

DẠNG 6**Tích phân hàm ẩn phần 2**

- Câu 1.** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a; b]$. Khi đó tích phân $I = \int_a^b f(x)dx$ tương ứng với
A. $\int_a^b f(a+b-x)dx$. **B.** $\int_a^b f(a+b+x)dx$. **C.** $-\int_a^b f(a+b-x)dx$. **D.** $\int_a^b f(x-a+b)dx$.
- Câu 2.** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0; 3]$ và có tích phân $\int_0^3 f(x)dx = 8$. Giá trị của tích phân $I = \int_0^3 f(3-x)dx$ tương ứng bằng
A. 11. **B.** -8 **C.** -11. **D.** 8.
- Câu 3.** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(3-x) = x^2 - 3x + \frac{13}{2}$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I = \int_{-1}^4 f(x)dx$ tương ứng bằng
A. $\frac{27}{5}$. **B.** $\frac{30}{4}$. **C.** $\frac{31}{2}$. **D.** $\frac{95}{6}$.
- Câu 4.** Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $2f(x) + 3f(2-x) = g(x)$ với $\forall x \in [0; 2]$. Biết rằng tích phân $\int_0^1 f(2x)dx = -3$. Giá trị của tích phân $\int_0^2 g(x)dx$ tương ứng bằng
A. -15. **B.** 6. **C.** -30. **D.** 12.
- Câu 5.** Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn hệ thức $f(x) - f(4-x) = g(x)$ với $x \in [1; 3]$. Giá trị của tích phân $\int_1^3 g(x)dx$ tương ứng bằng
A. 4. **B.** 0. **C.** 1. **D.** -2.
- Câu 6.** Cho hàm số $f(x)$ và $g(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x) - f(3-x) = g(x)$ và $f(x) + 2f(3-x) = 3x^2 + 1$ với $[1; 2]$. Giá trị của tích phân $\int_1^2 g(x)dx$ tương ứng bằng
A. $\frac{16}{3}$. **B.** 9. **C.** $\frac{13}{2}$. **D.** $\frac{10}{3}$.
- Câu 7.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) - f(3-x) - f(4-x) = 4x^3 + 1$ với $\forall x \in [0; 6]$. Giá trị của biểu thức $\int_1^2 f(4-x)dx + \int_1^3 f(3-x)dx$ tương ứng bằng
A. -98. **B.** -36. **C.** 42. **D.** -48.
- Câu 8.** Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, thỏa mãn $f(x) - f(3-x) - f(4-x) = 2x$ với $\forall x \in [-6; 6]$. Giá trị lớn nhất của tích phân $\int_a^{3-a} f(4-x)dx$ tương ứng bằng bao nhiêu? Với số thực $a \in [0; 3]$
A. 12. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 10.
- Câu 9.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) - f(2-x) - f(3x^2 - 1) = 3x^2 - \frac{15}{4}$ với mọi $x \in [-10; 10]$. Giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_a^{2-a} f(3x^2 - 1)dx$ bằng bao nhiêu? Với số thực $a \in [1; 6]$

A. $-\frac{15}{2}$.

B. $-\frac{1}{2}$.

C. -10 .

D. -6 .

Câu 10. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $\int_{-a}^a f(x)dx$ tương ứng bằng

A. $\int_0^a f(x)dx$.

B. $-\int_{-a}^a f(a-x)dx$.

C. $\int_{-a}^a f(-x)dx$.

D. $\int_{-a}^a f(2a-x)dx$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + 3f(-x) = 6x^2 - 1$. Giá trị của tích phân $\int_{-1}^1 f(x)dx$ tương ứng bằng

A. 1 .

B. 2 .

C. 0 .

D. $\frac{1}{2}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $3f(x) + 4f(-x) = g(x)$ với $\forall x \in [-a; a]$.

Biết giá trị của tích phân $\int_{-a}^a f(x)dx = 2$. Giá trị của tích phân $\int_{-a}^a g(x)dx$ tương ứng bằng

A. 9 .

B. $\frac{2}{7}$.

C. 14 .

D. $\frac{7}{2}$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm và xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $5f(x) - 2f(-x) = x^2 \cos \pi x$ với $\forall x \in [-1; 1]$; $f(1) + f(-1) = 3$. Giá trị của tích phân

$I = \int_{-1}^1 xf'(x)dx = a + \frac{b}{c\pi^2}$; với a, b, c là những số nguyên dương và phân số $\frac{b}{c}$ tối giản. Giá trị

của biểu thức $T = a + b + c$ tương ứng bằng

A. 11 .

B. 10 .

C. 9 .

D. 12 .

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có giá trị dương trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x).f(a+b-x) = 1$ với

$\forall x \in [a; b]$. Giá trị của tích phân $I = \int_a^b \frac{dx}{1+f(x)}$ tương ứng bằng

A. $\frac{b-a}{2}$.

B. 1 .

C. $b-a$.

D. $\frac{b^2-a^2}{4}$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có giá trị dương trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = g(x)$ với

$\forall x \in (0; +\infty)$. Giá trị của tích phân $I = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x)dx}{x}$ tương ứng bằng

A. $I = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{a}}^a g(x)dx$.

B. $I = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{a}}^a g(x)dx$.

C. $I = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{a}}^a g(x)dx$.

D. $I = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{g(x)dx}{x}$.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có giá trị dương trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = xg(x)$

với $\forall x \in (0; +\infty)$. Biết rằng $\int_{\frac{1}{a}}^a g(x)dx = 6$. Giá trị của tích phân $I = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x)dx}{x}$ tương ứng bằng

A. 6 .

B. 9 .

C. 3 .

D. 12 .

- Câu 17.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có giá trị dương trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $2f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = xg(x)$ với $\forall x \in (0; +\infty)$. Biết rằng $\int_{\frac{1}{a}}^a g(x)dx = 10$. Giá trị của tích phân $I = \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{f(x^2)dx}{x}$ tương ứng bằng
- A. 1. B. 2. C. 5. D. 11.
- Câu 18.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và có giá trị dương trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = xg(x)$ với $\forall x \in (0; +\infty)$. Biết rằng $\int_{\frac{1}{e}}^e f'(x) \ln x dx = 18$ và $\left(f(e) + f\left(\frac{1}{e}\right)\right) = 5$. Giá trị của tích phân $I = \int_{\frac{1}{e}}^e g(x)dx$ tương ứng bằng
- A. -13. B. -39. C. 18. D. -6.
- Câu 19.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(2x-1) = 3x^2 + 1$ với mọi $x \in (0; +\infty)$. Giá trị của tích phân $I = \int_{-1}^3 f(x)dx$ tương ứng bằng
- A. 32. B. 4. C. 20. D. 18.
- Câu 20.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và thỏa mãn $f(x^3 + 3x + 1) = 6x + 2$ với $\forall x \in (0; +\infty)$. Giá trị của tích phân $I = \int_1^5 f(x)dx$ tương ứng bằng
- A. 22. B. $\frac{43}{2}$. C. $\frac{50}{3}$. D. $\frac{35}{2}$.
- Câu 21.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục thỏa mãn $f(x) = f(1-x)$ với $\forall x \in (0; +\infty)$ và $\int_0^1 f(x)dx = -6$. Giá trị của tích phân $I = \int_0^1 (2x^3 - 3x^2)f(x)dx$ tương ứng bằng
- A. -3. B. 6. C. -12. D. 3.
- Câu 22.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục thỏa mãn $f(x) = f(2-x)$ với $\forall x \in (0; +\infty)$ và $\int_0^2 f(x)dx = 12$. Giá trị của tích phân $I = \int_0^2 (x^3 - 3x^2)f(x)dx$ tương ứng bằng
- A. -12. B. -24. C. 6. D. -6.
- Câu 23.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và thỏa mãn: $(f(x))^3 + 2f(x) = 2x - 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I = \int_{-1}^2 f(x)dx$ tương ứng bằng
- A. $I = 1$. B. $I = -1$. C. $I = 0$. D. $I = 2$.
- Câu 24.** Cho hàm số $f(x)$ liên tục và thỏa mãn: $(f(x))^5 + 3f(x) = x$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của tích phân $I = \int_0^4 (f(x))^2 dx$ tương ứng bằng
- A. $I = \frac{12}{7}$. B. $I = -3$. C. $I = 8$. D. $I = \frac{16}{3}$.

Câu 25. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x+1) + f(x+2) = e^x(x^2 - 1)$. Giá trị của tích phân $I = \int_1^3 f(x)dx$ tương ứng bằng

- A. $I = 0$. B. $I = 2$. C. $I = -1$. D. $I = -3$.

Câu 26. Cho hàm số $f(x)$ liên tục và xác định trên $\mathbb{R}$ thỏa hệ thức $f(x+1) + f(x+2) + \dots + f(x+2019) = 3x^2 + 2x$. Giá trị của tích phân $I = \int_1^{2019} f(x)dx$ tương ứng bằng

- A. $I = 1$. B. $I = 2$. C. $I = 3$. D. $I = 5$.

Câu 27. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-2; +\infty)$ và thỏa mãn hệ thức điều kiện $\frac{1}{3}f(2x-1) + \frac{1}{2}f(3x+6) = x \ln(x+2)$. Giá trị của tích phân $I = \int_{-3}^{12} f(x)dx$ tương ứng bằng

- A. $\frac{9}{4}$. B. 3. C. $\frac{10}{3}$. D. $\frac{27}{2}$.

Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và thỏa mãn $f(x^2 + 1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = x + 2$. Giá trị của tích phân $I = \int_1^{17} f(x)dx$ tương ứng bằng

- A. $\frac{27}{2}$. B. 36. C. 72. D. 18.

Câu 29. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[1; +\infty)$ và thỏa mãn hệ thức điều kiện $f(x+1) + 3f(3x+2) - 4f(4x+1) - f(2^x) = \frac{3}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}}$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Giá trị của tích phân

$I = \int_1^2 \frac{f(x)dx}{x}$ tương ứng bằng

- A. $\ln 2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ B. $(2 + 6\sqrt{3} - 8\sqrt{2})\ln 2$.
C. $2 + 6\sqrt{3} - 8\sqrt{2}$. D. $3\sqrt{2} + 4\sqrt{3} - 1$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.A	2.D	3.D	4.C	5.B	6.A	7.A	8.B	9.B	10.C
11.D	12.C	13.B	14.A	15.D	16.C	17.A	18.B	19.C	20.B
21.D	22.B	23.C	24.A	25.C	26.B	27.D	28.C	29.B	

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT**Câu 1. Chọn A**

Đặt $t = a + b - x \Rightarrow dt = -dx$. Đổi cận $\begin{cases} x = a \Rightarrow t = b \\ x = b \Rightarrow t = a \end{cases}$.

$$\text{Suy ra: } I = \int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(a+b-t)(-dt) = \int_a^b f(a+b-t)dt = \int_a^b f(a+b-x)dx.$$

Câu 2. Chọn D

Cách 1: Thử nghiệm: Hàm tự do một giả thiết nên ta chọn hàm luôn có dạng $f(x) = a$ là hằng số.

$$\text{Suy ra: } \int_0^3 f(x)dx = 8 = \int_0^3 adx = 3a \Rightarrow a = \frac{8}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{8}{3} = f(3-x).$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_0^3 f(3-x)dx = \int_0^3 \frac{8}{3}dx = 8.$$

$$\text{Cách 2: Áp dụng công thức: } I = \int_0^3 f(3-x)dx = \int_0^3 f(x)dx = 8.$$

Cách 3: Với tích phân: $I = \int_0^3 f(3-x)dx$. Đặt: $t = 3 - x \Rightarrow dt = -dx$; đổi cận: $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow t = 3 \\ x = 3 \Rightarrow t = 0 \end{cases}$

$$\text{Suy ra: } I = \int_0^3 f(3-x)dx = \int_3^0 f(t)(-dt) = \int_0^3 f(t)dt = 8.$$

Câu 3. Chọn D

$$\text{Từ giả thiết ta tích phân hai vế: } \int_{-1}^4 [f(x) + f(3-x)]dx = \int_{-1}^4 \left(x^2 - 3x + \frac{13}{2}\right)dx = \frac{95}{3}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^4 f(x)dx + \int_{-1}^4 f(3-x)dx = \frac{95}{3} \Leftrightarrow \int_{-1}^4 f(x)dx + \int_{-1}^4 f(x)dx = \frac{95}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_{-1}^4 f(x)dx = \frac{95}{3} \Leftrightarrow \int_{-1}^4 f(x)dx = \frac{95}{6}.$$

Câu 4. Chọn C

$$\text{Áp dụng công thức } \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx. \text{ Suy ra } \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 f(2-x)dx.$$

$$\text{Xử lý tích phân } \int_0^1 f(2x)dx = -3.$$

$$\text{Đặt } t = 2x \Rightarrow dt = 2dx \Rightarrow \int_0^1 f(2x)dx = -3 = \int_0^2 f(t) \left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)dt$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f(t)dt = -6 = \int_0^2 f(x)dx.$$

Từ giả thiết, ta lấy tích phân hai vế:

$$\begin{aligned} \int_0^2 [2f(x) + 3f(2-x)]dx &= \int_0^2 g(x)dx = 2\int_0^2 f(x)dx + 3\int_0^2 f(2-x)dx \\ \Leftrightarrow \int_0^2 g(x)dx &= 2\int_0^2 f(x)dx + 3\int_0^2 f(x)dx = 5\int_0^2 f(x)dx = 5 \cdot (-6) = -30. \end{aligned}$$

Câu 5. Chọn B

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$. Suy ra $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 f(4-x)dx$.

Từ giả thiết ta lấy tích phân 2 vế: $0 = \int_1^3 (f(x) - f(4-x))dx = \int_1^3 g(x)dx$.

Câu 6. Chọn A

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$. Suy ra $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 f(3-x)dx$.

Từ $f(x) + 2f(3-x) = 3x^2 + 1$ suy ra:

$$\int_1^2 (f(x) + 2f(3-x))dx = \int_1^2 (3x^2 + 1)dx \Leftrightarrow 3\int_1^2 f(x)dx = 8 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx = \frac{8}{3}.$$

Từ $3f(x) - f(3-x) = g(x)$ suy ra:

$$\int_1^2 (3f(x) - f(3-x))dx = \int_1^2 g(x)dx \Leftrightarrow \int_1^2 g(x)dx = 2\int_1^2 f(x)dx = \frac{16}{3}.$$

Câu 7. Chọn A

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$, suy ra:

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 f(3-x)dx; \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 f(4-x)dx$$

Từ $f(x) - f(3-x) - f(4-x) = 4x^3 + 1$

$$\Rightarrow \int_1^2 (f(x) - f(3-x) - f(4-x))dx = \int_1^2 (4x^3 + 1)dx = 16$$

$$\Leftrightarrow \int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 f(3-x)dx - \int_1^2 f(4-x)dx = 16$$

$$\Leftrightarrow -\int_1^2 f(4-x)dx = 16 \Leftrightarrow \int_1^2 f(4-x)dx = -16 \quad (1)$$

Từ $f(x) - f(3-x) - f(4-x) = 4x^3 + 1$

$$\Rightarrow \int_1^3 (f(x) - f(3-x) - f(4-x))dx = \int_1^3 (4x^3 + 1)dx = 82$$

$$\Leftrightarrow \int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 f(3-x)dx - \int_1^3 f(4-x)dx = 82$$

$$\Leftrightarrow -\int_1^3 f(3-x)dx = 82 \Leftrightarrow \int_1^3 f(3-x)dx = -82 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\int_1^2 f(4-x)dx + \int_1^3 f(3-x)dx = -16 - 82 = -98$.

Câu 8. Chọn B

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$, suy ra: $\int_a^{3-a} f(x)dx = \int_a^{3-a} f(3-x)dx$.

Từ $f(x) - f(3-x) - f(4-x) = 2x \Rightarrow \int_a^{3-a} (f(x) - f(3-x) - f(4-x))dx = \int_a^{3-a} 2xdx$

$$\Leftrightarrow \int_a^{3-a} f(x)dx - \int_a^{3-a} f(3-x)dx - \int_a^{3-a} f(4-x)dx = \int_a^{3-a} 2xdx = -6a + 9$$

$$\Leftrightarrow -\int_a^{3-a} f(4-x)dx = -6a+9 \Leftrightarrow \int_a^{3-a} f(4-x)dx = 6a-9 \leq 6.3-9=9.$$

Dấu "=" xảy ra khi $a=3$.

Suy ra giá trị lớn nhất của tích phân $\int_a^{3-a} f(4-x)dx$ bằng 9 khi $a=3$.

Câu 9. Chọn B

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$. Suy ra $\int_a^{2-a} f(x)dx = \int_a^{2-a} f(2-x)dx$

$$\text{Từ } f(x) - f(2-x) - f(3x^2-1) = 3x^2 - \frac{15}{4}$$

$$\Rightarrow \int_a^{2-a} (f(x) - f(2-x) - f(3x^2-1))dx = \int_a^{2-a} \left(3x^2 - \frac{15}{4}\right)dx$$

$$\Leftrightarrow \int_a^{2-a} f(x)dx - \int_a^{2-a} f(2-x)dx - \int_a^{2-a} f(3x^2-1)dx = -2a^3 + 6a^2 - \frac{9}{2}a + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \int_a^{2-a} f(3x^2-1)dx = 2a^3 - 6a^2 + \frac{9}{2}a - \frac{1}{2}.$$

Khảo sát nhanh hàm số $h(a) = 2a^3 - 6a^2 + \frac{9}{2}a - \frac{1}{2}$ trên đoạn $a \in [1; 6]$ ta được

$$\text{Giá trị nhỏ nhất của hàm số } \min_{a \in [1; 6]} h(a) = h\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của tích phân $\int_a^{2-a} f(3x^2-1)dx$ là $-\frac{1}{2}$.

Câu 10. Chọn C

Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$.

$$\text{Suy ra } \int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^a f(a+(-a)-x)dx = \int_{-a}^a f(-x)dx.$$

Câu 11. Chọn D

Áp dụng công thức: $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^a f(-x)dx$. Suy ra $\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(-x)dx$.

Từ giả thiết, ta lấy tích phân hai vế: $\int_{-1}^1 f(x)dx + 3\int_{-1}^1 f(-x)dx = \int_{-1}^1 6x^2 - 1 = 2$

$$\Leftrightarrow \int_{-1}^1 f(x)dx + 3\int_{-1}^1 f(-x)dx = 2 = \int_{-1}^1 f(x)dx + 3\int_{-1}^1 f(x)dx = 4\int_{-1}^1 f(x)dx \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Câu 12. Chọn C

Áp dụng công thức: $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^a f(-x)dx$.

Từ giả thiết, ta lấy tích phân hai vế:

$$\int_{-a}^a (3f(x) + 4f(-x))dx = \int_{-a}^a g(x)dx = 3\int_{-a}^a f(x)dx + 4\int_{-a}^a f(-x)dx$$

$$\Leftrightarrow 3\int_{-a}^a f(x)dx + 4\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^a g(x)dx = 7\int_{-a}^a f(x)dx = 7.2 = 14.$$

Câu 13. Chọn B

Với tích phân $I = \int_{-1}^1 xf'(x)dx = a + \frac{b}{c\pi^2}$, đặt: $\begin{cases} u = x \\ dv = f'(x)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dx \\ v = f(x) \end{cases}$.

Suy ra $I = \int_{-1}^1 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f(x)dx = f(1) + f(-1) - \int_{-1}^1 f(x)dx = 3 - \int_{-1}^1 f(x)dx \quad (1)$

Từ giả thiết, suy ra: $\int_{-1}^1 (5f(x) - 2f(-x))dx = \int_{-1}^1 (x^2 \cos \pi x)dx = \frac{-4}{\pi^2}$

$\Leftrightarrow \frac{-4}{\pi^2} = 5 \int_{-1}^1 f(x)dx - 2 \int_{-1}^1 f(-x)dx = 3 \int_{-1}^1 f(x)dx \Rightarrow \int_{-1}^1 f(x)dx = \frac{-4}{3\pi^2} \quad (2)$

Thay (2) vào (1) ta được: $I = 3 + \frac{4}{3\pi^2} = a + \frac{b}{c\pi^2}$

Suy ra $a = 3, b = 4, c = 3$. Vậy $T = a + b + c = 10$.

Câu 14. Chọn A

Cách 1:

Chọn hàm hằng số: $f(x) = f(a + b - x) = 1$.

Suy ra: $I = \int_a^b \frac{dx}{1+1} = \frac{b-a}{2}$

Cách 2:

Với tích phân $I = \int_a^b \frac{dx}{1+f(x)}$, ta đặt: $t = a + b - x \Rightarrow dt = -dx$; đổi cận: $\begin{cases} x = a \Rightarrow t = b \\ x = b \Rightarrow t = a \end{cases}$.

Suy ra: $I = \int_a^b \frac{dx}{1+f(x)} = \int_b^a \frac{-dt}{1+f(a+b-t)} = \int_a^b \frac{dt}{1+\frac{1}{f(t)}} = \int_a^b \frac{f(t)dt}{1+f(t)} = \int_a^b \frac{f(x)dx}{1+f(x)}$

Suy ra: $I + I = 2I = \int_a^b \frac{dx}{1+f(x)} + \int_a^b \frac{f(x)dx}{1+f(x)} = \int_a^b dx = b - a \Rightarrow I = \frac{b-a}{2}$.

Câu 15. Chọn D

Với tích phân $I = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x)dx}{x}$; ta đặt: $t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{dx}{x^2}$; đổi cận: $\begin{cases} x = \frac{1}{a} \Rightarrow t = a \\ x = a \Rightarrow t = \frac{1}{a} \end{cases}$.

Suy ra: $I = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x)dx}{x} = \int_a^{\frac{1}{a}} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}dt\right)}{\frac{1}{t}} = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)dt}{t} = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x}$.

Suy ra: $I + I = 2I = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x)dx}{x} + \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x} = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x} = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{g(x)}{x} dx$.

$\Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{g(x)}{x} dx$.

Câu 16. Chọn C

Áp dụng công thức: $I = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x)dx}{x} = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x}.$

Từ giả thiết: $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = xg(x) \Rightarrow \frac{f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = g(x)$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x} = \int_{\frac{1}{a}}^a g(x)dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x)dx}{x} + \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x} = \int_{\frac{1}{a}}^a g(x)dx = 2 \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x)dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x)dx}{x} = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{a}}^a g(x)dx = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3.$$

Câu 17. Chọn A

Áp dụng công thức $I = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x)dx}{x} = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x}.$

Từ giả thiết: $2f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = xg(x) \Rightarrow 2\frac{f(x)}{x} + 3\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = g(x)$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{a}}^a \left(2\frac{f(x)}{x} + 3\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right) dx = \int_{\frac{1}{a}}^a g(x)dx$$

$$\Leftrightarrow 2 \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x)}{x} dx + 3 \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx = \int_{\frac{1}{a}}^a g(x)dx = 5 \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x)}{x} dx$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x)}{x} dx = \frac{1}{5} \int_{\frac{1}{a}}^a g(x)dx = \frac{1}{5} \cdot 10 = 2.$$

Xét tích phân $I = \int_{\frac{1}{a}}^{\sqrt{a}} \frac{f(x^2)dx}{x}$. Đặt $t = x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$. Đổi cận: $\begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{a}} \Rightarrow t = \frac{1}{a} \\ x = \sqrt{a} \Rightarrow t = a \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{1}{a}}^{\sqrt{a}} \frac{f(x^2)dx}{x} = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(t) \frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(t)dt}{t} = 1.$$

Câu 18. Chọn B

Áp dụng công thức: $I = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f(x)dx}{x} = \int_{\frac{1}{a}}^a \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)dx}{x}.$

Từ giả thiết: $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = xg(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{x} + 2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = g(x)$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{e}}^e \left(\frac{f(x)}{x} + 2\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} \right) dx = \int_{\frac{1}{e}}^e g(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{f(x)}{x} dx + 2 \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x} dx = \int_{\frac{1}{e}}^e g(x) dx = 3 \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{f(x)}{x} dx \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{e}}^e g(x) dx = 3 \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{f(x)}{x} dx.$$

Với tích phân: $\int_{\frac{1}{e}}^e f'(x) \ln x dx = 18$. Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = f'(x) dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = f(x) \end{cases}.$

Suy ra:

$$18 = \int_{\frac{1}{e}}^e f'(x) \ln x dx = f(x) \ln x \Big|_{\frac{1}{e}}^e - \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{f(x) dx}{x} = f(e) + f\left(\frac{1}{e}\right) - \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{f(x) dx}{x} = 5 - \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{f(x) dx}{x}$$

$$\Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{f(x) dx}{x} = -13. \text{ Vậy } I = \int_{\frac{1}{e}}^e g(x) dx = 3 \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{f(x) dx}{x} = -39.$$

Câu 19. Chọn C

Dạng bài toán $\begin{cases} f(u(x)) = v(x) \\ I = \int_a^b f(x) dx = ? \end{cases}$

Xử lý tổng quát: $\begin{cases} x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t) dt \\ f(x) = f(u(t)) = v(t) \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \int_{a'}^{b'} v(t) u'(t) dt$

Với $I = \int_{-1}^3 f(x) dx$. Đặt $x = 2t - 1 \Rightarrow dx = 2dt$

Đổi cận $\begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$. Suy ra $I = \int_{-1}^3 f(x) dx = \int_0^2 (3t^2 + 1) \cdot 2dt = 20$

Ta có thể xử lý bằng phương trình hàm

Câu 20. Chọn B

Với $I = \int_1^5 f(x) dx$.

Đặt $x = t^3 + 3t + 1 \Rightarrow dx = (3t^2 + 3)dt$; $f(x) = f(t^3 + 3t + 1) = 6t + 2$

$$\text{Đổi cận } \begin{cases} x=1 \\ x=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } I = \int_1^5 f(x) dx = \int_0^1 (6t+2)(3t^2+3) dt = \frac{43}{2}.$$

Câu 21. Chọn D**Cách 1:** Trắc nghiệmTa chọn hàm hằng: $f(x) = f(1-x) = a = \text{hằng số}$

$$\text{Suy ra: } \int_0^1 f(x) dx = -6 = \int_0^1 a dx = a \Rightarrow f(x) = f(1-x) = -6$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_0^1 (2x^3 - 3x^2) f(x) dx = \int_0^1 (2x^3 - 3x^2)(-6) dx = 3$$

$$\text{CÁCH 2: Với tích phân } I = \int_0^1 (2x^3 - 3x^2) f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = 1-x \Rightarrow dt = -dx.$$

$$\text{Đổi cận: } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_0^1 (2x^3 - 3x^2) f(x) dx = \int_1^0 (2(1-t)^3 - 3(1-t)^2) f(1-t)(-dt)$$

$$= \int_0^1 (-2t^3 + 3t^2 - 1) f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow I = \int_0^1 (2x^3 - 3x^2) f(x) dx = \int_0^1 (-2x^3 + 3x^2 - 1) f(x) dx$$

$$= \int_0^1 (-2x^3 + 3x^2) f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \Leftrightarrow I = \int_0^1 (2x^3 - 3x^2) f(x) dx = -I + 6 \Leftrightarrow I = 3.$$

Câu 22. Chọn B**Cách 1:** Trắc nghiệmTa chọn hàm hằng: $\Rightarrow f(x) = f(2-x) = a = \text{hằng số}$

$$\text{Suy ra: } \int_0^2 f(x) dx = 12 = \int_0^2 a dx = 2a \Rightarrow f(x) = f(2-x) = a = 6$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_0^2 (x^3 - 3x^2) f(x) dx = \int_0^2 (x^3 - 3x^2)(6) dx = -24$$

$$\text{CÁCH 2: Với tích phân } I = \int_0^2 (x^3 - 3x^2) f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = 2-x \Rightarrow dt = -dx. \text{ Đổi cận: } \begin{cases} x=0 \Rightarrow t=2 \\ x=2 \Rightarrow t=0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } I = \int_0^2 (x^3 - 3x^2) f(x) dx = \int_2^0 ((2-t)^3 - 3(2-t)^2) f(2-t)(-dt)$$

$$= \int_0^2 (-t^3 + 3t^2 - 4) f(t) dt$$

$$\Leftrightarrow I = \int_0^2 (x^3 - 3x^2) f(x) dx = \int_0^2 (-x^3 + 3x^2 - 4) f(x) dx = \int_0^2 (-x^3 + 3x^2) f(x) dx - 4 \int_0^2 f(x) dx$$

$$\Leftrightarrow I = -I - 4.12 \Rightarrow I = -24.$$

Câu 23. Chọn C

Với dạng này ta có cách làm tổng quát sau:

Từ giả thiết vi phân hai vế sẽ được $(3(f(x))^2 + 2)f'(x)dx = 2dx$.

$$\text{Suy ra } I = \int_{-1}^2 f(x)dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 f(x) (3(f(x))^2 + 2) f'(x) dx$$

$$\text{Đặt } t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)dx$$

Đổi cận:

$$x = -1 \Rightarrow (f(-1))^3 + 2f(-1) = -3 \Rightarrow f(-1) = t = -1$$

$$x = 2 \Rightarrow (f(2))^3 + 2f(2) = 3 \Rightarrow f(2) = t = 1$$

$$\text{Suy ra } I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) (3(f(x))^2 + 2) f'(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 t(3t^2 + 2) dt = 0$$

Câu 24. Chọn A

Từ giả thiết vi phân hai vế sẽ được $(5(f(x))^4 + 3)f'(x)dx = dx$.

$$\text{Suy ra } I = \int_0^4 (f(x))^2 dx = \int_0^4 (f(x))^2 (5(f(x))^4 + 3) f'(x) dx = \int_0^4 (5(f(x))^6 + 3(f(x))^2) f'(x) dx.$$

$$\text{Đặt } t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)dx.$$

Đổi cận:

$$x = 0 \Rightarrow (f(0))^5 + 3f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = t = 0.$$

$$x = 4 \Rightarrow (f(4))^5 + 3f(4) = 4 \Rightarrow f(4) = t = 1.$$

$$\text{Suy ra } I = \int_0^4 (5(f(x))^6 + 3(f(x))^2) f'(x) dx = \int_0^1 (5t^6 + 3t^2) dt = \frac{12}{7}.$$

Câu 25. Chọn C

Lấy tích phân hai vế từ 0 đến 1 ta được:

$$\int_0^1 f(x+1)dx + \int_0^1 f(x+2)dx = \int_0^1 e^x (x^2 - 1)dx = -1 \quad (1)$$

Với tích phân $A = \int_0^1 f(x+1)dx$. Đặt $t = x+1 \Rightarrow dt = dx$; đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=2 \end{cases}$

$$\text{Suy ra } A = \int_0^1 f(x+1)dx = \int_1^2 f(t)dt = \int_1^2 f(x)dx \quad (2)$$

Với tích phân $B = \int_0^1 f(x+2)dx$. Đặt $t = x+2 \Rightarrow dt = dx$; đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=2 \\ x=1 \Rightarrow t=3 \end{cases}$

$$\text{Suy ra } B = \int_0^1 f(x+2)dx = \int_2^3 f(t)dt = \int_2^3 f(x)dx \quad (3)$$

Thay A, B từ (2); (3) vào (1) ta được

$$\int_0^1 f(x+1)dx + \int_0^1 f(x+2)dx = -1 = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx.$$

Câu 26. Chọn B

Lấy tích phân từ 0 đến 1 ta được:

$$\int_0^1 f(x+1)dx + \int_0^1 f(x+2)dx + \dots + \int_0^1 f(x+2019)dx = \int_0^1 (3x^2 + 2x)dx = 2 \quad (1)$$

Với tích phân: $\int_0^1 f(x+1)dx$. Đặt $t = x+1 \Rightarrow dt = dx$; đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=2 \end{cases}$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(x+1)dx = \int_1^2 f(t)dt = \int_1^2 f(x)dx$$

Với tích phân: $\int_0^1 f(x+2)dx$. Đặt $t = x+2 \Rightarrow dt = dx$; đổi cận $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=2 \\ x=1 \Rightarrow t=3 \end{cases}$

$$\text{Suy ra } \int_0^1 f(x+2)dx = \int_2^3 f(x)dx$$

$$\text{Tương tự ta có: } \int_0^1 f(x+3)dx = \int_3^4 f(x)dx; \dots; \int_0^1 f(x+2019)dx = \int_{2019}^{2020} f(x)dx$$

Thay vào (1) ta được:

$$\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \dots + \int_{2019}^{2020} f(x)dx = 2 \Leftrightarrow \int_1^{2020} f(x)dx = 2.$$

Câu 27. Chọn D

Từ giả thiết:

$$\frac{1}{3}f(2x-1) + \frac{1}{2}f(3x+6) = x \ln(x+2) \Leftrightarrow 2f(2x-1) + 3f(3x+6) = 6x \ln(x+2)$$

Lấy tích phân hai vế cận từ -1 đến 2, ta được:

$$\int_{-1}^2 2f(2x-1)dx + \int_{-1}^2 3f(3x+6)dx = \int_{-1}^2 6x \ln(x+2)dx = \frac{27}{2}. \quad (1)$$

Với tích phân: $A = \int_{-1}^2 2f(2x-1)dx$; đặt $t = 2x-1 \Rightarrow dt = 2dx$; đổi cận: $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow t=-3 \\ x=2 \Rightarrow t=3 \end{cases}$

$$\text{Suy ra: } A = \int_{-1}^2 2f(2x-1)dx = \int_{-3}^3 f(t)dt = \int_{-3}^3 f(x)dx. \quad (2)$$

Với tích phân: $B = \int_{-1}^2 3f(3x+6)dx$; đặt $t = 3x+6 \Rightarrow dt = 3dx$; đổi cận: $\begin{cases} x=-1 \Rightarrow t=3 \\ x=2 \Rightarrow t=12 \end{cases}$

$$\text{Suy ra: } B = \int_{-1}^2 3f(3x+6)dx = \int_3^{12} f(t)dt = \int_3^{12} f(x)dx. \quad (3)$$

Thay A và B từ (2), (3) vào (1), ta được:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 2f(2x-1)dx + \int_{-1}^2 3f(3x+6)dx &= \int_{-1}^2 6x \ln(x+2)dx = \frac{27}{2} \\ \Leftrightarrow \int_{-3}^3 f(x)dx + \int_3^{12} f(x)dx &= \frac{27}{2} = \int_{-3}^{12} f(x)dx. \end{aligned}$$

Câu 28. Chọn C

$$\text{Ta có: } f(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}} = x+2 \Leftrightarrow xf(x^2+1) + \frac{f(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}} = x^2+2x, \quad \forall x > 0.$$

Lấy tích phân hai vế cận từ 1 đến 4, ta được:

$$\int_1^4 xf(x^2+1)dx + \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}}dx = \int_1^4 (x^2+2x)dx = 36. \quad (1)$$

Với tích phân: $A = \int_1^4 xf(x^2+1)dx$; đặt $t = x^2+1 \Rightarrow dt = 2xdx$; đổi cận: $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=2 \\ x=4 \Rightarrow t=17 \end{cases}$.

$$\text{Suy ra: } A = \int_1^4 xf(x^2+1)dx = \int_2^{17} f(t) \left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2} \int_2^{17} f(x)dx. \quad (2)$$

Với tích phân: $B = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}}dx$; đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$; đổi cận: $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=1 \\ x=4 \Rightarrow t=2 \end{cases}$.

$$\text{Suy ra: } B = \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2} \int_1^2 f(t)dt = \frac{1}{2} \int_1^2 f(x)dx. \quad (3)$$

Thay A và B từ (2), (3) vào (1), ta được:

$$\begin{aligned} \int_1^4 xf(x^2+1)dx + \int_1^4 \frac{f(\sqrt{x})}{4\sqrt{x}}dx &= 36 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_2^{17} f(x)dx + \frac{1}{2} \int_1^2 f(x)dx = 36. \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \int_1^{17} f(x)dx &= 36 \Leftrightarrow \int_1^{17} f(x)dx = 72. \end{aligned}$$

Câu 29. Chọn B

Từ giả thiết ta lấy tích phân hai vế cận từ $0 \rightarrow 1$, sẽ được

$$\int_0^1 f(x+1)dx + \int_0^1 3f(3x+2)dx - \int_0^1 4f(4x+1)dx - \int_0^1 f(2^x)dx = \int_0^1 \frac{3dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} \quad (1).$$

$$\begin{aligned} \text{Với } \int_0^1 \frac{3dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} &= \int_0^1 3(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})dx \\ &= 2 \left[(x+2)\sqrt{x+2} - (x+1)\sqrt{x+1} \right]_0^1 = 2 + 6\sqrt{3} - 8\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Để dàng dùng phương pháp đổi cận ta có

$$\int_0^1 f(x+1)dx = \int_1^2 f(t)dt = \int_1^2 f(x)dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 3f(3x+2)dx = \int_2^5 f(t)dt = \int_2^5 f(x)dx \quad (3)$$

$$\int_0^1 4f(4x+1)dx = \int_1^5 f(t)dt = \int_1^5 f(x)dx \quad (4)$$

$$\int_0^1 f(2^x)dx = \int_1^2 \frac{f(t)dt}{t \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 \frac{f(x)dx}{x} \quad (5)$$

Thay (2), (3), (4), (5) vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx - \int_1^5 f(x)dx - \frac{1}{\ln 2} \int_1^2 \frac{f(x)dx}{x} &= 2 + 6\sqrt{3} - 8\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow \int_1^2 \frac{f(x)dx}{x} &= (2 + 6\sqrt{3} - 8\sqrt{2}) \ln 2. \end{aligned}$$

