

DS6.CHUYÊN ĐỀ 5 - SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

CHỦ ĐỀ 3:CÁC BÀI TOÁN VỀ HỢP SỐ

PHẦN I.TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1.SỐ NGUYÊN TỐ

- Số nguyên tố là số tự nhiên lớn hơn 1, chỉ có 2 ước là 1 và chính nó.
- Số nguyên tố nhỏ nhất vừa là số nguyên tố chẵn duy nhất là số 2.
- Không thể giới hạn số nguyên tố cũng như tập hợp số nguyên tố.Hay nói cách khác,số nguyên tố là vô hạn.
- Khi 2 số nguyên tố nhân với nhau thì tích của chúng không bao giờ là một số chính phương.
- Ước tự nhiên nhỏ nhất khác 1 của một số tự nhiên được coi là số nguyên tố.
- Để kết luận số tự nhiên a là một số nguyên tố ($a > 1$), chỉ cần chứng minh a không chia hết cho mọi số nguyên tố mà bình phương không vượt quá a .

-Nếu tích $ab:p \Rightarrow \begin{cases} a:p \\ b:p \end{cases}$ (p là số nguyên tố)

-Đặc biệt nếu $a^n:p \Rightarrow a:p$ (p là số nguyên tố)

-Mọi số nguyên tố vượt quá 2 đều có dạng: $4n \pm 1 (n \in \mathbb{N}^*)$

-Mọi số nguyên tố vượt quá 3 đều có dạng: $6n \pm 1 (n \in \mathbb{N}^*)$

-Hai số nguyên tố sinh đôi là hai số nguyên tố hơn kém nhau 2 đơn vị.

2.HỢP SỐ

- Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 và có nhiều hơn 2 ước nguyên dương.
- Để chứng tỏ một số tự nhiên a ($a > 1$) là hợp số, chỉ cần chỉ ra một ước khác 1 và a .
- Ước số nhỏ nhất khác 1 của một hợp số là một số nguyên tố và bình phương lên không vượt quá nó.
- Một hợp số bằng tổng các ước của nó (không kể chính nó) được gọi là: Số hoàn chỉnh.
- Mọi số tự nhiên lớn hơn 1 đều phân tích được ra thừa số nguyên tố một cách duy nhất (không kể thứ tự các thừa số)

3.HAI SỐ NGUYÊN TỐ CÙNG NHAU

-Hai số tự nhiên được gọi là nguyên tố cùng nhau khi và chỉ khi chúng có ước chung lớn nhất bằng 1.

a, b nguyên tố với nhau $\Leftrightarrow (a, b) = 1; (a, b \in \mathbb{N}^*)$

- Hai số tự nhiên liên tiếp luôn nguyên tố cùng nhau
- Hai số nguyên tố khác nhau luôn nguyên tố cùng nhau
- Các số nguyên tố khác nhau luôn nguyên tố cùng nhau

- Các số a, b, c nguyên tố cùng nhau $(a, b, c) = 1$
- a, b, c nguyên tố đôi khi chúng đôi một nguyên tố cùng nhau a, b, c nguyên tố đôi
 $\Leftrightarrow (a, b) = (b, c) = (c, a) = 1$

4. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ ĐẶC BIỆT

- Định lý Dirichlet: Tồn tại vô số số nguyên tố p có dạng: $p = ax + b; x \in \mathbb{N}^*, (a, b) = 1$
- Định lý Tchebycheff: Trong khoảng từ số tự nhiên n đến số tự nhiên $2n$ có ít nhất một số nguyên tố ($n > 2$).
- Định lý Vinogradov: Mọi số lẻ lớn hơn 3^3 là tổng của 3 số nguyên tố.

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Phương pháp kiểm tra một số là hợp số

I. Phương pháp giải

Cách 1. Sử dụng định nghĩa.

- Hợp số là số tự nhiên lớn hơn 1 và có nhiều hơn 2 ước nguyên dương.
- Để chứng tỏ một số tự nhiên a ($a > 1$) là hợp số, chỉ cần chỉ ra một ước khác 1 và a .

Cách 2. Với $n \in \mathbb{N}^*, n > 1$ ta kiểm tra theo các bước sau

- Tìm số nguyên tố k sao cho: $k^2 \leq n \leq (k+1)^2$
- Kiểm tra xem n có chia hết cho các số nguyên tố nhỏ hơn hoặc bằng k không ?
- +) Nếu có chia hết thì n là số hợp số
- +) Nếu không chia hết thì n là số nguyên tố

II. Bài toán

Bài 1: Tổng, hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số

- $3.4.5 + 6.7$
- $5.7.9.11 - 2.3.4.7$
- $16354 + 67541$

Lời giải

- Ta có: $3.4.5 + 6.7 = 3(4.5 + 2.7); 3 \Rightarrow$ tổng trên là hợp số
- Ta có: $5.7.9.11 - 2.3.4.7 = 7(5.9.11 - 2.3.4); 7 \Rightarrow$ tổng trên là hợp số
- Ta có: $16354 + 67541$ có chữ số tận cùng là 5 nên chia hết cho 5, Vậy tổng trên là hợp số

Bài 2: Tổng, hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số

- $5.6.7 + 8.9$
- $5.7.9.11.13 - 2.3.7$

c) $5.7.11+13.17.19$

d) $4253 + 1422$

Lời giải

a) Ta có : $5.6.7+8.9=3(5.2.7+8.3):3 \Rightarrow$ tổng trên là hợp số

b) Ta có : $5.7.9.11.13-2.3.7=7(5.9.11.13-2.3):7 \Rightarrow$ tổng trên là hợp số

c) Ta có: $5.7.11$ là 1 số lẻ và $13.17.19$ cũng là 1 số lẻ, nên tổng là số chẵn $:2 \Rightarrow$ Là hợp số

d) Ta có: $4253+1422$ có chữ số tận cùng là 5 nên chia hết cho 5. Vậy tổng trên là hợp số

Bài 3: Tổng, hiệu sau là số nguyên tố hay hợp số

a) $17.18.19.31+11.13.15.23$

b) $41.43.45.47+19.23.29.31$

c) $987654+54321$

Lời giải

a) Ta có: $17.18.19.31+11.13.15.23=3(17.6.19.31+11.13.5.23):3 \Rightarrow 17.18.19.31+11.13.15.23$ là hợp số

b) Ta có: $41.43.45.47$ là số lẻ, $19.23.29.31$ là số lẻ, nên $41.43.45.47+19.23.29.31$ là số chẵn nên $41.43.45.47+19.23.29.31$ là hợp số

c) Ta có: $987654+54321$ có chữ số tận cùng là 5 nên chia hết cho 5 nên tổng trên là hợp số

Bài 4: Các số tự nhiên $\overline{abab}$; $\overline{abcabc}$; $\overline{ababab}$ là số nguyên tố hay hợp số.

Lời giải

Ta có $\overline{abab}=101.\overline{ab}$ có nhiều hơn hai ước số.

$\overline{abcabc}=1001.\overline{abc}=1.11.13.\overline{abc}$ có nhiều hơn hai ước số.

$\overline{ababab}=10101.\overline{ab}=3.7.13.37.\overline{ab}$ có nhiều hơn hai ước số.

Vậy các số tự nhiên $\overline{abab}$; $\overline{abcabc}$; $\overline{ababab}$ là hợp số.

Bài 5: Nếu P là số nguyên tố thì

a. $P^2 + P + 2$ là số nguyên tố hay hợp số

b. $P^2 + 200$ là số nguyên tố hay hợp số

Lời giải:

a) Ta có: $P^2 + P + 2 = P(P+1) + 2$

Vì $p; p+1$ là hai số liên tiếp nên $p(p+1)$ là số chẵn

Nên $p^2 + p + 2$ là số chẵn lớn hơn 2 nên là hợp số.

b)

- Với $p=2 \Rightarrow p^2 + 200$ là số chẵn lớn hơn 2 $\Rightarrow p^2 + 200$ là hợp số

- Với $p=3 \Rightarrow p^2 + 200 = 209 : 7 \Rightarrow p^2 + 200$ là hợp số

- Với $p > 3 \Rightarrow p^2 : 3$ dư 1; $200 : 3$ dư 2 $\Rightarrow (p^2 + 200) : 3 \Rightarrow p^2 + 200$ là hợp số

Vậy $p^2 + 200$ luôn là hợp số.

Bài 6: Cho $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $ab = cd$.

Chứng minh rằng: $A = a^n + b^n + c^n + d^n$ là hợp số với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải

Ta có $ab = cd \Rightarrow ab : bd = cd : bd$

Hay $a : d = c : b$

Đặt
$$a : d = c : b = t (t \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow \begin{cases} a = dt \\ c = bt \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} A &= a^n + b^n + c^n + d^n \\ &= (dt)^n + b^n + (bt)^n + d^n \\ &= d^n t^n + b^n + b^n t^n + d^n \\ &= d^n (t^n + 1) + b^n (t^n + 1) \\ &= (d^n + b^n)(t^n + 1) \end{aligned}$$

Vì $b, d, t \in \mathbb{N}^*$ nên A là hợp số.

Dạng 2: Một số bài toán về hợp số

I. Phương pháp giải

-Dựa vào các tính chất đặc trưng của hợp số để giải các bài toán về chứng minh hợp số.

II. Bài toán

Bài 7:

a) Cho p là số nguyên tố. Hỏi $p^5 - 1$ là số nguyên tố hay hợp số.

b) Cho p và $p+4$ là các số nguyên tố ($p > 3$). Chứng minh $p+8$ là hợp số.

Lời giải:

a. Nếu $p=2 \Rightarrow p^5 - 1 = 2^5 - 1 = 31$ là số nguyên tố

- Nếu $p > 2$

Vì p là số nguyên tố nên p là số lẻ

$\Rightarrow p^5$ là số lẻ

$\Rightarrow p^5 - 1$ là số chẵn lớn hơn 2

$\Rightarrow p^5 - 1$ là hợp số

Vậy $p^5 - 1$ là hợp số.

b. $p, p+4, p+8$ là dãy số cách đều 4 đơn vị $\Rightarrow$ có 1 số chia hết cho 3

Vì $p > 3 \Rightarrow p+4 > 3, p+8 > 3$ và $p, p+4$ là số nguyên tố nên $p, p+4$ không chia hết cho 3

$\Rightarrow p+8 \div 3$ và $p+8 > 3 \Rightarrow p+8$ là hợp số.

Bài 8: Cho p và $p+8$ là hai số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi $p+100$ là số nguyên tố hay là hợp số?

Lời giải:

Ta thấy p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $3n+1; 3n+2, (n \in \mathbb{N}^*)$

TH1: $p=3n+1, (n \in \mathbb{N}^*)$ thì $p+8=3n+9=3(n+3) \div 3$

Mà $p+8$ là số lớn hơn 3 nên $p+8$ là hợp số (Vô lí vì $p+8$ là số nguyên tố)

TH2: $p=3n+2, (n \in \mathbb{N}^*)$ thì $p+8=3n+10$

Khi đó $p+100=3n+2+100=6n+102=3(2n+34) \div 3$

Mà $p+100$ là số lớn hơn 3 nên $p+100$ là hợp số.

Bài 9: Cho p và $8p+1$ là các số nguyên tố ($p > 3$). Chứng minh $4p+1$ là hợp số.

Lời giải:

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p chia 3 dư 1 hoặc dư 2 $\Rightarrow p$ có dạng $3k+1; 3k+2 (k \in \mathbb{N}^*)$

Nếu $p=3k+1 \Rightarrow 8p+1=24k+9=3(8k+3) \div 3 \Rightarrow 8p+1$ là hợp số (Vô lí vì $8p+1$ là số nguyên tố)

Vậy $p=3k+2$ khi đó $4p+1=12k+9=3(4k+3) \div 3$ và $12k+9 > 3$ nên là hợp số.

Vậy nếu p và $8p+1$ là các số nguyên tố ($p > 3$) thì $4p+1$ là hợp số.

Bài 10 : Cho p và $2p+1$ là các số nguyên tố ($p > 3$). Chứng minh $4p+1$ là hợp số.

Lời giải:

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p chia 3 dư 1 hoặc dư 2 $\Rightarrow p$ có dạng $p=3k+1, p=3k+2 (k \in \mathbb{N}^*)$

+) Nếu $p = 3k + 1$ thì $2p + 1 = 6k + 3 \vdots 3$ và $6k + 3 > 3$ nên là hợp số (mâu thuẫn với giả thiết $2p + 1$ là các số nguyên tố)

Vậy $p = 3k + 2$ Khi đó $4p + 1 = 12k + 9 \vdots 3$ và $12k + 9 > 3$ nên là hợp số.

Vậy nếu p và $2p + 1$ là các số nguyên tố ($p > 3$) thì $4p + 1$ là hợp số. (đpcm)

Bài 11:

a) Cho p và $p + 2$ là số nguyên tố ($p > 3$). Chứng minh $p + 1$ là hợp số và $p + 1 \vdots 6$

b) Cho p và $p + 4$ là các số nguyên tố. Chứng minh $p + 2021$ là hợp số.

Lời giải:

a) Với $p > 3$, ta có $p, p + 1, p + 2$ là 3 số tự nhiên liên tiếp

Do đó trong 3 số trên có 1 số chia hết cho 3 (1)

Mà $p, p + 2$ là các số nguyên tố nên $p + 1 \vdots 3$ và $p > 3 \Rightarrow p + 1$ là hợp số

Lại có số nguyên tố $p > 3$

Nên $p + 1$ là số chẵn $\Rightarrow p + 1 \vdots 2$ (2)

Từ (1)(2) $\Rightarrow p + 1 \vdots 6$

b) Ta có: $p + 2012 = p + 2 + 2010$

Xét dãy $p, p + 2, p + 4$

Với $p = 2 \Rightarrow p + 4 = 6 \vdots 2 \Rightarrow p + 4$ là hợp số (loại)

Với $p = 3 \Rightarrow p + 2012 = 2015 \vdots 5 \Rightarrow p + 2012$ là hợp số

Với $p > 3 \Rightarrow p$ chia 3 dư 1 hoặc dư 2 $\Rightarrow p$ có dạng $p = 3k + 1, p = 3k + 2 (k \in \mathbb{N}^*)$

+) Nếu $p = 3k + 1$ thì $p + 2 = 3k + 3 \vdots 3$ và $3k + 3 > 3 \Rightarrow p + 2012 = p + 2 + 2010 \vdots 3$ nên là hợp số.

Vậy $p = 3k + 2$ Khi đó $p + 4 = 3k + 6 \vdots 3$ và $3k + 6 > 3$ nên là hợp số (mâu thuẫn với giả thiết $p + 4$ là số nguyên tố).

Bài 12: Cho p và $10p + 1$ là các số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng: $5p + 1$ là hợp số

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p chia 3 dư 1 hoặc dư 2 $\Rightarrow p$ có dạng $p = 3k + 1, p = 3k + 2 (k \in \mathbb{N}^*)$

+) Nếu $p = 3k + 2$ thì $10p + 1 = 10(3k + 2) + 1 = 30k + 21 \vdots 3$ và $30k + 21 > 3$ nên là hợp số (mâu thuẫn với giả thiết $10p + 1$ là số nguyên tố)

Vậy $p = 3k + 1$ Khi đó $5p + 1 = 15k + 6 \vdots 3$ và $15k + 6 > 3$ nên là hợp số.

Vậy nếu p và $10p+1$ là các số nguyên tố ($p > 3$) thì $5p+1$ là hợp số. (đpcm)

Bài 13: Cho p và $8p^2+1$ là các số nguyên tố ($p > 3$). Chứng minh rằng $8p^2-1$ là hợp số.

Lời giải:

Vì $p, 8p^2+1$ là 2 số nguyên tố lớn hơn 3 nên không chia hết cho 3

Khi đó ta có : $8p^2-1; 8p^2; 8p^2+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số chia hết cho 3

Mà $8p^2+1 \not\equiv 0 \pmod{3}, p \not\equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 8p^2 \equiv 0 \pmod{3}$. Vậy $8p^2-1 \equiv 0 \pmod{3}$ hay là hợp số

Bài 14: Cho p và $8p-1$ là các số nguyên tố ($p > 3$). Tìm số nguyên tố p để $8p+1$ là hợp số.

Lời giải:

Với $p > 3 \Rightarrow p, 8p-1$ là 2 số nguyên tố lớn hơn 3 nên không chia hết cho 3

Khi đó ta có : $8p-1; 8p; 8p+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên phải có 1 số chia hết cho 3

Mà $8p-1 \not\equiv 0 \pmod{3}, p \not\equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 8p \equiv 0 \pmod{3}$. Vậy $8p+1 \equiv 1 \pmod{3}$ hay là hợp số

Bài 15: Chứng minh rằng dãy các số sau là hợp số : $121; 11211; 1112111; \dots, 1\underbrace{121}_{n}1\underbrace{1}_{n} \dots 1(n > 2)$

Lời giải:

Ta có:

$$121 = 110 + 11 = 11 \cdot 10 + 11 = 11(10 + 1)$$

$$11211 = 1110 + 111 = 111(10^2 + 1)$$

$$1112111 = 1111000 + 1111 = 1111(10^3 + 1)$$

$$\underbrace{111}_{n} \dots \underbrace{121}_{n} \dots 1 = \underbrace{111}_{n+1} \dots \underbrace{1000}_{n} \dots 0 + \underbrace{111}_{n+1} \dots 1 = \underbrace{111}_{n+1} \dots 1 (\underbrace{10}_{n} \dots 0 + 1) = \underbrace{111}_{n+1} \dots 1 (10^n + 1)$$
 là hợp số

Bài 16: Chứng minh rằng $\underbrace{111}_{n} \dots \underbrace{122}_{n} \dots 2(n > 2)$ là hợp số.

Lời giải:

Ta có:

$$\underbrace{111}_{n} \dots \underbrace{122}_{n} \dots 2 = \underbrace{111}_{n} \dots \underbrace{100}_{n} \dots 0 + \underbrace{22}_{n} \dots 2$$

$$\underbrace{111}_{n} \dots \underbrace{122}_{n} \dots 2 = \underbrace{111}_{n} \dots 1 \cdot \underbrace{100}_{n} \dots 0 + 2 \cdot \underbrace{11}_{n} \dots 1$$

$$\underbrace{111}_{n} \dots \underbrace{122}_{n} \dots 2 = \underbrace{111}_{n} \dots 1 \cdot \left(\underbrace{100}_{n} \dots 0 + 2 \right)$$
 là hợp số

Bài 17: Một số nguyên tố chia cho 42 có số dư là hợp số. Tìm số dư đó

Lời giải:

Gọi p là số nguyên tố theo đầu bài, khi đó: $p = 42k + r = 2 \cdot 3 \cdot 7k + r (0 < r < 42)$

Vì r là hợp số $\Rightarrow 2 \leq r < 42$

Vì p là số nguyên tố

$\Rightarrow r$ không chia hết cho $2, 3, 7$

Mà r là hợp số nên $\Rightarrow r = 25$ là giá trị cần tìm

Vậy $r = 25$

Bài 18: Một số nguyên tố chia cho 60 có số dư là r . Tìm số dư, biết rằng r có thể là hợp số hay là số nguyên tố không?

Lời giải:

Giả sử p là số nguyên tố:

$$p = 60k + r (k \in \mathbb{N}; 0 < r < 60); 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow p = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot k + r \Rightarrow r \notin 2, 3, 5$$

$\Rightarrow r = 1$ hoặc r là số nguyên tố hoặc là hợp số và không chia hết cho $2, 3, 5$

$$\Rightarrow r = 1 \text{ hoặc } r \text{ là số nguyên tố khác } 2, 3, 5 \text{ hoặc } r = 49 \Rightarrow \begin{cases} r = 1 \\ r = 49 \end{cases}$$

Bài 19: Cho p và $p + 2$ là các số nguyên tố ($p > 3$). Chứng minh rằng tổng của hai số nguyên tố đó chia hết cho 12 .

Lời giải:

Đặt $A = p + (p + 2) = 2p + 2 = 2(p + 1)$

Và $p + 2 = p - 1 + 3$

Xét 3 số liên tiếp $p - 1, p, p + 1$ phải có 1 số chia hết cho 3

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3, nên p không chia hết cho 3,

Mặt khác $p - 1 \not\vdots 3$ vì nếu chia hết cho 3 thì $p + 2$ sẽ chia hết cho 3, như vậy $p + 1 \vdots 3 \Rightarrow 2(p + 1) \vdots 3$

Lại có p là số nguyên tố > 3 nên p lẻ $\Rightarrow p + 1$ là số chẵn $\vdots 2$

$$2(p + 1) \vdots 2$$

Vậy

Bài 20: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $(p - 1)(p + 1)$ chia hết cho 24.

Lời giải:

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ không chia hết cho 2 và 3

Với p không chia hết cho 2 $\Rightarrow (p - 1), (p + 1)$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p - 1)(p + 1) \vdots 8$

Mặt khác p không chia hết cho 3 nên $p = 3k + 1, p = 3k + 2$

- Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow (p - 1) \vdots 3 \Rightarrow (p - 1)(p + 1) \vdots 24$

$$p = 3k + 2 \Rightarrow (p+1):3 \Rightarrow (p-1)(p+1):24$$

- Nếu

Bài 16: Ta biết rằng có 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100, hỏi tổng 25 số nguyên tố đó có là hợp số không?

Lời giải

Trong 25 số nguyên tố nhỏ hơn 100, có 1 số nguyên tố chẵn là số 2

Còn lại 24 số nguyên tố còn lại là số lẻ $\Rightarrow$ tổng của 24 số lẻ cho ta 1 số chẵn

Vậy xét tổng của 25 số nguyên tố đó cho ta được 1 số chẵn nên tổng 25 số nguyên tố đó có là hợp số.

Bài 17:

Chứng minh rằng với mọi số nguyên $a \geq 2$ thì $A = a^{1966} + a^{2006} + 1$ là hợp số.

Lời giải

Ta có
$$A = a^{1966} + a^{2006} + 1 = a(a^{3.655} - 1) + a^2(a^{3.668} - 1) + (a^2 + a + 1)$$

Mà
$$a^{3.655} - 1 = \left[(a^3)^{655} - 1 \right] : a^2 + a + 1; \quad a^{3.668} - 1 = \left[(a^3)^{668} - 1 \right] : a^2 + a + 1$$

Do đó $A : a^2 + a + 1 > 1$

Vậy với mọi số nguyên $a \geq 2$ thì $A = a^{1966} + a^{2006} + 1$ là hợp số.

Bài 18: Cho $a = 2.3.4.5....1987$. Có phải 1986 số tự nhiên liên tiếp sau đều là hợp số không?

$a + 2; a + 3; a + 4;; a + 1987$

Lời giải

Do a là tích các số từ 2 đến 1987 có nghĩa là tích của a có 1996 số.

$a + 2 = 2.3.4.5....1987 + 2 = 2(3.4.5....1987):2$ và $a + 2 > 2$ nên $a + 2$ là hợp số.

$a + 3 = 2.3.4.5....1987 + 3 = 3(2.4.5....1987):3$ và $a + 3 > 3$ nên $a + 3$ là hợp số.

Chứng minh tương tự cho các trường hợp còn lại.

Vậy 1986 số tự nhiên liên tiếp $a + 2; a + 3; a + 4;; a + 1987$ đều là hợp số.

Bài 19: Cho $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \in \mathbb{Z}^+)$, biết $F(5) - F(3) = 2010$. Chứng minh rằng:

$F(7) - F(1)$ là hợp số.

Lời giải

Ta có
$$2010 = F(5) - F(3) = (5^3 - 3^3)a + (5^2 - 3^2)b + (5 - 3)c = 98a + 16b + 2c$$

$$\Rightarrow 16b + 2c = 2010 - 98a$$

$$\Rightarrow F(7) - F(1) = (7^3 - 1^3)a + (7^2 - 1^2)b + (7 - 1)c = 342a + 48b + 6c$$

$$= 342a + 3(16b + 2c) = 342a + 3(2010 - 98a) = 48a + 6030 = 3.(16a + 2010):3$$

Vì a nguyên dương nên $16a + 2010 > 1$.

Vậy $F(7) - F(1)$ là hợp số.

Bài 20: Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3, sao cho $14p + 1$ cũng là số nguyên tố thì $7p + 1$ là bội số của 6.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p là số lẻ không chia hết cho 2 và 3

Khi đó $7p + 1$ là 1 số chẵn nên chia hết cho 2

Mặt khác vì p không chia hết cho 3 nên p có dạng $p = 3k + 1, p = 3k + 2, (k \in \mathbb{N}^*)$

Với $p = 3k + 1$ giả sử là số nguyên tố, $\Rightarrow 14p + 1 = 45k + 15 : 3$ nên $p = 3k + 1 (l)$

Với $p = 3k + 2 \Rightarrow 14p + 1 = 42k + 29$ giả sử là số nguyên tố, khi đó: $7p + 1 = 21k + 15 : 3$

Như vậy $7p + 1 : 6$

Bài 21: Chứng minh rằng nếu p là tích của n số nguyên tố đầu tiên thì $p - 1$ và $p + 1$ không thể là các số chính phương

Lời giải

Vì p là tích của n số nguyên tố đầu tiên nên $p : 2$ và p không thể chia hết cho 4 (1)

- Giả sử $p + 1$ là số chính phương, đặt $p + 1 = m^2 (m \in \mathbb{N})$

Vì p chẵn nên $p + 1$ lẻ $\Rightarrow m^2$ lẻ $\Rightarrow m$ lẻ

Đặt $m = 2k + 1 (k \in \mathbb{N})$, ta có: $m^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow p + 1 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow p = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$

Mâu thuẫn với (1)

$\Rightarrow p + 1$ không thể là số chính phương

- Giả sử $p = 2.3.5 \dots$ là $: 3 \Rightarrow p - 1$ có dạng $3k + 2 \Rightarrow p - 1$ không là số chính phương

Vậy nếu p là tích của $n (n > 1)$ số nguyên tố đầu tiên thì $p - 1$ và $p + 1$ không là số chính phương

Bài 22: Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3 thỏa mãn : $10p + 1$ cũng là số nguyên tố. CMR : $5p + 1 : 6$

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 3, nên $10p$ cũng không chia hết cho 3 (1)

Lại có $10p + 1$ là số nguyên tố và $10p + 1 > 3 \Rightarrow 10p + 1 \nmid 3$ (2)

Ta có $10p(10p + 1)(10p + 2)$ là tích 3 số tự nhiên liên tiếp nên phải có 1 số chia hết cho 3
 $\Rightarrow 10p + 2 : 3 \Rightarrow 5p + 1 : 3$

Lại có p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ $\Rightarrow 5p + 1$ là số chẵn nên chia hết cho 2, khi đó
 $5p + 1 : 6$

Bài 23: Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Chứng minh rằng:
 $a + b + c + d$ là hợp số

Lời giải

Ta có: $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - (a + b + c + d) = (a^2 - a) + (b^2 - b) + (c^2 - c) + (d^2 - d)$

$$\Rightarrow a(a-1) + b(b-1) + c(c-1) + d(d-1) : 2 \text{ mà } a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(b^2 + d^2) : 2$$

Do đó $a + b + c + d : 2$

Vì Cho a, b, c, d là các số nguyên dương nên $a + b + c + d \geq 4$

$\Rightarrow a + b + c + d$ là hợp số

Bài 24: Chứng minh các số sau là hợp số

a) $12^{11} + 13^{17} + 17^{19}$

b) $1 + 23^{23} + 29^{29} + 25^{125}$

c) $45^{25} + 37^{15}$

d) $95^{354} + 51^{25}$

Lời giải

a) Ta có:

12^{11} có chữ số tận cùng là 8

13^{17} có chữ số tận cùng là 3

17^{19} có chữ số tận cùng là 7

$\Rightarrow 12^{11} + 13^{17} + 17^{19}$ có chữ số tận cùng là 8

$\Rightarrow 12^{11} + 13^{17} + 17^{19}$ là 1 số chẵn

$\Rightarrow 12^{11} + 13^{17} + 17^{19}$ là hợp số

b) Ta có :

23^{23} có chữ số tận cùng là 7

29^{29} có chữ số tận cùng là 9

25^{125} có chữ số tận cùng là 5

$\Rightarrow 1 + 23^{23} + 29^{29} + 25^{125}$ có chữ số tận cùng là 2

$\Rightarrow 1 + 23^{23} + 29^{29} + 25^{125}$ là 1 số chẵn

$\Rightarrow 1 + 23^{23} + 29^{29} + 25^{125}$ là hợp số

c) Ta có :

45^{25} có chữ số tận cùng là 5

37^{15} có chữ số tận cùng là 3

$\Rightarrow 45^{25} + 37^{15}$ có chữ số tận cùng là 8

$\Rightarrow 45^{25} + 37^{15}$ là 1 số chẵn

$\Rightarrow 45^{25} + 37^{15}$ là hợp số

d) Ta có

95^{354} có chữ số tận cùng là 5

51^{25} có chữ số tận cùng là 1

$\Rightarrow 95^{354} + 51^{25}$ có chữ số tận cùng là 6

$\Rightarrow 95^{354} + 51^{25}$ là 1 số chẵn

$\Rightarrow 95^{354} + 51^{25}$ là hợp số

Bài 25: Chứng minh các số sau là hợp số

a) $10^8 + 10^7 + 7$ b) $17^5 + 24^4 - 13^{21}$ c) $425^{25} - 37^{15}$

Lời giải

a) Ta có : $10^8 + 10^7 + 7$ có tổng các chữ số chia hết cho 9 nên là hợp số

b) Ta có : $17^5 + 24^4 - 13^{21}$ là số chẵn nên là hợp số

c) $425^{25} - 37^{15}$ là số chẵn nên là hợp số

Bài 26: Chứng minh các số sau là hợp số

a) $1 + 2^7 + 3^{11} + 5^{13} + 7^{17} + 11^{19}$ b) $195^{354} - 151^{25}$ c) $2^{2^{2n+1}} - 1, n \in \mathbb{N}$ d) $2^{2^{4n+1}} - 6, n \in \mathbb{N}$

Lời giải

a) $1 + 2^7 + 3^{11} + 5^{13} + 7^{17} + 11^{19}$ là số chẵn nên là hợp số.

b) Ta có: $195^{354} - 151^{25}$ là số chẵn nên là hợp số

c) Ta có : $2^{2n+1} = 2^{2n} \cdot 2 = 4^n \cdot 2 \Rightarrow 2^{2^{2n+1}} = 2^{4^n \cdot 2} = (2^{4^n})^2$

Ta có :

2^{4^n} có chữ số tận cùng là 6

$\Rightarrow (2^{4^n})^2$ có chữ số tận cùng là 6

$\Rightarrow 2^{2^{2n+1}} - 1$ có chữ số tận cùng là 5

$\Rightarrow 2^{2^{2n+1}} - 1 \vdots 5 \Rightarrow 2^{2^{2n+1}} + 1$ là hợp số

d) Ta có : $2^{4n+1} = 2^{4n} \cdot 2 = 16^n \cdot 2 \Rightarrow 2^{2^{4n+1}} = 2^{16^n \cdot 2} = (2^{16^n})^2$

Ta có :

2^{16^n} có chữ số tận cùng là 6

$\Rightarrow (2^{16^n})^2$ có chữ số tận cùng là 6

$\Rightarrow 2^{2^{4n+1}} - 6$ có chữ số tận cùng là 0

$\Rightarrow 2^{2^{4n+1}} - 6 : 5$ nên $2^{2^{4n+1}} - 6$ là hợp số

Bài 27: Chứng minh với mọi số tự nhiên lớn hơn 0 thì $2^{2^{2n+1}} + 3$ là hợp số.

Lời giải:

Với $2^2 = 4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2^{2n} \equiv 1 \pmod{3}, (n \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow 2^{2n} - 1 : 3$ nên $2^{2^{2n+1}} - 2 = 2(2^{2n} - 1) : 6$

Hay $2^{2^{2n+1}} = 6k + 2 (k \in \mathbb{N})$

$\Rightarrow 2^{2^{2n+1}} + 3 = (6k + 2) + 3 \equiv 2^2 + 3 \equiv 0 \pmod{7}$

Tức là $2^{2^{2n+1}} + 3 : 7 (n \in \mathbb{N}^*)$

Mà $2^{2^{2n+1}} + 3 > 7 (n \in \mathbb{N}^*)$ nên $2^{2^{2n+1}} + 3$ là hợp số. (đpcm)

Bài 28: Chứng minh với mọi số tự nhiên lớn hơn 0 thì $19 \cdot 8^n + 17$ là hợp số.

Lời giải:

+ Nếu $n = 2k (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $19 \cdot 8^{2k} + 17 = 18 \cdot 8^{2k} + (63 + 1)^k + (18 - 1) \equiv 0 \pmod{3}$

+ Nếu $n = 4k + 1 (k \in \mathbb{N}^*)$ thì $19 \cdot 8^n + 17 = 13 \cdot 8^{4k+1} + 6 \cdot 8 \cdot 64^{2k} + 17$
 $= 13 \cdot 8^{4k+1} + 39 \cdot 64^{2k} + 9(1 - 65)^{2k} + (13 + 4) \equiv 0 \pmod{13}$

+ Nếu $n = 4k + 3 (k \in \mathbb{N}^*)$ thì

$19 \cdot 8^n + 17 = 15 \cdot 8^{4k+3} + 4 \cdot 8^3 \cdot 64^{2k} + 17$
 $15 \cdot 8^{4k+3} + 4 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 64^{2k} + 4 - 2(1 - 65)^{2k} + (25 - 8) \equiv 0 \pmod{5}$

Như vậy với mọi giá trị $n \in \mathbb{N}^*$ thì số $19 \cdot 8^n + 17$ là hợp số.

Bài 29: Chứng minh các số sau là hợp số:

a) $\overline{abcabc} + 7$ b) $\overline{abcabc} + 22$ c) $\overline{abcabc} + 39$

Lời giải

a) Ta có: $\overline{abcabc} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c + 7$
 $= a \cdot 100100 + b \cdot 10010 + 1001c + 7 = 1001(100a + 10b + c) + 7$

Vì 1001 chia hết cho 7 nên $\overline{abcabc} : 7$ là hợp số

b) Tách tương tự, nhưng vì $1001 : 11$ nên là hợp số

c) Tách tương tự, nhưng vì $1001 : 13$ nên là hợp số

Bài 30: Hãy chứng minh các số sau là hợp số:

a) $A = 11111 \dots 1$ (2022 chữ số 1);

b) $B = 1010101$

c) $C = 1! + 2! + 3! + \dots + 100!$

d) $D = 311141111$

Lời giải:

a) Tổng các chữ số của A là: $1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 2022 : 3 \Rightarrow A : 3$

mà $A > 3$ nên A là hợp số (đpcm)

b) $B = 1010101 = 101.10001$ là hợp số (đpcm)

c) Vì $1! + 2! = 3 : 3$ và $3! + 4! + \dots + 100!$ luôn chia hết cho 3 nên $C : 3$

Mà $C > 3$ nên C là hợp số (đpcm)

d) $D = 311141111 = 311110000 + 31111 = 31111(10000 + 1) : 31111$

$\Rightarrow D$ là hợp số (đpcm)

Bài 31: Chứng minh rằng số $N = \frac{5^{125} - 1}{5^{25} - 1}$ là hợp số.

Lời giải:

Đặt $5^{25} = a$, khi đó

$$\begin{aligned} N &= \frac{a^5 - 1}{a - 1} = a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 \\ &= (a^4 + 9a^2 + 1 + 6a^3 + 6a + 2a^2) - (5a^3 + 10a^2 + 1) \\ &= (a^2 + 3a + 1)^2 + 5a(a^2 + 2a + 1) \\ &= (a^2 + 3a + 1)^2 - 5 \cdot 5^{25}(a + 1)^2 \\ &= (a^2 + 3a + 1)^2 - [5^{13} \cdot (a + 1)]^2 \\ &= [a^2 + 3a + 1 + 5^{13}(a + 1)][a^2 + 3a + 1 - 5^{13}(a + 1)] \end{aligned}$$

N là tích của hai số nguyên lớn hơn 1 nên N là hợp số (đpcm)

Bài 32: Cho các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn $a^n : 5$. Chứng minh rằng

$A = a^n + b^n + c^n + d^n$ là hợp số.

Lời giải:

Giả sử $(a, c) = t (t \in \mathbb{N}^*)$

Đặt $a = a_1 t, c = c_1 t; (a_1, c_1) = 1$

$ab = cd \Rightarrow a_1 b t = c_1 d t \Rightarrow a_1 b = c_1 d$

$(a_1, c_1) = 1 \Rightarrow b : c_1$

Mà

Đặt $b = c_1 k \Rightarrow d = a_1 k, (k \in \mathbb{N}^*)$,

Ta có

$$A = a^n + b^n + c^n + d^n = a_1^n t^n + c_1^n k^n + c_1^n t^n + a_1^n k^n = (a_1^n + c_1^n)(k^n + t^n)$$

Vì a_1, c_1, t, k là số nguyên dương nên A là hợp số.

Bài 33: Hai số $2^n + 1$ và $2^n - 1$ ($n > 2$) có thể đồng thời là số nguyên tố hay đồng thời là hợp số được không ?

Lời giải:

Trong ba số nguyên liên tiếp $2^n + 1$, 2^n và $2^n - 1$ có một số chia hết cho 3, nhưng $2^n \not\vdots 3$ do đó $2^n + 1$ hoặc $2^n - 1$ chia hết cho 3 và lớn hơn 3 nên $2^n + 1$, $2^n - 1$ không đồng thời là số nguyên tố.

Với $n = 6$ thì $2^n + 1$, $2^n - 1$ đồng thời là hợp số.

Bài 34: Hai số nguyên tố lẻ liên tiếp p_1 và p_2 ($p_1 > p_2$), chứng tỏ $\frac{p_1 + p_2}{2}$ là hợp số.

Lời giải:

Vì p_1 và p_2 là hai số nguyên tố lẻ liên tiếp nên $p_1 + p_2$ là số chẵn và $\frac{p_1 + p_2}{2} \in \mathbb{N}$

Mặt khác $p_1 > p_2$ nên $p_1 + p_2 > 2p_2 \Rightarrow \frac{p_1 + p_2}{2} > p_2$ và $2p_1 > p_1 + p_2 \Rightarrow p_1 > \frac{p_1 + p_2}{2}$

Vậy $p_2 < \frac{p_1 + p_2}{2} < p_1 \Rightarrow \frac{p_1 + p_2}{2}$ là hợp số.

Dạng 3: Áp dụng định lý Fermat chứng minh một biểu thức là hợp số.

I. Phương pháp giải

-Định lý Fermat nhỏ: $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ với p là số nguyên tố.

-Bằng cách sử dụng định lý Fermat để giải các bài toán về số nguyên tố.

II. Bài toán

Bài 33: Cho $n \in \mathbb{N}^*$, chứng minh rằng: $2^{2^{10n+1}} + 19$ là hợp số.

Lời giải:

Ta chứng minh $2^{2^{10n+1}} + 19 \vdots 23$ với mọi $n \geq 1$

Ta có: $2^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 2^{10n+1} \equiv 2 \pmod{22} \Rightarrow 2^{10n+1} = 22k + 2 (k \in \mathbb{N})$.

Theo định lý Fermat:

$$2^{22} \equiv 1 \pmod{23} \Rightarrow 2^{2^{10n+1}} \equiv 2^{22k+2} \equiv 4 \pmod{23}$$

$$\Rightarrow 2^{2^{10n+1}} + 19 \vdots 23$$

Mà $2^{10n+1} + 19 > 23$ nên $2^{2^{10n+1}} + 19$ là hợp số (đpcm)

Bài 34: Cho $n \in \mathbb{N}^*$, chứng minh rằng: $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 5$ là hợp số.

Lời giải:

Theo định lí Fermat nhỏ ta có $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}, 2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$.

Ta tìm số dư trong phép chia 2^{4n+1} và 3^{4n+1} cho 10, tức là tìm chữ số tận cùng chúng.

$$2^{4n+1} = 2 \cdot 16^n \equiv 2 \pmod{10} \Rightarrow 2^{4n+1} = 10k + 2, (k \in \mathbb{N})$$

$$3^{4n+1} = 3 \cdot 81^n \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow 3^{4n+1} = 10l + 3, (l \in \mathbb{N})$$

Mà $3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ và $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ nên

$$2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 5 \equiv 3^{10k+2} + 2^{10l+3} + 5 \equiv 3^2 + 2^3 + 5 \equiv 0 \pmod{11}$$

Mà $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 5 > 11$ với mọi số tự nhiên n khác 0

Vậy $2^{3^{4n+1}} + 3^{2^{4n+1}} + 5$ là hợp số với mọi số tự nhiên n khác 0.

Bài 35: Giả sử p là số nguyên tố lẻ và $m = \frac{9^p - 1}{8}$. Chứng minh rằng m là hợp số lẻ không chia hết cho 3 và $3^m \equiv 1 \pmod{m}$.

Lời giải:

$$\text{Ta có } m = \frac{9^p - 1}{8} = \frac{3^p - 1}{2} \cdot \frac{3^p + 1}{4} = a \cdot b \quad \text{với } a = \frac{3^p - 1}{2}, b = \frac{3^p + 1}{4}$$

Vì a, b là các số nguyên lớn hơn 1 nên m là hợp số.

Mà $m = 9^{p-1} + 9^{p-2} + \dots + 9 + 1$ và p là số nguyên tố lẻ nên m lẻ và $m \equiv 1 \pmod{3}$.

Theo định lí Fermat ta có $9^p - 9 \vdots p$ và $(p, 8) = 1$ nên $9^p - 9 \vdots 8p \Rightarrow m - 1 \vdots \frac{9^p - 9}{8} \vdots p$

Vì $m - 1 \vdots 2$ nên $m - 1 \vdots 2p$ khi đó $3^{m-1} - 1 \vdots 3^{2p} - 1 \vdots \frac{9^p - 1}{8} = m$ (đpcm).

Bài 36: Cho $n \in \mathbb{N}$, chứng minh rằng: $2^{2^{4n+1}} + 7$ là hợp số.

Lời giải:

Với $n \in \mathbb{N}$ ta có $2^{4n} - 1 = 16^n - 1 \equiv 0 \pmod{5}$

$$\Rightarrow 2^{4n+2} - 2 = 2(2^{4n} - 1) \vdots 10 \Rightarrow 2^{4n+2} = 10k + 2 (k \in \mathbb{N})$$

$$\Rightarrow 2^{2^{4n+1}} + 7 = (2^{10})^k \cdot 2^2 + 7 \equiv 2^2 + 7 \equiv 0 \pmod{11}$$

Mặt khác $2^{2^{4n+1}} + 7 > 11 (n \in \mathbb{N})$

Vậy $2^{2^{4n+1}} + 7$ là hợp số.

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG. (Khoảng 15 bài)

Bài 1: (HUYỆN BẠCH THÔNG NĂM 2018-2019)

Tổng của hai số nguyên tố có thể bằng 2015 hay không ? Vì sao ?

Lời giải:

Tổng của hai số nguyên tố bằng 2015 là số lẻ, nên một trong hai số nguyên tố phải là 2

Khi đó số kia là 2013, số này là hợp số

Vậy không tồn tại hai số nguyên tố có tổng bằng 2015

Bài 2: (HUYỆN TAM DƯƠNG NĂM 2017-2018)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi $p^{2016} + 2018$ là số nguyên tố hay hợp số

Lời giải:

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p chia cho 3 dư 1 hoặc p chia cho 3 dư 2 $\Rightarrow p^2$ chia cho 3 dư 1

Mà $p^{2016} = (p^2)^{1008}$ nên p^{2016} chia cho 3 dư 1.

Mặt khác: 2018 chia cho 3 dư 2, do đó: $(p^{2016} + 2018); 3$

Vì $(p^{2016} + 2018); 3$ và $(p^{2016} + 2018) > 3$ nên $p^{2016} + 2018$ là hợp số

Bài 3: (HUYỆN SƠN TÂY NĂM 2017-2018)

Với q, p là số nguyên tố lớn hơn 5, chứng minh rằng: $p^4 - q^4 : 240$

Lời giải:

Ta có: $p^4 - q^4 = (p^4 - 1) - (q^4 - 1); 240 = 8.2.3.5$

Chứng minh $p^4 - 1 : 240$

Do $p > 5$ nên p là số lẻ

Mặt khác $p^4 - 1 = (p - 1)(p + 1)(p^2 + 1)$

$\Rightarrow (p - 1)$ và $(p + 1)$ là hai số chẵn liên tiếp $\Rightarrow (p - 1)(p + 1); 8$

Do p là số lẻ nên p^2 là số lẻ $\Rightarrow p^2 + 1 : 2$

$p > 5$ nên p có dạng:

$p = 3k + 1 \Rightarrow p - 1 = 3k : 3 \Rightarrow p^4 - 1 : 3$

$p = 3k + 2 \Rightarrow p + 1 = 3k + 3 : 3 \Rightarrow p^4 - 1 : 3$

Mặt khác p có thể là dạng :

$$p = 5k + 1 \Rightarrow p - 1 = 5k + 1 - 1 = 5k : 5 \Rightarrow p^4 - 1 : 5$$

$$p = 5k + 2 \Rightarrow p^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 : 5 \Rightarrow p^4 - 1 : 5$$

$$p = 5k + 3 \Rightarrow p^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 : 5 \Rightarrow p^4 - 1 : 5$$

$$p = 5k + 4 \Rightarrow p + 1 = 5k + 5 : 5 \Rightarrow p^4 - 1 : 5$$

Vậy $p^4 - 1 : 8.2.3.5$ hay $p^4 - 1 : 240$

Tương tự ta cũng có: $q^4 - 1 : 240$

Vậy $(p^4 - 1) - (q^4 - 1) = p^4 - q^4 : 240$

Bài 4: (HUYỆN QUẢNG TIỀN)

Nếu $p < 5$ và $2p + 1$ là các số nguyên tố thì $4p + 1$ là số nguyên tố hay hợp số.

Lời giải:

Xét 3 số tự nhiên liên tiếp $4p; 4p + 1; 4p + 2$, trong 3 số đó có 1 số là bội của 3

Mà $p < 5$ và p là số nguyên tố nên p có dạng $3k + 1$ hoặc $3k + 2 (k \in \mathbb{N})$.

Nếu $p = 3k + 1$ thì $4p = 4(3k + 1) \Leftrightarrow 3Q + 1 = p$ và $4p + 2 = 4(3k + 1) + 2 \Leftrightarrow p = 3Q : 3$

Mặt khác $4p + 2 = 2(2p + 1) = 3Q : 3 \Rightarrow 2(2p + 1) : 3$ mà $(2; 3) = 1$ nên $2p + 1 : 3$ (trái với giả thiết).

Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow 4p + 1 = 4(3k + 2) + 1 = 12k + 9 = 3M : 3 \Rightarrow 4p + 1$ là hợp số.

Vậy nếu $p < 5$ và $2p + 1$ là các số nguyên tố thì $4p + 1$ là hợp số.

Bài 5: (HUYỆN THANH OAI NĂM 2017-2018)

Tìm các số nguyên tố x, y sao cho: $x^2 + 45 = y^2$

Lời giải:

$x^2 + 45 = y^2 \Rightarrow y^2 > 45$, do đó y là số nguyên tố lẻ

Suy ra x là số nguyên tố chẵn nên $x = 2$. từ đó ta có:

$$y^2 = 4 + 45 = 49 \Rightarrow y = 7$$

Bài 6: (HSG NĂM 2018-2019)

Cho n là số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi $n^2 + 2006$ là số nguyên tố hay hợp số

Lời giải:

n là số nguyên tố nên $n > 3$ và không chia hết cho 3. Vậy n^2 chia cho 3 dư 1 do đó

$$n^2 + 2006 = 3m + 1 + 2006 = 3m + 2007 = 3.(m + 669) : 3$$

Vậy $n^2 + 2006$ là hợp số.

Bài 7: (HUYỆN HOÀNG HOÁ NĂM 2018-2019)

Chứng tỏ rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $p^2 - 1$ chia hết cho 3

Lời giải:

Xét số nguyên tố p khi chia cho 3. Ta có: $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2 (k \in \mathbb{N}^*)$

Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow p^2 - 1 = (3k + 1)^2 - 1 = 9k^2 + 6k : 3$

Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow p^2 - 1 = (3k + 2)^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 : 3$

Vậy $p^2 - 1 : 3$

Bài 8: (TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRÜC – KIM BÀI- NĂM 2017-2018)

Cho p và $p + 4$ là các số nguyên tố với $p > 3$. Chứng minh $p - 2014$ là hợp số.

Lời giải:

Từ giả thiết ta có $p = 3k + 1$ hoặc $p = 3k + 2 (k \in \mathbb{N}^*)$

Nếu $p = 3k + 2 \Rightarrow p + 3 = 3k + 6 : 3$ (loại)

Nếu $p = 3k + 1 \Rightarrow p - 2014 = 3k - 2013 : 3$ (loại)

Vậy $p - 2014$ là hợp số

Bài 9: (PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH BÀ)

Cho p ; $p + 4$ là các số nguyên tố ($p > 3$). Chứng minh $p + 8$ là hợp số.

Lời giải:

p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p có dạng $3k + 1$ hoặc $3k + 2 (k \in \mathbb{N}^*)$

Nếu $p = 3k + 2$ thì $p + 4 = 3k + 2 + 4 = 3k + 6 : 3$ mà $p + 4 > 3$ nên $p + 4$ là hợp số, trái với đề bài. Vậy p có dạng $3k + 1$.

Khi đó: $p + 8 = 3k + 1 + 8 = 3k + 9 : 3$

Lại có $p + 8 > 3$ nên $p + 8$ là hợp số.

Vậy nếu p ; $p + 4$ là các số nguyên tố ($p > 3$) thì $p + 8$ là hợp số.

Bài 10: (PHÒNG GD VÀ ĐT HOÀNG HOÁ)

Cho ba số nguyên tố lớn hơn 3, trong đó số sau lớn hơn số trước là d đơn vị. Chứng minh: d chia hết cho 6.

Lời giải:

Gọi ba số nguyên tố lớn hơn 3 là a, b, c . Giả sử $a > b > c$.

Vì a, b, c là ba số nguyên tố lớn hơn 3 nên a, b, c là ba số nguyên tố lẻ.

Vì số sau lớn hơn số trước là d đơn vị nên d là số chẵn và
$$\begin{cases} a - b = d \\ b - c = d \\ a - c = 2d \end{cases}$$

Vì a, b, c là ba số nguyên tố lớn hơn 3 nên a, b, c không chia hết cho 3.

Do đó trong ba số 3 số a, b, c luôn tồn tại ít nhất hai số có cùng số dư khi chia cho 3 nên hiệu của hai số đó chia hết cho 3.

$$\Rightarrow \begin{cases} d : 3 \\ 2d : 3 \end{cases} \Rightarrow d : 3 \quad (\text{vì } UCLN(2, 3) = 1)$$

Mà d là số chẵn nên $d : 2$.

Vậy $d : 6$.

Bài 11: (PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ĐÔ LƯƠNG)

Cho p là số nguyên tố thỏa mãn $p + 2$ và $p + 4$ cũng là số nguyên tố. Tìm số nguyên x sao cho $p^3 + 54 = (2x - 1)^2$.

Lời giải:

Với p là số nguyên tố

Xét $p = 2$ thì $p + 2 = 4$; $p + 4 = 6$ đều là hợp số (loại)

Xét $p = 3$ thì $p + 2 = 5$; $p + 4 = 7$ đều là số nguyên tố (nhận)

Xét $p > 3$ thì p có dạng $3k + 1$ hoặc $3k + 2$, k là số nguyên dương

- Với $p = 3k + 1$ thì $p + 2$ chia hết cho 3, $p + 2 > 3$ nên $p + 2$ là hợp số.

- Với $p = 3k + 2$ thì $p + 4$ là hợp số.

Vậy $p = 3$

Khi đó: $p^3 + 54 = (2x - 1)^2$

$$\Leftrightarrow (2x - 1)^2 = 81$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 9 \\ 2x - 1 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -4 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn})$$

Bài 12: (PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN HOA LƯ)

Cho $B = 999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng B là hợp số.

Lời giải:

Số 999993^{1999} có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của 3^{1999}

Mà $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$ có chữ số tận cùng bằng 7

Số 555557^{1997} có chữ số tận cùng bằng chữ số tận cùng của 7^{1997}

Mà $7^{1997} = (7^4)^{499} \cdot 7 = 2041^{499} \cdot 7$ có chữ số tận cùng bằng 7

$\Rightarrow B = 999993^{1999} - 555557^{1997}$ có chữ số tận cùng bằng 0

$\Rightarrow B : 5$ và $B > 5$ nên B là hợp số.

Bài 13: (PHÒNG GD&ĐT HUYỆN TIỀN DU)

Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3, sao cho $2p+1$ cũng là số nguyên tố thì $4p+1$ là hợp số.

Lời giải:

+ Nếu $p > 3$ thì p có dạng $p = 3k + 1; p = 3k + 2$

+ Nếu $p = 3k + 1$ ta có $2p + 1 = 2(3k + 1) + 1 = 6k + 3$ chia hết cho 3 nên là hợp số (loại)

+ Nếu $p = 3k + 2$ ta có $2p + 1 = 2(3k + 2) + 1 = 6k + 5$ (thỏa mãn)
 $4p + 1 = 4(3k + 2) + 1 = 12k + 9$ chia hết cho 3 nên là hợp số

Vậy $4p + 1$ là hợp số.

Bài 14: (UBND HUYỆN PHÚ XUYỀN)

Cho p và $p+8$ đều là số nguyên tố ($p > 3$). Hỏi $p+100$ là số nguyên tố hay hợp số.

Lời giải:

Vì p là số nguyên tố và $p > 3$ nên $p \nmid 3$. Do đó p có dạng $3k+1$ hoặc $3k+2, (k \in \mathbb{N}^*)$.

Nếu $p = 3k+1$ thì $p+8 = 3k+9 : 3 \Rightarrow p+8$ là hợp số (Không thỏa mãn).

$\Rightarrow p = 3k+2$, khi đó $p+100 = 3k+102 : 3 \Rightarrow p+100$ là hợp số.

Bài 15: (UBND HUYỆN VŨ THƯ)

Cho a, b, c, d là số nguyên dương thỏa mãn $a^2 + b^2 - c^2 - d^2$ chẵn. Chứng minh $a+b+c+d$ không là số nguyên tố.

Lời giải:

Xét : $A = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) + (a + b + c + d)$

$A = (a^2 + a) + (b^2 + b) - (c^2 + c) - (d^2 + d)$

$A = a.(a+1) + b.(b+1) - c.(c+1) - d.(d+1)$

Vì a là số nguyên dương nên $a \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a.(a+1)$ là hai số tự nhiên liên tiếp $\Rightarrow a.(a+1) : 2$

Tương tự chứng minh được:

$$b(b+1):2; c(c-1):2; d(d-1):2 \quad \forall b, c, d \in \mathbb{N}^*$$

Nên ta có :

$$A = [a(a+1) + b(b+1) - c(c-1) - d(d-1)] : 2 \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$$

Mà giá trị biểu thức $a^2 + b^2 - c^2 - d^2$ là số chẵn nên $(a+b+c+d):2$ (1)

Lại có $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ nên $a+b+c+d \geq 4$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a+b+c+d$ là hợp số

Vậy $a+b+c+d$ không là số nguyên tố

Bài 16: (PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HUYỆN LỤC NAM)

Cho n là số nguyên tố lớn hơn 3. Hỏi $n^2 + 2018$ là số nguyên tố hay hợp số.

Lời giải:

Vì n là số nguyên tố và $n > 3 \Rightarrow n = 3k+1; n = 3k+2$

-Nếu $n = 3k+1$

$$\Rightarrow n^2 + 2018 = (3k+1)^2 + 2018 = 9k^2 + 6k + 1 + 2018$$

$$= 9k^2 + 6k + 2019 = 3(3k^2 + 2k + 673):3 \text{ là hợp số.}$$

-Nếu $n = 3k+2 \Rightarrow n^2 + 2018 = (3k+2)^2 + 2018 = 9k^2 + 12k + 4 + 2018$ là hợp số.

Vậy khi n là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $n^2 + 2018$ là hợp số.

Bài 17: (ĐỀ HSG LỚP 9)

Tìm tất cả các số nguyên dương n để $A = n^{2021} + n^{2020} + 1$ là hợp số.

Lời giải:

Với $n=1 \Rightarrow A=3$ không là hợp số.

$$\text{Với } n > 1 \Rightarrow A = n^{2021} + n^{2020} + 1 = n^{2021} - n^2 + n^{2020} - n + n^2 + n + 1$$

$$= n^2(n^{2019} - 1) + n(n^{2019} - 1) + (n^2 + n + 1)$$

$$\text{Mà } n^{2019} - 1 = (n^{673})^3 - 1; n^3 - 1; n^3 - 1; (n^2 + n + 1) \Rightarrow n^{2019} - 1; n^2 + n + 1$$

$$\Rightarrow A; n^2 + n + 1$$

Mà $n \in \mathbb{Z}^+, n > 1$ nên $A = n^{2021} + n^{2020} + 1 > n^2 + n + 1 > 1$.

Vậy A là hợp số với mọi số nguyên dương $n > 1$.

Bài 18: (ĐỀ HSG LỚP 9)

Chứng minh rằng nếu $a + b + c + d = 0$ thì $A = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ là hợp số.

Lời giải:

$$a + b + c + d = 0 \Leftrightarrow a + c = -(b + d)$$

Ta có

$$\Rightarrow (a + c)^3 = [- (b + d)]^3$$

$$\Rightarrow a^3 + c^3 + 3ac(a + c) = -b^3 - d^3 - 3bd(b + d)$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = -3ac(a + c) - 3bd(b + d)$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3ac(b + d) - 3bd(b + d)$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3(ac - bd)(b + d); 3$$

Vậy nếu $a + b + c + d = 0$ thì $A = a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ là hợp số.

Bài 19: (ĐỀ THI VÔ ĐỊCH TOÁN ANH)

Chứng minh rằng $A = 19 \cdot 8^n + 17$ là hợp số với $n \in \mathbb{N}$.

Lời giải:

Xét các trường hợp $n = 2k, n = 4k + 1, n = 4k + 3$.

$$\text{Nếu } n = 2k \Rightarrow A = 19 \cdot 8^{2k} + 17 = 18 \cdot 8^{2k} + 8^{2k} + (18 - 1)$$

$$\text{Mà } 8^{2k} = 64^k = (63 + 1)^k, 63 = 3 \cdot 21 \text{ nên } 8^{2k} : 3 \text{ dư } 1 \Rightarrow A : 3.$$

$$\text{Nếu } n = 4k + 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &= 19 \cdot 8^{4k+1} + 17 = 13 \cdot 8^{4k+1} + 6 \cdot 8 \cdot 64^{2k} + 17 \\ &= 13 \cdot 8^{4k+1} + 39 \cdot 64^{2k} + 9 \cdot (1 - 65)^{2k} + (13 + 4) \end{aligned}$$

$$\text{Chú ý rằng } 65 = 135 \cdot (1 - 65)^{2k} : 3 \text{ dư } 1 \text{ nên } A : 3.$$

$$\begin{aligned} \text{Nếu } n = 4k + 3 \Rightarrow A &= 19 \cdot 8^{4k+3} + 17 = 15 \cdot 8^{4k+3} + 4 \cdot 8^3 \cdot 64^{2k} + 17 \\ &= 15 \cdot 8^{4k+3} + 4 \cdot 510 \cdot 64^{2k} + 4 \cdot 2 \cdot (1 - 65)^{2k} + (25 - 8) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A : 8$$

$$\text{Vậy } A = 19 \cdot 8^n + 17 \text{ là hợp số với } n \in \mathbb{N}.$$

Bài 20: (ĐỀ THI HSG TOÁN 9)

Tìm số p nguyên tố để $A = 2^p + p^2$ là hợp số.

Lời giải:

$$\text{Với } p = 2 \Rightarrow A = 2^2 + 2^2 = 8 \text{ là hợp số.}$$

Với $p=3 \Rightarrow A=2^3+3^2=17$ là số nguyên tố.

Với $p>3$, p nguyên tố nên p lẻ.

Ta có $A=2^p+p^2=(p^2-1)+(2^p+1)$

Xét 3 số tự nhiên liên tiếp $p-1; p; p+1$ trong đó có một số chia hết cho 3, mà $p \not\equiv 3$ nên $p-1$ hoặc $p+1$ chia hết cho 3 $\Rightarrow p^2-1 \equiv 3$

Lại có $2^p+1 \equiv (2+1) \equiv 3$ và $2^p+p^2 > 3$ nên $A=2^p+p^2$ là hợp số.

Vậy với $p=2$ hoặc $p>3$ thì $A=2^p+p^2$ là hợp số.

Bài 21: (ĐỀ THI HSG TOÁN 9)

Chứng minh rằng $A=2^{1975}+5^{2010}$ là hợp số.

Lời giải:

Ta có:

$$+) 2^{1975} = 2^{2 \cdot 987 + 1} = 2^{2 \cdot 987} \cdot 2 = 4^{987} \cdot 2 = (3+1)^{987} \cdot 2 = (3k+1) \cdot 2 = 6k+2, k \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow 2^{1975} : 3 \text{ dư } 2 \text{ (1).}$$

$$+) 5^{2010} = 5^{2 \cdot 1005} = 25^{1005} = (24+1)^{1005} = (3 \cdot 8+1)^{1005} = 3m+1, m \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow 5^{2010} : 3 \text{ dư } 1 \text{ (2).}$$

Từ (1) và (2) ta có $A=2^{1975}+5^{2010} \equiv 3$ và $A > 3$ nên A là hợp số.

❗ HẾT ❗

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>