \Rightarrow \angle H = \angle C = \angle D$ $\Rightarrow \Delta SHC \sim \Delta SDO \Rightarrow \angle H = \angle D$	0,25

b	$\text{Từ } \triangle OHC \sim \triangle OCS \Rightarrow \frac{OH}{HC} = \frac{OC}{CS} \Rightarrow \frac{OH}{HC} = \frac{OD}{CS} \Rightarrow \triangle HOD \sim \triangle HCS$	
	$\Rightarrow \angle OHD = \angle HCS$ suy ra HA là phân giác của góc CHD.	0,25
	Gọi K là giao của HA và CD, mà HS $\perp$ HA nên HI và HS là phân giác trong và ngoài của $\triangle CHD$ $\Rightarrow \frac{SC}{SD} = \frac{KC}{KD}$	0,25
	$\Rightarrow \frac{PC}{AD} = \frac{SC}{SD} = \frac{KC}{KD} = \frac{CQ}{AD} \Rightarrow CP = CQ.$	0,25
c	Qua O vẽ đường thẳng vuông góc với SO cắt SA, SB lần lượt tại M, N. Chứng minh được $\triangle MOT \sim \triangle OJT \sim \triangle NJO$ (g.g) $\Rightarrow \frac{MT}{ON} = \frac{MO}{NJ} \Rightarrow MT \cdot NJ = OM \cdot ON = MO^2 = \frac{MN^2}{4} (*)$	0,25
	Ta có $S_{STJ} = S_{SMN} - S_{MTJN}$ Do S_{SMN} không đổi nên S_{STJ} đạt GTLN khi và chỉ khi S_{MTJN} đạt GTNN.	0,25
	Ta có $S_{MTJN} = S_{MOT} + S_{TOJ} + S_{JON} = \frac{1}{2} r(MT + TJ + JN)$ (vì OF = OG = OE = r)	0,25
	Lại có $MT + TJ + JN = MA + 2TA + 2JB + NB$ $= 2 \cdot (MT + NJ) - 2MA$ (do MA = NB, AT = TG, JG = JB). Mà $MT + NJ \geq 2\sqrt{MT \cdot NJ}$. Do đó $MT + TJ + JN \geq 2 \cdot 2\sqrt{MT \cdot NJ} - 2MA$ $= 2MN - 2MA$ (do (*)) $\Rightarrow S_{MTJN} \geq r(MN - MA)$. Dấu « = » xảy ra khi $MT = NJ \Leftrightarrow TJ \parallel MN \Leftrightarrow G$ là điểm chính giữa của cung nhỏ AB.	0,25

Bài 5: (1,0 điểm)

Ý/Phần	Đáp án	Điểm
	Ta có BĐT Bu nhia cop ky $3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 = \dots = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 \geq 0$ $\Rightarrow (x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ nên với x,y,z>0 ta có $x + y + z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}$, áp dụng ta có	0,25

	$\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}} + \frac{1}{\sqrt{bc+b+2}} + \frac{1}{\sqrt{ca+c+2}} \leq \sqrt{3 \left(\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \right)}$ -Với $x,y>0$ ta có $x+y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow (x+y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ áp dụng ta có $\frac{1}{ab+a+2} = \frac{1}{ab+1+a+1} = \frac{1}{ab+abc+a+1} = \frac{1}{ab(c+1)+(a+1)}$ $\leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{ab(c+1)} + \frac{1}{a+1} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{abc}{ab(c+1)} + \frac{1}{a+1} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{c}{c+1} + \frac{1}{a+1} \right)$ Vậy ta có $\frac{1}{ab+a+2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{c}{c+1} + \frac{1}{a+1} \right)$ Tương tự ta có $\frac{1}{bc+b+2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a}{a+1} + \frac{1}{b+1} \right);$ $\frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{b}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right) \text{ nên}$ $\sqrt{3 \left(\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \right)}$ $\leq \sqrt{3 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{c}{c+1} + \frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{1}{c+1} \right)} = \frac{3}{2}$	0,25 0,25
	Vậy $\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}} + \frac{1}{\sqrt{bc+b+2}} + \frac{1}{\sqrt{ca+c+2}} \leq \frac{3}{2}$ dấu “=” có khi $a=b=c=1$	0,25

Học sinh làm theo cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa