CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM

Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

Nghệ An, ngày 10 tháng 10 năm 2020

BÁO CÁO

BIỆN PHÁPNÂNG CAO CHẤT LƯỢNG CÔNG TÁC GIẢNG DẠY

Tên biện pháp:

Giúp học sinh định hướng cách giải một số dạng toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất thường gặp.

Mã số dự thi:.....(Để trống, GVghi mã số sau khi bắt thăm)

I – LÝ DO CHỌN BIỆN PHÁP

1. Thực trạng

Người xưa từng nói "Hiền tài l nguyên khí của quốc gia" vì vậy bồi dưỡng học sinh giỏi là bước đi đầu tiên để đào tạo nhân tài cho đất nước, cho địa phương và là nhiệm vụ trọng tâm của toàn nghành giáo dục ở nước ta hiện nay. Nhiệm vụ đó còn đặc biệt hơn đối với trường THCS Anh Sơn khi được chọn là một trong 9 trường THCS trong toàn tỉnh Nghệ An làm thí điểm xây dựng trường trọng điểm chất lượng cao giai đoạn 2019-2023 theo kế hoạch 306/KH-UBND ngày 23/5/2019 của UBND tỉnh Nghệ An. Trong đó tỷ lệ đậu học sinh giỏi cấp tỉnh là 70% trở lên trong tổng số học sinh dự thi, trong số đậu phải có 80% trở lên có giải. Trường THCS Anh Sơn là trung tâm giáo dục chất lượng cao của huyện Anh Sơn, nhiệm vụ bồi dưỡng học sinh giỏi vừa là nhiệm vụ chuyên môn vừa là nhiệm vụ chính trị đặc biệt quan trọng đối với nhà trường. Công việc này có tác dụng rất mạnh mẽ và thiết thực để nâng cao trình độ chuyên môn nghiệp vụ của giáo viên, tạo khí thế hăng say vươn lên trong học tập của học sinh từ đó góp phần nâng cao chất lượng giáo dục toàn điện góp phần khẳng định tên tuổi của nhà trường. Là một giáo viên giảng dạy môn Toán tại trường trọng điểm chất lượng cao trực tiếp bồi dưỡng đội tuyển học sinh giỏi cho năm học 2020-2021, tôi muốn góp một phần công sức cùng nhà trường thực hiện thành công các tiêu chí đặt ra.

Căn cứ giới hạn chương trình và cấu trúc đề thi học sinh giỏi lớp 9 môn Toán của Sở GD&ĐT Nghệ An năm học 2020-2021. Căn cứ vào kế hoạch và khung chương trình bồi dưỡng học sinh giỏi tỉnh môn Toán năm học 2020-2021

của trường THCS Anh Sơn đã được phòng GD&ĐT Anh Sơn phê duyệt trong đó có mảng kiến thức về tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất đây là một trong những kiến thức khó, nhiều học sinh khá thậm chí giỏi còn gặp rất nhiều khó khăn, lúng túng, không định hướng được lối đi dẫn đến lo ngại tránh né. Hơn nữa, thời lượng dành cho nó rất ít. Do đó, tôi mạnh dạn nêu ra biện pháp ***"Giúp học sinh định hướng cách giải một số dạng toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất thường gặp".*** Vì thời lượng có hạn và năng lực còn hạn chế nên tôi chỉ đưa ra bốn dạng toán thường gặp cùng với phương pháp xử lý với mong muốn là một tài liệu nhỏ giúp học sinh đỡ khó khăn khi gặp một số bài tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất có dạng trên.

Qua khảo sát 33 em học sinh trong đội tuyển học sinh giỏi lớp 9 năm học 2020-2021 của trường THCS Anh Sơn khi chưa sử dụng biện pháp với đề bài như sau:

Bài 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$C = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5}$$

Bài 2. Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y \geq 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 3x + 4y + \frac{5}{x} + \frac{9}{y}$$

Bài 3. Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn x + y + z = 2020.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \sqrt{2x^2 + xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + zx + 2x^2}$$

Bài 4. Cho các số thực x, y thỏa mãn x > 1, y > 2.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x - 1}}{x} + \frac{\sqrt{y - 2}}{y}$$

Thì kết quả đạt được như sau:

Tổng số HS	ĐIỂM									
	Dưới 3,5		3,5 - dưới 5		5 - dưới 6,5		6,5 - dưới 8		8 - 10	
	SL	%	SL	%	SL	%	SL	%	SL	%
33	14	42,4	6	18,2	2	6,1	6	18,2	5	15,2

2. Nguyên nhân

Qua kết quả khảo sát trên cũng như qua thực tế giảng dạy và quá trình ôn thi có thể rút ra được một số nguyên nhân dẫn đến mức độ nắm bắt và vận dụng chưa tốt kiến thức ở học sinh về dạng toán này như sau:

- Đây là dạng toán tương đối khó với học sinh, học sinh chưa được trang bị các phương pháp tìm, nên suy luận còn hạn chế và nhiều khi không có lối thoát dẫn đến kết quả rất thấp và đặc biệt đối với học sinh tính tự học chưa cao các em càng khó giải quyết.

- Học sinh không biết bài toán đã cho thuộc những dạng toán nào nên không định hướng cách giải dẫn đến sai lầm hoặc bế tắc.

- Thời gian luyện tập tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức thường ít hoặc không có thời gian, là dạng toán khó nên việc đưa vào dạy cho tất cả học sinh trong giờ học chính khóa là không khả thi vì vậy học sinh chưa có thời gian để ôn tập, làm bài tập, giải đề thi nhiều.

- Kinh nghiệm giải toán về tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất và ứng dụng của dạng toán này còn ít, học sinh không hứng thú khi gặp bài toán phức tạp, các em thường có tâm lý "bỏ qua" khi gặp dạng toán này.

- Do tác động của đại dịch Co-vid 19 nên thời lượng học sinh tham gia học tập trực tiếp tại lớp năm học vừa qua bị gián đoạn, thu hẹp, chương trình phải giảm tải, nhập bài, các kỳ thi học sinh giỏi cũng phải hủy bỏ nên việc đi sâu khai thác các dạng toán về tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất ở lớp 8 vừa qua để tạo tiền đề cho năm nay là hầu như không triển khai được.

3. Yêu cầu cần giải quyết

Trong các nguyên nhân thì ngoài nguyên nhân khách quan là học sinh mất căn bản hoặc không thích học thì nguyên nhân chủ quan là học sinh không nắm bắt được phương pháp giải toán, không định hướng được cách giải. Vì thế việc dạy cho học sinh nắm được phương pháp, học sinh nhìn thấy bài toán biết sử dụng cách nào để giải là điều quan trọng nhất của người giáo viên dạy toán.

Để giúp cho học sinh nắm được phương pháp giải và định hướng được cách làm của từng dạng, tôi đã tham khảo các tài liệu bồi dưỡng học sinh giỏi, các đề thi học sinh giỏi qua nhiều năm và qua mạng internet và bằng kinh nghiệm của bản thân đã nghiên cứu, tìm hiểu, phân dạng từ đó tôi đã tổng hợp, xây dựng được hệ thống bài tập phong phú. Với hệ thống bài tập sắp xếp theo dạng, thông qua các dạng toán này giúp học sinh tự rút kinh nghiệm và hình thành phương pháp, rèn luyện kỹ năng giải, giúp các em dễ dàng ghi nhớ, dễ dàng phân biệt và áp dụng vào giải quyết các bài toán dạng này đạt kết quả cao hơn.

II – MỤC TIÊU

- Giúp học sinh nắm được các kiến thức, kĩ năng, phương pháp tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của 4 dạng biểu thức thường gặp.

- Giúp học sinh có cái nhìn sâu rộng hơn về dạng toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức, để mỗi học sinh sau khi học xong chuyên đề đều phải nắm chắc loại toán này và biết cách giải chúng.

- Rèn luyện cho học sinh khả năng định hướng, phân tích, xem xét bài toán dưới dạng đặc thù riêng lẻ. Mặt khác cần khuyến khích học sinh tìm hiểu cách giải để học sinh phát huy được khả năng tư duy linh hoạt, nhạy bén khi tìm lời giải bài toán, tạo được lòng say mê, sáng tạo, ngày càng tự tin, không còn tâm lý ngại ngùng đối với việc giải dạng toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

- Rèn luyện cho học sinh khả năng tư duy, phân tích bài toán, tránh những sai lầm, ngộ nhận trong suy luận logic, phát hiện và bồi dưỡng những học sinh có năng khiếu về toán khơi dậy niềm đam mê và yêu thích môn toán.

III – NỘI DUNG, CÁCH THỨC THỰC HIỆN

1. Nhắc lại cho học sinh các kiến thức cơ bản về giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất

Cho biểu thức f(x,y…)

- Ta nói M là giá trị lớn nhất của f(x,y…) kí hiệu maxf(x,y…) = M, nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:

- Với mọi x,y… để f(x,y…) xác định thì f(x,y…) $\leq$ M
- Tồn tại x_0, y_0… sao cho f(x_0,y_0…) = M

- Ta nói m là giá trị nhỏ nhất của f(x,y…) kí hiệu minf(x,y…) = m, nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:

- Với mọi x,y… để f(x,y…) xác định thì f(x,y…) $\geq$ m
- Tồn tại x_0, y_0… sao cho f(x_0,y_0…) = m

2. Nhắc lại cho học sinh một số bất đẳng thức cơ bản thường sử dụng khi tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất liên quan đến 4 dang toán

a) Một số bất đẳng thức phụ quan trọng:

* Với 2 số dương x, y: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$ hay $\frac{1}{x+y}\leq\frac{1}{4}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$

$\Leftrightarrow x=y$

Dấu “=” xảy ra

* Với 3 số dương x, y, z: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq\frac{9}{x+y+z}$ hay $\frac{1}{x+y+z}\leq\frac{1}{9}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z})$

$\Leftrightarrow x=y=z$

Dấu “=” xảy ra

b) Bất đẳng thức Cô-si cho 2 số không âm x, y:

* Dạng tổng sang tích: $x+y\geq2\sqrt{xy}$ hay $(x+y)^2\geq4xy$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow$ x=y

* Dạng tích sang tổng: $\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$ hay $xy\leq(\frac{x+y}{2})^2$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow$ x=y

* Dạng lũy thừa: $x^2+y^2\geq2xy$ hay $xy\leq\frac{x^2+y^2}{2}$. Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow$ x=y

* Đặc biệt: $x^2+1\geq 2x$ hay $x=x.1\leq\frac{x^2+1}{2}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x=1

c) Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cop-ski :

Cho bộ n số ($a_1;a_2;...;a_n$) và ($x_1;x_2;...;x_n$) bất kì:

$$a_1.x_1+a_2.x_2+...+a_n.x_n\leq\sqrt{(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)}$$

hay $(a_1.x_1+a_2.x_2+...+a_n.x_n)^2\leq(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}=...=\frac{x_n}{a_n}$

* Đặc biệt:

$$x_1+x_2+...+x_n=1.x_1+1.x_2+...+1.x_n\leq\sqrt{(1^2+1^2+...+1^2)(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)}$$

hay $(x_1+x_2+...+x_n)^2\leq n(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\frac{x_1}{1}=\frac{x_2}{1}=...=\frac{x_n}{1}\Leftrightarrow x_1=x_2=...=x_n$

d) Bất đẳng thức cộng mẫu số:

(còn gọi là BĐT Svac-Xơ hay BĐT Bunhiacopski-Cauchy-Schwarz viết tắt B.C.S)

* Dạng bộ 2 số (a; b) bất kỳ và (x; y) là các số dương

$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\geq\frac{(a+b)^2}{x+y}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$

* Dạng bộ 3 số (a; b; c) bất kỳ và (x; y; z) là các số dương

$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\geq\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\frac{a}{x}=\frac{b}{y}=\frac{c}{z}$

* Dạng tổng quát bộ n số ($a_1;a_2;...;a_n$) và ($x_1;x_2;...;x_n$) là các số dương

$\frac{a_1^2}{x_1}+\frac{a_2^2}{x_2}+...+\frac{a_n^2}{x_n}\geq\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{x_1+x_2+...+x_n}$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}=...=\frac{a_n}{x_n}$

3. Giáo viên cho học sinh tiếp cận đề bài lần 1 về 4 dạng toán tìm giá trị lớn nhất giá trị nhỏ nhất thường gặp mà các em hay mắc sai lầm và lúng túng thậm chí bế tắc khi giải quyết:

Dạng 1: Biểu thức là phân thức dạng $A = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + g}$

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: A = $\frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: B = $\frac{3x^2 + 14x + 15}{x^2 + 4x + 4}$

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: C = $\frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5}$

Dạng 2: Biểu thức dạng $A = ax + by + \frac{c}{x} + \frac{d}{y}$ (với a, b, c, d là các số thực cho trước và x, y là biến thỏa mãn hệ thức cho trước)

Bài 1: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn x + y $\geq$ 4. Tìm GTNN của biểu thức:

$A = 3x + 4y + \frac{5}{x} + \frac{9}{y}$

Bài 2: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y \geq \frac{7}{2}$. Tìm GTNN của biểu thức:

$B = \frac{13x}{3} + \frac{10y}{3} + \frac{1}{2x} + \frac{9}{y}$

Bài 3: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $\frac{x}{2} + y + \frac{3z}{2} \geq 5$. Tìm GTNN của biểu thức:

$C = x + y + z + \frac{3}{4x} + \frac{9}{8y} + \frac{1}{z}$

Dạng 3: $A=\sqrt{mx^2+nxy+my^2}+\sqrt{my^2+nyz+mz^2}+\sqrt{mz^2+nzx+mx^2}$

(với m, n là các số thực cho trước và x, y, z là biến thỏa mãn hệ thức cho trước)

Bài 1: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn x + y + z = 2020. Tìm GTNN của biểu thức:

$$A=\sqrt{2x^2+xy+2y^2}+\sqrt{2y^2+yz+2z^2}+\sqrt{2z^2+zx+2x^2}$$

Bài 2: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn x + y + z = 2020. Tìm GTNN của biểu thức:

$$B=\sqrt{5x^2+4xy+5y^2}+\sqrt{5y^2+4yz+5z^2}+\sqrt{5z^2+4zx+5x^2}$$

Bài 3: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}=6$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$C=\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}$$

Dạng 4:

Bài 1: Cho các số thực x, y thỏa mãn x > 1, y > 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A=\frac{\sqrt{x-1}}{x}+\frac{\sqrt{y-2}}{y}$$

Bài 2: Cho các số thực x, y thỏa mãn x > 1, y > 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B=\frac{x^2}{y-1}+\frac{y^2}{x-1}$$

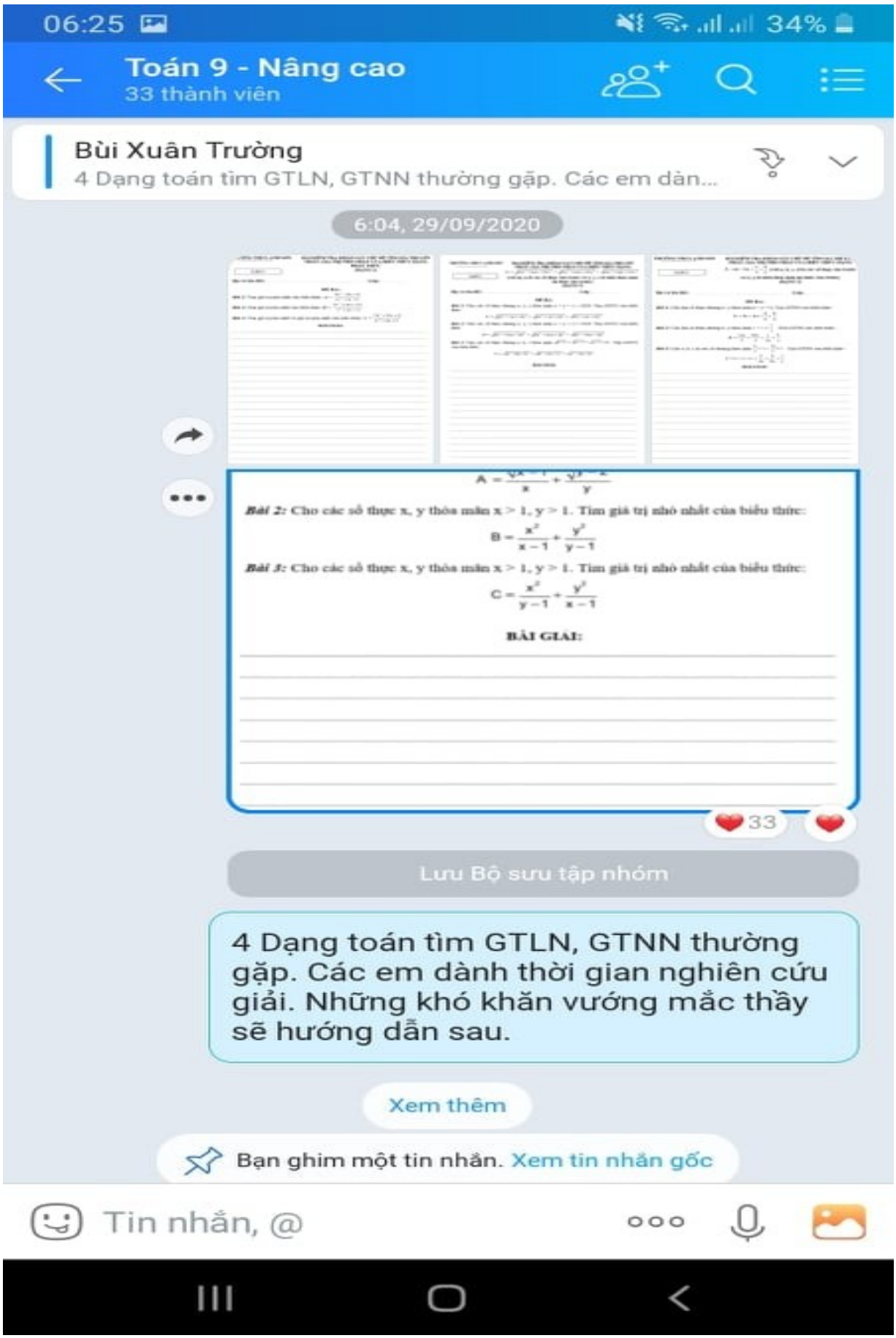
Bài 3: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x\ge 1;\ y\ge 9;\ z\ge 25$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$C=\frac{\sqrt{x-1}}{x}+\frac{\sqrt{y-9}}{y}+\frac{\sqrt{z-25}}{z}$$

Các hình thức mà bản thân đã sử dụng để học sinh tiếp cận đề bài là:

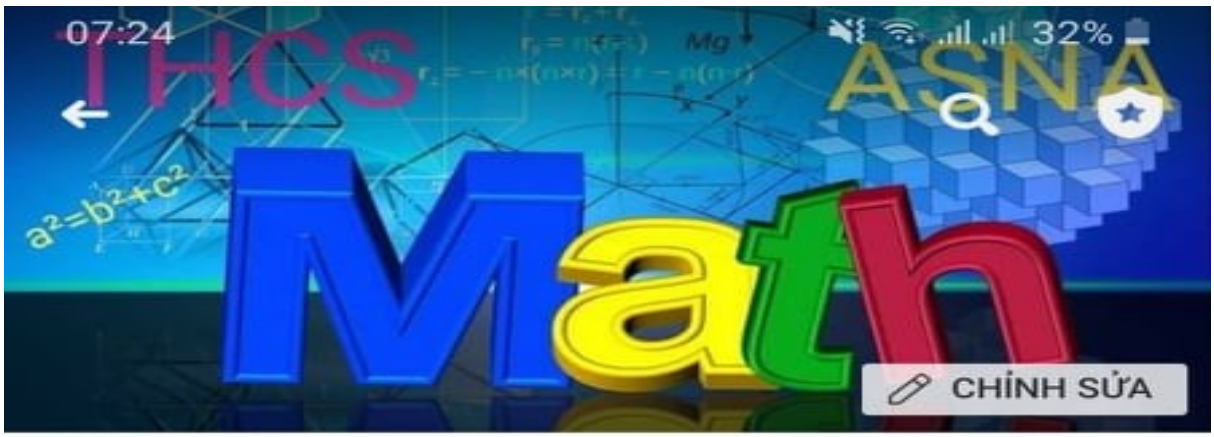
a. Giao bài qua mạng Zalo: Đăng trên nhóm Zalo

(Do bản thân làm quản trị viên)



b. Giao bài qua mạng xã hội Facebook: Đăng trên nhóm Facebook

(Do bản thân làm quản trị viên)



TOÁN THCS ASNA >

NHÓM CÔNG KHAI · 884 THÀNH VIÊN

+ Mời

Phòng họp mặt | Ảnh | Sự kiện | File | Album

Bạn viết gì đi...

Phát trực tiếp | Ảnh | Phòng họp mặt

Chủ đề bài viết phổ biến

ĐỀ THI VÀO LỚP 10

BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ

ĐỀ HSG TOÁN 9

PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỶ

ĐỀ HSG TOÁN 8

Xem tất cả

Bùi Xuân Trường cùng với **Diệu Linhh** và **3 người khác**.

Quản trị viên • 5 ngày • Công khai

4 Dạng toán tìm GTLN, GTNN thường gặp. Các em dành thời gian nghiên cứu đưa ra lời giải. Những khó khăn vướng mắc cũng như lời giải hãy để lại ở phần comment thầy sẽ hướng dẫn giải đáp, nhận xét nhé!

Ngoài ra cũng xin sự đóng góp ý tưởng từ các thầy cô giáo. Xin cảm ơn!

TRƯỜNG THCS ANH SƠN

LẦN 1

BÀI KIỂM TRA KHẢO SÁT CHỦ ĐỀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIA TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC DẠNG PHÂN THỨC (DẠNG 1)

Họ và tên HS: ..... Lớp: .....

ĐỀ RA:

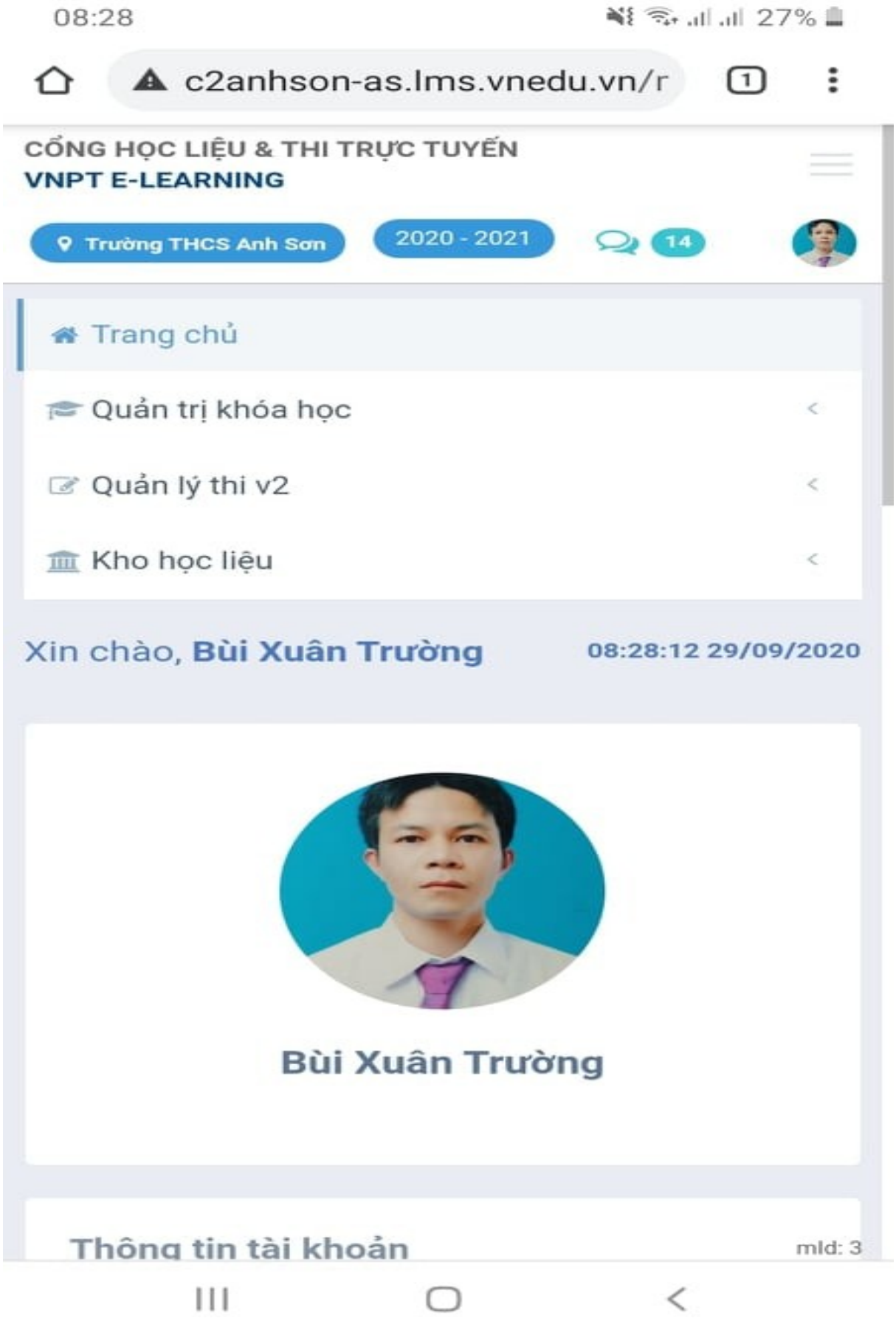
Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $B = \frac{3x^2 + 14x + 15}{x^2 + 4x + 4}$

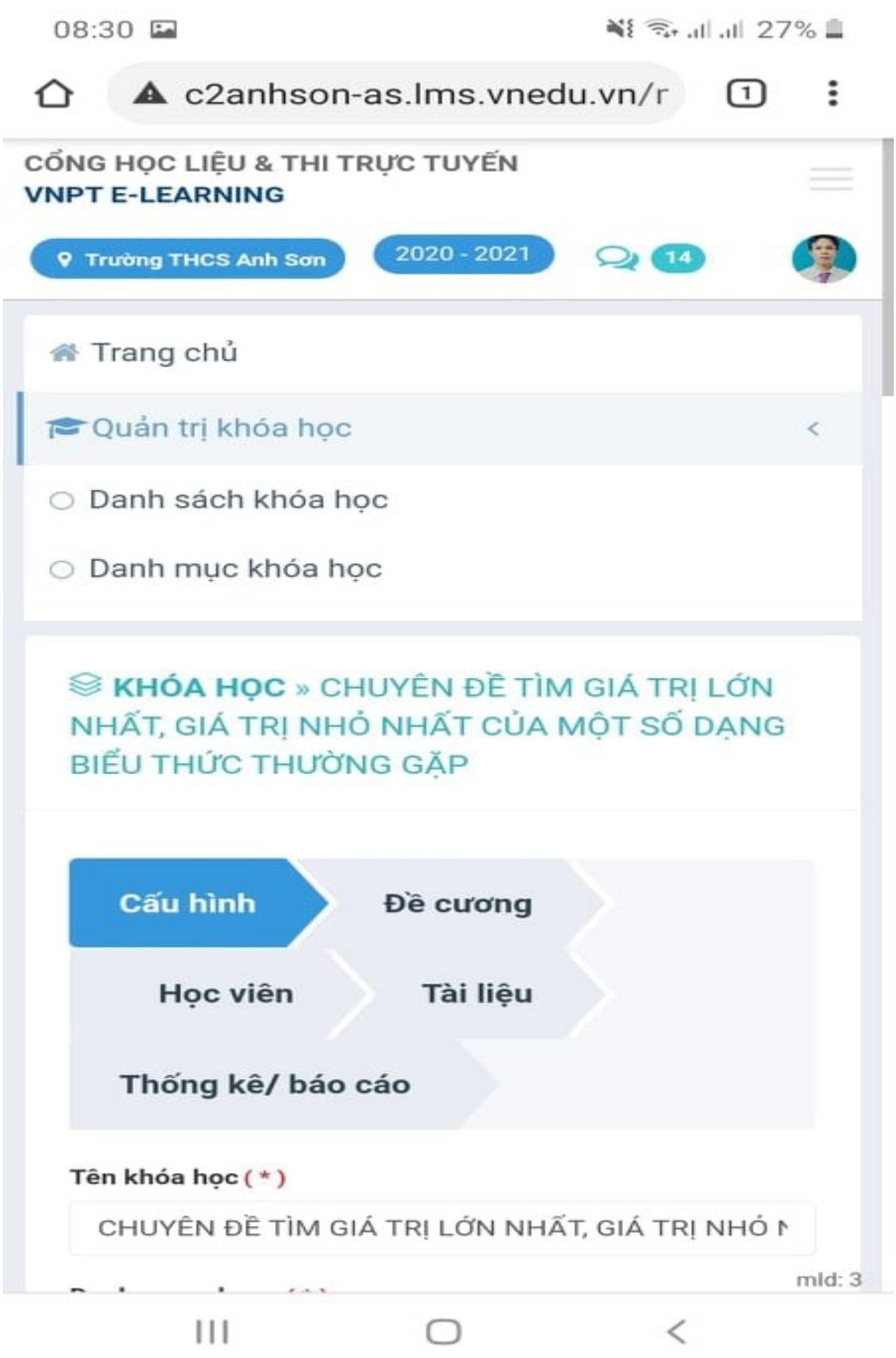
Bài 4: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5}$

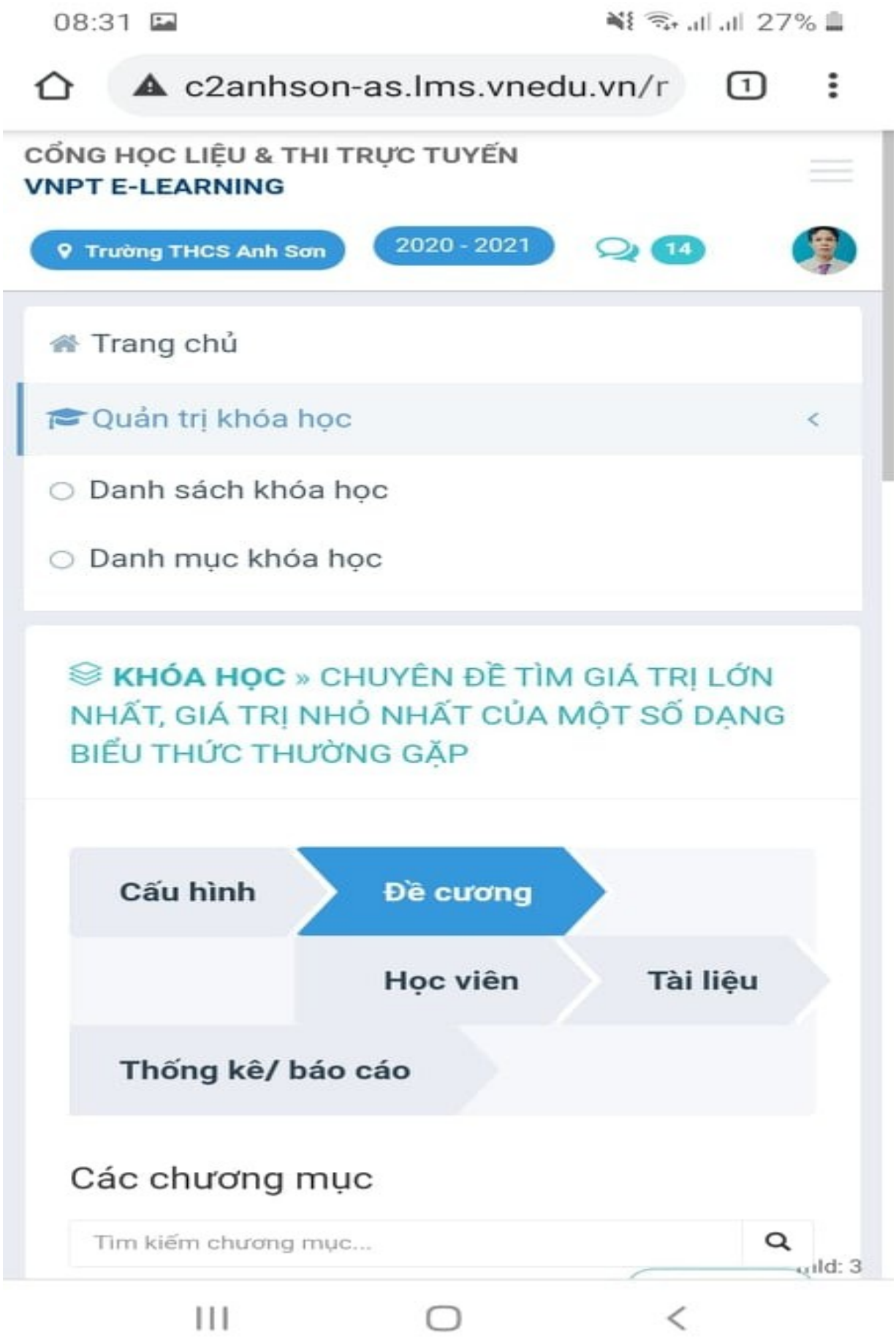
BÀI GIẢI:

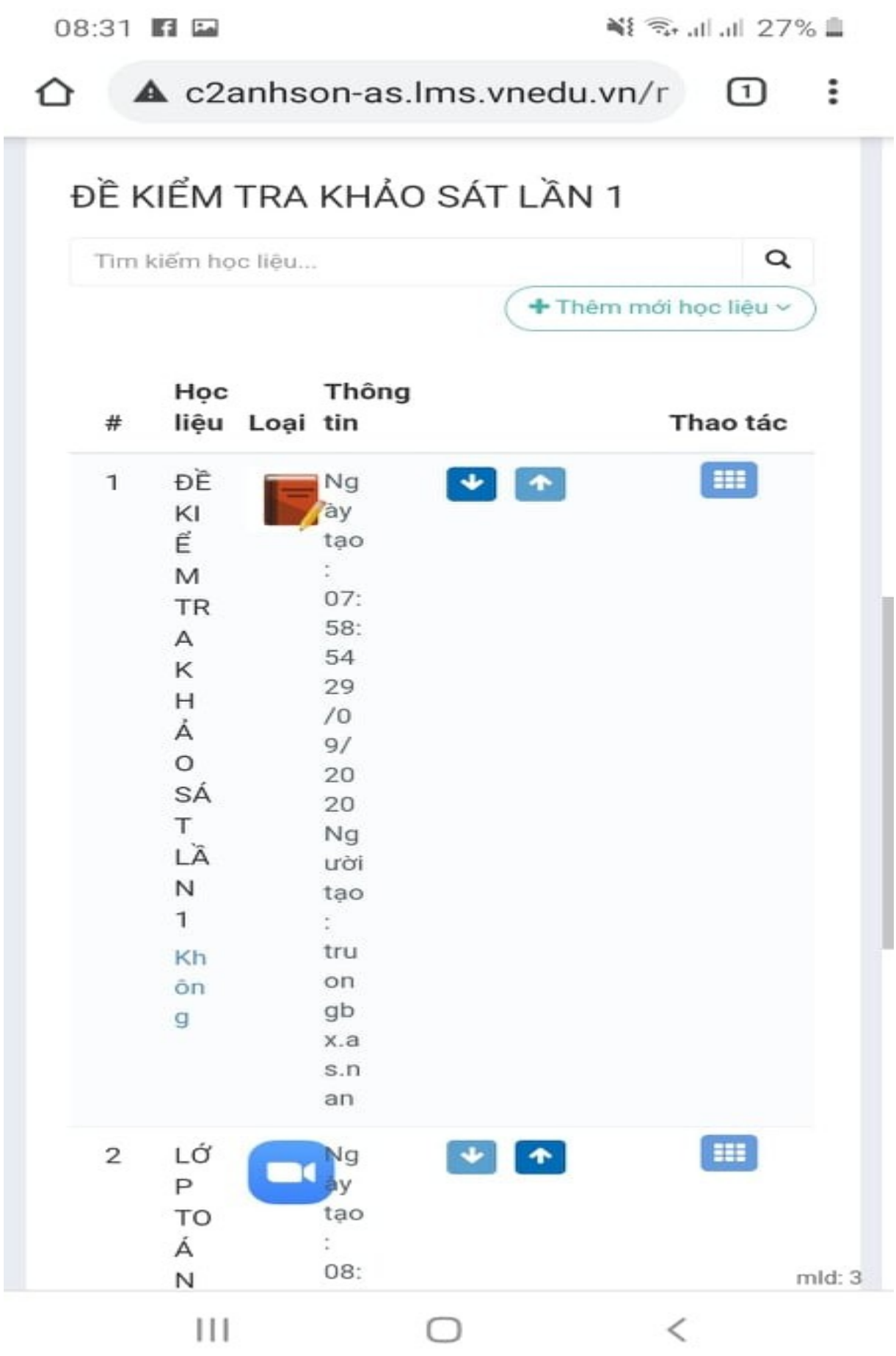
c. Giao bài và tổ chức dạy học qua hệ thống VNPT E-Learning - nền tảng học và thi trực tuyến – vnEdu với sự hỗ trợ của phần mềm Zoom



08:29
27%
c2anhson-as.lms.vnedu.vn/r
Tiêu đề
Danh mục
Khối
Môn
Cấu hình
Đề cương
Thông tin khác
Thao tác
CHUYÊN ĐỀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA MỘT SỐ DẠNG BIỂU THỨC THƯỜNG GẶP
Lớp Toán - Thầy Trường
Khối 8
Toán học
Bắt đầu: 00:00:00 20/08/2020
Kết thúc: 23:59:00 20/05/2021
Số chương mục:
Số học liệu:
Ngày tạo: 22:15:31 28/09/2020
Người tạo: Bùi Xuân Trường


08:30
27%
c2anhson-as.lms.vnedu.vn/r
CỔNG HỌC LIỆU & THI TRỰC TUYẾN
VNPT E-LEARNING
Trường THCS Anh Sơn
2020 - 2021
14
Trang chủ
Quản trị khóa học
Danh sách khóa học
Danh mục khóa học
KHÓA HỌC » CHUYÊN ĐỀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA MỘT SỐ DẠNG BIỂU THỨC THƯỜNG GẶP
Cấu hình
Đề cương
Học viên
Tài liệu
Thống kê/ báo cáo
Tên khóa học (*)
CHUYÊN ĐỀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ N
mld: 3


08:31
27%
c2anhson-as.lms.vnedu.vn/r
CỔNG HỌC LIỆU & THI TRỰC TUYẾN
VNPT E-LEARNING
Trường THCS Anh Sơn
2020 - 2021
14
Trang chủ
Quản trị khóa học
Danh sách khóa học
Danh mục khóa học
KHÓA HỌC » CHUYÊN ĐỀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA MỘT SỐ DẠNG BIỂU THỨC THƯỜNG GẶP
Cấu hình
Đề cương
Học viên
Tài liệu
Thống kê/ báo cáo
Các chương mục
Tìm kiếm chương mục...


08:31
27%
c2anhson-as.lms.vnedu.vn/r
ĐỀ KIỂM TRA KHẢO SÁT LẦN 1
Tìm kiếm học liệu...
Thêm mới học liệu
Học liệu Loại Thông tin Thao tác
1 ĐỀ KIỂM TRA KHẢO SÁT LẦN 1 Không Ngày tạo: 07:58:54 29/09/2020 Người tạo: truongbx.as.nan
2 LỚP TOÁN Ngày tạo: 08:
mId: 3

4. Tổ chức khảo sát trực tiếp 1 buổi tại lớp học: Phô tô đề bài cho học sinh

Kết quả bài kiểm tra khảo sát lần 1:

Tổng số HS	ĐIỂM									
	Dưới 3,5		3,5 - dưới 5		5 - dưới 6,5		6,5 - dưới 8		8 - 10	
	SL	%	SL	%	SL	%	SL	%	SL	%
33	0	0	0	0	8	24,2	10	30,3	15	45,5

Do trước khi làm bài khảo sát trực tiếp tại lớp học các em đã được tiếp cận, trao đổi, hỏi đáp tương tác hướng dẫn qua Zalo, Facebok, đặc biệt là dạy học trực tuyến nên kết quả có cao hơn so với bài khảo sát lần đầu tiên. Tuy

nhiên để giúp các em hiểu rõ hơn, sâu hơn, nắm chắc hơn giúp các em định hướng cách giải của các dạng toán này bản thân tôi dựa trên lịch phân công của nhà trường đã tiến hành dạy học trực tiếp tại lớp học. Cụ thể từng dạng như sau:

5. Bằng hình thức dạy học trực tiếp tại lớp học tôi cố gắng truyền tải đến học sinh những nội dung dưới đây.

DẠNG 1

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT CỦA PHÂN THỨC

$$A = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + g}$$

Trong đó x là biến; a, b, c, d, e, f là các số đã cho và giá trị của A được xác định

I - Trường hợp mẫu thức viết được dưới dạng $dx^2 + ex + g = (ux + v)^2$

***Bài 1**:* Tìm GTNN của biểu thức: $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1}$

Giáo viên cho học sinh nghiên cứa lời giải

Giải: ĐKXĐ của phân thức là $x \neq 1$

Ta có: $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} = \frac{2(x^2 - 2x + 1) + x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2x + 1}$

$= 2 + \frac{(x - 2)^2}{(x - 1)^2} \geq 2$ với mọi $x \neq 1$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ x – 2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = 2 (TM ĐK)

Vậy GTNN của biểu thức A bằng 2 đạt được khi x = 2.

Phần lớn HS khi đọc lời giải không hiểu được dựa vào cơ sở nào mà lại tách như vậy. Sau đây là một số cách giúp HS nhanh chóng tìm ra lời giải.

Cách 1:

Ta có: $A = \frac{3x^2 - 8x + 6}{x^2 - 2x + 1} \Leftrightarrow A(x^2 - 2x + 1) = 3x^2 - 8x + 6$

$\Leftrightarrow Ax^2 - 3x^2 - 2Ax + 8x + A - 6 = 0$

$\Leftrightarrow (A - 3)x^2 - 2(A - 4)x + A - 6 = 0 \quad (1)$

* Nếu $A - 3 = 0 \Leftrightarrow A = 3$ (*)

* Nếu $A-3\neq 0\Leftrightarrow A\neq 3$ khi đó chia cả 2 vế của (1) cho A-3 ta có:

$$x^2-2.\frac{A-4}{A-3}x+\frac{A-6}{A-3}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2.x.\left(\frac{A-4}{A-3}\right)+\left(\frac{A-4}{A-3}\right)^2=\left(\frac{A-4}{A-3}\right)^2-\frac{A-6}{A-3}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{A-4}{A-3}\right)^2=\frac{A-2}{(A-3)^2}$$

Vì VT ≥ 0 nên VP $\geq 0 \Rightarrow A-2\geq 0\Leftrightarrow A\geq 2$ (**)

So sánh (*) và (**) ta có A = 2 là giá trị nhỏ nhất của A

Cách 2:

Ta có: $A=\frac{3x^2-8x+6}{x^2-2x+1}\Leftrightarrow A(x^2-2x+1)=3x^2-8x+6$

$$\Leftrightarrow Ax^2-3x^2-2Ax+8x+A-6=0$$

$$\Leftrightarrow (A-3)x^2-2(A-4)x+A-6=0 \quad (1)$$

* Nếu $A-3=0\Leftrightarrow A=3$ (*)

* Nếu $A-3\neq 0\Leftrightarrow A\neq 3$

Xét $\Delta'=\left[-(A-4)\right]^2-(A-3)(A-6)=A-2$

Để pt (1) có nghiệm thì $\Delta'\geq 0\Leftrightarrow A-2\geq 0\Leftrightarrow A\geq 2$ (**)

So sánh (*) và (**) ta có A = 2 là giá trị nhỏ nhất của A

Như vậy học sinh có thể dùng một trong 2 cách trên để làm cơ sở phân tích tử của phân thức đã cho từ đó nhanh chóng giải quyết được bài toán đặt ra.

Ngoài ra đối với dạng này giáo viên có thể hướng dẫn học sinh biến đổi như sau:

Để tìm GTLN hoặc GTNN của phân thức dạng $A=\frac{ax^2+bx+c}{(ux+v)^2}$ *ta biến đổi như sau:*

- Viết tử thức dưới dạng $a(ux+v)^2+p(ux+v)+q$ (p, q là hằng số)

Do vậy ta có : A = $\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+g}=a+p.\frac{1}{ux+v}+q\left(\frac{1}{ux+v}\right)^2$

- Nếu đặt t = $\frac{1}{ux+v}$ *, bài toán đưa về dạng quen thuộc tìm GTLN, GTNN của* $qx^2 + px + a$ *, nếu không đặt thì biến đổi trực tiếp như trên.*

Áp dụng đối với ví dụ trên ta có:

ĐKXĐ của phân thức là $x \neq 1$

Ta có: A $=\frac{3x^2-8x+6}{x^2-2x+1}=\frac{3(x^2-2x+1)-2(x-1)+1}{(x-1)^2}=\frac{3(x-1)^2-2(x-1)+1}{(x-1)^2}$

$$=3-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}=\left(\frac{1}{x-1}\right)^2-2.\frac{1}{x-1}.1+1^2+2=\left(\frac{1}{x-1}-1\right)^2+2\geq 2$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{x-1}-1=0 \Leftrightarrow$ x = 2 (TM ĐK)

Vậy GTNN của biểu thức A bằng 2 đạt được khi x = 2.

Bài 2*:* Tìm GTLN của biểu thức sau: B = $\frac{3x^2+14x+15}{x^2+4x+4}$

Dự đoán cực trị

Cách 1:

Ta có: $B=\frac{3x^2+14x+15}{x^2+4x+4} \Leftrightarrow Bx^2-3x^2+4Bx-14x+4B-15=0$

$$\Leftrightarrow (B-3)x^2+(4B-14)x+4B-15=0 \qquad (1)$$

* Nếu $B-3=0 \Leftrightarrow B=3$ (*)

* Nếu $B-3\neq 0 \Leftrightarrow B\neq 3$ khi đó chia cả 2 vế của (1) cho B-3 ta có:

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{4B-14}{B-3}x+\frac{4B-15}{B-3}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2+2.x.\frac{2B-7}{B-3}+\left(\frac{2B-7}{B-3}\right)^2=\left(\frac{2B-7}{B-3}\right)^2-\frac{4B-15}{B-3}$$

$$\Leftrightarrow \left(x-\frac{2B-7}{B-3}\right)^2=\frac{-B+4}{(B-3)^2}$$

Vì VT ≥ 0 nên VP $\geq 0 \Rightarrow -B+4\geq 0\Leftrightarrow B\leq 4$ (**)

So sánh (*) và (**) ta có B = 4 là giá trị lớn nhất của B

Cách 2:

Ta có: $B=\frac{3x^2+14x+15}{x^2+4x+4}\Leftrightarrow Bx^2-3x^2+4Bx-14x+4B-15=0$

$$\Leftrightarrow (B-3)x^2+(4B-14)x+4B-15=0 \qquad (1)$$

* Nếu $B-3=0\Leftrightarrow B=3$ (*)

* Nếu $B-3\neq 0\Leftrightarrow B\neq 3$

Xét $\Delta'=(2B-7)^2-(B-3)(4B-15)=-B+4$

Để pt (1) có nghiệm thì $\Delta'\geq 0\Leftrightarrow -B+4\geq 0\Leftrightarrow B\leq 4$ (**)

So sánh (*) và (**) ta có B = 4 là giá trị lớn nhất của B

Qua các cách dự đoán cực trị trên thì ta có dễ dàng đưa ra lời giải như sau:

Giải: ĐKXĐ của phân thức là $x\neq -2$

Ta có: $B=\frac{3x^2+14x+15}{x^2+4x+4}=\frac{4(x^2+4x+4)-(x^2+2x+1)}{(x^2+4x+4)^2}$

$$=\frac{4(x+2)^2-(x+1)^2}{(x+2)^2}=4-\left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2\leq 4$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy GTNN của biểu thức B bằng 4 đạt được khi x = -1.

Cách 3: Biến đổi B về dạng $B=\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+g}=a+p.\frac{1}{ux+v}+q\left(\frac{1}{ux+v}\right)^2$

Giải: ĐKXĐ của phân thức là $x \neq -2$

Ta có: $B = \dfrac{3x^2+14x+15}{x^2+4x+4} = \dfrac{3(x^2+4x+4)+2(x+2)-1}{(x+2)^2}$

$= 3+2.\dfrac{1}{(x+2)} - \left(\dfrac{1}{x+2}\right)^2 = -\dfrac{1}{(x+1)^2} + 2.\dfrac{1}{x+2}.1 - 1 + 4$

$= -\left(\dfrac{1}{x+2} - 1\right)^2 + 4 \leq 4$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x+2} = 1 \Leftrightarrow x = -1$ (thỏa mãn ĐKXĐ)

Vậy GTNN của biểu thức B bằng 4 đạt dược khi x = -1.

II - Trường hợp mẫu thức viết được dưới dạng $dx^2+ ex + g = (ux + v)^2 + m$ (với m là hằng số dương)

Bài 3: Tìm GTNN và GTLN của biểu thức: $C = \dfrac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$

Dự đoán cực trị:

$$C = \frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5} \Leftrightarrow Cx^2 - 2x^2 + 4Cx - 6x + 5C - 6 = 0$$

Cách 1: Ta có:

$\Leftrightarrow (C-2)x^2 + 2(2C-3)x + 5C - 6 = 0 \quad (1)$

* Nếu $C - 2 = 0 \Leftrightarrow C = 2$ (*)

* Nếu $C - 2 \neq 0 \Leftrightarrow C \neq 2$ khi đó chia cả 2 vế của (1) cho C-2 ta có:

$\Leftrightarrow x^2 - \dfrac{2(2C-3)}{C-2}x + \dfrac{5C-6}{C-2} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2.x.\dfrac{2C-3}{C-2} + \left(\dfrac{2C-3}{C-2}\right)^2 = \left(\dfrac{2C-3}{C-2}\right)^2 - \dfrac{5C-6}{C-2}$

$\Leftrightarrow \left(x - \dfrac{2C-3}{C-2}\right)^2 = \dfrac{-C^2+4C-3}{(C-2)^2}$

Vì VT ≥ 0 nên VP $\geq 0 \Rightarrow -C^2+4C-3\geq 0\Leftrightarrow (C-1)(3-C)\geq 0\Leftrightarrow 1\leq C\leq 3$

Cách 2: Ta có: $C=\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}\Leftrightarrow Cx^2-2x^2+4Cx-6x+5C-6=0$

$$\Leftrightarrow (C-2)x^2+2(2C-3)x+5C-6=0 \qquad (1)$$

* Nếu $C-2=0\Leftrightarrow C=2$ (*)

* Nếu $C-2\neq 0\Leftrightarrow C\neq 2$

Xét $\Delta'=(2C-3)^2-(C-2)(5C-6)=-C^2+4C-3$

Để pt (1) có nghiệm thì

$\Delta'\geq 0\Rightarrow -C^2+4C-3\geq 0\Leftrightarrow (C-1)(3-C)\geq 0\Leftrightarrow 1\leq C\leq 3$

Qua các cách dự đoán cực trị trên thì ta có dễ dàng đưa ra lời giải như sau:

Giải: Vì $x^2+4x+5=(x+2)^2+1>0$ với mọi x nên phân thức B xác định với mọi x.

+) $C=\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}=\frac{1.(x^2+4x+5)+(x^2+2x+1)}{x^2+4x+5}=1+\frac{(x+1)^2}{(x+2)^2+1}\geq 1$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$.

Vậy GTNN của C = 1 đạt được khi x = -1

+) $C=\frac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}=\frac{3.(x^2+4x+5)-(x^2+6x+9)}{x^2+4x+5}=3-\frac{(x+3)^2}{(x+2)^2+1}\geq 3$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow x+3=0\Leftrightarrow x=-3$.

Vậy GTLN của C = 3 đạt được khi x = -3

- *<u>Nhận xét</u>: Để tìm GTLN hoặc GTNN của phân thức dạng* $A=\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+g}$ *Trong đó mẫu thức viết được dưới dạng* $(ux+v)^2+m$ *(Với m là hằng số dương) GV nên hướng dẫn HS dùng cách 1 hoặc cách 2 để dự đoán cực trị để có căn cứ trình bày lời giải và cần lưu ý HS phải nắm vững cách viết một biểu thức thành bình phương của một tổng hoặc bình phương của một hiệu; cách quy đồng phân thức; cách phân tích đa thức thành nhân tử bằng phương pháp tách các hạng tử.*

DẠNG 2

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

DẠNG $A = ax + by + \frac{c}{x} + \frac{d}{y}$ **(với a, b, c, d là các số thực cho trước và x, y là biến thỏa mãn hệ thức cho trước)**

Bài 1: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y \geq 4$.

Tìm GTNN của biểu thức: $A = 3x + 4y + \frac{5}{x} + \frac{9}{y}$

* Phân tích: Nhiều HS mắc sai lầm như sau:

Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$A = 3x + 4y + \frac{5}{x} + \frac{9}{y} = \left(3x + \frac{5}{x}\right) + \left(4y + \frac{9}{y}\right)$$

$$\geq 2\sqrt{3x.\frac{5}{x}} + 2\sqrt{4y.\frac{9}{y}} = 2.\sqrt{15} + 12$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{5}{x} \\ 4y = \frac{9}{y} \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{5}{3}} \\ y = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Dấu "=" xảy ra

Và kết luận GTNN của A là $2.\sqrt{15} + 12$ đạt được khi $x = \sqrt{\frac{5}{3}}; y = \frac{3}{2}$ mà quên điều kiện của GT cho là $x + y \geq 4$

Giáo viên cho học sinh nghiên cứu lời giải:

Giải: Với x,y > 0 ta có:

$$A = 3x + 4y + \frac{5}{x} + \frac{9}{y} = \left(\frac{5}{x} + \frac{5x}{4}\right) + \left(\frac{9}{y} + \frac{9y}{4}\right) + \left(\frac{7x}{4} + \frac{7y}{4}\right)$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{5}{x}.\frac{5x}{4}} + 2\sqrt{\frac{9}{y}.\frac{9y}{4}} + \frac{7}{4}(x + y)$$

(BĐT Cô-si)

$\geq 2.\frac{5}{2} + 2.\frac{9}{2} + \frac{7}{4}.4 = 21$ (vì $x + y \geq 4$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x} = \frac{5x}{4} \\ \frac{9}{y} = \frac{9y}{4} \\ x+y=4 \\ x,y>0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$$

Dấu "=" xảy ra

Vậy GTNN của A là 21 đạt được khi x = y = 2

Phần lớn HS khi đọc lời giải không hiểu được dựa vào cơ sở nào mà lại tách như vậy. Sau đây là một số cách giúp HS nhanh chóng tìm ra lời giải.

Lập bảng dự đoán điểm rơi:

(x; y)	(1; 3)	(2; 2)	(3; 1)
A	23	21	$\approx 23,67$

Phân tích

Dựa vào bảng trên ta dự đoán được GTNN của A là 21 khi x = y = 2

Từ đó cần ghép $\frac{5}{x}$ với mx để khi áp dụng BĐT Cô-si thì dấu "=" xảy ra khi x=2

Tức $\frac{5}{2} = m2 \Leftrightarrow m = \frac{5}{4}$. Như vậy ta có nhóm thứ nhất $\frac{5}{x} + \frac{5x}{4}$

Tương tự $\frac{9}{2} = n.2 \Leftrightarrow n = \frac{9}{4}$, ta có nhóm thứ hai $\frac{9}{y} + \frac{9y}{4}$

Nhóm còn lại sẽ là $3x + 4y - \left(\frac{5x}{4} + \frac{9y}{4}\right) = \frac{7x}{4} + \frac{7y}{4} = \frac{7}{4}(x+y)$ nhóm còn lại xuất hiện thừa số x + y như giả thiết nên từ đó ta có lời giải đúng như trên.

- Nhận xét: Để tìm cực trị của những biểu thức dạng này GV cần nhấn mạnh cho HS tránh sai lầm như cách phân tích trong ví dụ 1. Dựa vào hệ thức liên hệ giữa x và y để lập bảng dự đoán điểm rơi và lưu ý học sinh điểm rơi không phải bao giờ cũng là các số nguyên mà có thể là số thập phân; phân số; số vô tỉ; …

Bài 2: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x+y\ge\frac{7}{2}$.

Tìm GTNN của biểu thức: $B=\frac{13x}{3}+\frac{10y}{3}+\frac{1}{2x}+\frac{9}{y}$

Lập bảng dự đoán điểm rơi:

(x; y)	$\left(1;\frac{5}{2}\right)$	$\left(2;\frac{3}{2}\right)$	$\left(3;\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2};3\right)$	$\left(\frac{3}{2};2\right)$	$\left(\frac{5}{2};1\right)$
B	$\approx$ 16,77	$\approx$19,92	$\approx$32,83	$\approx$16,17	18	$\approx$23,37

Phân tích

Dựa vào bảng ta thấy $B_{min}=16,67$ khi $x=\frac{1}{2};y=3$

+) Cần có $\frac{1}{2x}=mx$ mà $x=\frac{1}{2}\Rightarrow m=2$

$\Rightarrow$ Ta ghép được cặp $\frac{1}{2x}+2x$. Do đó cần tách và $\frac{13x}{3}=2x+\frac{7x}{3}$

+) $\frac{9}{y}=ny$ mà $y=3\Rightarrow n=1$

$\Rightarrow$ Ta ghép được cặp $\frac{9}{y}+y$ tách được $\frac{10y}{3}=y+\frac{7y}{3}$

Từ đó ta có lời giải như sau :

Lời giải

$$B=\frac{13x}{3}+\frac{10y}{3}+\frac{1}{2x}+\frac{9}{y}=\left(\frac{1}{2x}+2x\right)+\left(\frac{9}{y}+y\right)+\frac{7x}{3}+\frac{7y}{3}$$

$$\overset{cosi}{\ge}2\sqrt{\frac{1}{2x}.2x}+2\sqrt{\frac{9}{y}.y}+\frac{7}{3}(x+y)$$

$$\ge 2.1+2.3+\frac{7}{3}.\frac{7}{2}=\frac{97}{6}\approx 16,67$$ (vì $x+y\ge\frac{7}{2}$)

$$\begin{cases} \frac{1}{2x} = 2x \\ \frac{9}{y} = y \\ x + y = \frac{7}{2} \\ x, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases}$$

Dấu "=" xảy ra khi

Vậy $B_{min} = 16,67$ khi $x = \frac{1}{2}; y = 3$

Tuy nhiên có những bài điểm rơi là các số thập phân vô hạn tuần hoàn hay là những số vô tỉ thậm chí có những bài ta không thể dự đoán được thì ta giải quyết như thế nào?

Ta dùng phương pháp hệ số bất định như sau:

> ***Bài toán tổng quát***: Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn mx + ny = k.
>
> Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = ax + by + \frac{c}{x} + \frac{d}{y}$

Ta viết A dưới dạng

$$A = ax + by + \frac{c}{x} + \frac{d}{y} + q(mx + ny) - q(mx + ny)$$

$$A = \left[(a + qm)x + \frac{c}{x}\right] + \left[(b + qn)y + \frac{d}{y}\right] - q(mx + ny) \quad (1)$$

$$\overset{\cos i}{\geq} 2\sqrt{(a + qm)x.\frac{c}{x}} + 2\sqrt{(b + qn)y.\frac{d}{y}} - q(mx + ny)$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{c}{a + qm}}; y = \sqrt{\frac{d}{b + qn}}$$

Dấu "=" xảy ra

$$mx + ny = k \Rightarrow m\sqrt{\frac{c}{a + qm}} + n\sqrt{\frac{d}{b + qn}} = k(*)$$

Mà

Giải phương trình (*) tìm được q (vì a, b, c, d, m, n, k đã cho trước)

Việc giải phương trình (*) chỉ cần nhẩm nghiệm hoặc bấm máy tính bỏ túi CASIO-FX-570

Thay q tìm được vào (1) ta có ngay cách giải bài toán.

Quay lại bài toán 1

> Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y \geq 4$.
>
> Tìm GTNN của biểu thức: $A = 3x + 4y + \frac{5}{x} + \frac{9}{y}$

<u>Phân tích</u>

Ở bài toán này: m = 1; n = 1; k = 4

a = 3; b = 4; c = 5; d = 9

$$A = 3x + 4y + \frac{5}{x} + \frac{9}{y} + q(x+y) - q(x+y)$$

Ta có

$$= \left[(3+q)x + \frac{5}{x}\right] + \left[(4+q)y + \frac{9}{y}\right] - q(x+y) \quad (1)$$

$$\overset{co\text{-}si}{\geq} 2\sqrt{(3+q)x.\frac{5}{x}} + 2\sqrt{(4+q)y.\frac{9}{y}} - q(x+y)$$

Dấu “=” xảy ra: $x = \sqrt{\frac{5}{3+q}}; y = \sqrt{\frac{9}{4+q}}$

$$x + y = 4 \Rightarrow \sqrt{\frac{5}{3+q}} + \sqrt{\frac{9}{4+q}} = 4 \quad (*)$$

Mà

Giải phương trình (*) bằng cách nhẩm nghiệm hoặc bấm máy tính bỏ túi

$$q = -1,75 = -\frac{7}{4} \Rightarrow x = 2; y = 2 \Leftarrow$$

CASIO-FX-570 ta được **<u>Điểm rơi</u>**

Khi có điểm rơi rồi thì phần còn lại ta làm hoàn toàn tương tự như phần trước để có cơ sở tách A. Hoặc thay $q = -\frac{7}{4}$ vào (1) ở trên ta có ngay lời giải:

<u>Lời giải</u>

$$A=\left[\left(3-\frac{7}{4}\right)x+\frac{5}{x}\right]+\left[\left(4-\frac{7}{4}\right)y+\frac{9}{y}\right]-\left(-\frac{7}{4}\right)(x+y)$$

$$=\left(\frac{5x}{4}+\frac{5}{x}\right)+\left(\frac{9y}{4}+\frac{9}{y}\right)+\frac{7}{4}(x+y)$$

$$\overset{co\text{-}si}{\geq} 2\sqrt{\frac{5x}{4}.\frac{5}{x}}+2\sqrt{\frac{9y}{4}.\frac{9}{y}}+\frac{7}{4}(x+y)$$

$\geq 2.\frac{5}{2}+2.\frac{9}{2}+\frac{7}{4}.4 = 21$ (vì $x+y \geq 4$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x}=\frac{5x}{4} \\ \frac{9}{y}=\frac{9y}{4} \\ x+y=4 \\ x,y>0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=2$$

Dấu "=" xảy ra

Vậy GTNN của A là 21 đạt được khi x = y = 2

Mở rộng với biểu thức 3 biến:

Bài 3: Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $\frac{x}{2}+y+\frac{3z}{2}\geq 5$.

Tìm GTNN của biểu thức: $C=x+y+z+\frac{3}{4x}+\frac{9}{8y}+\frac{1}{z}$

Phân tích

Rõ ràng với biểu thức 3 biến việc dự đoán điểm rơi bằng cách lập bảng là quá khó khăn. Vậy ta hãy thử dùng phương pháp hệ số bất định để giải quyết bài toán này xem sao !

Từ giả thiết $\Rightarrow x+2y+3z\geq 10$. Ta viết C dưới dạng :

$$C=x+y+z+\frac{3}{4x}+\frac{9}{8y}+\frac{1}{z}+q(x+2y+3z)-q(x+2y+3z)$$

$$=\frac{3}{4x}+(1+q)x+\frac{9}{8y}+(1+2q)y+\frac{1}{z}+(1+3q)z-q(x+2y+3z) \quad (1)$$

$$\overset{Co\text{-}si}{\geq} 2\sqrt{\frac{3}{4x}.(1+q)x}+2\sqrt{\frac{9}{8y}.(1+2q)y}+2\sqrt{\frac{1}{z}.(1+3q)z}-q(x+2y+3z)$$

$$\begin{cases}\frac{3}{4x}=(1+q)x\\ \frac{9}{8y}=(1+2q)y\\ \frac{1}{z}=(1+3q)z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{\frac{3}{4(1+q)}}\\ y=\sqrt{\frac{9}{8(1+2q)}}\\ z=\sqrt{\frac{1}{1+3q}}\end{cases}$$

Dấu "=" xảy ra

$$x+2y+3z=10\Rightarrow\sqrt{\frac{3}{4(1+q)}}+2\sqrt{\frac{9}{8(1+2q)}}+3\sqrt{\frac{1}{1+3q}}=10\quad(*)$$

Mà

Giải phương trình (*) bằng cách bấm máy tính bỏ túi CASIO-FX-570 ta được ta

$q=-0,25=-\frac{1}{4}$ được . Thay $q=-\frac{1}{4}$ vào (1) ta có lời giải như sau :

Lời giải

$$C=\frac{3}{4x}+\left(1-\frac{1}{4}\right)x+\frac{9}{8y}+\left(1+2.(-\frac{1}{4})\right)y+\frac{1}{z}+\left(1+3.(-\frac{1}{4})\right)z-(-\frac{1}{4})(x+2y+3z)$$

$$C=\left(\frac{3}{4x}+\frac{3x}{4}\right)+\left(\frac{9}{8y}+\frac{y}{2}\right)+\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{4}\right)+\frac{1}{4}(z+2y+3z)$$

$$\overset{Co\text{-}si}{\geq} 2\sqrt{\frac{3}{4x}.\frac{3x}{4}}+2\sqrt{\frac{9}{8y}.\frac{y}{2}}+2\sqrt{\frac{1}{z}.\frac{z}{4}}+\frac{1}{4}.10$$

$$=2.\frac{3}{4}+2.\frac{3}{4}+2.\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.10=\frac{13}{2}$$

$$\begin{cases}\frac{3}{4x}=\frac{3x}{4}\\ \frac{9}{8y}=\frac{y}{2}\\ \frac{1}{z}=\frac{z}{4}\\ x+2y+3z=10\ ;\ x,y,z>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=\frac{3}{2}\\ z=2\end{cases}$$

Dấu "=" xảy ra:

$Min\,C=\frac{13}{2}$ $x=1;y=\frac{3}{2};z=2$

Vậy đạt được khi

DẠNG 3

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC

DẠNG $A=\sqrt{mx^2+nxy+my^2}+\sqrt{my^2+nyz+mz^2}+\sqrt{mz^2+nzx+mx^2}$ **(với m, n là các số thực cho trước và x, y, z là biến thỏa mãn hệ thức cho trước)**

Bài 1: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn x + y + z = 2020. Tìm GTNN của biểu thức: $A=\sqrt{2x^2+xy+2y^2}+\sqrt{2y^2+yz+2z^2}+\sqrt{2z^2+zx+2x^2}$

Phân tích:

Đây là biểu thức các biến đối xứng nhau điểm rơi thường xảy ra tại x=y=z. Nhưng cho dù dự đoán được điểm rơi rồi ta cũng khó sử dụng điều đó để định hướng cách giải. Vậy có cách nào giúp chúng ta giải quyết được mọi bài toán thuộc dạng này một cách nhanh gọn? Ta viết biểu thức dưới dấu căn dưới dạng:

$$\begin{aligned}2x^2+xy+2y^2&=u(x+y)^2+v(x-y)^2\\&=u(x^2+2xy+y^2)+v(x^2-2xy+y^2)\\&=(u+v)x^2+(2u-2v)xy+(u+v)y^2\end{aligned}$$

$$\begin{cases}u+v=2\\2u-2v=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=\dfrac{5}{4}\\v=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

Cân bằng hệ số ta có:

Từ đây ta có lời giải bài toán:

Giải:

Ta có: $\sqrt{2x^2+xy+2y^2}=\sqrt{\frac{5}{4}(x+y)^2+\frac{3}{4}(x-y)^2}\geq\sqrt{\frac{5}{4}(x+y)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}(x+y)$

Dấu “=” xảy ra khi x = y

Tương tự ta có:

$$A\geq\frac{\sqrt{5}}{2}(x+y)+\frac{\sqrt{5}}{2}(y+z)+\frac{\sqrt{5}}{2}(z+x)=\sqrt{5}(x+y+z)=2020\sqrt{5}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x=y=z=\frac{2020}{3}$

$2020\sqrt{5}$ khi x = y = z = $\frac{2020}{3}$

Vậy GTNN của A là

v thỏa mãn đồng thời 2 hệ thức

Quay lại bài toán tổng quát, ta chỉ cần tìm u,

$$\begin{cases} u+v=m \\ 2u-2v=n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u+2v=2m \\ 2u-2v=n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{2m+n}{4} \\ v=\frac{2m-n}{4} \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{mx^2+nxy+my^2}+\sqrt{my^2+nyz+mz^2}+\sqrt{mz^2+nzx+mx^2} \\ &= \sqrt{u(x+y)^2+v(x-y)^2}+\sqrt{u(y+z)^2+v(y-z)^2}+\sqrt{u(z+x)^2+v(z-x)^2} \\ &\geq \sqrt{u(x+y)^2}+\sqrt{u(y+z)^2}+\sqrt{u(z+x)^2} \\ &= 2(x+y+z)\sqrt{u} = 2(x+y+z)\sqrt{\frac{2m+n}{4}} = (x+y+z)\sqrt{2m+n} \end{aligned}$$

Như vậy nhìn vào đề bài học sinh có thể đoán ngay được GTNN của biểu thức đã cho để làm căn cứ để đối chiếu kết quả tìm được.

Chẳng hạn ở bài 1 trên là $(x+y+z)^{\sqrt{2.2+1}}=2020^{\sqrt{5}}$

: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn x + y + z = 2020. Tìm GTNN của

Bài 2

biểu thức: $B=\sqrt{5x^2+4xy+5y^2}+\sqrt{5y^2+4yz+5z^2}+\sqrt{5z^2+4zx+5x^2}$

Phân tích:

Học sinh dự đoán được GTNN của B là $(x+y+z)^{\sqrt{2.5+4}}=2020^{\sqrt{14}}$ khi $x=y=z=\frac{2020}{3}$

$$\begin{cases} u+v=5 \\ 2u-2v=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{7}{2} \\ v=\frac{3}{2} \end{cases}$$

:

Cần tìm u, v thỏa mãn

Từ đây ta có lời giải bài toán:

Giải:

Ta có: $$\sqrt{5x^2+4xy+5y^2}=\sqrt{\frac{7}{2}(x+y)^2+\frac{3}{2}(x-y)^2}\geq\sqrt{\frac{7}{2}(x+y)^2}=\frac{\sqrt{14}}{2}(x+y)$$

Dấu "=" xảy ra khi x = y

Tương tự ta có:

$$A\geq\frac{\sqrt{14}}{2}(x+y)+\frac{\sqrt{14}}{2}(y+z)+\frac{\sqrt{14}}{2}(z+x)=\sqrt{14}(x+y+z)=2020\sqrt{14}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x=y=z=\frac{2020}{3}$

Vậy GTNN của A là $2020\sqrt{14}$ khi x = y = z = $\frac{2020}{3}$

Đôi khi ta cũng cần biến đổi giả thiết, chẳng hạn:

> ***Bài 3:*** Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}=6$. Tìm GTNN của biểu thức: $C=\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}+\sqrt{c^2+ca+a^2}$

Phân tích:

Học sinh dự đoán được GTNN của B là $(a+b+c)^{\sqrt{2.1+1}}=(a+b+c)^{\sqrt{3}}$

$$\begin{cases} u+v=1 \\ 2u-2v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\frac{3}{4} \\ v=\frac{1}{4} \end{cases}$$

Cần tìm u, v thỏa mãn:

Giải:

$$6^2 = \left(\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}\right)^2 \le (1^2+1^2+1^2)(a+1+b+1+c+1)$$

Từ giả thiết

$$\Leftrightarrow a+b+c+3 \ge \frac{36}{3} \Leftrightarrow a+b+c \ge 9$$

Lại có:

$$C = \sqrt{\frac{3}{4}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a-b)^2}+\sqrt{\frac{3}{4}(b+c)^2+\frac{1}{4}(b-c)^2}+\sqrt{\frac{3}{4}(c+a)^2+\frac{1}{4}(c-a)^2}$$

$$\ge \sqrt{\frac{3}{4}(a+b)^2}+\sqrt{\frac{3}{4}(b+c)^2}+\sqrt{\frac{3}{4}(c+a)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)+\frac{\sqrt{3}}{2}(b+c)+\frac{\sqrt{3}}{2}(c+a)$$

$$= \sqrt{3}(a+b+c) \ge 9\sqrt{3}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z = 3$

Vậy GTNN của C là $9\sqrt{3}$ khi x = y = z = 3

DẠNG 4

Bài 1: Cho các số thực x, y thỏa mãn x > 1, y > 2.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x-1}}{x}+\frac{\sqrt{y-2}}{y}$

Phân tích:

Học sinh đã quen thuộc với các bài toán tìm GTLN, GTNN khi cho các biến nhận các giá trị là các số dương hoặc không âm, nên khi gặp bài này các em không khỏi bỡ ngỡ và không định hướng được cách giải quyết. Một trong những cách giúp học sinh đưa bài toán "quy lạ về quen" là đổi biến.

Giải:

$$\begin{cases}\sqrt{x-1}=a\\ \sqrt{y-2}=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=a^2+1\\ y=b^2+2\end{cases}$$

vì x > 1; y > 2 nên a > 0 ; b > 0

Đặt

Bài toán trở thành: Cho các số a > 0 ; b > 0. Tìm GTLN của biểu thức:

$$A = \frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+2}$$

$a^2 + 1 \geq 2a$; $b^2 + 2 \geq 2\sqrt{2}b$

Ta có:

$$A \leq \frac{a}{2a} + \frac{b}{2\sqrt{2}b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Suy ra:

Dấu bằng xảy ra: $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

Vậy GTLN của A là $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$ khi x = 2; y = 4

Bài 2: Cho các số thực x, y thỏa mãn x > 1, y > 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1}$

Giải:

$\begin{cases} x - 1 = a \\ y - 1 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a + 1 \\ y = b + 1 \end{cases}$ vì x > 1; y > 1 nên a > 0 ; b > 0

Đặt

Bài toán trở thành: Cho các số a > 0 ; b > 0. Tìm GTNN của biểu thức:

$$B = \frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a}$$

Ta có:

$$B = \frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a} = \frac{a^2+2a+1}{b} + \frac{b^2+2b+1}{a} = \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right) + \left(\frac{2a}{b} + \frac{2b}{a}\right) + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$$

$$\geq \frac{(a+b)^2}{a+b} + 2\sqrt{\frac{2a}{b}.\frac{2b}{a}} + \frac{4}{a+b} = a+b+\frac{4}{a+b}+2.2$$

$$\geq 2\sqrt{(a+b).\frac{4}{a+b}} + 4 = 2.2+4 = 8$$

Dấu bằng xảy ra: $\begin{cases} a=b \\ a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy GTLN của B là 8 khi x = 2; y = 2

Mở rộng với 3 biến:

Bài 3: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x \geq 1;\ y \geq 9;\ z \geq 25$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $C = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-9}}{y} + \frac{\sqrt{z-25}}{z}$

Giải:

$\begin{cases} \sqrt{x-1}=a \\ \sqrt{y-9}=b \\ \sqrt{z-25}=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=a^2+1 \\ y=b^2+9 \\ z=c^2+25 \end{cases}$ vì $x \geq 1;\ y \geq 9;\ z \geq 25$ nên $a \geq 0;\ b \geq 0;\ c \geq 0$

Đặt

Bài toán trở thành: Cho các số $a \geq 0;\ b \geq 0;\ c \geq 0$. Tìm GTLN của biểu thức:

$$A = \frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+9} + \frac{c}{c^2+25}$$

$$a^2+1 \geq 2a;\quad b^2+9 \geq 6b;\quad c^2+25 \geq 10c$$

Ta có:

Suy ra: $A \leq \frac{a}{2a} + \frac{b}{6b} + \frac{c}{10c} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} = \frac{15+5+3}{30} = \frac{23}{30}$

Dấu bằng xảy ra: $\begin{cases} a^2=1 \\ b^2=9 \\ c^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=18 \\ z=50 \end{cases}$

Vậy GTLN của C là $\frac{23}{30}$ khi x = 2; y = 18; z = 50

6. Tổ chức làm bài kiểm tra khảo sát lần 2 tại lớp học về 4 dạng toán trên:

Dạng 1: Biểu thức là phân thức dạng $A = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + g}$

Bài 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: A = $\frac{6x^2 - 26x + 29}{x^2 - 4x + 4}$

Bài 2: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: B = $\frac{2x^2 - 10x - 1}{x^2 - 2x + 1}$

Bài 3: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$

Dạng 2: Biểu thức dạng $A = ax + by + \frac{c}{x} + \frac{d}{y}$ (với a, b, c, d là các số thực cho trước và x, y là biến thỏa mãn hệ thức cho trước)

Bài 1: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y \geq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 3x + 2y + \frac{6}{x} + \frac{8}{y}$$

Bài 2: Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $x + y \leq 6$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = \frac{8}{3}x + 3y + \frac{18}{x} + \frac{21}{y}$$

Bài 3: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + 2y + 3z = 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$C = 2x + 3y + 4z + \frac{3}{x} + \frac{9}{2y} + \frac{4}{z}$$

Dạng 3: $A = \sqrt{mx^2 + nxy + my^2} + \sqrt{my^2 + nyz + mz^2} + \sqrt{mz^2 + nzx + mx^2}$

(với m, n là các số thực cho trước và x, y, z là biến thỏa mãn hệ thức cho trước)

Bài 1: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn x + y + z = 2020. Tìm GTNN của biểu thức:

$$A = \sqrt{3x^2 + 5xy + 3y^2} + \sqrt{3y^2 + 5yz + 3z^2} + \sqrt{3z^2 + 5zx + 3x^2}$$

Bài 2: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn x + y + z = 2021. Tìm GTNN của biểu thức:

$$B = \sqrt{2x^2 + 3xy + 2y^2} + \sqrt{2y^2 + 3yz + 2z^2} + \sqrt{2z^2 + 3zx + 2x^2}$$

Bài 3: Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$. Tìm GTNN của biểu thức:

$$C = \sqrt{3a^2 + 2ab + 3b^2} + \sqrt{3b^2 + 2bc + 3c^2} + \sqrt{3c^2 + 2ca + 3a^2}$$

Dạng 4:

Bài 1: Cho các số thực x, y thỏa mãn x > 1, y > 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-2}}{y}$$

Bài 2: Cho các số thực x, y thỏa mãn x > 1, y > 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$B = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1}$$

Bài 3: Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $x \geq 1;\ y \geq 9;\ z \geq 25$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$C = \frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-9}}{y} + \frac{\sqrt{z-25}}{z}$$

IV – HIỆU QUẢ

Với cách làm trên tôi đã chia sẻ trong tổ chuyên môn và áp dụng vào giảng dạy cho các học sinh trong trường, tôi đã thu được những kết quả khả quan.

Học sinh đã biết định hướng cách giải từng dạng toán này một cách nhanh hơn, xác định ngay được hướng làm và lựa chọn cách trình bày đơn giản nhất. Học sinh tránh được những sai sót cơ bản, biết lựa chọn lời giải ngắn gọn và có kĩ năng vận dụng thành thạo cũng như phát huy được tính tích cực của học sinh.

Học sinh có được cái nhìn tổng quát hơn về dạng toán đã được học và tự hình thành cho mình một phương pháp mới.

Tạo được hứng thú học tập, tâm lí vững vàng tự tin cho học sinh trước yêu cầu của bài toán đặc biệt là các dạng toán phức tạp.

Bồi dưỡng khả năng tìm tòi, sáng tạo áp dụng các kiến thức đã học vào một số bài toán số học và các bài toán khác.

Sau khi dạy xong chuyên đề này tôi cũng đã cho các em làm bài khảo sát lần 2 để có số liệu đối chứng (đề khảo sát đã nêu trên)

Kết quả bài kiểm tra khảo sát lần 2:

Tổng số HS	ĐIỂM									
	Dưới 3,5		3,5 - dưới 5		5 - dưới 6,5		6,5 - dưới 8		8 - 10	
	SL	%	SL	%	SL	%	SL	%	SL	%
33	0	0	0	0	4	12,1	10	30,3	19	57,6

Sau khi trao đổi với đồng nghiệp về nội dung của giải pháp đều được các đồng nghiệp ủng hộ, vận dụng vào dạy ôn thi học sinh giỏi là rất hợp lý, tùy theo yêu cầu từng đối tượng học sinh mà giáo viên lựa chọn nội dung giảng dạy cho phù hợp, hoặc căn cứ vào các dạng trong đề tài mà giáo viên có thể phát triển thành nhiều dạng phù hợp với yêu cầu từng lớp, nhưng vẫn dựa trên cơ sở sử dụng các phương pháp và cách thức khai thác như các bài tập trong đề tài đã trình bày những kết quả rất khả quan, đa số các em học sinh trong lớp đều vận dụng làm tốt các dạng toán này và áp dụng được phương pháp cho nhiều dạng có liên quan, nhiều em đã biết tự tìm tòi khai thác được bài toán bằng nhiều cách giải khác nhau, phát triển được dạng toán, đáp ứng được yêu cầu của thầy cô.

Trên đây là biện pháp **"Giúp học sinh định hướng cách giải một số dạng toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất thường gặp"** đã được nhà trường và đồng nghiệp ghi nhận. Việc vận dụng biện pháp này là có tính khả thi và có ứng dụng vào thực tiễn, đã mang lại hiệu quả cho công tác bồi dưỡng học sinh giỏi. 100% các em học sinh sau khi được tiếp thu biện pháp mà tôi truyền tải đều định hướng tốt và xử lý một cách nhanh chóng cách giải các bài toán thuộc dạng này và giải các bài toán có liên quan. Hơn nữa biện pháp đã gây được hứng thú và

góp phần tăng thêm khả năng sáng tạo cho học sinh, qua đó phát triển tư duy Toán học, giúp các em yêu Toán học hơn và ngày càng say mê với môn học. Giúp cho học sinh có thêm phương pháp để giải quyết các bài toán khó về tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trong các kỳ thi.

Khả năng phát triển, mở rộng, vận dụng của biện pháp

Biện pháp này có tính khả thi rất cao, có thể nhân rộng trong các trường trung học cơ sở, giáo viên, học sinh đều có thể áp dụng trong giảng dạy bộ môn toán cấp THCS.

V – MINH CHỨNG

- Bài khảo sát về sự tiến bộ của học sinh

- Hình ảnh giảng dạy triển khai tại lớp học

- Đường link truy cập vào các trang mạng mà bản thân dùng để giao bài, hướng dẫn, trao đổi, tương tác với học sinh:

+ Zalo: Nhóm “Toán 9 – Nâng cao”

+ Facebook:

https://www.facebook.com/groups/723219835103287

+ VNPT E-Learning - nền tảng học và thi trực tuyến – vnEdu:

http://c2anhson-as.lms.vnedu.vn/course/detail/5f71fe133a830d7u01/chuyen-de-tim-gia-tri-lon-nhat-gia-tri-nho-nhat-cua-mot-so-dang-bieu-thuc-thuong-gap