Mục lục

Chương 1

Dãy số và các bài toán về dãy số

1.1 Giới thiệu

Chọn đề tài về dãy số, chúng tôi đã tự trước mình một nhiệm vụ vô cùng khó khăn, bởi đây là một lĩnh vực rất khó và rất rộng, sử dụng nhiều kiến thức khác nhau của toán học. Hơn thế, trước đó đã có khá nhiều cuốn sách chuyên khảo về đề tài này. Dù vậy, chúng tôi vẫn muốn cố gắng đóng góp một số kinh nghiệm và ghi nhận của mình thu lượm được trong quá trình giảng dạy những năm qua.

Tập tài liệu này không phải là một giáo trình về dãy số, lại càng không phải là một cẩm nang hướng dẫn giải các bài toán dãy số. Tập tài liệu này đúng hơn hết là những cóp nhặt của tác giả về những phương pháp giải các bài toán dãy số cùng với những nhận định đôi khi mang đầy tính chủ quan của tác giả. Vì vậy, hãy coi đây là một tài liệu mở. Hãy tiếp tục triển khai, liên hệ và đúc kết kinh nghiệm, ghi nhận những cái hay và góp ý cho những cái chưa hay, thậm chí chưa chính xác.

Trong tài liệu này, không phải tất cả các vấn đề của dãy số đều được đề cập tới. Ví dụ phần dãy số và bất đẳng thức chỉ được nói đến rất sơ sài, các bài toán dãy số mà thực chất là các bài toán về đồng dư cũng không được xét tới... Hai mảng lớn mà tập tài liệu này chú ý đến nhất là bài toán tìm số hạng tổng quát của một dãy số và bài toán tìm giới hạn dãy số.

Trong tập tài liệu này, các vấn đề và các bài toán có mức độ khó dễ khác nhau. Có những bài cơ bản, có những bài khó hơn và có những bài rất khó. Vì vậy, cần phải lựa chọn vấn đề với mức độ thích hợp (ví dụ có một số vấn đề và bài toán chỉ đụng phải ở mức kỳ thi chọn đội tuyển hoặc quốc tế).

Viết tập tài liệu này, tác giả đã sử dụng rất nhiều nguồn tài liệu khác nhau, tuy nhiên chỉ có một số bài có ghi nguồn gốc, một số bài không thể xác định được.

Tác giả cũng đã sử dụng các bài giảng của các thầy Phan Đức Chính, Nguyễn Văn Mậu, Lê Đình Thịnh, Đặng Hùng Thắng, Nguyễn Minh Đức... trong bài viết của mình.

Cuối cùng, tập tài liệu này không khỏi có những nhầm lẫn và thiếu sót, tác giả rất mong nhận được sự góp ý của tất cả các thầy cô giáo. Và rất mong rằng, với nỗ lực chung của tất cả chúng ta, tập tài liệu sẽ tiếp tục được hoàn thiện và bổ sung.

1.2 Định nghĩa và các định lý cơ bản

Định nghĩa 1.1. *Dãy số là một hàm số từ* $\mathbb{N}$ *vào một tập hợp số* ($\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) *hay một tập con nào đó của các tập hợp trên). Các số hạng của dãy số thường được ký hiệu là* u_n, v_n, x_n, y_n *thay vì* $u(n), v(n), x(n), v(n)$. *Bản thân dãy số được ký hiệu là* $\{x_n\}$.

Vì dãy số là một trường hợp đặc biệt của hàm số nên nó cũng có các tính chất của một hàm số.

Định nghĩa 1.2. *Dãy số* $\{x_n\}$ *được gọi là dãy tăng (giảm) nếu với mọi* n *ta có* $x_{n+1} \le x_n (x_{n+1} \le x_n)$. *Dãy số tăng hoặc dãy số giảm được gọi chung là dãy đơn điệu.*
Dãy số $\{xn\}$ *được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại số thực* M *sao cho với mọi* n *ta có* $x_n \le M$.
Dãy số $\{x_n\}$ *được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số thực* m *sao cho với mọi* n *ta có* $x_n \ge m$.
Một dãy số vừa bị chặn trên, vừa bị chặn dưới được gọi là dãy bị chặn.
Dãy số x_n *được gọi là tuần hoàn với chu kỳ* k *nếu* $x_{n+k} = x_n$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$. *Dãy số tuần hoàn với chu kỳ 1 gọi là dãy hằng.*

Định nghĩa 1.3. *Ta nói dãy số* $\{x_n\}$ *có giới hạn hữu hạn* a *khi* n *dẫn đến vô cùng nếu với mọi* $\epsilon > 0$, *tồn tại số tự nhiên* N_0 *(phụ thuộc vào dãy số* x_n *và* ϵ*) sao cho với mọi* $n > N_0$ *ta có* $|x_n - a|$ *nhỏ hơn* ϵ.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \epsilon > 0 \exists N_0 \in N : \forall n > N_0 |xn - a| < \epsilon$$

Ta nói dãy số $\{x_n\}$ *dần đến vô cùng khi* n *dần đến vô cùng nếu với mọi số thực dương* M *lớn tuỳ ý, tồn tại số tự nhiên* N_0 *(phụ thuộc vào dãy số* x_n *và* M*) sao cho với mọi* $n > N_0$ *ta có* $|x_n|$ *lớn hơn* M.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists N_0 \in N : \forall n > N_0 \; |x| > M.$$

Dãy số có giới hạn hữu hạn được gọi là dãy hội tụ. Dãy số không có giới hạn hoặc dần đến vô cùng khi n dần đến vô cùng gọi là dãy phân kỳ.

Định lý 1.1 (*Tổng, hiệu, tích, thương các dãy hội tụ*)**.** *Nếu* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *là các dãy hội tụ và có giới hạn tương ứng là* a, b *thì các dãy số* $\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ *và* $\{x_n/y_n\}$ *cũng hội tụ và có giới hạn tương ứng là* $a + b, a - b, a.b, a/b$. *(Trong trường hợp dãy số thương, ta giả sử* y_n *và* b *khác không)*

Định lý 1.2 (*Chuyển qua giới hạn trong bất đẳng thức*)**.** *Cho dãy số* $\{x_n\}$ *có giới hạn hữu hạn* l, *nếu* $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n > N_0$ *ta có* $a \leq x_n \leq b$ *thì* $a \leq x_n \leq b$.

Định lý 1.3 (*Định lý kẹp*)**.** *Cho ba dãy số* $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ *trong đó* x_n *và* z_n *có cùng giới hạn hữu hạn* 1, *và* $N_0 \in N : \forall n > N_0$ *ta có* $x_n \leq y_n \leq z_n$. *Khi đó* y_n *cũng có giới hạn là* 1.

Định lý 1.4 (*Dãy đơn điệu*)**.** *Một dãy tăng và bị chặn trên hay một dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ. Nói ngắn gọn hơn, một dãy số đơn điệu và bị chặn thì hội tụ.*

Định lý 1.5 (*Về dãy các đoạn thẳng lồng nhau*)**.** *Cho hai dãy số thực* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *sao cho*

a) $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$;

b) $\forall n ß\mathbb{N}, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$;

c) $b_n - a_n \to 0$ *khi* $n \to \infty$.

Khi đó tồn tại duy nhất số thực l *sao cho* $\cap [a_n, b_n] = 1$.

Định lý 1.6 (*Bolzano Veierstrass*)**.** *Từ một dãy bị chặn luôn có thể trích ra một dãy con hội tụ.*

Định nghĩa 1.4. *Dãy* $\{x_n\}$ *được gọi là dãy Cauchy nếu* $\forall \epsilon > 0 \exists N_0 \in \mathbb{N}$*:* $\forall m, n > N_0 |x_m - x_n| < \epsilon$.

Định nghĩa 1.5 (*Tiêu chuẩn Cauchy*)**.** *Dãy số* $\{x_n\}$ *có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi nó là dãy Cauchy.*

Cấp số cộng. Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là một cấp số cộng khi và chỉ khi tồn tại d sao cho

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + d.$$

d được gọi là công sai của cấp số cộng, x_0 là số hạng đầu, x_n là số hạng thứ n. Ta có các công thức cơ bản sau:

$$\begin{aligned} x_n &= x_0 + nd \\ S_n &= x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} \\ &= nx_0 + n(n-1)d/2 \\ &= n(x_0 + x_{n-1})/2 \end{aligned}$$

Cấp số nhân. Dãy số $\{x_n\}$ được gọi là một cấp số nhân khi và chỉ khi tồn tại q sao cho

$$\forall n \in N, x_{n+1} = qx_n.$$

d được gọi là công bội của cấp số nhân, x_0 là số hạng đầu, x_n là số hạng thứ n. Ta có các công thức cơ bản sau:

$$\begin{aligned} & x_n = q^n x_0 \\ & S_n = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} = (q^n - 1)x_0/(q-1) \end{aligned}$$

Nếu $|q| < 1$ thì $\{x_n\}$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn được tính theo công thức

$$S = x_0/(1-q)$$

Dãy Fibonacci. Dãy số Fibonacci là dãy số được định nghĩa bởi

$$f_0 = 0, f_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Dãy số Fibonacci có rất nhiều tính chất thú vị và xuất hiện một cách tự nhiên trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Chúng ta có công thức sau đây để tìm số hạng tổng quát của dãy số Fibonacci:
Công thức Binet.

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Nói chung, các dãy số xác định bởi công thức truy hồi $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ (với f_0, f_1 bất kỳ) được gọi là dãy Fibonacci mở rộng.
Dãy Farey. Dãy Farey F_n với mỗi số nguyên dương n là tập hợp các phân số tối giản dạng a/b với $0 \le a \le b \le n$ và $(a,b) = 1$ xếp theo thứ tự tăng dần.

Ví dụ 1.1.

$$F_5 = \{0/1, 1/5, 1/4, 1/3, 2/5, 1/2, 3/5, 2/3, 3/4, 4/5, 1/1\}.$$

Ngoại trừ F_1, F_n có số lẻ các phần tử và $1/2$ luôn nằm ở giữa. Gọi p/q, p'/q' và p''/q'' là các số hạng liên tiếp trong dãy Farey thì

$$pq' - qp' = 1, \text{ và } p'/q' = (p+p'')/(q+q'').$$

Số các số hạng $N(n)$ trong dãy Farey được tính theo công thức

$$N(n) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = 1 + \phi(n).$$

1.3 Một số phương pháp giải bài toán về dãy số

Phương pháp giải các bài toán dãy số rất đa dạng như chính yêu cầu của chúng. Đó có thể là một tính chất số học, một tính chất đại số hay một tính chất giải tích. Dưới đây chúng ta sẽ xem xét những phương pháp cơ bản nhất.

Tuy nhiên, có thể đưa ra hai nguyên lý chung để giải các bài toán dãy số là

- Đừng ngại viết ra các số hạng đầu tiên của dãy số
- Đừng ngại tổng quát hóa bài toán

1.3.1 Dãy số thực: một số dạng dãy số đặc biệt

Dãy số dạng $x_{n+1} = f(x_n)$

Đây là dạng dãy số thường gặp nhất trong các bài toán về giới hạn dãy số. Dãy số này sẽ hoàn toàn xác định khi biết f và giá trị ban đầu x_0. Do vậy sự hội tụ của dãy số sẽ phụ thuộc vào tính chất của hàm số $f(x)$ và x_0. Một đặc điểm quan trọng khác của dãy số dạng này là nếu a là giới hạn của dãy số thì a phải là nghiệm của phưng trình $x = f(x)$. Chúng ta có một số kết quả cơ bản như sau:

Định nghĩa 1.6. *Hàm số $f : D \to D$ được gọi là một hàm số co trên D nếu tồn tại số thực $q, 0 < q < 1$ sao cho $|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$ với mọi x, y thuộc D.*

Định lý 1.7. *Nếu $f(x)$ là một hàm số co trên D thì dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = a \in D, x_{n+1} = f(x_n)$ hội tụ. Giới hạn của dãy số là nghiệm duy nhất trên D của phương trình $x = f(x)$.*

Chứng minh. Với mọi $n > m$ thì áp dụng định nghĩa hàm số co, ta có

$$|x_n - x_m| = |f(x_{n-1}) - f(x_{m-1})| \leq q|x_{n-1} - x_{m-1}| \leq \cdots \leq q_m|x_{n-m} - x_0| \quad (1.1)$$

Từ đây $|x_n - x_0| \leq |x_n - x_{n-1}| + \cdots + |x_1 - x_0| \leq (q_{n-1} + \cdots + 1)|x_1 - x_0|$, suy ra $\{x_n\}$ bị chặn. Xét $\epsilon > 0$. Từ (1.1), do $q < 1$ và $|x_{n-m} - x_0|$ bị chặn nên ta suy ra tồn tại N sao cho $q^N|x_{n-m} - x_0| < \epsilon$. Suy ra $\{x_n\}$ là dãy Cauchy và do đó hội tụ.

Ví dụ 1.2 (*Việt Nam, 2000***).** *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định như sau*

$$x_0 = 0, x_{n+1} = \sqrt{c - \sqrt{c + x_n}}.$$

Tìm tất cả các giá trị của c để với mọi giá trị $x_0 \in (0, c)$, x_n xác định với mọi n và tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Giải. Để x_1 tồn tại thì ta thì $c-\sqrt{c+x_n} \geq 0$ với mọi $x_0 \in (0,c)$ hay $c(c-1) \geq x_0$ với mọi $x_0 \in (0,c)$, suy ra $c \geq 2$. Với $c \geq 2$ thì $0 < x_1 < \sqrt{c}$. Nếu $0 < x_n < \sqrt{c}$ thì $c - \sqrt{c+x_n} > c - 2\sqrt{c}$, suy ra x_{n+1} tồn tại và ta cũng có $0 < x_{n+1} < \sqrt{c}$.

Đặt $f(x) = \sqrt{c - \sqrt{c+x}}$ thì $f'(x) = -\frac{1}{4}\sqrt{x+x}\sqrt{c-\sqrt{c+x}}$.

Với mọi $x \in (0,\sqrt{c})$ ta có $(c+x)(c-\sqrt{c+x}) > c(c-\sqrt{c+\sqrt{c}}) \geq 2(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}) > \frac{1}{4}$. Từ đó suy ra $|f'(x)| \leq q < 1$ với mọi $x \in (0,\sqrt{c})$, tức $f(x)$ là hàm số co trên $(0,\sqrt{c})$, suy ra dãy số đã cho hội tụ. Vậy tất cả các giá trị c cần tìm là $c \geq 2$.

Một trường hợp nữa cũng có thể xét được sự hội tụ của dãy số $\{x_n\}$ là trường hợp f đơn điệu. Cụ thể là

Nếu f là hàm số tăng trên D thì $\{x_n\}$ sẽ là dãy đơn điệu. Dãy số này tăng hay giảm tuỳ theo vị trí của x_0 so với x_1.

Nếu f là hàm giảm trên D thì các dãy con $\{x_{2p}\}, \{x_{2p+1}\}$ là các dãy đơn điệu (và ngược chiều nhau).

Ví dụ 1.3 (*Vô địch sinh viên Moskva, 1982*). *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = 1982, x_{n+1} = 1/(4-3x_n)$. Hãy tìm $\lim_{n\to\infty} x_n$*

Giải. Tính toán trực tiếp ta thấy $0 < x_2 < 1, x_3 > x_2$. Vì $f(x) = 1/(4-3x)$ là một hàm số tăng từ $[0,1]$ vào $[0,1]$ nên từ đây, $\{x_n\}_{n\geq 2}$ là một dãy số tăng và bị chặn trên bởi 1 do đó có giới hạn. Giả sử giới hạn là a thì ta có $a = 1/(4-3a)$ hay $a = 1$ (giá trị $a = 1/3$ loại do dãy tăng).

Câu hỏi: Với những giá trị nào của x_0 thì dãy số xác định với mọi x và có giới hạn? Khi nào thì giới hạn là 1? Khi nào thì giới hạn là 1/3?

Trong trường hợp f là hàm giảm, ta có thể chứng minh dãy hội tụ bằng cách chứng minh hai dãy con trên cùng hội tụ về một giới hạn.

Tuy nhiên, khó khăn nhất là gặp các hàm số không đơn điệu. Trong trường hợp này, ta phải xét từng khoảng đơn điệu của nó và sự hội tụ của hàm số sẽ tùy thuộc vào giá trị ban đầu.

Ví dụ 1.4. *Tìm tất c các giá trị của a để dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 = a, x_{n+1} = 2 - x_n^2$ có giới hạn hữu hạn.*

Giải. Hàm số $f(x) = 2 - x^2$ tăng trên $(-\infty, 0)$ và giảm trên $(0, +\infty)$. Phương trình $f(x) = x$ có hai nghiệm là $x = -2$ và $x = 1$. Đó là những dữ kiện quan trọng trong lời giải bài toán này.

Đầu tiên, ta nhận xét rằng nếu $a < -2$ thì do $f : (-\infty, -2) \to (-\infty, -2)$ và là hàm tăng, $x_1 = 2 - a^2 < x_0$ nên dãy số $\{x_n\}$ giảm. Nếu dãy $\{x_n\}$ bị chặn dưới thì nó hội tụ về nghiệm của phương trình $x = 2 - x^2$, điều này mâu thuẫn vì dãy giảm và $x_0 < -2$. Vậy $\{x_n\}$ không bị chặn dưới, tức không có giới hạn hữu hạn. Nếu $a > 2$ thì $x_1 < -2$ và ta cũng suy $\{x_n\}$ không có giới hạn hữu hạn.

Với $a = -2, 1$ thì dãy số có giới hạn. Xét $x_0 \in [-2, 2]$. Ta chứng minh dãy số có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi tồn tại n sao cho $x_n = -2$ hoặc $x_n = 1$. Thật vậy, giả sử x_n có giới hạn hữu hạn là b và $x_n \notin \{-2, 1\}$ với mọi n. Khi đó $b = -2$ hoặc $b = 1$. Giả sử $b = -2$ thì tồn tại N_0 sao cho x_n nằm trong lân cận -2 với mọi $n \geq N_0$. Nhưng nếu $x_n = -2 + \epsilon$ thì $x_{n+1} = -2 + 4\epsilon - \epsilon^2 > x_n$, suy ra dãy x_n tăng kể từ N_0 và không thể dần về 2. Nếu $b = 1$ kể từ $n \geq N_0$ nào đó x_n thuộc lân cận 1. Xét

$$x_{n+2} - x_n = 2 - (2 - x_n^2)^2 - x_n = (2 - x_n - x_n^2)(x_n^2 - x_n - 1)$$

Tại lân cận 1 thì $x_n^2 - x_n - 1 < 0$. Vì nếu $x_n < 1$ thì $x_{n+1} > 1$ (và ngược lại $x_n > 1$ thì $x_{n+1} < 1$ - chúng ta đang xét trong lân cận điểm 1!) nên có thể giả sử $x_n > 1$. Khi đó $2 - x_n - x_n^2 < 0$ suy ra $x_{n+2} > x_n$. Tiếp tục như vậy, suy ra $1 < x_n < x_{n+2} < \cdots < x_{n+2k} < \cdots$ mâu thuẫn với giả thiết $b = 1$. Vậy điều giả sử là 2, tức là dãy số chỉ có giới hạn khi tồn tại n sao cho $x_n = -2$ hoặc $x_n = 1$.

Sau khi thu được kết quả này, ta sử dụng hàm ngược $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{2 - x}$ để xây dựng tất cả các giá trị a thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Trong ví dụ trên, ta đã sử dụng giả thiết tồn tại giới hạn để thu gọn miền D, từ đó một hàm có biến thiên phức tạp trở thành một hàm đơn điệu.

Dãy số dạng $x_{n+1} = x_n \pm (x_n)^\alpha$ và định lý trung bình Cesaro

Đây là trường hợp đặc biệt của dãy số dạng $x_{n+1} = f(x_n)$. Tuy nhiên, với dãy số dạng này vấn đề hội tụ của x_n thường không được đặt ra (vì quá đơn giản và giới hạn chỉ có thể là 0 hoặc ∞). Ở đây, ta sẽ có một yêu cầu cao hơn là tìm bậc tiệm cận của x_n, cụ thể là tìm b sao cho $x_n = O(n^\beta)$. Với các dãy số có dạng này, định lý trung bình Cesaro sẽ tỏ ra rất hữu hiệu.

Định lý 1.8 (*Trung bình Cesaro*)**.** *Nếu dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn là a thì dãy số các trung bình $\{x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n\}$ cũng có giới hạn là a.*

Định lý này có thể phát biểu dưới dạng tương đương như sau: Nếu $\lim n \to \infty(x_{n+1} - x_n) = a$ thì $\lim_{n\to\infty} x_n/n = a$.

Ta chứng minh định lý ở cách phát biểu 2. Rõ ràng chỉ cần chứng minh cho trường hợp $a = 0$. Vì $\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$ nên với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại, N_0 sao cho với mọi $n \geq N_0$ ta có $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$. Khi đó, với mọi $n > N_0$

$$|x_n/n| \leq [|x_{N_0}| + |x_{N_0+1} - x_{N0}| + \cdots + |x_n - x_{n-1}|]/n < |x_{N_0}|/n + (n - N_0)\epsilon/n.$$

Giữ cố định N_0, ta có thể tìm được $N_1 > N_0$ sao cho $|x_{N0}|/N_1 < \epsilon$. Khi đó với mọi $n > N_1$ ta sẽ có $|x_n/n| < 2\epsilon$. Vậy $\lim_{n\to\infty} x_n/n = 0$.

Định lý trung bình Cesaro có nhiều ứng dụng quan trọng trong việc tìm giới hạn dãy số và có thể phát biểu cho các trung bình khác như trung bình nhân, trung bình điều hòa, trung bình lũy thừa. Tuy nhiên, ở đây ta chỉ khai thác cách phát biểu 2 của định lý để áp dụng cho các dãy số có dạng $x_{n+1} = x_n \pm (x_n)^\alpha$. Để tìm số β sao cho x_n/n^β có giới hạn hữu hạn, theo định lý trung bình Cesaro, ta chỉ cần tìm g sao cho $x_{n+1}^\gamma - x_n^\gamma$ có giới hạn hữu hạn a. Khi đó, $\lim_{n\to\infty} x_n^\gamma/n = a$, suy ra $\lim x_n/n_1^\gamma = a_1^\gamma$, tức là $\beta = 1/\gamma$.

Ví dụ 1.5. *Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi $x_0 = 1/2, x_{n+1} = x_n - x_n^2$. Chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} nx_n = 1$.*

Giải. Trong bài này, $\beta = -1$ do đó ta sẽ thử với $\gamma = -1$. Dễ dàng chứng minh được $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Ta có

$$1/x_{n+1} - 1/x_n = (x_n - x_{n+1})/x_{n+1}x_n = x_n^2/(x_n - x_n^2)x_n = 1/(1 - x_n) \to 1.$$

Từ đó áp dụng định lý trung bình Cesaro, suy ra $lim 1/nx_n = 1$, suy ta $\lim nx_n = 1$.

Ví dụ 1.6. *Cho dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi $x_0 = 1, x_{n+1} = \sin(x_n)$. Chứng minh rằng $\lim \sqrt{n}x_n = \sqrt{3}$.*

Giải. Dãy số đã cho không có dạng $x_{n+1} = x_n \pm (x_n)^\alpha$ (?) nhưng kết luận của bài toán gợi cho chúng ta đến định lý trung bình Cesaro. Vì $\beta = -1$ nên ta sẽ thử với $\gamma = -2$. Dễ dàng chứng minh được rằng $\lim x_n = 0$. Xét

$$1/x_n^2 - 1/x_n^2 = [x_n^2 - \sin^2(x_n)]/x_n^2 \sin^2(x_n) \to 1/3$$

(Dùng quy tắc L'Hopitale)

Từ đó, theo định lý trung bình Cesaro $\lim 1/nx_n^2 = 1/3$, suy ra $\lim \lim \sqrt{n}.x_n = \sqrt{3}$.

Như vậy, ta có thể tìm γ nếu biết β. Trong trường hợp không biết β thì ta phải dự đoán.

Ví dụ 1.7 (*Chọn đội tuyển Việt Nam, 1993*)**.** *Dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = a_n + 1/\sqrt{a_n}$. Hãy tìm tất cả các số thực β để dãy số $(a_n)^\beta/n$ có giới hạn hữu hạn khác 0.*

Giải. Trước hết ta chứng minh a_n dần tới vô cùng khi n dần tới vô cùng. Thật vậy, ta có $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2\sqrt{a_n} + 1/a_n > a_n^2 + 2$. Suy ra $a_{n+1}^2 > 1 + 2n$ suy ra (đpcm). Trở lại bài toán, xét

$$a_{n+1}^{3/2} - a_n^{3/2} = (a_n + 1/\sqrt{a_n})^{3/2} - a_n^{3/2} = (1 + 1/a_n^{3/2})^{3/2}/(1/a_n^{3/2})$$

Đặt $x = 1/a_n^{3/2}$ thì $x \to 0$ khi $n \to \infty$. Do đó $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}^{3/2} - a_n^{3/2}) = \lim_{x\to 0}(1 + x)^{3/2}/x = 3/2$ (Quy tắc L'Hopitale) Từ đó suy ra $\lim a_n^{3/2}/n = 3/2$.

Với $\beta > 3/2$ suy ra giới hạn bằng ∞, với $\beta < 3/2$ suy ra giới hạn bằng 0. Vậy $\beta = 3/2$ là giá trị duy nhất thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu hỏi:

1) Làm sao có thể dự đoán được giảá trị β?

2) α và β có mối quan hệ gì?

1.3.2 Dãy số nguyên

Dãy số nguyên là một phần quan trọng trong lý thuyết dãy số. Ngoài các vấn đề chung như tìm số hạng tổng quát của dãy số, tìm công thức tính tổng n số hạng đầu tiên... các bài toán về dãy số nguyên còn quan tâm đến tính chất số học của dãy số như chia hết, đồng dư, nguyên tố, chính phương, nguyên tố cùng nhau... Các bài toán về dãy số nguyên rất đa dạng. Trong nhiều trường hợp, dãy số chỉ là cái bề ngoài, còn bản chất bài toán là một bài toán số học. Trong các phần dưới đây, chúng ta sẽ ít đề cập đến những bài toán như vậy mà chuyển chúng vào phần bài tập.

Nguyên lý Dirichlet và dãy số nguyên

Nguyên lý Dirichlet là một nguyên lý hết sức đơn giản nhưng lại vô cùng hữu hiệu trong các bài toán chứng minh, đặc biệt là chứng minh sự tồn tại của một đối tượng thoả mãn một điều kiện nào đó. Sử dụng nguyên lý này, người ta đã chứng minh được nhiều kết quả rất mạnh, ví dụ như định lý Fermat-Euler về tổng hai bình phương, định lý Weil về phân bố đều... Ở đây ta nêu ra hai kết quả liên quan đến dãy số:

Định lý 1.9 (Weil, về phân bố đều). *Nếu α là số vô tỉ thì dãy $\{n\alpha\}_{n=1}$ phân bố đều trên khoảng $(0,1)$.*

Định lý 1.10 (Về sự tuần hoàn của các số dư). *Cho dãy số nguyên $\{x_n\}$ xác định bởi công thức truy hồi $x_{n+k} = a_1x_{n+k-1} + \cdots + a_kx_n$ và k số hạng đầu tiên nguyên. Khi đó, với mọi số nguyên dương N, dãy số dư của x_n khi chia cho N sẽ tuần hoàn.*

Tiếp theo ta xét một vài ví dụ về việc sử dụng nguyên lý Dirichlet trong các bài toán dãy số.

Ví dụ 1.8. *Chứng minh rằng nếu $1 \le a_1, a_2, ..., a_{n+1} \le 2n$ thì tồn tại $i < j$ sao cho $a_i \mid a_j$.*

Giải. Mỗi số a_i có thể viết dưới dạng $a_i = 2^{s_i}r_i$ với r_i là số lẻ. Các số r_i chỉ có thể nhận n giá trị từ $1, 3, ..., 2n-1$. Vì có $n+1$ số nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại $i < j$ sao cho $r_i = r_j$ và tương ứng ta có $a_i \mid a_j$.

Ví dụ 1.9 (Tạp chi AMM). *Xét n số nguyên dương $a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq 2n$ sao cho $[a_i, a_j] > 2n$ với mọi $i \neq j$. Chứng minh rằng $a_1 > 2n/3$.*

Giải. Nếu $a_1 \leq 2n/3$, ta xét $n + 1$ số $2a_1, 3a_1, a_2, \ldots, a_n$. Các số này đều không lớn hn $2n$ và không có số nào là bội của số nào. Điều này mâu thuẫn với kết qủa bài toán trên.

Ví dụ 1.10. *(Canada, 2000) Cho $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ là dãy các số nguyên thuộc đoạn $[-1000, 1000]$. Giả sử tổng các số hạng của A bằng 1. Chứng minh rằng tồn tại một dãy con (chứa ít nhất 1 phần tử) của A có tổng bằng 0.*

Giải. Ta có thể giả sử trong A không có phần tử nào bằng 0, vì nếu ngược lại thì bài toán hiển nhiên. Ta sắp xếp dãy A thành dãy $B = (b_1, ..., b_{2000})$ bằng cách chọn dần từ các số hạng của dãy A theo quy tắc sau: $b_1 > 0, b_2 < 0$. Với mỗi $i \geq 3$ chọn b_i là số có dấu ngược với dấu của tổng $s_{i-1} = b_1 + \cdots + b_{i-1}$ (vì sao luôn thực hiện được?). Bằng cách xây dựng như thế, ta được 2000 số $s_1, s_2, ..., s_{2000}$ nằm trong đoạn $[-999, 1000]$. Nếu trong số s_i có một số bằng 0 thì bài toán đúng. Trong trường hợp ngược lại, theo nguyên lý Dirichlet tồn tại $i < j$ sao cho $s_i = s_j$. Khi đó $b_{i+1} + \cdots + b_j = 0$.

Hệ đếm cơ số và dãy số nguyên

Hệ đếm cơ số có thể dùng để xây dựng nhiều dãy số có tính chất rất thú vị. Nhìn trên phương diện của một cơ số khác, có thể rất khó nhận ra quy luật, nhưng nếu chọn đúng cơ số thì bài toán trở nên vô cùng đơn giản.

Xin nhắc lại là với b là một số nguyên dương lớn hơn hay bằng 2 thì mọi số nguyên dương N đều có thể biểu diễn một cách duy nhất dưới dạng

$$N = a_1...a_k(b) = a_1 b_{k-1} + \cdots + a_k \text{ với } 1 \leq a_1 \leq b - 1,\ 0 \leq a_2, \ldots, ak \leq b - 1.$$

Đó là định nghĩa hệ đếm cơ số dạng cơ bản nhất. Tuy nhiên, có thể lấy một dãy số nguyên bất kỳ (có trị tuyệt đối tăng nghiêm ngặt) làm hệ đếm cơ số ví dụ hệ đếm cơ số (-2), hệ đếm cơ số Fibonacci $(3 = 4 - 2 + 1, 17 = 13 + 3 + 1...)$

Các hệ đếm thường sử dụng nhất là hệ đếm c số 2 và c số 3. Dưới đây ta xét một vài vì dụ:

Ví dụ 1.11 (IMO 1983). *Chứng minh hoặc phủ định mệnh đề sau: Từ tập hợp 105 số nguyên dương đầu tiên luôn có thể chọn ra một tập con gồm 1983 số sao cho không có ba số nào lập thành một cấp số cộng.*

Giải. Ta chứng minh mệnh đề tổng quát: Từ $3n$ số tự nhiên đầu tiên luôn có thể chọn ra $2n$ số sao cho không có ba số nào lập thành một cấp số cộng. Thật vậy, xét trong hệ đếm cơ số 3 tập hợp tất cả các số có $\leq n$ chữ số. Chọn các số mà trong biểu diễn tam phân của nó chỉ chứa chữ số 2 và chữ số 0. Khi đó có $2n$ số như vậy và không có ba số nào trong chúng lập thành một cấp số cộng.

Ví dụ 1.12 (Singapore 1995). *Cho dãy số* $\{f_n\}$ *xác định bởi* $f_1 = 1, f_{2n} = f_n$ *và* $f_{2n+1} = f_{2n+1}$.

(i) Tính $M = \max\{f_1, ..., f_{1994}\}$

(ii) Tìm tất c các giảá trị n, $1 \leq n \leq 1994$ *sao cho* $f_n = M$.

Giải. Kinh nghiệm một chút ta thấy ngay f_n chính là tổng các chữ số của n trong hệ đếm nhị phân. Từ đây do $1994 < 2048 = 211$ suy ra $M = 10$.

Ví dụ 1.13. *Dãy số* $\{f_n\}$ *được xác định bởi* $f_1 = 1, f_{2n} = 3f_n, f_{2n+1} = f_{2n+1}$. *Hãy tính* f_{100}.

Giải. f_n được xác định như sau: Xét biểu diễn nhị phân của n rồi tính giá trị của số nhị phân này trong hệ tam phân. Vì $100 = 26 + 25 + 22$ nên $f_{100} = 36 + 35 + 32 = 981$.

Ví dụ 1.14. *Dãy số* $\{a_n\}$ *được xác định bởi* $0 \leq a_0 < 1, a_n = 2a_{n-1}$ *nếu* $2a_{n-1} < 1$ *và* $a_n = 2a_{n-1} - 1$ *nếu* $2a_{n-1} \geq 1$. *Hỏi có bao nhiêu giá trị* a_0 *để* $a_5 = a_0$.

Giải. Phân tích: Khi tính a_n theo a_{n-1} ta có thể lựa chọn một trong hai công thức. Tất nhiên, với a_0 đã chọn rồi thì tất cả các bước tiếp theo đều xác định một cách duy nhất. Tuy nhiên, ta có thể chọn a_0 như thế nào đó để sau đó các công thức tính theo đúng kịch bản đã cho. Có $2^5 = 32$ kịch bản như vậy. Ví dụ với kịch bản $(1, 1, 2, 1, 2)$ ta có $x_1 = 2x_0,\ x_2 = 2x_1 = 4x_0,\ x_3 = 2x_2 - 1 = 8x_0 - 1,\ x_4 = 2x_3 = 16x_0 - 2,\ x_5 = 2x_4 - 1 = 32x_0 - 3$.

Giải phương trình $x_0 = x_5$ ta được $x_0 = 3/31$. Tất nhiên, để có được một lời giải hoàn chỉnh, ta cần phải lập luận chặt chẽ để thấy rằng các x_0 thu được là khác nhau và với mỗi x_0 thu được, dãy số sẽ "đi" đúng như kịch bản đã định. Tuy nhiên, phân tích này gợi chúng ta hướng đến hệ nhị phân. Và ta có lời giải đẹp mắt sau:

Nếu $a_0 = 0, d_1d_2d_3\ldots$ là biểu diễn nhị phân của a_0 thì $a_1 = 0, d_2d_3d_4\ldots$ Thật vậy, nếu $2a_0 < 1$ thì $d_1 = 0$ và $a_1 = 2a_0 = 0, d_2d_3d_4\ldots$ còn nếu $2a_0 \geq 1$ thì $d_1 = 1$ và $a_1 = 2a_0 - 1 = 0, d_2d_3d_4\ldots$

Hoàn toàn tương tự, $a2 = 0, d_3d_4d_5\ldots, \ldots, a_5 = 0, d_6d_7d_8\ldots$ Như vậy $a_5 = a_0$ khi và chỉ khi a_0 là phân số nhị phân tuần hoàn chu kỳ 5. Có $2^5 = 32$ chu kỳ tuần hoàn như vậy, trong đó chu kỳ 11111 cho chúng ta $a_0 = 1$ (loại). Vậy tất c có 31 giá trị a_0 thỏa mãn yêu cầu đề bài. Đó là $0, (00000), 0, (00001), \ldots, (0, 11110)$. Tính sang hệ thập phân đó là các giá trị $0, 1/31, 2/31, \ldots, 30/31$.

Số phức và dãy số nguyên

Số phức có những ứng dụng rất quan trọng trong toán học nói chung và trong lý thuyết dãy số nói chung. Nhờ số phức, chúng ta có thể thấy được mối quan hệ giữa hàm lượng giác và hàm mũ. Nhờ số phức, mọi đa thức bậc n đều có đủ n

nghiệm và vì vậy định lý Viét mới phát huy được tác dụng. Dưới đây ta xét một số ví dụ về ứng dụng của số phức trong các bài toán tính tổng và dãy truy hồi.

Ví dụ 1.15. *Với số nguyên dương n, hãy tính*

$$A(n) = C_n^0 + C_n^3 + \cdots + C_n^{3[n/3]}.$$

Giải. Có thể đặt $B(n) = C_n^1 + C_n^4 + \cdots + C(n) = C_n^2 + C_n^5 + \cdots$ rồi sử dụng các công thức

$$A(n) + B(n) = B(n+1),\ B(n) + C(n) = C(n+1),\ \ C(n) + A(n) = A(n+1)$$

để tìm công thức tính $A(n)$. Tuy nhiên dựa theo cách tính $C_n^0 + C_n^2 + \cdots + C_n^2[n/2]$ bằng cách thay $x = 1, y = 1$ và $x = 1, y = -1$ vào công thức nhị thức Newton, ta có cách giải khác khá đẹp như sau: Gọi ϵ là số thỏa mãn phưng trình $\epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0$. Do $\epsilon^3 = 1$ nên ta có

$$\begin{aligned}(1+1)^n &= A(n) + B(n) + C(n)\\ (1+\epsilon)^n &= A(n) + \epsilon B(n) + \epsilon^2 C(n)\\ (1+\epsilon^2)^n &= A(n) + \epsilon^2 B(n) + \epsilon C(n)\end{aligned}$$

Từ đây suy ra $3A(n) = 2^n + (1+\epsilon)^n + (1+\epsilon^2)^n$. Từ đây, dùng công thức Moivre ta tìm được

$$A(n) = [2n + 2\cos(np/3)]/3.$$

Ví dụ 1.16. *Tính tổng* $S_n(x) = C_n^0 + C_n^1 \cos x + \cdots + C_n^n \cos nx$.

Giải. Đặt $Tn(x) = 0 + C_n^1 \sin x + \cdots + C_n^n \sin nx$ thì $S_n(x) + iT_n(x) = C_n^0 + C_n^1(\cos x + i\sin x) + \cdots + C_n^n(\cos x + i \sin x)^n = (1 + \cos x + i \sin x)^n = 2[\cos(x/2)[\cos(x/2) + i\sin(x/2)]]^n = 2^n \cos^n(x/2)[\cos(nx/2) + i\sin(nx/2)]$.

Từ đó suy ra $S_n(x) = 2^n \cos^n(x/2)\cos(nx/2)$.

Ví dụ 1.17 (AMM). *Cho dãy số* $\{u_n\}$ *xác định bởi* $u_0 = 3, u_1 = 0, u_2 = 2, u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$. *Chứng minh rằng* u_p *luôn chia hết cho* p *nếu* p *là số nguyên tố.*

Giải. Phương trình đặc trưng của dãy số có dạng $x^3 - x - 1 = 0$. Nếu phương trình đặc trưng này có nghiệm nguyên thì ta có thể sử dụng định lý nhỏ Fermat để chứng minh kết luận của bài toán. Tuy nhiên, các nghiệm này không nguyên, thậm chí phưng trình chỉ có 1 nghiệm thực. Ta phải cầu cứu đến sự trợ giúp của số phức.

Gọi u, v, w là ba nghiệm của phương trình thì $u + v + w = 0, uv + vw + wu = -1$, suy ra $u^2 + v^2 + w^2 = (u+v+w)^2 - 2(uv + vw + wu) = 2$. Từ đó ta có thể kết luận

$$u_n = u_n + v_n + w_n$$

Với p là số nguyên tố lẻ thì $u^p = -(v+w)^p = -v^p - w^p - \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i v^i w^{p-i}$.

Tương tự $v^p = -w^p - u^p - \sum i = 1^{p-1} C_p^i w^i u^{p-i}$, $w^p = -u^p - v^p - \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i u^i v^{p-i}$.

Từ đó suy ra $3(u^p + v^p + w^p) = -\sum_{i=1}^{p-1} C_p^i (v^i w^{p-i} + w^i u^{p-i} + u^i v^{p-i})$

Bây giờ, chú ý rằng C_p^i chia hết cho p với $1 \leq i \leq p - 1^i$ (vì p là số nguyên tố) và $(v^i w^{p-i} + w^i u^{p-i} + u^i v^{p-i})$ là số nguyên (biểu thức đối xứng đối với u, v, w) nên vế phải là một số nguyên chia hết cho p. Vậy với p nguyên tố, $p > 3$ bài toán đã được chứng minh. Cuối cùng chú ý $u_2 = 2, u_3 = 3$ ta có bài toán đúng với mọi p.

Dãy số dạng $[n\alpha]$

Dãy số dạng $x_n = [n\alpha]$ có nhiều tính chất số học thú vị. Nếu a > 1 thì $\{[n_\alpha]\}_{n\geq 1}$ là dãy các số nguyên dương phân biệt, có sự biến thiên gần giống một cấp số cộng nhưng lại không phải là một cấp số cộng. Dãy số này đặc biệt thú vị khi a là số vô tỉ bậc hai. Ta có một kết qủa quen thuộc sau đây

Định lý 1.11. *Nếu a, b là các số vô tỷ dưng thoả mãn điều kiện $1/a + 1/b = 1$ thì hai dãy số $x_n = [n\alpha], y_n = [n\beta], n = 1, 2, 3, ...$ lập thành một phân hoạch của tập hợp các số nguyên dương.*

Chứng minh. Xét hai dãy số $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, ...$và $\beta, 2\beta, 3\beta, ...$ Không một số hạng nào trong các số hạng trên là số nguyên. Với mỗi số nguyên dương N, có $[N/\alpha]$ số hạng của dãy thứ nhất nằm bên trái N và $[N/\beta]$ số hạng của dãy thứ hai. Nhưng $N/\alpha + N/\beta = N$, vì α, β là các số vô tỉ, phần lẻ của các số N/α và N/β là các số dương có tổng bằng 1 (do đẳng thức trên). Suy ra có $[N/\alpha] + [N/\beta] = N - 1$ số hạng của cả hai dãy nằm bên trái N. Vì bên trái $N + 1$ có N số hạng của cả hai dãy nên giữa N và $N + 1$ có đúng một số hạng của một trong hai dãy, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu hỏi: Có thể phát biểu và chứng minh định lý đảo như thế nào?

Hai dãy số trên vét hết tập hợp các số nguyên dương. Điều này cho chúng ta một hướng suy nghĩ: nếu hai dãy số vét hết tập hợp các số nguyên dương thì có khả năng chúng sẽ có dạng trên. Và nhiều bài toán đã được xây dựng theo hướng này. Chúng ta xét một ví dụ

Ví dụ 1.18 (AMM). *Giả sử $\{f_n\}$ và $\{g_n\}$ là hai dãy số nguyên dương được xác định như sau*

1) $f_1 = 1$

2) $g_n = na - 1 - f_n$, trong đó a là số nguyên lớn hơn 4,

3) f_{n+1} là số nguyên dương nhỏ nhất khác các số $f_1, f_2, ..., f_n, g_1, g_2, ..., g_n$.

Chứng minh rông tồn tại các hằng số α, β sao cho $f_n = [n\alpha], g_n = [n\beta]$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

Giải. Theo cách xây dựng $\{f_n\}$ và $\{g_n\}$ lập thành một phân hoạch của N^*. Giả sử ta đã tìm được a, b thỏa mãn điều kiện đầu bài, khi đó, ta phải có $1/\alpha+1/\beta = 1$. Ngoài ra, khi n đủ lớn thì $na - 1 = f_n + g_n \sim n\alpha + n\beta$, suy ra $\alpha + \beta = a$. Vậy α, β phải là nghiệm của phương trình $x^2 - ax + a = 0$.

Xét phương trình $x^2 - ax + a = 0$ có hai nghiệm $\alpha < \beta$. Vì $a > 4$, α, β là các số vô tỉ. Dãy số $\{f_n\}$ và $\{g_n\}$ được xác định một cách duy nhất, do đó để chứng minh khẳng định của bài toán, ta chỉ cần chứng minh $\{[n\alpha]\}$ và $\{[n\beta]\}$ thỏa mãn các điều kiện 1), 2), 3).

Rõ ràng $[a] = 1, [n\beta] = [n(a - \alpha)] = n\alpha + [-n\alpha)] = na - [n\alpha] - 1$ (do $n\alpha$ vô tỉ).

Giả sử $[n\alpha] = [m\beta] = k$, đặt $n\alpha = k + r$, $m\beta = k + s$ với $0 < r, s < 1$ thì

$$n + m = k(1/\alpha + 1/\beta) + r/\alpha + s/\beta = k + r/\alpha + s/\beta,$$

điều này không thể xảy ra vì $0 < r/\alpha + s/\beta < 1$. Như vậy với mọi m, n ta có $[n\alpha] \neq [m\beta]$.

Tiếp theo,

$$[(n + 1)\alpha] \geq [n\alpha] + 1, \;\; [(n + 1)\beta] \geq [n\beta] + 2 > [n\alpha] + 1.$$

Cuối cùng giả sử k là một số nguyên bất kỳ và $n = [(k + 1)/\alpha]$. Nếu $n > k/\alpha$ thì $k < n\alpha < \alpha(k + 1)/\alpha = k + 1$ và $[n\alpha] = k$. Nếu $n < k/\alpha$ thì $(k - n)\beta > k\beta - \beta k/\alpha = \beta k(1 - 1/\alpha) = k$, $(k - n)\beta < k\beta - \beta((k + 1)/\alpha - 1) = k + 1$, suy ra $[(k - n)\beta] = k$.

Từ các nhận xét trên ta suy ra mỗi số nguyên dương k có mặt trong dãy số đúng một lần và hai dãy số $\{[n\alpha]\}$ và $\{[n\beta]\}$ thỏa mãn điều kiện 3) (đpcm)

Ghi chú: Trong lời giải trên, ta đã không dùng đến kết quả của định lý ở trên và đó cũng chính là một cách chứng minh khác cho định lý.

Các bài toán về dãy số dạng $\{[n\alpha]\}$ thường liên quan đến phân hoạch và các dãy số gần tuyến tính ($x_{m+n} \sim x_m + x_n$). Xin xem thêm một số ví dụ trong phần bài tập.

1.3.3 Dãy số và phương trình

Dãy số có mối quan hệ rất chặt chẽ với phương trình. Điều này có thể thấy rất rõ qua hai ví dụ cơ bản: phương trình sai phân tuyến tính được giải bằng việc xét nghiệm của phương trình đặc trưng, giới hạn của dãy số cũng thường được giải ra từ một phương trình. Về vấn đề này, xin đọc thêm ở các mục tương ứng trong bài này. Đây là một trong những nội dung quan trọng nhất trong phần dãy số.

1.3.4 Một vài thủ thuật khác

Sắp xếp lại thứ tự

Sắp xếp lại thứ tự là một thủ thuật thường được áp dụng trong các bài toán liên quan đến bất đẳng thức trong dãy số. Việc sắp xếp lại thứ tự các số trên đường thẳng dẫn đến các tính chất đặc biệt mà một dãy số bất kỳ không có, chẳng hạn nếu $a < b < c$ thì $|c-a| = |c-b| + |b-a|$. Cũng như các nguyên lý cơ bản khác, nguyên lý đơn giản này tỏ ra khá hữu hiệu trong nhiều trường hợp.

Ví dụ 1.19 (Việt Nam 1998). *Tồn tại hay không một dãy số thực $\{x_n\}$ thỏa mãn điều kiện*

1) $|x_n| \leq 0,666$ với mọi $n = 1, 2, 3, ...$

2) $|x_m - x_n| \geq 1/n(n+1) + 1/m(m+1)$ với mọi số nguyên dương $m \not n$.

Giải. Giả sử tồn tại dãy số như vậy. Với mỗi số nguyên dương N, ta sắp xếp lại các số $x_1, ..., x_N$ theo thứ tự tăng dần

$$x_{i1} \leq x_{i2} \leq \cdots \leq x_{iN}$$

Khi đó $|x_{iN} - x_{i1}| = |x_{iN} - x_{iN-1}| + \cdots + |x_{i2} - x_{i1}| 1/iN(iN+1) + 1/i_{N-1}(i_{N-1}+1) + \cdots + 1/i_2(i_2+1) + 1/i_1(i_1+1) = 2\sum 1/i_k(i_k+1) - 1/i_N(i_N+1) - 1/i_1(i_1+1) = A(N)$.

Vì $i_1, i_2, ..., i_N$ chỉ là một hoán vị của $1, 2, ..., N$ nên ta có

$$\begin{aligned} A(N) &= 2\sum 1/k(k+1) - 1/i_N(i_N+1) - 1/i_1(i_1+1) \\ &= 2(1 - 1/(N+1)) - 1/i_N(i_N+1) - 1/i_1(i_1+1) \\ &\geq 2(1 - 1/(N+1)) - 1/1.2 - 1/2.3 = 4/3 - 2/(N+1) \end{aligned}$$

Bây giờ chú ý rằng $|x_{iN} - x_{i1}| \leq 2x0,666 < 4/3$. Chọn N đủ lớn sao cho $4/3 - 2/(N+1) > 2x0,666$, ta suy ra mâu thuẫn. Vậy không tồn tại dãy số thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ví dụ 1.20 (Liên Xô 1986). *Giả sử $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số dương tuỳ ý. Chứng minh bất đẳng thức*

$$1/a_1 + 2/(a_1+a_2) + \cdots + n/(a_1 + \cdots + a_n) < 4(1/a_1 + 1/a_2 + \cdots + 1/a_n)$$

Giải. Vế phải không thay đổi nếu ta thay đổi thứ tự của a_i do đó ta chỉ cần (và phải) chứng minh bất đẳng thức đúng cho trường hợp tổng bên trái lớn nhất. Điều này xảy ra khi a_i được sắp theo thứ tự tăng dần. Thật vậy, giả sử $0 < b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$ là các số a_i được sắp xếp lại. Khi đó rõ ràng với mọi k ta có $b_1 + \cdots + b_k \leq a_1 + \cdots + a_k$ và

$$1/a_1 + 2/(a_1+a_2) + \cdots + n/(a_1 + \cdots + a_n) \leq 1/b_1 + 2/(b_1+b_2) + \cdots + n/(b_1 + \cdots + b_n)$$

Với mọi k, ghép các số hạng của tổng bên phải thành cặp ta có đánh giá sau

$(2k-1)/(b_1+\cdots+b_{2k-1})+2k/(b_1+\cdots+b_{2k-1}) < (2k-1)/kb_k+2k/(k+1)b_k < 4/b_k$

Từ đó suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Phép thế lượng giác

Nhiều dãy số đại số với công thức phức tạp có thể trở thành các dãy số đơn giản nhờ phép thế lượng giác. Thủ thuật này đặc biệt hiệu quan trong các bài toán chứng minh một dãy số là tuần hoàn hay không tuần hoàn. Để áp dụng được thủ thuật này, điều cần thiết là biết các công thức lượng giác và một chút nhạy cảm toán học.

Ví dụ 1.21 (Việt Nam, 1990). *Cho $\{x_n\}$ là dãy số thỏa mãn điều kiện $|x_1| < 1$, $x_{n+1} = (-x_n + \sqrt{3-3x_n^2})/2$ $(n \geq 1)$*

a) x_1 phải thỏa mãn điều kiện gì để tất cả các số hạng của dãy số đều dương?

b) Dãy số trên có tuần hoàn không?

Điều kiện $|x_1| < 1$ và dạng của hàm số gợi ngay cho chúng ta phép đặt $x_1 = \cos\varphi$ với φ thuộc $(0, \pi)$ khi đó $x_2 = (-\cos\varphi + 3\sin\varphi)/2 = cos(\varphi - 2\pi/3)$. Từ đó suy ra $x_{n+1} = \cos(\varphi - 2n\pi/3)$. Từ đây có thể dễ dàng trả lời các câu hỏi của đề bài.

Ví dụ 1.22 (KVANT). *Cho dãy số u_n xác định bởi: $u_1 = 2, u_{n+1} = (2 + u_n)/(1 - 2u_n)$.*

a) Chứng minh rằng $u_n \neq 0$ với mọi n nguyên dương

b) Chứng minh dãy không tuần hoàn

Giải. Đặt $\varphi = \arctan 2$, $\tan = 2$. Khi đó nếu $u_n = \tan x$ thì $u_{n+1} = \tan(\varphi + x)$, suy ra $u_n = \tan(n\varphi)$. Sử dụng công thức $\tan 2x = 2\tan x/(1 - \tan^2 x)$ suy ra $u_n^2 = 2u_n/(1 - u_n^2)$. Từ đây nếu $u_n^2 = 0$ thì $u_n = 0$. Nếu tồn tại n sao cho $u_n = 0$ thì sử dụng tính chất này, ta suy ra tồn tại s sao cho $u_{2s} + 1 = 0$ hay $(2 + u_{2s})/(1 - 2u_{2s}) = 0$ hay $u_{2s} = -2$, $2u_s/(1 - u_{s2}) = -2$. Suy ra u_s vô tỉ. Điều này vô lý. Phần b) là hệ quả của câu a).

Ví dụ 1.23. *Tìm công thức tổng quát tính số hạng của dãy số $x_0 = a, x_{n+1} = 2 - x_n^2$.*

Giải. Nếu $|a| \leq 2$ thì đặt $a = -2\cos\varphi$, ta được $x_n = -2\cos(2n\varphi)$. Nếu $|a| > 2$, đặt $a = -(a + 1/a)$ thì ta được $x_n = -(\alpha^{2^n} + 1/\alpha^{2^n})$.

Ví dụ 1.24 (Thổ Nhĩ Kỳ 1997). *Hai dãy $\{a_n\}, \{b_n\}$ được xác định bởi $a_1 = \alpha, b_1 = \beta, a_{n+1} = \alpha a_n - \beta b_n$, $b_{n+1} = \beta a_n + \alpha b_n$. Có bao nhiêu cặp (a, b) thỏa mãn $a_{1997} = b_1$, $b_{1997} = a_1$?*

Giải. Ta có $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = (a^2 + b^2)(a_n^2 + b_n^2)$ nên yêu cầu bài toán xảy ra chỉ khi $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Đặt $a = \cos\varphi, \beta = \sin\varphi$ thì $a_n = \cos(n\varphi), b_n = \sin(n\varphi)$. Từ đó suy ra lời giải của bài toán.

Phép thế lượng giác thường được áp dụng trong các bài toán có công thức "gợi nhớ" đến các công thức lượng giác hoặc có kết quả giống tính chất hàm lượng giác (chẳng hạn tính tuần hoàn hoặc tính bị chặn). Tuy nhiên, phép thế lượng giác có thể xuất hiện ở những trường hợp mà tưởng chừng không dính dáng gì đến với lượng giác.

Ví dụ 1.25. *Với mỗi số tự nhiên $n > 1$ và n số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ đặt*

$$f = \max\{x_1, 1/x_1 + x_2, ..., 1/x_{n-1} + x_n, 1/x_n\}.$$

Hãy tìm $\min f$.

Giải. Tưởng chừng như bài toán này không liên quan gì đến lượng giác. Và hơn thế, cũng chẳng liên quan gì đến dãy số. Tuy nhiên, điều kiện đạt giá trị nhỏ nhất của f sẽ tạo ra một dãy số! Ta chứng minh rằng nếu $x_1, x_2, ..., x_n$ là n số thực mà tại đó f đạt min thì ta phải có $x_1 = 1/x_1 + x_2 = ... = 1/x_{n-1} + x_n = 1/x_n$. Và bài toán dãy số đã xuất hiện: Với mỗi số nguyên dương n, xét dãy số $\{x_k\}_{k=1}^n$ xác định bởi $x_1 = a$ và $x_k = x_1 - 1/x_{k-1}$, với $k = 2, ..., n$. Hãy tìm a sao cho $1/x_n = x_1$. Và bài toán cuối cùng này có thể giải như sau. Đặt $x_1 = 2\cos\varphi$ thì $x_2 = 2\cos\varphi - 1/2\cos\varphi = (4\cos^2\varphi - 1)/2\cos\varphi = \sin^3\varphi/\sin^2\varphi, x_3 = 2\cos\varphi - \sin 2\varphi/\sin 3\varphi = \sin 4\varphi/\sin 3\varphi$... Tiếp tục như vậy suy ra $x_n = \sin(n+1)\varphi/\sin n\varphi$. Từ đó đẳng thức $1/x_n = x_1 \sin n\varphi/\sin(n+1)\varphi = 2\cos\varphi sin(n+2)\varphi = 0$. Đến đây, từ điều kiện x_k dương ta suy ra $\varphi = \pi/(n+2)$ và $\min f = 2\cos(\pi/(n+2))$.
Câu hỏi:

1) Tại sao có thể khẳng định khi f đạt min thì các giá trị trên đây phải bằng nhau?

2) Tại sao có thể đặt $x_1 = 2\cos\varphi$?

3) Làm sao có thể dự đoán ra cách đặt trên?

4) Phép giải trên còn chưa chặt chẽ ở điểm nào?

5) Mọi số thực x đều có thể biểu diễn dưới dạng $x = 2\cos\varphi$ hoặc, $x = a + 1/a$. Điều đó có ý nghĩa gì?

Dãy số phụ

Khi khảo sát sự hội tụ của một dãy số ta thường định lý về dãy đn điệu và bị chặn. Nếu dãy không đơn điệu thì có thể thử xét dãy với chỉ số chẵn và dãy với chỉ số lẻ. Tuy nhiên, có những dãy số có "hành vi" phức tạp hơn nhiều. Chúng tăng giảm rất bất thường. Trong một số trường hợp như thế, ta có thể xây dựng một (hoặc 2) dãy số phụ đơn điệu, chứng minh các dãy số phụ có giới hạn và sau đó chứng minh dãy số ban đầu có cùng giới hạn. Tất nhiên, dãy số phụ phải được xây dựng từ dãy số chính.

Ví dụ 1.26. *Dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi $a_1 > 0, a_2 > 0$ và $a_{n+1} = 2/(a_n + a_{n-1})$. Chứng minh rằng dãy số $\{a_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn của dãy số đó.*

Giải. Xét hai dãy

$$M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\}$$
$$m_n = \min\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\}$$

Ta chứng minh M_n là dãy số giảm và m_n là dãy số tăng. Thật vậy, ta sẽ chứng minh $a_{n+4} \leq \max\{a_{n+1}, a_{n+3}\}$. Từ đây suy ra $M_{n+1} = a_{n+1}$ hoặc a_{n+2} hoặc a_{n+3} và rõ ràng khi đó $M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3}\} \geq M_{n+1}$. Thật vật nếu $a_{n+4} \geq a_{n+3}$ thì $2/(a_{n+3} + a_{n+2}) \geq a_{n+3}$ suy ra $2 \geq (a_{n+3} + a_{n+2})a_{n+3}$. Khi đó $a_{n+1} = 2/a_{n+3} - a_{n+2} = 2/a_{n+3} - 2/(a_{n+2} + a_{n+3}) - a_{n+2} + a_{n+4} = 2a_{n+2}/(a_{n+3} + a_{n+2})a_{n+3} - a_{n+2} + a_{n+4} \geq a_{n+4}$ suy ra đpcm. Vậy ta đã chứng minh được M_n giảm. Tương tự m_n tăng. Hai dãy số này đều bị chặn nên hội tụ. Cuối cùng, ta chỉ còn cần chứng minh hai giới hạn bằng nhau.

Ví dụ 1.27. *Dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi $a_1 > 0, a_2 > 0$ và $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$. Chứng minh rằng dãy số $\{a_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn của dãy số đó.*

Giải. Xét dãy số $M_n = \max\{a_n, a_{n+1}, 4\}$.

Nếu $M_n = 4$ thì $a_n, a_{n+1} \leq 4$, suy ra $a_{n+2} \leq 4$, từ đó $M_{n+1} = 4$.

Nếu $M_n = a_{n+1}$ thì $a_{n+1} \geq a_n, 4$. Khi đó $\sqrt{a_{n-1}} = a_{n+1} - \sqrt{a_{n+1}} \geq \sqrt{a_{n+1}}$, suy ra $a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}} \leq \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} = a_{n+1}$ suy ra $M_{n+1} = \max\{a_{n+1}, a_{n+2}, 4\} = a_{n+1}$.

Nếu $M_n = a_n$ thì $a_n \geq a_{n+1}, 4$. Khi đó $a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}} \leq 2\sqrt{a_n}$. Suy ra $M_{n+1} \leq a_n = M_n$.

Vậy trong mọi trường hợp thì $M_{n+1} \leq M_n$, tức là dãy $\{M_n\}$ là dãy số giảm. Do M_n bị chặn dưới bởi 4 nên dãy này có giới hạn. Ta chứng minh giới hạn này bằng 4. Thực vậy, giả sử giới hạn là $M > 4$. Khi đó với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại N sao cho với mọi $n \geq N$ thì $M - \epsilon < M_n < M + \epsilon$. Chọn $n \in N$ sao cho $M_{n+2} = a_{n+2}$ (theo các lập luận ở trên và do $M > 4$ thì tồn tại chỉ số n như vậy). Ta có

$$M - \epsilon < M_{n+2} = a_{n+2} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}} < 2\sqrt{M + \epsilon}$$

hay $M(M - 4) - \epsilon(2M + 4 - \epsilon) < 0$

Mâu thuẫn vì $M > 4$ và ϵ có thể chọn nhỏ tuỳ ý.

Phương pháp sai phân

Để tính tổng n số hạng đầu tiên của một dãy số, một trong những phương pháp hiệu quả nhất là phương pháp sai phân: Để tính tổng n số hạng đầu tiên của dãy số $\{a_n\}$, ta tìm hàm số $f(n)$ sao cho $a_n = f(n+1) - f(n)$. Khi đó $a_0 + \cdots + a_{n-1} = f(n) - f(0)$.

Một trong những ví dụ kinh điển chính là phương pháp mà Bernoulli và các nhà toán học thế kỷ 18 đã đưa ra để tìm công thức tính tổng $S(k,n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$. Dùng phương pháp hệ số bất định, họ tìm đa thức $f_k(n)$ sao cho $n^k = f_k(n+1) - f_k(n)$ và từ đó tìm được $S(k,n) = f_k(n+1) - f_k(n)$. Phương pháp này hiệu quả hơn phương pháp xây dựng công thức truy hồi, vì để tính S_k ta không cần phải dùng đến các công thức tính S_{k-1}, S_{k-2}

Khi dự đoán các hàm f, ta có thể sử dụng tích phân rồi tương tự hóa qua. Ví dụ tích phân của đa thức bậc k là đa thức bậc $k+1$. Vậy thì $\Delta f_k = n_k$ suy ra f_k phải có bậc $k+1$.

Tuy nhiên, khác với tích phân, đôi khi các hàm rời rạc không có "nguyên hàm". Trong trường hợp đó ta không tính được tổng mà chỉ có thể đánh giá tổng bằng các bất đẳng thức.

Ví dụ 1.28. *Tìm phần nguyên của tổng* $S = 1/1 + 1/\sqrt{2} + \cdots + 1/\sqrt{100}$.

Giải. Ta cần tìm một đánh giá cho S. Nhận xét rằng hàm $1/\sqrt{x}$ có nguyên hàm là $2\sqrt{x}$, ta xét hàm số $f(n) = 2\sqrt{n}$. Khi đó $f(n+1) - f(n) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} = 2/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$.

Suy ra, $1/\sqrt{n+1} < f(n+1) - f(n) < 1/\sqrt{n}$. Từ đó, $2(\sqrt{101} - 1) < S < 2(\sqrt{100} - 1) + 1$, suy ra $[S] = 18$.

Ví dụ 1.29 (Đề đề nghị Toán quốc tế 2001). *Cho* $x_1, x_2, ..., x_n$ *là các số thực bất kỳ. Chứng minh rằng*

$$x_1/(1 + x_1^2) + x_2/(1 + x_1^2 + x_2^2) + \cdots + x_n/(1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2) < \sqrt{n}.$$

Giải. Đặt vế trái của bất đẳng là A. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopsky ta có

$$A^2 \leq n[x_1^2/(1 + x_1^2)^2 + x_2^2/(1 + x_1^2 + x_2^2)^2 + \cdots + x_n^2/(1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2)^2]$$

Để chứng minh bất đẳng thức đầu bài, ta chỉ cần chứng minh

$$x_1^2/(1 + x_1^2)^2 + x_2^2/(1 + x_1^2 + x_2^2)^2 + \cdots + x_n^2/(1 + x_1^2 + \cdots + x_n^2)^2 < 1.$$

Nhưng điều này là hiển nhiên do bất đẳng thức

$$x_k^2/(1 + x_1^2 + \cdots + x_k^2)^2 \leq 1/(1 + x_1^2 + \cdots + x_{k-1}^2) - 1/(1 + x_1^2 + \cdots + x_k^2).$$

Ví dụ 1.30. *Xét dãy số* $\{x_n\}_{n=1}$ *cho bởi:* $x_{n+2} = [(n-1)x_{n+1} + x_n]/n$. *Chứng minh rằng với mọi giá trị ban đầu* x_1, x_2, *dãy số đã cho hội tụ. Tìm giới hạn của dãy như một hàm số theo* x_1, x_2.

Giải. Ta có từ công thức của dãy số $x_{n+2} - x_{n+1} = -(x_{n+1} - x_n)/n = (x_n - x_{n-1})/n(n-1) = \cdots = (-1)^n(x_2 - x_1)/n!$. Từ đó suy ra $x_{n+2} = (x_{n+2} - x_{n+1}) + (x_{n+1} - x_n) + \cdots + (x_2 - x_1) + x_1 = x_1 + (x_2 - x_1)K_n$, trong đó $K_n = 1 - 1/1! + 1/2! - \cdots + (-1)n/n!$. Từ đây suy ra dãy số có giới hạn và giới hạn đó bằng $x_1 + (x_2 - x_1)/e$.

Câu hỏi:

1) Có thể tổng quát hóa bài toán trên như thế nào?

2) Hãy tìm sai phân của các hàm số $\arctan(n)$. Từ đó đặt ra bài toán tính tổng tưng ứng.

3) Tìm sai phân của hàm số $\ln(n)$. Từ đó tìm đánh giá cho tổng $1 + 1/2 + \cdots + 1/n$.

4) Từ công thức $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin 3x$ có thể lập ra công thức tính tổng nào?

1.4 Một số phương pháp xây dựng hệ thống bài tập

1.4.1 Xây dựng dãy hội tụ bằng phương trình

Có thể xây dựng dãy số hội tụ về một số a xuất phát từ một phương trình có nghiệm là a theo cách sau:

Ví dụ 1.31. *Xét* $a = \sqrt{2}, \alpha$ *là nghiệm của phương trình* $\alpha^2 = 2$. *Ta viết lại dưới dạng*

$$\alpha = 2/\alpha \Leftrightarrow 2\alpha = \alpha + 2/\alpha \Leftrightarrow \alpha = (\alpha + 2/\alpha)/2$$

và ta thiết lập dãy số x_n *thoả mãn* $x_0 = a, x_{n+1} = (x_n + 2/x_n)/2$. *Nếu dãy này hội tụ thì giới hạn sẽ là* $\sqrt{2}$. *Tương tự như vậy, ta có thể xây dựng được dãy số tiến về căn bậc* k *của* m *như sau:*

$$x_0 = a,\ x_{n+1} = (x_n + m/x_n^{k-1})/2$$

Cũng với giới hạn cần đến là $\sqrt{2}$, ta có thể xây dựng một dãy số khác theo "phong cách" như vậy:

$$x_0 = a,\ x_{n+1} = 1 + x_n - x_n^2/2$$

Tất nhiên, trong tất cả các ví dụ trên, ta chỉ có được phương trình với nghiệm theo ý muốn khi đã chứng minh được sự hội tụ của dãy số. Vì vậy, cần cẩn thận với cách thiết lập bài toán kiểu này. Ví dụ, với dãy số $x_{n+1} = 1 + x_n - x_n^2/2$ thì không phải với x_0 nào dãy cũng hội tụ, và không phải lúc nào giới hạn cũng là.

Một cách tổng quát, ta có thể dùng phương pháp tìm nghiệm xấp xỉ Newton để xây dựng các dãy số. Để tìm nghiệm của phương trình $F(x) = 0$, phương pháp Newton đề nghị chọn x_0 tương đối gần nghiệm đó và xây dựng dãy truy hồi

$$x_{n+1} = x_n - F(x_n)/F'(x_n)$$

khi đó dãy x_n sẽ dần đến nghiệm của phương trình $F(x) = 0$.

Ví dụ 1.32. *Xét hàm số* $F(x) = x^2 - 2$*, thì* $F(x)/F'(x) = (x^2 - 2)/2x$ *và ta được dãy số* $x_{n+1} = (x_n + 2/x_n)/2$.
Xét hàm số $F(x) = x^3 - x$ *thì* $F(x)/F'(x) = (x^3 - x)/(3x^2 - 1)$ *và ta được dãy số*

$$x_{n+1} = 2x_n^3/(3x_n^2 - 1)$$

1.4.2 Xây dựng dãy truy hồi từ cặp nghiệm của phương trình bậc 2

Chúng ta thấy, từ hai nghiệm của một phương trình bậc 2 có thể xây dựng ra các dãy truy hồi tuyến tính bậc 2 (kiểu dãy số Fibonacci). Tương tự như thế, có thể xây dựng các dãy truy hồi tuyến tính bậc cao từ nghiệm của các phương trình bậc cao. Trong phần này, chúng ta sẽ đi theo một hướng khác: xây dựng các dãy truy hồi phải tuyến bậc nhất từ cặp nghiệm của phưng trình bậc 2.

Xét phương trình bậc 2: $x^2 - mx \pm 1 = 0$ có hai nghiệm là α và β. Xét một số thực a bất kỳ. Xét dãy số $x_n = a(\alpha^{2^n} + \beta^{2^n})$. Khi đó $x_n^2 = a^2(\alpha^{2^{n+}} + \beta^{2^{n+1}} + 2) = ax_{n+1} + 2a^2$, từ đó suy ra dãy số x_n thoả công thức truy hồi: $x_{n+1} = x_n^2/a - 2a$.

Ví dụ chọn $a = 1/2, m = 4$, ta có bài toán: Tìm công thức tổng quát của dãy số x_n được xác định bởi $x_0 = 2, x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$.

Tương tự như vậy, nếu xét $x_n = a(\alpha^{3^n} + \beta^{3^n})$ thì $x_n^3 = a^3(\alpha^{3^{n+1}} + \beta^{3^{n+1}} \pm 3(\alpha^{3^n} + \beta^{3^n}) = a^2(x_{n+1} \pm 3x_n)$. Từ đó suy ra dãy số x_n thoả công thức truy hồi $x_{n+1} = x_n^3/a^2 - (\pm 3x_n)$.

Ví dụ xét α, β là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 4x - 1 = 0, a = 1/4$, ta được bài toán: Tìm công thức tổng quát của dãy số x_n được xác định bởi $x_0 = 1, x_{n+1} = 16x_n^3 + 3x_n$. Hoàn toàn tương tự, có thể xây dựng các dãy truy hồi phi tuyến dạng đa thức bậc 4, 5. Bằng phép dời trục, ta có thể thay đổi dạng của các phương trình này.

Ví dụ 1.33. *nếu trong dãy* $x_0 = 2, x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$ *ta đặt* $x_n = y_n - 1/2$ *thì ta được dãy* y_n *thoả:* $y_0 = 5/2, y_{n+1} = 2(y_n^2 - y_n)$.

Nếu α, β là các số thực thì trong hai số có ít nhất một số có trị tuyệt đối lớn hơn 1, vì vậy dãy số không hội tụ (Trừ trường hợp hai nghiệm đối nhau và dãy là dãy hằng). Tuy nhiên, nếu chọn α, β là cặp số phức liên hợp có môđun nhỏ hơn hay bằng 1, ta có thể tạo ra các dãy tuần hoàn hoặc dãy hội tụ. Chú ý rằng chọn α, β ở đây chính là chọn m và cũng chính là chọn x_0. Do đó tính chất của dãy số sẽ phụ thuộc rất nhiều vào x_0.

Ví dụ với dãy số thoả $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$, nếu $x_0 = 2$ thì $x_n = [(2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}]/2$; nếu $x_0 = 1$ thì x_n là dãy hằng; nếu $x_0 = \cos\alpha$ thì $x_n = \cos(2^n\alpha)$.

Câu hỏi:

1) Xét xem với những a, b, c nào thì phương trình sai phân $x_{n+1} = ax_n^2 + bx_n + c$ giải được bằng phương pháp trên?

2) Hãy tìm dạng của các dãy truy hồi tạo được bằng cách xét $x_n = a(\alpha^{k^n} + \beta^{k^n})$ với $k = 4, 5$.

1.4.3 Xây dựng các dãy số nguyên từ lời giải các phương trình nghiệm nguyên

Một dãy truy hồi tuyến tính với hệ số nguyên và các số hạng đầu đều nguyên sẽ chứa toàn số nguyên. Đó là điều hiển nhiên. Thế nhưng có những dãy số mà trong công thức truy hồi có phân số, thậm chí có cả căn thức nhưng tất cả các số hạng của nó vẫn nguyên. Đấy mới là điều bất ngờ. Tuy nhiên, nếu xem xét kỹ, ta có thể thấy chúng có một mối quan hệ rất trực tiếp.

Chúng ta hãy bắt đầu từ bài toán quen thuộc sau: Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi $a_0 = 1, a_{n+1} = 2a_n + \sqrt{3a_n^2 - 2}$ đều nguyên.

Chuyển vế và bình phương công thức truy hồi, ta được

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n + 4a_n^2 &= 3a_n^2 - 2 \\ \Leftrightarrow a_{n+1}^2 - 4a_{n+1}a_n + a_n^2 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Thay n bằng $n-1$, ta được

$$a_n^2 - 4a_n a_{n-1} + a_{n-1}^2 + 2 = 0$$

Từ đây suy ra a_{n-1}, a_{n+1} là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - 4a_n x + a_n^2 + 2 = 0$$

Suy ra: $a_{n+1} + a_{n-1} = 4a_n$ hay $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$. Từ đây suy ra tất cả các số hạng trong dãy đều nguyên.

Cả công thức ban đầu lẫn công thức hệ quả $a_{n+1} = 4a_n - a_{n-1}$ đều gợi cho chúng ta đến với phương trình Pell. Quả thật là có thể xây dựng hàng loạt dãy số tương tự bằng cách xét phương trình Pell.

Xét phương trình $x^2 - Dy^2 = k$. Giả sử phương trình có nghiệm không tầm thường (x_0, y_0) và (α, β) là nghiệm cơ sở của phương trình $x^2 - Dy^2 = 1$. Khi đó, nếu xét hai dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ xác định bởi $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta D y_n, y_{n+1} = \beta x_n + \alpha y_n$ thì x_n, y_n là nghiệm của $x^2 - Dy^2 = k$.

Từ hệ phương trình trên, ta có thể tìm được

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta\sqrt{D(x_n^2 - k)};\ \ y_{n+1} = \alpha y_n + \beta\sqrt{k + Dy_n^2}$$

và như vậy đã xuất hiện hai dãy số nguyên được cho bởi một công thức không nguyên.

Ví dụ, với $D = 4a(a+1), k = 1$ thì ta có $x_0 = \alpha = 2a+1, y_0 = \beta = 1$. Ta được hai dãy số nguyên sau đây:

$$x_0 = 2a+1,\ x_{n+1} = 2a+1+\sqrt{4a(a+1)(x_n^2-1)}$$
$$y_0 = 1,\ y_{n+1} = 2a+1+\sqrt{4a(a+1)y_n^2+1}$$

Cuối cùng, chú ý rằng ta có thể tạo ra một kiểu dãy số khác từ kết quả a_{n-1}, a_{n+1} là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - 4a_n x + a_n^2 + 2 = 0$$

trên đây: Theo định lý Viet thì $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 + 2$, suy ra

$$a_{n+1} = (a_n^2 + 2)/a_{n-1}$$

và ta có bài toán: Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi $a_0 = 1, a_1 = 3$ và $a_{n+1} = (a_n^2+2)/a_{n-1}$. Chứng minh rằng a_n nguyên với mọi n.

1.4.4 Xây dựng dãy số là nghiệm của một họ phương trình phụ thuộc biến n

Xét một họ phương trình $F(n,x) = 0$. Nếu với mỗi n, phương trình $F(n,x) = 0$ có nghiệm duy nhất trên một miền D nào đó thì dãy số x_n đã được xác định. Từ mối liên hệ giữa các hàm $F(n,x)$, dãy số này có thể có những tính chất rất thú vị.

Ví dụ 1.34. *Với mỗi số tự nhiên $n \geq 3$, gọi x_n là nghiệm dương duy nhất của phương trình $x^n - x^2 - x - 1 = 0$. Chứng minh rằng $\lim x_n = 1$ và tìm $\lim n(x_n - 1)$.*

Ví dụ 1.35. *Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, phương trình*

$$1/x + 2/(x-1) + 2/(x-4) + \cdots + 2/(x-n^2) = 0$$

có nghiệm duy nhất x_n thuộc khoảng $(0,1)$. Tìm $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Ví dụ 1.36. *Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương, phương trình*

$$1/x + 2/(x-1) + 2/(x-4) + \cdots + 2/(x-n^2) = 0$$

có nghiệm duy nhất x_n thuộc $(0,1)$. Tìm $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Để tạo ra các phương trình có nghiệm duy nhất trên một khoảng nào đó, có thể sử dụng tổng của các hàm đơn điệu. Riêng với hàm đa thức ta có thể sử dụng quy tắc Đề-các về số nghiệm dương của phương trình: Nếu dãy các hệ số của phương trình đổi dấu k lần thì phương trình có không quá k nghiệm dương.

Ví dụ phương trình $x^4 - x^2 - nx - 1 = 0$ có nghiệm dương duy nhất x_0, còn phương trình $x^4 - x^2 + nx - 1 = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm dương.

Khi xây dựng các hàm $F(n, x)$, có thể sử dụng công thức truy hồi. Như trong ví dụ trên thì $F(n+1, x) = F(n, x) + 1/(x - n - 1)$. Xây dựng $F(n, x)$ kiểu này, dãy nghiệm x_n sẽ dễ có những quy luật thú vị hơn. Ví dụ, với dãy số trên, ta có $F(n+1, x_n) = F(n, x_n) + 1/(x_n - n - 1) < 0$. Từ đây, do $F(n+1, 0^+) = \infty$ ta suy ra x_{n+1} nằm giữa 0 và x_n, tức dãy x_n giảm.

Câu hỏi:

1) Có thể xây dựng dãy số nào với họ hàm số $F(x) = x(x-1)\ldots(x-n)$?

2) Cho $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$ là một dãy số dương tăng nghiêm ngặt. Xét họ phương trình $1/x + 1/(x_1 - a_1) + \cdots + 1/(x - a_n) = 0$ có nghiệm duy nhất x_n thuộc $(0, a_1)$. Khi nào thì x_n dần về 0 khi n dần đến vô cùng?

1.5 Lý thuyết dãy số dưới con mắt toán cao cấp

1.5.1 Rời rạc hóa các khái niệm và định lý của lý thuyết hàm biến số thực

Dãy số là hàm số, do đó nó có đầy đủ các tính chất chung của hàm số. Tuy nhiên, do tính chất đặc biệt của N, một số khái niệm như đạo hàm, tích phân không được định nghĩa cho các dãy số. Nhưng thực ra, dãy số cũng có các khái niệm tương ứng với các khái niệm này. Bằng cách so sánh và phép tương tự, ta có thể tìm được những định lý thú vị của lý thuyết dãy số. Đó là quá trình rời rạc hóa.

Rời rạc hóa của đạo hàm $f'(x)$ chính là sai phân $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ của dãy số. Cũng như đạo hàm của hàm biến số thực, sai phân dùng để xét tính tăng giảm của dãy số. Tương tự như vậy, ta định nghĩa sai phân cấp 2 và dùng để đo tính lồi lõm của dãy. Rời rạc hóa của khái niệm tích phân chính là khái niệm tổng: $S(x_n) = x_0 + \cdots + x_n$. Hai khái niệm này ngược nhau: $\Delta(S(x_n)) = x_n, S(\Delta x_n) = x_n$.

Ví dụ 1.37 (Định lý Stolz). *Xét hai dãy số $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ trong đó $\{y_n\}$ là dãy số dương tăng và dần đến vô cùng. Thế thì $\lim x_n/y_n = \lim(x_n - x_{n-1})/(y_n - y_{n-1})$ với giả thiết là giới hạn ở vế phải tồn tại. (So sánh với quy tắc L'Hopitale)*

Chứng minh: Đặt $\lim(x_n - x_{n-1})/(y_n - y_{n-1}) = A$. Với mọi $\epsilon > 0$ tồn tại N_1 sao cho với mọi $n \geq N_1$ ta có $|(x_n - x_{n-1})/(y_n - y_{n-1}) - A| < \epsilon$, suy ra

$A - \epsilon < (x_n - x_{n-1})/(y_n - y_{n-1}) < A + \epsilon$. Từ đây, do y_n là dãy tăng nên ta có

$$
\begin{aligned}
&(A-\epsilon)(y_{N_1} - y_{N_1-1}) < x_{N_1} - x_{N_1-1} < (A+\epsilon)(y_{N_1} - y_{N_1-1}) \\
&\dots \\
&(A-\epsilon)(y_n - y_{n-1}) < x_n - x_{n-1} < (A+\epsilon)(y_n - y_{n-1})
\end{aligned}
$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại, ta được

$$(A-\epsilon)(y_n - y_{N_1-1}) < x_n - x_{N_1-1} < (A+\epsilon)(y_n - y_{N_1-1})$$

Chia hai vế cho y_n, ta được

$$A - \epsilon + [x_{N_1} - (A-\epsilon)y_{N_1-1}]/y_n < x_n/y_n < A + \epsilon + [x_{N_1} - (A+\epsilon)y_{N_1-1}]/y_n$$

Vì y_n dần đến vô cùng nên tồn tại $N_2 > N_1$ sao cho

$$[x_{N_1} - (A-\epsilon)y_{N_1-1}]/y_n > -\epsilon \text{ và } [x_{N_1} - (A+\epsilon)y_{N_1-1}]/y_n < \epsilon$$

với mọi $n \geq N_2$. Khi đó với mọi $n \geq N_2$ ta có $A - 2\epsilon < x_n/y_n < A + 2\epsilon$ và điều này có nghĩa là $\lim x_n/y_n = A$.
Câu hỏi: Điều kiện y_n tăng và dần đến vô cùng có cần thiết không?

Ví dụ 1.38. *Chứng minh rằng nếu dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn điều kiện $x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} \geq 0$ và $k_1, k_2, \dots, k_r$ là các số tự nhiên thoả mãn điều kiện $k_1 + k_2 + \dots + k_r = r.k$ thì*

$$x_{k_1} + \dots + x_{k_r} \geq r.x_k$$

(So sánh với bất đẳng thức Jensen)

Ví dụ 1.39. *Cho dãy số $\{x_n\}$ thoả mãn điều kiện $x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1} \geq 0$ với mọi $k = 1, \dots, n$. Ngoài ra $x_0 = x_{n+1} = 0$. Chứng minh rằng $x_k \leq 0$ với mọi $k = 1, \dots, n$.*

(Đạo hàm bậc 2 không âm, suy ra đạo hàm bậc nhất là hàm tăng và chỉ có nhiều nhất 1 nghiệm, suy ra chiều biến thiên của hàm số chỉ có thể là 0 giảm $\to$ cực tiểu rồi tăng $\to$ 0)

Ví dụ 1.40. *Cho dãy số dương $\{a_n\}$. Biết rằng tồn tại giới hạn*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = A < \infty.$$

Đặt $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Chứng minh rằng tổng $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k^2 a_k / s_k^2$ cũng có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$.

Giải. Dịch sang ngôn ngữ hàm số, ta có bài toán sau "Nếu $f(x)$ là hàm số tăng từ R^+ vào R^+ và tồn tại tích phân suy rộng $\int_0^\infty \frac{dx}{f(x)}$ thì cũng tồn tại tích phân $\int_0^\infty \frac{x^2 f(x)dx}{F^2(x)}$ trong đó $F(x)$ là nguyên hàm của $f(x)$". Bài này có thể giải bằng phương pháp tích phân từng phần như sau:

$$\int_0^A \frac{xdx}{F(x)} = \frac{1}{2}\int_0^A \frac{d(x^2)}{F(x)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{x^2}{F(x)}\Big|_0^A + \int_0^A \frac{x^2 f(x)dx}{F^2(x)}\Big)$$

như vậy chỉ cần chứng minh tồn tại $\int_0^\infty \frac{xdx}{F(x)}$ và $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{F(x)}$.

Câu hỏi:

1) Định lý Rolle có dạng rời rạc như thế nào?
2) Công thức tính tích phân từng phần có dạng rời rạc như thế nào?

1.5.2 Phương pháp hàm sinh và bài toán tìm số hạng tổng quát

Cho dãy số $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ Hàm sinh $F(x)$ của dãy số này là biểu thức hình thức

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Các phép toán trên hàm sinh được thực hiện một cách tự nhiên và chúng ta không quan tâm đến tính chất giải tích của chúng (bán kính hội tụ của chuỗi tương ứng có thể bằng 0). Phép toán đặc biệt nhất của hàm sinh là phép nhân:

Nếu $F(x), G(x)$ là hàm sinh của các dãy $\{a_n\}, \{b_n\}$ tương ứng thì $F(x).G(x)$ là hàm sinh của dãy $\{c_n\}$ trong đó $c_n = \sum_0^n a_i b_{n-i}$.

Sơ đồ ứng dụng của hàm sinh vào bài toán tìm số hạng tổng quát của dãy số như sau: Giả sử ta cần tìm số hạng tổng quát của dãy số $\{a_n\}$ cho bởi một công thức truy hồi nào đó. Ta thiết lập hàm sinh $F(x)$ của $\{a_n\}$. Dựa vào hệ thức truy hồi, ta tìm được một phương trình cho $F(x)$, giải phương trình, ta tìm được $F(x)$. Khai triển $F(x)$ theo luỹ thừa x (Khai triển Taylor), ta tìm được a_n với mọi n.

Ví dụ 1.41. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi: $a_0 = 3, a_1 = 2, a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$.*

Giải. Xét hàm sinh $F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n+2}x^{n+2} + \cdots$. Với mọi n tự nhiên, ta thay a_{n+2} bằng $5a_{n+1} - 6a_n$ thì được

$$\begin{aligned}F(x) &= a_0 + a_1 x + (5a_1 - 6a_0)x^2 + \cdots + (5a_{n+1} - 6a_n)x^{n+2} + \cdots\\ &= a_0 + a_1 x + 5x(a_1 x + \cdots + a_{n+1}x^{n+1} + \cdots) - 6x^2(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots)\\ &= a_0 + a_1 x + 5x(F(x) - a_0) - 6x^2 F(x)\end{aligned}$$

Suy ra $F(x) = (3 - 13x)/(6x^2 - 5x + 1) = 7/(1 - 2x) - 4/(1 - 3x) = 7(1 + 2x + (2x)^2 + \cdots + (2x)^n + \cdots) - 4(1 + 3x + (3x)^2 + \cdots + (3x)^n + \cdots)$

Từ đó $a_n = 7.2^n - 4.3^n$.

Trên lý thuyết, khi tìm được $F(x)$, ta phải dùng công thức Taylor để tìm khai triển của $F(x)$. Đây là một bài toán phức tạp. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, công thức nhị thức Newton tổng quát dưới đây đã đủ dùng:

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + [\alpha(\alpha - 1)/2]x^2 + \cdots + [\alpha(\alpha - 1)\ldots(\alpha - n + 1)/n!]x^n + \cdots$$

Ví dụ 1.42. *Dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi $a_0 = 1, a_0a_n + a_1a_{n-1} + \cdots + a_na_0 = 1$ với mọi n. Hãy tìm công thức tổng quát của a_n.*

Giải. Xét hàm sinh $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$. Từ công thức truy hồi ta suy ra $F^2(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = (1 - x)^{-1}$. Từ đây $F(x) = (1 - x)^{-1/2}$. Khai triển $F(x)$ theo công thức Newton, ta tìm được $a_n = C_{2n}^n/2^{2n}$.

1.5.3 Đại số tuyến tính và phương trình sai phân

Trong phần trên, chúng ta đã sử dụng phương pháp hàm sinh để giải bài toán tìm công thức tính số hạng tổng quát của một dãy số. Trong phần này, ta sẽ xem xét cấu trúc nghiệm của phương trình sai phân dưới góc độ đại số tuyến tính.

Xét phương trình sai phân thuần nhất: $x_{n+k} = a_1x_{n+k-1} + \cdots + a_kx_n$. Dễ thấy rằng nếu dãy số $\{x_n\}, \{y_n\}$ thoả mãn phương trình này thì $\{ax_n + by_n\}$ cũng thoả mãn phương trình với mọi a, b. Như vậy tập hợp tất cả các dãy số thoả mãn phương trình sai phân trên lập thành một không gian véc-tơ. Hơn thế, ta có định lý:

Định lý 1.12. *Tập hợp tất cả các dãy số thoả mãn phương trình sai phân*

$$x_{n+k} = a_1x_{n+k-1} + \cdots + a_kx_n.$$

là một không gian véctơ k chiều.

Chứng minh định lý này khá đơn giản: Dãy số sẽ hoàn toàn xác định nếu biết k số hạng đầu tiên. Gọi $\{x_n^i\}(i = 0, k - 1)$ là dãy số có $x_j^i = 0$ nếu $i \neq j$ và $x_i^i = 1$. Khi đó có thể chứng minh dễ dàng rằng các dãy $\{x_n^1\}, \ldots, \{x_n^k\}$ độc lập tuyến tính và với mọi dãy $\{x_n\}$ ta có

$$x_n = x_0x_n^0 + \cdots + x_{k-1}x_n^{k-1}$$

Như thế, cấu trúc nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất là đã rõ. Ta chỉ cần tìm một cơ sở nào đó của không gian nghiệm là có thể mô tả được tất cả các nghiệm của phương trình sai phân. Cơ sở mà chúng ta đưa ra ở trên không có tính tường minh, do đó khó có thể sử dụng trong việc thiết lập công thức tổng quát. Để xây dựng một cơ sở khác tốt hơn, ta có định lý:

Định lý 1.13. *Nếu λ là nghiệm bội r của phương trình đặc trưng*

$$x^k - a_1x^{k-1} - \cdots - a_k = 0$$

thì các dãy số $\{\lambda^n\}, \ldots, \{n^{r-1}\lambda^n\}$ thoả mãn phương trình sai phân $x_{n+k} = a_1x_{n+k-1} + \cdots + a_kx_n$.

Với định lý này, ta có thể tìm đủ k dãy số tường minh tạo thành một cơ sở của không giảan nghiệm.

Cuối cùng, nếu ta gặp phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất

$$x_{n+k} = a_1x_{n+k-1} + \cdots + a_kx_n + f(n).$$

thì nghiệm tổng quát của phương trình này sẽ có dạng là tổng của nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất tương ứng với một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất.

Để tìm nghiệm riêng, ta vận dụng phương pháp hoàn toàn tương tự như trong phưng trình vi phân: Nếu $f(n)$ là đa thức thì ta x_n tìm dưới dạng đa thức, là hàm mũ thì tìm dưới dạng hàm mũ... Ở đây, trường hợp cơ số là nghiệm kép của phương trình đặc trưng cũng được xử lý tưng tự như trong phương trình vi phân.

1.5.4 Sử dụng xấp xỉ trong dự đoán kết quả

Trong nhiều trường hợp, dự đoán được kết quả đã là một nửa, thậm chí 2/3 lời giải. Chúng ta đã gặp nhiều tình huống là lời giải đầu tiên thu được một cách rất khó khăn, nhưng sau đó thì hàng loạt lời giải đẹp hơn, gọn hơn xuất hiện. Vì sao chúng ta không nghĩ ngay được những lời giải đẹp? Vì chúng ta chưa biết đáp số. Khi biết rồi thì có thể định hướng dễ dàng hơn rất nhiều. Dưới đây, chúng ta sẽ xem xét một số ứng dụng của xấp xỉ trong việc dự đoán kết quả.

Trong ví dụ về dãy số $x_{n+1} = \sin(x_n)$, chúng ta đã áp dụng định lý trung bình Cesaro để tìm giới hạn $\sqrt{n}x_n$, mặc dù dãy số không có dạng quen thuộc $x_{n+1} = x_n \pm (x_n)^\alpha$. Thế nhưng, nếu để ý rằng $x_n \to 0$ khi $n \to \infty$, mà tại lân cận 0 thì $\sin x \sim x - x^3/6$ thì ta sẽ thấy tính quy luật của kết quả đã tìm được ở trên.

Với phương pháp tương tự, ta có thể thấy dãy dạng $x_{n+1} = x_n \pm (x_n)^\alpha$ ở hàng loạt các dãy số có bề ngoài khác hẳn như: $x_{n+1} = \ln(1 + x_n), x_{n+1} = x_n \cos x_n, x_{n+1} = arctg(x_n) \ldots$ (Dĩ nhiên, phải kiểm tra điều kiện $x_n \to 0$ khi $n \to \infty$).

Ta cũng có thể giải thích được vì sao trong bài toán $a_{n+1} = a_n + 1/\sqrt{a_n}$ ở phần trên, ta đã tìm được số 3/2. Ta có $a_{n+1} = a_n + 1/\sqrt{a_n} = a_n(1 + 1/a_n^{3/2})$. Vì $a_n \to \infty$ khi $n \to \infty$ nên với mọi β ta có $a_{n+1}^\beta = a_n^\beta(1 + 1/a_n^{3/2})^\beta \sim a_n^\beta(1 + \beta/a_n^{3/2}) = a_n^\beta + \beta a_n^{\beta-3/2}$. Do đó để hiệu số này xấp xỉ hằng số, ta chọn $b = 3/2$.

Ta xét một ví dụ khác

Ví dụ 1.43 (ĐHSP, 2000). *Cho dãy số* $\{a_n\}$ *xác định bởi:* $a_1 = a_2 = 1, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}/n(n+1)$. *Chứng minh rằng dãy* $\{a_n\}$ *có giới hạn.*

Giải. Dễ thấy $\{a_n\}$ là dãy tăng. Vì vậy ta chỉ cần chứng minh dãy $\{a_n\}$ bị chặn trên. Ta có

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}/n(n+1) < a_n[1 + 1/n(n+1)]$$

Từ đây suy ra

$$a_{n+1} < [1 + 1/n(n+1)] \dots [1 + 1/2.3]a_2 = [1 + 1/n(n+1)] \dots [1 + 1/2.3]$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh tích $[1 + 1/n(n+1)] \dots [1 + 1/2.3]$ bị chặn. Kết quả này không phức tạp và có thể chứng minh hoàn toàn sơ cấp. Tuy nhiên, những kinh nghiệm về dãy số $1/n(n+1)$ gợi cho chúng ta tới mối quan hệ giữa tích trên và tổng $1/2.3 + \dots + 1/n(n+1)$. Theo hướng đó, chúng ta có thể đưa ra một kết quả tổng quát hơn và kết quả đó được dự đoán từ việc sử dụng xấp xỉ.

Giả sử rằng $\{x_n\}$ là dãy số thực sao cho tổng $x_1 + \dots + x_n$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$. Khi đó $x_n \to 0$ khi $n \to \infty$. Vì vậy, với n đủ lớn thì $x_n \sim \ln(1 + x_n)$. Do đó tổng $\ln(1 + x_1) + \dots + \ln(1 + x_n)$ cũng có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$ và có nghĩa là tích $(1 + x_1) \dots (1 + x_n)$ cũng vậy. Ta có định lý

Định lý 1.14. *Cho dãy số thực* $\{x_n\}$. *Khi đó nếu tổng* $x_1 + \dots + x_n$ *có giới hạn hữu hạn khi* $n \to \infty$ *thì tích* $(1 + x_1) \dots (1 + x_n)$ *cũng có giới hạn hữu hạn khi* $n \to \infty$.

Câu hỏi:

1) Mệnh đề đảo của định lý trên có đúng không?

2) Cho $n > 3$ và x_n là nghiệm dương duy nhất của phương trình $x^n - x^2 - x - 1 = 0$. Có thể dự đoán được $\lim_{n\to\infty} n(x_n - 1)$?

1.6 Bài tập

Bài 1.1 (Canada 1998). *Cho* m *là số nguyên dương. Xác định dãy* $a_0, a_1, a_2, \dots$ *như sau:* $a_0 = 0, a_1 = m$ *và* $a_{m+1} = m^2 a_n - a_{n-1}$ *với* $n = 1, 2, \dots$ *Chứng minh rằng với mọi cặp sắp thứ tự các số tự nhiên* (a, b) *với* $a \le b$ *là nghiệm của phương trình* $(a^2 + b^2)/(ab + 1) = m^2$ *khi và chỉ khi* $(a, b) = (a_n, a_{n+1})$ *với* n *là một số tự nhiên nào đó.*

Bài 1.2 (Bulgari 1978). *Cho dãy số* $\{a_n\}$ *xác định bởi* $a_{n+1} = (a_n^2 + c)/a_{n-1}$. *Chứng minh rằng nếu* a_0, a_1 *và* $(a_0^2 + a_1^2 + c)/a_0 a_1$ *là số nguyên thì* a_n *nguyên với mọi* n.

Bài 1.3. *Trong một dãy vô hạn các số nguyên dương, mỗi một số hạng sau lớn hơn số hạng trước đó hoặc là 54 hoặc là 77. Chứng minh rằng trong dãy này tồn tại số hạng có hai chữ số tận cùng giống nhau.*

Bài 1.4 (Séc-Slovakia 1997). *Chứng minh rằng tồn tại dãy số tăng* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *các số nguyên dương sao cho với mọi số tự nhiên* k, *dãy* $\{k + a_n\}$ *chứa hữu hạn số nguyên tố.*

Hướng dẫn: Dùng định lý Trung hoa về số dư.

Bài 1.5 (Putnam 1995). *Đặt* $S(\alpha) = \{[n\alpha]|n = 1, 2, 3, \ldots\}$. *Chứng minh rằng tập hợp các số nguyên dương* N^* *không thể phân hoạch thành 3 tập hợp* $S(\alpha), S(\beta), S(\gamma)$.

Bài 1.6 (Putnam 1999). *Dãy số* $\{a_n\}_{n=1}$ *được xác định bởi* $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 24$ *và với* $n \geq 4$.

$$a_n = (6a_{n-1}^2 a_{n-3} - 8a_{n-1}a_{n-2}^2)/a_{n-2}a_{n-3}$$

Chứng minh rằng với mọi n, a_n *là số nguyên chia hết cho* n.

Bài 1.7. *Trong dãy số nguyên dương* $\{a_k\}_{k=1}$ *tổng của 10 số hạng đầu tiên bằng 100, còn từ* a_{11}, *mỗi* a_n *bằng số các chỉ số* $i < n$ *sao cho* $a_i + i \geq n$. *Biết rằng* $a_{11} = 10$. *Chứng minh rằng kể từ một chỉ số nào đó, tất cả các số hạng của dãy bằng nhau.*

Bài 1.8 (Balkan). *Cho* $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n \leq \cdots$ *là dãy số không giảm các số tự nhiên sao cho với mọi số tự nhiên* k, *số các số của dãy này không vượt quá* k *là hữu hạn (và ký hiệu là* y_k*). Chứng minh rằng với mọi* m, n

$$\sum_0^n x_i + \sum_0^m y_i \geq (n+1)(m+1)$$

Bài 1.9 (Bulgari 87). *Xét dãy số* $\{x_n\}$ *xác định bởi* $x_1 = x_2 = 1, x_{n+2} = 14x_{n+1} - x_n - 4$. *Chứng minh rằng với mọi* n, x_n *là bình phương của một số nguyên.*

Hướng dẫn: Xét dãy $u_1 = u_2 = 1, u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n$. Chứng minh rằng $u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = 2$ sau đó chứng minh rằng $x_n = u_n^2$. Có thể dùng ý tưởng bài này để xây dựng các bài toán khác như thế nào?

Bài 1.10 (Canada 1988). *Cho hai dãy số* $\{x_n\}, \{y_n\}$ *xác định bởi* $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}, x_0 = 0, x_1 = 1$ *và* $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}, y_0 = 1, y_1 = 2$. *Chứng minh rằng với mọi* $n, y_n^2 = 3x_n^2 + 1$.

Bài 1.11 (Canada 1993). *Cho* $y_1, y_2, y_3, \ldots$ *là dãy số xác định bởi* $y_1 = 1$ *và với mọi số nguyên dương* k

$$y_{4k} = 2y_{2k}, y_{4k+1} = 2y_{2k} + 1, y_{4k+2} = 2y_{2k+1} + 1, y_{4k+3} = 2y_{2k+1}$$

Chứng minh rằng dãy số $y_1, y_2, y_3 \ldots$ *nhận tất cả các giá trị nguyên dương, mỗi giá trị đúng một lần.*

Bài 1.12. *Giả sử rằng s_n là dãy số nguyên dương thoả mãn điều kiện $0 \leq s_{n+m} - s_n - s_m \leq K$ với K là một số nguyên dương cho trước. Với số nguyên dương N có tồn tại các số thực $a_1, a_2, \ldots, a_K$ sao cho*

$$s_n = [a_1 n] + \cdots + [a_K n] \text{ với mọi } n = 1, 2, ...N?$$

Bài 1.13. *Cho $a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = 3$. Gọi $S(n)$ là tập hợp các số nguyên dương a_i, b_i, c_i với $i \leq n$. Xây dựng a_n, b_n, c_n như sau:*
a_{n+1} = số nguyên dương nhỏ nhất không thuộc $S(n)$;
b_{n+1} = số nguyên dương nhỏ nhất không thuộc $S(n)$ và khác a_{n+1};
$c_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1}$;
Gọi d_k là dãy tăng các chỉ số n sao cho $b_n = a_n + 2$. Chứng minh rằng
a) $d_k/k \to 6$ khi k dần đến vô cùng
b) Nếu B là số nguyên thì $(d_k - 6k)/2 = B$ với vô số các chỉ số k.

Bài 1.14 (AMM). *Các dãy số $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ được xác định như sau: $a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = 4$ và*
a_n = số nguyên dương nhỏ nhất không thuộc $\{a_1, \ldots, a_{n-1}, b_1, \ldots, b_{n-1}, c_1, \ldots, c_{n-1}\}$
b_n = số nguyên dương nhỏ nhất không thuộc $\{a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, b_1, \ldots, b_{n-1}, c_1, \ldots, c_{n-1}\}$
$c_n = 2b_n + n - a_n$. Hãy chứng minh hoặc phủ định rằng $0 < n(1+\sqrt{3}) - b_n < 2$ với mọi n.

Bài 1.15 (AMM). *Cho $a_1 = 1$ và $a_{n+1} = a_n + [\sqrt{a_n}]$ với $n = 1, 2, \ldots$ Chứng minh rằng a_n là số chính phương khi và chỉ khi $n = 2^k + k - 2$ với k là số nguyên dương nào đó.*

Bài 1.16 (Bulgari 1973). *Cho dãy số $\{a_n\}_{n=1}$ được xác định bởi $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$.*
a) Chứng minh rằng $(a_n, a_m) = 1$ với mọi $m \neq n$.
b) Chứng minh rằng $\lim \sum_1^n 1/a_k = 1$.

Hướng dẫn:
a) $a_m - 1 = a_{m-1} \ldots a_n(a_n - 1)$
b) $1/a_k = 1/(a_k - 1) - 1/(a_{k+1} - 1)$

Bài 1.17 (Ba Lan 2002). *Cho trước số nguyên dương k. Dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi $a_1 = k + 1, a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k$ với mọi $n \geq 1$. Chứng minh rằng với mọi $m \neq n$ ta có $(a_m, a_n) = 1$.*

Bài 1.18 (KVANT). *Cho $1 \leq a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ là các số nguyên dương. Chứng minh rằng*

$$1/[a_0, a_1] + 1/[a_1, a_2] + \cdots + 1/[a_{n-1}, a_n] \leq 1 - 1/2^n$$

Hướng dẫn: Với $a < b, 1/[a, b] = (a, b)/ab \leq (b - a)/ab = 1/a - 1/b$.

Bài 1.19 (Ba Lan 1997). *Dãy số $a_1, a_2, \ldots$ xác định bởi*

$$a_1 = 0, a_n = a_{[n/2]} + (-1)^{n(n+1)/2}$$

Với mỗi số tự nhiên k, tìm số các chỉ số n sao cho $2^k \leq n < 2^{k+1}$ và $a_n = 0$.

Hướng dẫn: Dùng hệ đếm cơ số.

Bài 1.20 (Việt Nam, 1998). *Cho dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi $a_0 = 20, a_1 = 100, a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n + 20$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$ Tìm số nguyên dương h nhỏ nhất thoả mãn điều kiện $a_{n+h} - a_n$ chia hết cho 1998 với mọi $n = 0, 1, 2, \ldots$*

Bài 1.21 (Chọn đội tuyển VN, 1993). *Gọi $\varphi(n)$ là hàm Euler (nghĩa là $\varphi(n)$ là số các ước số nguyên dương không lớn hơn b và nguyên tố cùng nhau với n). Tìm tất cả các số nguyên dương $k > 1$ thoả mãn điều kiện:*

Với a là số nguyên >1 bất kỳ, đặt $x_0 = a, x_{n+1} = k\varphi(x_n)$ với $n = 0, 1, \ldots$ thì (x_n) luôn bị chặn.

Bài 1.22 (Mỹ 1997). *Cho dãy số tự nhiên $a_1, a_2, \ldots, a_{1997}$ thoả*

$$a_i + a_j \leq a_{i+j} \leq a_i + a_j + 1$$

với mọi i, j nguyên dương thoả $i + j \leq 1997$. Chứng minh rằng tồn tại số thực x sao cho $a_n = [nx]$ với mọi $n = 1, 2, ..., 1997$.

Hướng dẫn: Chứng minh rằng $a_n/n < (a_m + 1)/m$ với mọi m, n.

Bài 1.23. *Cho dãy số $\{a_n\}$*

a) [**Liên Xô 1977**] *Chứng minh rằng nếu $\lim(a_{n+1} - a_n/2) = 0$ thì $\lim a_n = 0$.*

b) Tìm tất cả các giá trị a sao cho nếu $\lim(a_{n+1} - \alpha a_n) = 0$ thì $\lim a_n = 0$.

Bài 1.24 (CRUX). *Tìm số hạng tổng quát của dãy số $\{p_n\}$ xác định bởi $p_0 = 1, p_{n+1} = 5p_n(5p_n^4 - 5p_n^2 + 1)$*

Bài 1.25. *Dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi $a_1 > 0, a_2 > 0$ và $a_{n+1} = \sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}$. Chứng minh dãy số $\{a_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn.*

Bài 1.26 (LMO 1989). *Dãy số thực $\{a_k\}_{k=1}$ thoả mãn điều kiện $a_{k+1} = (ka_k + 1)/(k - a_k)$. Chứng minh rằng dãy số chứa vô hạn số hạng dương và vô hạn số hạng âm.*

Bài 1.27 (LMO 1989). *Dãy số thực $\{a_k\}_{k=1}$ thoả mãn điều kiện $|a_m + a_n - a_{m+n}| \leq 1/(m + n)$ với mọi m, n. Chứng minh rằng $\{a_k\}$ là cấp số cộng.*

Bài 1.28. *Với* $n \geq 2$, *gọi* x_n *là nghiệm dương duy nhất của phương trình* $x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$.

a) Chứng minh rằng $\lim x_n = 2$.

b) Hãy tìm $\lim(2 - x_n)^{1/n}$.

Bài 1.29 (Bulgari 82). *Cho* $x_1, \ldots, x_n$ *là các số thực thuộc đoạn* $[0, 2]$. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j| \leq n^2.$$

Dấu bằng xảy ra khi nào?

Hướng dẫn: Sắp lại thứ tự!

Bài 1.30 (Bulgari 86). *Cho dãy số thức* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *thoả mãn điều kiện* $a_{n+1} \leq (1 + k/n)a_n - 1, n = 1, 2, \ldots$ *trong đó* $0 < k < 1$. *Chứng minh rằng tồn tại số tự nhiên* t *sao cho* $a_t < 0$.

Hướng dẫn: $a_{n+1}/(n+1) < a_n/n - 1/(n+1)$.

Bài 1.31. *Hai dãy số* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *xác định bởi* $a_1 > 0, b_1 > 0, a_{n+1} = a_n + 1/b_n, b_{n+1} = b_n + 1/a_n$. *Chứng minh rằng* $a_{50} + b_{50} > 20$.

Hướng dẫn: Xét $c_n = (a_n + b_n)^2$.

Bài 1.32 (Canada 1985). *Cho* $1 < x_1 < 2$. *Với* $n = 1, 2, \ldots$ *ta định nghĩa* $x_{n+1} = 1 + x_n - x_n^2/2$. *Chứng minh rằng với mọi* $n \geq 3$ *ta có* $|x_n - \sqrt{2}| < 1/2^n$.

Bài 1.33 (PARABOLA). *Cho* $a, b > 0$. *Hai dãy số* $\{a_n\}, \{b_n\}$ *xác định bởi* $a_1 = \sqrt{ab}, b_1 = (a+b)/2, a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, b_{n+1} = (a_n + b_n)/2$. *Chứng minh rằng với mọi* n *nguyên dương ta có* $|b_n - a_n| \leq |b - a|/2^n$.

Bài 1.34 (IMO 1978). *Cho* $\{a_n\}$ *là dãy các số nguyên dương phân biệt. Chứng minh rằng với mọi* n *ta có*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k/k^2 \geq \sum_{k=1}^{n} 1/k.$$

Bài 1.35 (Putnam 2001). *Giả sử* $\{a_n\}_{n=1}$ *là dãy số tăng các số thực dương sao cho* $\lim a_n/n = 0$. *Có thể tồn tại vô số các số nguyên dương* n *sao cho* $a_{n-i} + a_{n+i} < 2a_n$ *với mọi* $i = 1, 2, \ldots, n-1$ *hay không?*

Bài 1.36 (Áo - Ba Lan 2001). *Cho* $a_1, a_2, \ldots, a_{2010}$ *là dãy số thoả mãn điều kiện*

1. *Tổng 20 số hạng liên tiếp của dãy số là không âm.*

2. $|a_i a_{i+1}| \le 1$ *với mọi* $i = 1, 2, \ldots, 2009$.

Hãy tìm $\min \sum_{i=1}^{2001} a_i$.

Bài 1.37 (Ba Lan 2001). *Cho dãy số* $\{a_n\}$ *xác định bởi* $a_0 = 1, a_n = a_{[7n/9]} + a_{[n/9]}, n = 1, 2, \ldots$ *Chứng minh rằng tồn tại* k *sao cho* $a_k < k/2001!$.

Bài 1.38 (Trung Quốc 1997). *Cho* $a_1, a_2, \ldots$ *là dãy số thực thoả mãn điều kiện* $a_{n+m} \le a_n + a_m$ *với mọi* m, n. *Chứng minh rằng* $a_n \le ma_1 + (n/m - 1)a_m$ *với mọi* $n \ge m$.

Bài 1.39 (Singapore 1997). *Cho dãy số* $\{a_n\}$ *xác định bởi* $a_0 = 1/2, a_{k+1} = a_k + a_k^2/n, k = 1, 2, \ldots, n-1$. *Chứng minh rằng* $1 - 1/n < a_n < 1$.

Hướng dẫn: Chứng minh bằng quy nạp rằng $(n+1)/(2n-k+2) < a_k < n/(2n-k)$.

Bài 1.40 (Baltic Way). *Giả sử* $a_1, a_2, \ldots, a_9$ *là các số không âm sao cho* $a_1 = a_9 = 0$ *và ít nhất có một số khác 0. Chứng minh rằng tồn tại chỉ số* $i, 2 \le i \le 8$ *sao cho* $a_{i-1} + a_{i+1} < 2a_i$. *Khẳng định có còn đúng không nếu thay 2 ở bất đẳng thức cuối cùng bằng* 1.9*?*

Bài 1.41. *Dãy số* a_n *được xác định bởi công thức truy hồi*

$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Hãy tìm công thức tổng quát cho a_n.

Bài 1.42 (Việt Nam, 1984). *Dãy số* $u_1, u_2, \ldots$ *được xác định bởi:* $u_1 = 1, u_2 = 2, u_{n+1} = 3u_n - u_{n-1}$ *với* $n = 2, 3, \ldots$ *Đặt* $v_n = \sum_{1 \le k \le n} arcotgu_k$.

Hãy tìm giới hạn v_n *khi* n *dần đến vô cùng.*

Hướng dẫn: Dùng sai phân.

Bài 1.43 (PTNK, 1999). *Cho* $a > 1$ *và dãy số* $\{x_n\}$ *được xác định như sau*

$$x_1 = a, x_{n+1} = na^x \text{ với mọi } n \ge 1.$$

Hãy xác định tất cả các giá trị của a *để dãy* $\{x_n\}$ *hội tụ.*

Bài 1.44. *Cho dãy số dương $\{a_n\}$. Biết rằng tồn tại giới hạn*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} = A < \infty$$

Đặt $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Chứng minh rằng tổng

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2 a_k}{(s_k)^2}$$

cũng có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$.

Hướng dẫn: Dùng công thức tính tổng từng phần

Bài 1.45. *Cho $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ thoả điều kiện $f(a+b) \le f(a)+f(b)$ với mọi $|b-a| \le k$ (k là số nguyên dương cố định). Hỏi có tồn tại giới hạn $f(n)/n$ khi n dần đến vô cùng không?*

Bài 1.46. *Các phần tử của dãy số $a_1, a_2, a_3, \ldots$, là các số nguyên dương khác nhau. Chứng minh rằng với mọi k tồn tại n sao cho tồn tại $a_n \ge n$.*

Bài 1.47. *Chứng minh rằng nếu $a_1 > 2$ và $a_n = a_{n-1}^2 - 2$ thì*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a1a2a3} + \cdots = \frac{1}{2}[a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4}].$$

Hướng dẫn: Dùng lượng giác.

Bài 1.48. *Dãy số dương a_n thoả mãn điều kiện $a_n < a_{n+1} + a_n^2$. Có thể khẳng định tổng $\sum_{i=1}^{n} a_i$ dần đến vô cùng khi n dần đến vô cùng hay không?*

Bài 1.49 (THTT). *Cho số thực $r > 2$. Cho dãy số thực dương $\{a_n\}$ thoả mãn điều kiện $a_n^r = a_1 + \cdots + a_{n-1}$ với mọi $n \ge 2$. Chứng minh rằng dãy $\{a_n/n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$ và tìm giới hạn đó.*

Bài 1.50 (Chọn đội tuyển Việt Nam, 1985). *Dãy số thực $\{x_n\}$ được xác định bởi:*

$$x_1 = 29/10, x_{n+1} = (x_n/\sqrt{x_n^2 - 1}) + \sqrt{3},\ n = 1, 2, 3\ldots$$

Hãy tìm số thực nhỏ hơn x_{2k-1} và lớn hơn x_{2k} với mọi $k = 1, 2, \ldots$

Bài 1.51 (Chọn đội tuyển Việt Nam, 1996). *Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số $\{x_n\}$ được xác định bởi*

$$x_0 = \sqrt{1996}$$
$$x_{n+1} = a/(1 + x_n^2)$$

có giới hạn hữu hạn khi n dần tới vô cùng.

Hướng dẫn: Chuyển về dạng $x_{n+1} = f(x_n),\ x_0 = b$.

Bài 1.52 (Việt Nam, 1997). *Cho n là số nguyên >1, không chia hết cho 1997. Đặt*

$$a_i = i + ni/1997 \ \text{ với mọi } \ i = 1, 2, \ldots, 1996,$$
$$b_j = j + 1997j/n \ \text{ với mọi } \ j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ta sắp xếp các số $\{a_i\}$ và $\{b_i\}$ theo thứ tự tăng dần:

$$c_1 \le c_2 \le \cdots \le c_{1995+n}$$

Chứng minh rằng $c_{k+1} - c_k < 2$ với mọi $k = 1, 2, ..1994 + n$.

Bài 1.53 (Việt Nam, 1998). *Cho a là một số thực không nhỏ hơn 1. Đặt*

$$x_1 = a, x_{n+1} = 1 + \ln(x_n^2/(1 + \ln(x_n)) \ \text{ với } \ n = 1, 2, \ldots$$

Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Bài 1.54. *Cho dãy số $\{x_n\}$ xác định bởi, $x_1 = a, x_{n+1} = (2x_n^3)/(3x_n^2 - 1)$ với mọi $n \ge 1$. Tìm tất cả các giá trị của a để dãy số xác định và có giới hạn hữu hạn.*

Bài 1.55. *Chứng minh rằng dãy số xác định bởi điều kiện $x_{n+1} = x_n + x_n^2/n^2$ với $n \ge 1$, trong đó $0 < x_1 < 1$ là dãy bị chặn.*

Bài 1.56. *Cho dãy số*

$$a_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + \cdots \sqrt{1 + (n-1)\sqrt{1+n}}}}$$

Chứng minh rằng $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$.

Bài 1.57. *Dãy $a_1 + 2a_2, a_2 + 2a_3, a_3 + 2a_4, \ldots$ hội tụ. Chứng minh rằng dãy $a_1, a_2, a_3, \ldots$ cũng hội tụ.*

Bài 1.58. *Cho dãy $A(n), n = 1, 2, \ldots$ thoả mãn: với mọi x thực thì $\lim_{n\to\infty} A([x^n]) = 0$. Chứng minh rằng $\lim A(n) = 0$ khi n tiến tới vô cùng.*

Bài 1.59. *Cho hàm số*

$$f(x) = x + A\sin x + B\cos x \ \text{ với } \ A^2 + B^2 < 1.$$

Xét dãy số

$$a_0 = a, a_1 = f(a_0), \ldots, a_{n+1} = f(a_n), \ldots$$

Chứng minh rằng với mọi a, dãy số $\{a_n\}$ có giới hạn và hãy tìm giới hạn đó.

Bài 1.60. *Cho dãy số* $\{a_n\}$*, được xác định như sau:* $a_0 = a, a_1 = b, a_{n+1} = a_n + (a_n - a_{n-1})/2n$*. Tìm* $\lim_{n\to\infty} a_n$*.*

Bài 1.61 (AMM). *Cho* $\{H_n\}$ *là dãy số Fibonacci tổng quát, tức là* H_1, H_2 *là các số nguyên bất kỳ và với* $n > 2$ *thì* $H_n = H_{n-1} + H_{n-2}$*.*

a) Hãy tìm T*, phụ thuộc vào* H_1 *và* H_2 *sao cho các số* $H_{2n}H_{2n+2}+T, H_{2n}H_{2n+4}+T, H_{2n-1}H_{2n+1} - T, H_{2n-1}H_{2n+3} - T$ *đều là các số chính phương.*

b) Chứng minh T *là duy nhất.*

Bài 1.62. *Cho* r *là số thực. Xác định dãy số* $\{x_n\}$ *bởi* $x_0 = 0, x_1 = 1, x_{n+2} = rx_{n+1} - x_n$ *với* $n \geq 0$*. Chứng minh rằng* $x_1 + x_3 + \cdots + x_{2m-1} = x_m^2$*.*

Bài 1.63 (IMO 1977). *Trong một dãy số hữu hạn các số thực, tổng 7 số hạng liên tiếp của dãy luôn âm, còn tổng 11 số hạng liên tiếp luôn dương. Hỏi dãy số đó có thể có nhiều nhất bao nhiêu số hạng.*

Tài liệu tham khảo

1. Jean-Marie Monier, Giải tích 1, 2, 3, 4, NXBGD 1999-2000.
2. Lê Hải Châu: Tuyển tập các đề thi toán quốc tế.
3. Titu Andreescu, Razvan Gelca: Mathematical Olympiad Challenges, Birkhauser 2000.
4. A. Gardiner, The Mathematical Olympiad Hanbook, Oxford, 1997.
5. Titu Andreescu, Zuming Feng: Mathematical Olympiads 1998-1999, 1999-2000, 2000-2001, MAA, 2000-2002.
6. Arthur Engel: Problem-Solving Strategies, Springer 1997. 7
7. G.Polya, G.Szego: Các bài tập và định lý của giải tích, Nauka 1977 (Tiếng Nga).
8. Cupsov, Nesterenko ...: Thi vô địch toán toàn Liên Xô, Prosvesenie, 1999 (Tiếng Nga).
9. 400 bài toán từ American Mathematical monthly, Mir, 1977 (Tiếng Nga).
10. Đề thi toán của Việt Nam, các nước và khu vực.
11. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ (THTT), Parabola, Kvant, American Mathematical monthly (AMM).

Trần Nam Dũng - ĐHKHTN TP Hồ Chí Minh
227 Nguyễn Văn Cừ, Quận 5, TP Hồ Chí Minh
Email: namdung@fpt.com.vn, namdung@fsoft.com.vn

Chương 2

Phương trình sai phân

2.1 Sai phân

2.1.1 Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$, đặt $x_k = x_0 + kh \quad (k \in \mathbb{N}^*)$ với $x_0 \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}$, bất kỳ, cho trước. Gọi $y_k = f(x_k)$ là giá trị của hàm số $f(x)$ tại $x = x_k$. Khi đó, Hiệu số $\Delta y_k := y_{k+1} - y_k \quad (k \in \mathbb{N}^*)$ được gọi là sai phân cấp 1 của hàm số $f(x)$. Hiệu số $\Delta^2\, y_k := \Delta y_{k+1} - \Delta y_k = \Delta(\Delta y_k) \quad (k \in \mathbb{N}^*)$ được gọi là sai phân cấp 2 của hàm số $f(x)$. Tổng quát, $\Delta^i y_k := \Delta^{i-1} y_{k+1} - \Delta^{i-1} y_k = \Delta(\Delta^{i-1}\, y_k) \quad (k \in \mathbb{N}^*)$ được gọi là sai phân cấp i của hàm số $f(x) \quad (i = 1; 2; \cdots; n; \cdots)$.

2.1.2 Tính chất

Mệnh đề 2.1 (*Biểu diễn sai phân theo giá trị của hàm số*)**.** *Sai phân mọi cấp đều có thể biểu diễn theo các giá trị của hàm số:*

$$y_0; y_1; y_2; \cdots; y_n; \cdots$$

Chứng minh. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
\Delta y_k &= y_{k+1} - y_k \\
\Delta^2 y_k &= \Delta y_{k+1} - \Delta y_k \\
&= y_{k+2} - y_{k+1} - (y_{k+1} - y_k) \\
&= y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k.
\end{aligned}$$

Tương tự, bằng quy nạp ta có thể chứng minh được.

$$\Delta^i y_k = \sum_{s=1}^{i} (-1)^s C_i^s y_{k+i-s}, \quad \text{(đpcm)}.$$

Mệnh đề 2.2 (*Sai phân của hằng số*). *Sai phân của hằng số bằng 0.*

Chứng minh. Thật vậy, với $y = f(x) = C = \text{const}$ ta có: $\Delta f(x) = C - C = 0$. Hơn thế nữa, sai phân mọi cấp của hằng số đều bằng 0.

Mệnh đề 2.3 (*Tính chất tuyến tính của sai phân*). *Sai phân mọi cấp là một toán tử tuyến tính trên tập các hàm số. Tức là.*

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \forall \alpha; \beta \in \mathbb{R}, \forall f(x); g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \text{ ta luôn có:}$$

$$\Delta^i(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \Delta^i f(x) + \beta \Delta^i g(x).$$

Chứng minh. Thật vậy, đặt $f_k = f(x_k)$; $g_k = g(x_k)$, ta thu được

$$\begin{aligned}
\Delta^i(\alpha f_k + \beta g_k) &= \sum_{s=0}^{i} (-1)^s C_i^s \left[\alpha f_{k+i-s} + \beta g_{k+i-s}\right] \\
&= \alpha \sum_{s=0}^{i} (-1)^s C_i^s f_{k+i-s} + \beta \sum_{s=0}^{i} (-1)^s C_i^s g_{k+i-s} \\
&= \alpha \Delta^i f_k + \Delta^i g_k.
\end{aligned}$$

Vậy nên

$$\Delta^i(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha \Delta^i f(x) + \beta \Delta^i g(x) \quad \text{với mọi } i \in \mathbb{N}^* \text{ (đpcm).}$$

Mệnh đề 2.4 (*Sai phân của đa thức*). *Sai phân cấp i của một đa thức bậc n. +) Là một đa thức bậc $n - i$ khi $i < n$. +) Là hằng số khi $i = n$. +) Bằng 0 khi $i > n$.*

Chứng minh. Do sai phân mọi cấp là toán tử tuyến tính nên ta chỉ cần chứng minh tính chất cho đa thức $y = P_n(x) = x^n$.

+) Khi $i < n$ ta có

1^o) Với $i = 1$ thì: $\Delta x^n = (x + h)^n - x^n = P_{n-1}(x)$ là đa thức bậc $n - 1$ đối với x. Vậy khẳng định đúng với $i = 1$.

2^o) Giả sử khẳng định đúng với $i = k < n$, tức là $\Delta^k x^n = P_{n-k}(x)$ là đa thức bậc $n - k$ đối với x. Khi đó

$$\begin{aligned}
\Delta^{k+1} x^n &= \Delta(\Delta^k x^n) = \Delta^k\left((x + h)^n\right) - \Delta^k(x^n) \\
&= P_{n-k}(x + h) - P_{n-k}(x) = P_{n-k-1}(x) \\
&\text{là đa thức bậc } n - k - 1 = n - (k + 1) \text{ đối với } x.
\end{aligned}$$

Vậy khẳng định cũng đúng với $i = k + 1$. Từ đó, theo nguyên lý quy nạp toán học suy ra khẳng định đúng với mọi $i \in \mathbb{N}^*$ (đpcm).

+) Khi $i = n$ thì theo trên, $\Delta^n(x^n)$ là đa thức cấp $n - n = 0$ đối với x nên là hằng số.

+) Khi $i > n$ thì

$$\Delta^i(x^n) = \Delta^{i-n}\left(\Delta^n(x^n)\right) = \Delta^{i-n}C \quad (C = \text{const}) \ = 0.$$

Vậy tính chất đã được chứng minh trọn vẹn.

Mệnh đề 2.5 (*Công thức sai phân từng phần*)**.**

$$\Delta(f_k g_k) = f_k \Delta g_k + g_{k+1}\Delta f_k.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
\Delta(f_k g_k) &= f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_k \\
&= f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_{k+1} + f_k g_{k+1} - f_k g_k \\
&= g_{k+1}(f_{k+1} - f_k) + f_k(g_{k+1} - g_k) \\
&= f_k \Delta g_k + g_{k+1}\Delta f_k.
\end{aligned}$$

Mệnh đề 2.6 (*Tổng các sai phân*)**.**

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta y_k = y_{n+1} - y_1.$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \Delta y_k &= \Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots + \Delta y_{n-1} + \Delta y_n \\
&= y_2 - y_1 + y_3 - y_2 + \cdots + y_n - y_{n-1} + y_{n+1} - y_n \\
&= y_{n+1} - y_1.
\end{aligned}$$

2.2 Phương trình sai phân tuyến tính

2.2.1 Một số khái niệm chung về phương trình sai phân

Định nghĩa 2.1. *Phương trình sai phân (cấp k) là một hệ thức tuyến tính chứa sai phân các cấp tới k.*

$$f(y_n; \Delta y_n; \Delta^2 y_n; \cdots; \Delta^k y_n) = 0. \tag{1}$$

Vì sai phân các cấp đều có thể biểu diễn theo giá trị của hàm số nên (1) có dạng:

$$a_0 y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \cdots + a_k y_n = f(n). \tag{2}$$

trong đó $a_0; a_1; \cdots; a_k, f(n)$ đã biết, còn $y_n,\ y_{n+1}, \cdots,\ y_{n+k}$ là các giá trị chưa biết.

- Phương trình (2) được gọi là phương trình sai phân tuyến tính cấp k.
- Nếu $f(n) = 0$ thì phương trình (2) có dạng
$$a_0 y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \cdots + a_k y_n = 0. \tag{3}$$
và được gọi là phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất cấp k.
- Nếu $f(n) \neq 0$ thì (2) được gọi là phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất.

b. Nghiệm.

- Hàm số y_n biến n thoả mãn (2) được gọi là nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính (2).
- Hàm số $\hat{y}_n$ phụ thuộc k tham số thoả mãn (3) được gọi là nghiệm tổng quát của (3).
- Một nghiệm y_n^* thoả mãn (2) được gọi là một nghiệm riêng của (2).

2.3 Phương trình sai phân tuyến tính bậc nhất

2.3.1 Định nghĩa

Phương trình sai phân tuyến tính bậc nhất (cấp một) là phương trình sai phân dạng:

$$u_1 = \alpha, \quad au_{n+1} + bu_n = f(n) \qquad n \in \mathbb{N}^* \tag{1}$$

trong đó α ; $a \neq 0$; $b \neq 0$ là các hằng số và $f(n)$ là biểu thức của n cho trước.

2.3.2 Phương pháp giải

A. Giải phương trình sai phân thuần nhất tương ứng.

1^+) Giải phương trình đặc trưng: $a\lambda + b = 0$ để tìm λ.

2^+) Tìm nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất tương ứng: $au_{n+1} + bu_n = 0$ dưới dạng $\hat{u}_n = c\lambda^n$ (c là hằng số).

B. Tìm một nghiệm riêng u_n^* của phương trình không thuần nhất.

C. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình (1):

$$u_n = u_n^* + \hat{u}_n.$$

Ví dụ 2.1. *Phương trình* $u_{n+1} = 3u_n + 1$ *có* $\hat{u}_n = C.3^n$; $u_n^* = -\dfrac{1}{2}$ *nên có nghiệm tổng quát là* $u_n = C.3^n - \dfrac{1}{2}$ *với* C *là hằng số bất kỳ.*

Sau đây ta trình bày phương pháp tìm nghiệm riêng.

2.3.3 Phương pháp tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân tuyến tính cấp 1 không thuần nhất khi vế phải $f(n)$ có dạng đặc biệt

Trường hợp 1. *Nếu* $f(n) = P_m(n)$ *là đa thức bậc* m *đối với* n. Khi đó: +) Nếu $\lambda \neq 1$ thì ta chọn $u_n^* = Q_m(n)$ cũng là đa thức bậc m đối với n. +) Nếu $\lambda = 1$ thì ta chọn $u_n^* = nQ_m(n)$ trong đó $Q_m(n)$ cũng là đa thức bậc m đối với n.

Ví dụ 2.2. *Giải phương trình sai phân:*

$$\begin{cases} x_0 = 7 \\ x_{n+1} = 15x_n - 14n + 1 \end{cases}$$

Giải. Ta có $f(n) = -14n+1$ là đa thức bậc nhất, $\lambda = 15 \neq 1 \Rightarrow$ chọn $x_n^* = an+b$. Thay vào phương trình ta được

$$a(n+1) + b = 15(an+b) - 14n + 1.$$

Suy ra $a = 1$; $b = 0$. Vậy $x_n^* = n$ còn $\hat{x}_n = C.15^n$ và nghiệm tổng quát là: $x_n = C.15^n + n$. Mà $x_0 = 7$ nên $C = 7$. Vậy phương trình có nghiệm: $x_n = 7.15^n + n$.

Ví dụ 2.3. *Giải phương trình sai phân:* $\begin{cases} x_0 = 99 \\ x_{n+1} = x_n - 2n - 1 \end{cases}$

Giải. $f(n) = -2n - 1$ là đa thức bậc nhất, $\lambda = 1 \Rightarrow$ chọn $x_n^* = n(an+b)$. Thay vào (1.2) được:

$$(n+1)[a(n+1)+b] = n(an+b) - 2n - 1 \Rightarrow a = -1 \text{ ; } b = 0 \Rightarrow x_n^* = -n^2.$$

Còn $\hat{x}_n = C.1^n = C \Rightarrow x_n = C - n^2$, mà $x_0 = 99 \Rightarrow C - 0^2 = 99 \Leftrightarrow C = 99$. Vậy phương trình (1.2) có nghiệm: $x_n = 99 - n^2$.

Trường hợp 2. $f(n) = p.\beta^n \quad (p; \beta \neq 0)$. Khi đó:

+) Nếu $\lambda \neq \beta$ thì ta chọn $x_n^* = d.\beta^n \quad (d \in \mathbb{R})$.

+) Nếu $\lambda = \beta$ thì ta chọn $x_n^* = d.n.\beta^n \quad (d \in \mathbb{R})$.

Ví dụ 2.4. *Giải phương trình sai phân:* $\begin{cases} x_0 = 8 \\ x_{n+1} = 2x_n + 3^n \quad (1.3) \end{cases}$.

Giải. Do $\lambda = 2 \neq 3 = \beta$ nên ta chọn $x_n^* = d.3^n$. Thay vào phương trình (1.3) được $d = 1 \Rightarrow x_n^* = 3^n$. Còn $\hat{x}_n = C.2^n$. Vậy $x_n = C.2^n + 3^n$. Thay vào điều kiện biên được $C = 7$.
Trả lời: phương trình đã cho có nghiệm $x_n = 7.2^n + 3^n$.

Ví dụ 2.5. *Giải phương trình sai phân:* $\begin{cases} x_0 = 101 \\ x_{n+1} = 7.x_n + 7^{n+1} \quad (1.4) \end{cases}$.

Giải. Do $\lambda = 7 = \beta$ nên ta chọn $x_n^* = d.n.3^n$. Thay vào phương trình (1.4) được $d = 1 \Rightarrow x_n^* = n.7^n$. Còn $\hat{x}_n = C.7^n$. Vậy $x_n = C.7^n + n.7^n$. Thay vào điều kiện biên được $C = 101$.
Trả lời: phương trình đã cho có nghiệm $x_n = (101 + n).7^n$.

Trường hợp 3. $f(n) = \alpha.\sin nx + \beta.\cos nx \quad (\alpha + \beta \neq 0; x \neq k\pi; k \in \mathbb{Z})$. Khi đó, ta chọn $u_n^* = A.\sin nx + B.\cos nx$ với $A; B \in \mathbb{R}$ là các hằng số.

Ví dụ 2.6. *Giải phương trình sai phân:* $\begin{cases} x_0 = 1 \\ \sqrt{2}.x_{n+1} = x_n - \sin\dfrac{n\pi}{4} \quad (1.5) \end{cases}$.

Giải. Có $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $f(n) = \sin\dfrac{n\pi}{4}$ nên ta chọn $x_n^* = A.\cos\dfrac{n\pi}{4} + B.\sin\dfrac{n\pi}{4}$.
Thay x_n^* vào (1.5), biến đổi và so sánh các hệ số ta được $A = 1$; $B = 0 \Rightarrow x_n^* = \cos\dfrac{n\pi}{4}$. Còn $\hat{x}_n = C.(\dfrac{1}{\sqrt{2}})^n \Rightarrow x_n = C.(\dfrac{1}{\sqrt{2}})^n + \cos\dfrac{n\pi}{4}$. Thay vào điều kiện biên $x_0 = 1$ ta được $C = 0$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x_n = \cos\dfrac{n\pi}{4}$.

Trường hợp 4.

$$f(n) = \sum_{k=1}^{m} f_k(n).$$

Khi đó ta chọn nghiệm riêng x_n^* của (1) dưới dạng: $x_n^* = \sum_{k=1}^{m} x_{nk}^*$ trong đó x_{nk}^* tương ứng là nghiệm riêng của phương trình sai phân (1) với $VP = f_k(n)$.

Ví dụ 2.7. *Giải phương trình sai phân:* $\begin{cases} x_0 = 17 \\ x_{n+1} = 2x_n - n^2 + 2n + 1 + 6.2^n \quad (1.6) \end{cases}$.

Giải. Có $\lambda = 2$; $f_1(n) = -n^2 + 2n + 1$; $f_2(n) = 6.2^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \hat{x}_n = C.2^n \ ; \ x_{n1}^* = an^2 + bn + c \ ; \ x_{n2}^* = d.n.2^n.$$

Vậy ta chọn $x_n^* = an^2 + bn + c + d.n.2^n$. Thay vào (1.6) và so sánh các hệ số được: $a = 1$; $b = c = 0$; $d = 3$. Vậy: $x_n = C.2^n + n^2 + 3n.2^n$. Thay vào điều kiện biên $x_0 = 17$ ta được $C = 17$ và do đó nghiệm của phương trình sai phân đã cho là:

$$x_n = 17.2^n + n^2 + 3n.2^n.$$

2.3.4 Bài tập

Giải các phương trình sai phân tuyến tính sau:

1. $u_{n+1} = 3u_n - 6n + 1$; $u_1 = 1$.
   Đáp số: $u_n = 3n + 1 - 3^n$.

2. $u_{n+1} = u_n + 2n^2$; $u_1 = 1$.
   Đáp số: $u_n = \dfrac{1}{3}(2n^3 - 3n^2 + n + 3)$.

3. $u_{n+1} = 5u_n - 3^n$; $u_0 = 1$.
   Đáp số: $u_n = \dfrac{1}{2}(5^n + 3^n)$.

4. $u_{n+1} = 2u_n + 6.2^n$; $u_0 = 1$.
   Đáp số: $u_n = (3n + 1).2^n$.

5. $u_{n+1} = u_n + 2n.3^n$; $u_0 = 0$.
   Đáp số: $u_n = \dfrac{1}{2}[(2n - 3).3^n + 3]$.

6. $u_{n+1} - 2u_n = (n^2 + 1).2^n$; $u_0 = 1$.
   Đáp số: $u_n = \left(\dfrac{n(2n^2 - 3n + 7)}{6} + 2\right).2^n$.

7. $u_{n+1} - 2u_n = n + 3^n$; $u_0 = 1$.
   Đáp số: $u_n = 2^n + 3^n - n - 1$.

2.4 Phương trình sai phân tuyến tính cấp 2

2.4.1 Định nghĩa

Phương trình sai phân tuyến tính cấp hai là phương trình sai phân dạng:

$$u_1 = \alpha,\ u_2 = \beta,\ au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

trong đó $a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta$ là các hằng số, $a \neq 0,\ c \neq 0$ và $f(n)$ là biểu thức chứa n cho trước.

2.4.2 Cách giải

+) Giải phương trình thuần nhất tương ứng. +) Tìm nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất. +) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình (1) dưới dạng:

$$u_n = \hat{u}_n + u_n^*.$$

A- Giải phương trình thuần nhất tương ứng

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \qquad (2)$$

1^+) Giải phương trình đặc trưng:

$$a.\lambda^2 + b.\lambda + c = 0. \quad (3) \quad \text{để tìm } \lambda.$$

2^+) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng.

Trường hợp 1: Nếu (3) có hai nghiệm phân biệt: $\lambda = \lambda_1$; $\lambda = \lambda_2$ thì:

$$\hat{u}_n = A.\lambda_1^n + B.\lambda_2^n,$$

trong đó A và B được xác định khi biết u_1 và u_2.

Trường hợp 2: Nếu (3) có nghiệm kép: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ thì:

$$\hat{u}_n = (A + Bn).\lambda^n,$$

trong đó A và B được xác định khi biết u_1 và u_2.

Trường hợp 3: Nếu λ là nghiệm phức, $\lambda = x + i.y$ thì ta đặt

$$r = |\lambda| = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \tan\theta = \frac{y}{x}, \ \theta \in \Big(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big).$$

lúc đó $\lambda = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$ và

$$\hat{u}_n = r^n(A.\cos n\theta + B.\sin n\theta),$$

trong đó A và B được xác định khi biết u_1 và u_2. *Ví dụ*

Ví dụ 2.8. *Giải phương trình sai phân:* $\begin{cases} x_0 = 2 \ ; \ x_1 = -8 \\ x_{n+2} = -8x_{n+1} + 9x_n \end{cases}$.

Giải. Phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ hoặc } \lambda = -9. \quad \text{(Hai nghiệm phân biệt.)}$$

Vậy: $\hat{x}_n = x_n = A.1^n + B.(-9)^n = A + B.(-9)^n$.
Giải điều kiện biên:

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_1 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ A - 9B = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x_n = 1 + (-9)^n$.

Ví dụ 2.9. *Giải phương trình sai phân:* $\begin{cases} x_0 = 1 \ ; \ x_1 = 16 \\ x_{n+2} = 8x_{n+1} - 16x_n \end{cases}.$

Giải. Phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 4 \text{ (có nghiệm kép).}$$

Vậy: $\hat{x}_n = x_n = (A + Bn).4^n$.
Giải điều kiện biên:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ (A + B).4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x_n = (1 + 3n).4^n$.

Ví dụ 2.10. *Giải phương trình sai phân:* $\begin{cases} x_0 = 1 \ ; \ x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_{n+2} = x_{n+1} - x - n \end{cases}.$

Giải. Phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ hoặc } \lambda = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}. \quad \text{(Hai nghiệm phức.)}$$

Có:

$$\lambda = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i.\sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow r = 1 \ ; \ \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Nghiệm tổng quát: $\hat{x}_n = x_n = A.\cos\dfrac{n\pi}{3} + B.\sin\dfrac{n\pi}{3}$.
Giải điều kiện biên:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A.\cos\dfrac{\pi}{3} + B.\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm: $x_n = \cos\dfrac{n\pi}{3}$. *Bài tập* Giải các phương trình sai phân sau:

1. $y_{n+2} = 4y_{n+1} - 3y_n$ với $y_0 = 1\ ;\ y_1 = 1.$
2. $y_{n+2} = 8y_{n+1} - 16y_n$ với $y_0 = 1\ ;\ y_1 = 1.$
3. $y_{n+2} = 2y_{n+1} - 2y_n$ với $y_0 = \dfrac{1}{2}\ ;\ y_1 = 2.$

B- Các phương pháp tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân tuyến tính cấp hai không thuần nhất

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = f(n)$$

với vế phải có dạng đặc biệt Trường hợp 1.

$$f(n) = P_k(n) \quad \text{là đa thức bậc } k \text{ đối với } n.$$

Khi đó: +) Nếu phương trình đặc trưng (3) không có nghiệm $\lambda = 1$ thì ta chọn

$$x_n^* = Q_k(n)$$

trong đó $Q_k(n)$ là đa thức bậc k nào đó đối với n. +) Nếu phương trình đặc trưng (3) có nghiệm đơn $\lambda = 1$ thì ta chọn

$$x_n^* = nQ_k(n)$$

trong đó $Q_k(n)$ là đa thức bậc k nào đó đối với n. +) Nếu phương trình đặc trưng (3) có nghiệm kép $\lambda = 1$ thì ta chọn

$$x_n^* = n^2Q_k(n)$$

trong đó $Q_k(n)$ là đa thức bậc k nào đó đối với n.

Ví dụ 2.11. *Tìm một nghiệm riêng x_n^* của phương trình sai phân:*

$$x_{n+2} = -4x_{n+1} + 5x_n + 12n + 8.$$

Giải. Phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ hoặc } \lambda = -5\ ;\ f(n) = 12n + 8.$$

Chọn $x_n^* = n(an+b)$. Thay vào phương trình đã cho và so sánh các hệ số ta được $a = 1\ ;\ b = 0$.
Vậy phương trình đã cho có một nghiệm riêng là $x_n^* = n^2$.

Ví dụ 2.12. *Giải phương trình sai phân:*

$$2x_{n+2} - 5x_{n+1} + 2x_n = n^2 - 2n + 3 \quad \textit{với} \quad x_0 = 1\ ;\ x_1 = 3.$$

Giải. Phương trình đặc trưng:

$$2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 \ \text{ hoặc } \ \lambda = \frac{1}{2}\ ;\ f(n) = n^2 - 2n + 3.$$

Vậy phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát $\hat{x}_n = A.2^n + B.(\frac{1}{2})^n$.
Chọn $x_n^* = an^2 + bn + c$. Thay vào phương trình đã cho và so sánh các hệ số ta được $a = -1\ ;\ b = 4\ ;\ c = -10$.
Vậy phương trình đã cho có một nghiệm riêng là $x_n^* = -n^2 + 4n - 10$.
Do đó phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là:

$$x_n = A.2^n + B.(\frac{1}{2})^n - n^2 + 4n - 10.$$

Thay vào các điều kiện biên ta tìm được $A = 3\ ;\ B = 8$. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là:

$$x_n = 3.2^n + 8.(\frac{1}{2})^n - n^2 + 4n - 10.$$

Trường hợp 2.

$$f(n) = P_k(n).\beta^n \quad \text{trong đó } P_k(n) \text{ là một đa thức bậc } k \text{ đối với } n.$$

Khi đó: +) Nếu β không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng (3) thì ta chọn:

$$x_n^* = Q_k(n)$$

trong đó $Q_k(n)$ là một đa thức bậc k nào đó đối với n với hệ số cần được xác định. +) Nếu β là một nghiệm đơn của phương trình đặc trưng (3) thì ta chọn:

$$x_n^* = n.Q_k(n)$$

trong đó $Q_k(n)$ là một đa thức bậc k nào đó đối với n . +) Nếu β là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (3) thì ta chọn:

$$x_n^* = n^2.Q_k(n),$$

trong đó $Q_k(n)$ là một đa thức bậc k nào đó đối với n .

Ví dụ 2.13. *Tìm một nghiệm riêng của phương trình sai phân sau:*

$$2x_{n+2} + 5x_{n+1} + 2x_n = (35n + 51).3^n.$$

Giải. Ta có $\beta = 3$; $P_k(n) = 35n + 51$ là đa thức bậc nhất.
Phương trình đặc trưng:

$$2\lambda^2 + 5\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 := \lambda_1 \quad \text{hoặc} \quad \lambda = -\frac{1}{2} := \lambda_2 \quad (\lambda_1; \lambda_2 \neq \beta).$$

Chọn $x_n^* = (an + b).3^n$. Thay vào phương trình đã cho và so sánh các hệ số ta được: $a = 1$; $b = 0$.
Vậy phương trình đã cho có một nghiệm riêng là: $x_n^* = n.3^n$.

Ví dụ 2.14. *Tìm một nghiệm riêng của phương trình sai phân sau:*

$$x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = (8n + 11).2^n.$$

Giải. Ta có $\beta = 2$; $P_k(n) = 8n + 11$ là đa thức bậc nhất.
Phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 := \lambda_1 \quad \text{hoặc} \quad \lambda = 3 := \lambda_2 \quad (\lambda_1 = \beta \ ; \ \lambda_2 \neq \beta).$$

Chọn $x_n^* = n(an + b).2^n$. Thay vào phương trình đã cho và so sánh các hệ số ta được: $a = -4$; $b = -23$.
Vậy phương trình đã cho có một nghiệm riêng là: $x_n^* = -(4n^2 + 23n).2^n$.

Ví dụ 2.15. *Tìm một nghiệm riêng của phương trình sai phân sau:*

$$x_{n+2} - 10x_{n+1} + 25x_n = (n + 2).5^{n+1}$$

Giải. Ta có $\beta = 5$; $P_k(n) = 5n + 10$ là đa thức bậc nhất.
Phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 5 := \lambda_0 \quad \text{(nghiệm kép)} \quad (\lambda_1 = \lambda_2 = \beta)$$

Chọn $x_n^* = n^2(an + b).5^n$. Thay vào phương trình đã cho và so sánh các hệ số ta được: $a = \frac{4}{50}$; $b = \frac{7}{50}$.
Vậy phương trình đã cho có một nghiệm riêng là: $x_n^* = \frac{n^2}{50}(4n + 7).5^n$.

Trường hợp 3.

$$f(n) = P_m(n).\cos n\beta + P_l(n).\sin n\beta$$

trong đó $P_m(n)$; $P_l(n)$ lần lượt là các đa thức bậc m ; l đối với n.
Ký hiệu $k = Max\{m; l\}$ và gọi $\rho = \cos\beta + i\sin\beta \quad (i^2 = -1)$. Khi đó:
+) Nếu ρ không là nghiệm của phương trình đặc trưng (3) thì ta chọn:

$$x_n^* = T_k(n).\cos n\beta + R_k(n).\sin n\beta$$

trong đó, $T_k(n)$; $R_k(n)$ là các đa thức bậc k đối với n nào đó.
+) Nếu ρ là nghiệm của phương trình đặc trưng (3) thì ta chọn:

$$x_n^* = nT_k(n).\cos n\beta + R_k(n).\sin n\beta$$

trong đó, $T_k(n)$; $R_k(n)$ là các đa thức bậc k đối với n nào đó.

Ví dụ 2.16. *Giải phương trình sai phân:* $\begin{cases} x_0 = 1 \;;\; x_1 = 0 \\ x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n + \sin\dfrac{n\pi}{2} \end{cases}$

Giải. Ta có $P_m(n) \equiv 0$; $P_l(n) \equiv 1$; $\beta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = i$.
Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ có nghiệm kép $\lambda = 1 \quad (\neq i = \rho)$.
Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất : $\hat{x}_n = an + b$.
Nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng: $x_n^* = c.\cos\dfrac{n\pi}{2} + d.\sin\dfrac{n\pi}{2}$.
Thay x_n^* vào phương trình đã cho, rút gọn và so sánh các hệ số ta được:

$$c = \frac{1}{2} \;;\; d = 0 \Rightarrow x_n^* = \frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{2}$$

Phương trình đã cho có nghiệm tổng quát là:

$$x_n = an + b + \frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{2}$$

Giải các điều kiện biên:

$$\begin{cases} x_0 = b + \dfrac{1}{2} = 1 \\ x_1 = a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm:

$$x_n = \frac{1}{2}(1 - n + \cos\frac{n\pi}{2})$$

Ví dụ 2.17. *Tìm một nghiệm riêng của phương trình sai phân sau:*

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = (n-2).\cos\frac{n\pi}{2} + (3n+1).\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Giải. Ta có $P_m(n) = n - 2$; $P_l(n) = 3n + 1$; $\beta = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow \rho = i$.
Phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 := \lambda_1 \;;\; \lambda = 2 := \lambda_2 \quad (\lambda_1; \lambda_2 \neq \rho).$$

Nghiệm riêng của phương trình đã cho có dạng:

$$x_n^* = (an+b).\cos\frac{n\pi}{2} + (cn+d).\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Thay x_n^* vào phương trình đã cho, rút gọn và so sánh các hệ số ta được:

$$a = 1\ ;\ b = c = d = 0 \Rightarrow x_n^* = n.\cos\frac{n\pi}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm riêng là: $x_n^* = n.\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

Trường hợp 4:

$$f(n) = \sum_{k=1}^{m} f_k(n).$$

Khi đó ta tìm nghiệm riêng của (1) dưới dạng:

$$x_n^* = \sum_{k=1}^{m} x_{nk}^*$$

trong đó x_{nk}^* là nghiệm riêng của phương trình: (1) với $VP = f_k(n)$ và được tìm theo một trong các trường hợp trên.

Ví dụ 2.18. *Tìm một nghiệm riêng của phương trình sai phân sau:*

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n + 2^n + n - 1.$$

Giải. Phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 := \lambda_1 \quad \text{hoặc} \quad \lambda = 3 := \lambda - 2.$$

$$f(n) = 2^n + n - 1 := f_1(n) + f_2(n) \quad \text{với} \ \ f_1(n) = 2^n\ ;\ f_2(n) = n - 1.$$

Đối với phương trình: $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n + 2^n \quad (1.8)$ do $\lambda_1 = 2 = \beta$ nên ta chọn nghiệm riêng: $x_{n1}^* = an.2^n$. Thay vào (1.8) rồi chia cả hai vế cho 2^n ta được:

$$-2a = 1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_{n1}^* = -\frac{1}{2}.n.2^n = -n.2^{n-1}.$$

Đối với phương trình: $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n + n - 1 \quad (1.9)$ ta chọn nghiệm riêng: $x_{n1}^* = cn + d$. Thay vào (1.9) rồi so sánh các hệ số ở hai vế ta được:

$$c = \frac{1}{2}\ ;\ d = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{n2}^* = \frac{1}{2}.n + \frac{1}{4}.$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm riêng là:

$$x_n^* = x_{n1}^* + x_{n2}^* = -\frac{1}{2}.n.2^n + \frac{1}{2}.n + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(1 + 2n - n.2^{n+1}).$$

Bài tập Tìm các nghiệm riêng của các phương trình sai phân sau:

1. $y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 0$
2. $8y_{n+2} - 6y_{n+1} + y_n = 2^n$
3. $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 5^n + 2n^3 + 3n + 1$
4. $y_{n+2} - y_{n+1} + 2y_n = n^2$
5. $y_{n+2} + y_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$
6. $4y_{n+2} + 4y_{n+1} + y_n = 2$
7. $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 5 + 3n$
8. $y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = 2^n(n-1)$
9. $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 3^n$
10. $8y_{n+2} - 6y_{n+1} + y_n = 5\sin\dfrac{n\pi}{2}$

2.5 Phương trình sai phân tuyến tính cấp 3

2.5.1 Định nghĩa

Cho $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ là các hằng số $\in \mathbb{R}$; $a \neq 0$; $d \neq 0$ còn $f(n)$ là một hàm số biến số n. Phương trình:

$$\begin{cases} u_1 = \alpha \ ; \ u_2 = \beta \ ; \ u_3 = \gamma \\ au_{n+3} + bu_{n+2} + cu_{n+1} + du_n = f(n) \ \ quad(1) \end{cases}$$

được gọi là phương trình sai phân tuyến tính cấp (bậc) ba.

2.5.2 Phương pháp giải

Phương trình sai phân tuyến tính cấp ba luôn giải được. Nghiệm tổng quát của nó có dạng:

$$u_n = \hat{u}_n + u_n^*$$

trong đó, $\hat{u}_n$ là nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất, còn u_n^* là một nghiệm riêng nào đó của phương trình đã cho. *Cách tìm* $\hat{u}_n$ Xét phương trình đặc trưng:

$$a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0 \ \ (2)$$

+) Nếu (3) có ba nghiệm thực phân biệt: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$ thì:

$$\hat{u}_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + C_3\lambda_3^n$$

+) Nếu (3) có một nghiệm thực bội 2 và một nghiệm đơn: $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ thì:

$$\hat{u}_n = (C_1 + C_2n)\lambda_1^n + C_3\lambda_3^n$$

+) Nếu (3) có một nghiệm thực bội 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 := \lambda_0$ thì:

$$\hat{u}_n = (C_1 + C_2n + C_3n^2)\lambda_0^n$$

+) Nếu (3) có một nghiệm thực λ_1 và hai nghiệm phức liên hợp:
$\lambda_{2;3} = r(\cos\theta \pm i\sin\theta)$ thì

$$\hat{u}_n = C_1\lambda_1^n + r^n(C_2\cos n\theta + C_3\sin n\theta)$$

Trên đây ta ký hiệu $C_1; C_2; C_3$ là các hằng số mà sẽ được xác định bằng cách thay $\hat{u}_n$ vào các điều kiện biên và giải hệ phương trình thu được. *Cách tìm* u_n^*

Trường hợp 1. Nếu $f(n) = P_m(n)$ là đa thức bậc m đối với n thì: +) Khi (3) không có nghiệm $\lambda = 1$ thì ta chọn: $u_n^* = Q_m(n)$ trong đó, $Q_m(n)$ là đa thức bậc m đối với n. +) Khi (3) có nghiệm đơn $\lambda = 1$ thì ta chọn: $u_n^* = nQ_m(n)$ trong đó, $Q_m(n)$ là đa thức bậc m đối với n. +) Khi (3) có nghiệm bội hai $\lambda = 1$ thì ta chọn: $u_n^* = n^2Q_m(n)$ trong đó, $Q_m(n)$ là đa thức bậc m đối với n. +) Khi (3) có nghiệm bội ba $\lambda = 1$ thì ta chọn: $u_n^* = n^3Q_m(n)$ trong đó, $Q_m(n)$ là đa thức bậc m đối với n.

Trường hợp 2. Nếu $f(n) = A.\mu^n$ (A ; μ là các hằng số cho trước) thì: +) Khi μ không là nghiệm của (3) thì ta chọn: $u_n^* = B.\mu^n$ với B là hằng số được xác định bằng cách thay u_n^* vào phương trình đã cho. +) Khi μ là nghiệm đơn của (3) thì ta chọn: $u_n^* = B.n.\mu^n$. +) Khi μ là nghiệm bội hai của (3) thì ta chọn: $u_n^* = B.n^2.\mu^n$. +) Khi μ là nghiệm bội ba (3) thì ta chọn: $u_n^* = B.n^3.\mu^n$.

2.5.3 Ví dụ

Ví dụ 2.19. *Giải phương trình sai phân:* $\begin{cases} x_1 = 0\ ;\ x_2 = 1\ ;\ x_3 = 3 \\ x_n = 7x_{n-1} - 11x_{n-2} + 5x_{n-3} \end{cases}$.

Giải. Phương trình đặc trưng:

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 11\lambda - 5 = 0: \text{ có ba nghiệm: } \lambda_1 = \lambda_2 = 1\ ;\ \lambda_3 = 5.$$

Vậy phương trình có nghiệm tổng quát

$$x_n = (C_1 + C_2n).1^n + C_3.5^n = C_1 + C_2n + C_3.5^n.$$

Thay vào điều kiện biên ta được hệ phương trình:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 5C_3 = 0 \\ C_1 + 2C_2 + 25C_3 = 1 \\ C_1 + 3C_2 + 125C_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{13}{16} \\ C_2 = \dfrac{3}{4} \\ C_3 = \dfrac{1}{80} \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm:

$$x_n = \frac{1}{16}(5^{n-1} + 12n - 13).$$

Ví dụ 2.20. *Giải phương trình sai phân:* $\begin{cases} x_0 = 1 \; ; \; x_1 = 2 \; ; \; x_2 = 3 \\ x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 1 \end{cases}$

Giải. Phương trình đặc trưng:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 : \text{ có nghiệm bội ba: } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$$

Vậy phương trình thuần nhất có nghiệm tổng quát

$$\hat{x}_n = (C_1 + C_2 n + C_3 n^2).1^n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2.$$

Do $f(n) = 1 = 1.1^n$ nên ta chọn nghiệm riêng $x_n^* = B.n^3.1^n = B.n^3$. Thay vào phương trình đã cho rồi so sánh các hệ số ta được

$$B = \frac{1}{6} \Rightarrow x_n^* = \frac{1}{6}n^3.$$

Vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$x_n = x_n^* + \hat{x}_n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \frac{1}{6}n^3.$$

Thay vào các điều kiện biên và giải hệ phương trình thu được ta có:
$C_1 = 1 \; ; \; C_2 = \dfrac{4}{3} \; ; \; C_3 = -\dfrac{1}{2}$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm là

$$x_n = 1 + \frac{4}{3}n - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n^3.$$

2.5.4 Phương trình sai phân tuyến tính cấp k

Định nghĩa Phương trình

$$a_0 y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \cdots + a_k y_n = f(n) \ \ quad(1)$$

được gọi là phương trình sai phân tuyến tính cấp k. *Cách giải* **A. Giải phương trình sai phân tuyến**

1^o) Giải phương trình đặc trưng

$$a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_{k-1}\lambda + a_k = 0 \ \ (2) \text{ để tìm } k.$$

2^o) Tìm nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất tương ứng.

- Nếu (2) có k nghiệm thực khác nhau là $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_k$ thì nghiệm tổng quát là
$$\hat{y}_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_k\lambda_k^n \quad (3).$$
trong đó $c_1,\ c_1,\ \cdots,\ c_k$ là các hằng số tuỳ ý.

- Nếu (2) có nghiệm thực λ_j bội s thì nghiệm tổng quát là:
$$\hat{y}_n = \Big(\sum_{i=1}^{s-1} c_{j+i} n^i\Big)\lambda_j^n + \sum_{i=1;i\neq j}^{k} c_i\lambda_i^n.$$

- Nếu phương trình đặc trưng (2) có nghiệm phức đơn $\lambda_j = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$ thì $\overline{\lambda_j} = r(\cos\theta - i.\sin\theta)$ cũng là nghiệm của (2). Đặt $\lambda_{j+1} = \overline{\lambda_j}$. Để thu được công thức nghiệm tổng quát, trong công thức (3) ta thay bộ phận
$$c_j\lambda_j^n + c_{j+1}\lambda_{j+1}^n$$
bởi bộ phận tương ứng:
$$c_j r^n \cos n\theta + c_{j+1} r^n \sin n\theta.$$

- Nếu phương trình đặc trưng (2) có nghiệm phức bội s
$$\lambda_j = \lambda_{j+1} = \cdots = \lambda_{j+s-1} = r(\cos\theta + i.\sin\theta)$$
thì (2) cũng có nghiệm phức bội s liên hợp với λ_j là $\overline{\lambda_j}$ mà ta đặt là
$$\lambda_{j+s} = \lambda_{j+s+1} = \cdots = \lambda_{j+2s-1} = r(\cos\theta - i.\sin\theta).$$
Trong trường hợp này, để thu được công thức nghiệm tổng quát, trong công thức (3) ta thay bộ phận
$$c_j\lambda_j^n + c_{j+1}\lambda_{j+1}^n + \cdots + c_{j+2s-1}\lambda_{j+2s-1}^n$$

bởi bộ phận tương ứng

$$\Big(\sum_{i=0}^{s-1} c_{j+i}n^i\Big)r^n \cos n\theta + \Big(\sum_{i=0}^{s-1} c_{j+s+i}n^i\Big)r^n \sin n\theta.$$

B. Tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất. Việc tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất cấp k làm tương tự như tìm nghiệm riêng của phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất cấp hai và cấp ba.

C. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình sai phân tuyến tính cấp k. Nghiệm tổng quát có dạng

$$y_n = \hat{y}_n + y_n^*,$$

trong đó: +) y_n là nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính cấp k. +) $\hat{y}_n$ là nghiệm của phương trình thuần nhất tương ứng. +) y_n^* là một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất.

Chương 3

Xác định số hạng tổng quát của một dãy số

Việc tính giới hạn của một dãy số được cho bởi công thức truy hồi thường phải qua giai đoạn chứng minh sự tồn tại giới hạn của dãy đã cho và sau đó sử dụng hệ thức $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ đối với dãy hội tụ bất kỳ. Điều đó thường được thực hiện bằng cách sử dụng nguyên lý Weierstrass (điều kiện đủ để dãy hội tụ) hoặc nguyên lý hội tụ Bolzano - Cauchy. Quá trình đó gặp không ít khó khăn. Một trong những phương thức khắc phục khó khăn đó là chuyển từ cách cho dãy bằng công thức truy hồi sang cho dãy bằng phương pháp giải tích, tức là xác định dãy bằng công thức số hạng tổng quát của nó. Bài toán xác định số hạng tổng quát của một dãy số được cho bởi hệ thức truy hồi là bài toán thường gặp trong chương trình phổ thông. Bài toán đó được phát biểu như sau. Xác định số hạng tổng quát của dãy số (x_n) được cho bởi hệ thức truy hồi.

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1\ ;\ x_2 = \alpha_2\ ; \cdots\ ;\ x_k = \alpha_k\ \ (*) \\ f(x_{n+k}; x_{n+k-1}; \cdots; x_{n+1}; x_n; n) = 0\ \ (1) \end{cases} \qquad quad(I)$$

trong đó $\alpha_1; \alpha_2; \cdots; \alpha_k$ là các số $\in \mathbb{R}$, cho trước, còn f là một biểu thức chứa $k+2$ biến, cho trước. Thực chất bài toán đang xét là bài toán xác định hàm số $x_n = x(n)$ thoả mãn phương trình sai phân (I) với các điều kiện biên $(*)$. Do đó, đôi khi ta cũng gọi bài toán xác định dãy số được cho bởi hệ thức truy hồi (I) là bài toán giải phương trình sai phân (I).

3.1 Tìm số hạng tổng quát của dãy (dạng đa thức) khi biết các số hạng đầu tiên

Ví dụ 3.1. *Cho dãy số:*

$$1; -1; -1; 1; 5; 11; 19; 29; 41; 55; \cdots.$$

Hãy tìm quy luật biểu diễn của dãy số đó và tìm số tiếp theo.

Giải. Lập bảng một số sai phân ban đầu:

$y=$	1		-1		-1		1		5		11		19		29		41		55
Δy		-2		0		2		4		6		8		10		12		14	
$\Delta^2 y$			2		2		2		2		2		2		2		2		

Ta thấy sai phân cấp hai không đổi nên dãy số là dãy các giá trị của đa thức bậc hai:

$$y = an^2 + bn + c \;\; (a \neq 0)$$

trong đó n là số thứ tự của các số trong dãy số. Cho $n = 0\ ;\ 1\ ;\ 2$ (Đánh số các số bắt đầu từ 0) ta nhận được hệ phương trình:

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases}.$$

Vậy dãy số tuân theo quy luật sau:

$$y_n = n^2 - 3n + 1$$

Số hạng đầu tiên là $y_0 = 1$, số hạng tiếp theo số hạng 55 sẽ ứng với $n = 10$ nên sẽ là:

$$y_{10} = 10^2 - 3.10 + 1 = 71.$$

Ví dụ 3.2. *Cho dãy số:*

$$-5; -3; 11; 43; 99; 185; 307; 471; \cdots.$$

Hãy tìm quy luật biểu diễn của dãy số đó và tìm hai số hạng tiếp theo.

Giải. Lập bảng một số sai phân ban đầu:

$y =$	-5		-3		11		43		99		185		307		471
Δy		2		14		32		56		86		122		164	
$\Delta^2 y$			12		18		24		30		36		42		
$\Delta^3 y$				6		6		6		6		6			

Ta thấy sai phân cấp ba không đổi nên dãy số là dãy các giá trị của đa thức bậc ba:

$$y = an^3 + bn^2 + cn + d \ \ (a \neq 0)$$

trong đó n là số thứ tự của các số trong dãy số. Cho $n = 0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3$ (đánh số thứ tự các số hạng bắt đầu từ 0) ta nhận được hệ phương trình:

$$\begin{cases} d = -5 \\ a + b + c + d = -3 \\ 8a + 4b + 2c + d = 11 \\ 27a + 9b + 3c + d = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \\ c = -2 \\ d = -5 \end{cases}.$$

Vậy dãy số tuân theo quy luật sau:

$$y_n = n^3 + 3n^2 - 2n - 5.$$

Số hạng đầu tiên là $y_0 = -5$, hai số hạng tiếp theo số hạng 471 sẽ ứng với $n = 8; 9$ nên sẽ là:

$$y_8 = 8^3 + 3.8^2 - 2.8 - 5 = 683\ ;\ y_9 = 9^3 + 3.9^2 - 2.9 - 5 = 949.$$

Chú ý: 1) Quy luật tìm được trên là không duy nhất vì hiển nhiên, các số hạng đã cho cũng thoả mãn, chẳng hạn quy luật:

$$y_n = n^3+3n^2-2n-5+P(n).(n+5)(n+3)(n-11)(n-43)(n-99)(n-185)(n-307)(n-471)$$

trong đó $P(x)$ là một đa thức bất kỳ. Vậy thực chất trên đây ta mới chỉ tìm được một quy luật mà dãy các số đã cho thoả mãn mà không tìm được tất cả các quy luật mà dãy các số đã cho thoả mãn. 2) Nhớ rằng $\Delta^2(ax^2 + bx + c) = \text{Const}$, nhưng nếu $\Delta^2 y = \text{Const}$ thì chưa chắc là (không thể suy ra được) $y = ax^2+bx+c$.

Bài tập tương tự

Bài toán 3.1. *1 Với mỗi dãy số sau đây hãy: a) Tìm một quy luật biểu diễn của dãy số. b) Viết hai số hạng tiếp theo của mỗi dãy số theo quy luật vừa tìm được đó:*

1. : $1; -2; -2; 1; 7; 16; 28; 43; 61; \cdots$.

2. *:* $1; 6; 17; 34; 57; 86; 121; \cdots$.

3. *:* $2; 3; 7; 14; 24; 37; \cdots$.

4. *:* $3; 5; 10; 18; 29; \cdots$.

5. *:* $5; 1; 5; 14; 28; 47; 71; 100; 134; 173; 217; \cdots$.

Bài toán 3.2. *2 Tìm quy luật của các dãy số sau:*

1. $2; 2; 8; 26; 62; 122; 212; 338\ ;\ \cdots$.

2. $1; 6; 17; 34; 57; 86; 121; 162; 209; 262\ ;\ \cdots$.

3. $-5; -3; 11; 43; 99; 185; 307; 471; 683; 949\ ;\ \cdots$.

Bài toán 3.3. *3 Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số khi biết các số hạng đầu tiên.*

1. $\{8; 14; 20; 26; 32\ ;\ \cdots\}$.

2. $\{-0,5\ ;\ 1,5\ ;\ -4,5\ ;\ 13,5\ ;\ -40,5\ ;\ \cdots\}$.

3. $\{2; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \frac{6}{5}\ ;\ \cdots\}$.

4. $\{1; 3; 1; 3\ ;\ \cdots\}$.

5. $\{5; 7; 11; 19; 35\ ;\ \cdots\}$.

6. $\{1; 2; 6; 24; 120\ ;\ \cdots\}$.

7. $\{-2\ ;\ -\frac{1}{2}\ ;\ -\frac{4}{3}\ ;\ -\frac{3}{4}\ ;\ -\frac{6}{5}\ ;\ \cdots\}$.

8. $\{0,3\ ;\ 0,33\ ;\ 0,333\ ;\ \cdots\}$.

9. $\{\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{8}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{5}{32}\ ;\ \cdots\}$.

3.2 Công thức truy hồi là một biểu thức tuyến tính

Trường hợp hệ thức truy hồi đã cho là hệ thức tuyến tính.

$$a_0x_{n+k} + a_1x_{n+k-1} + \cdots + a_kx_n = f(n).$$

với $a_0; a_1; \cdots; a_k$ $(a_0 \neq 0\ ;\ a_k \neq 0)$ *là các hằng số thì bài toán có thể được xem như một phương trình sai phân tuyến tính và được giải như trong chương trước. Tuy nhiên, cũng có thể giải bằng các phương pháp khác.*

3.2.1 Ví dụ

Ví dụ 3.3. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số* (x_n) *được cho bởi hệ thức truy hồi.*

$$\begin{cases} x_0 = 99 \\ x_{n+1} = x_n - 2n - 1 \ \ (1) \end{cases}.$$

Giải. *Coi* (1) *là phương trình sai phân tuyến tính cấp 1. Do* $f(n) = -2n - 1$ *là đa thức bậc nhất,* $\lambda = 1 \Rightarrow$ *nên ta chọn* $x_n^* = n(an + b)$. *Thay vào (1) được.*

$$(n+1)[a(n+1) + b] = n(an + b) - 2n - 1 \Rightarrow a = -1\ ;\ b = 0 \Rightarrow x_n^* = -n^2.$$

Còn $\hat{x}_n = C.1^n = C \Rightarrow x_n = C - n^2$, *mà* $x_0 = 99 \Rightarrow C - 0^2 = 99 \Leftrightarrow C = 99$. *Vậy phương trình (1) có nghiệm.* $x_n = 99 - n^2$.

Giải (Cách 2). *Từ hệ thức đã cho ta có.*

$$\begin{aligned} x_0 &= 99 \\ x_1 &= x_0 - 1 \\ x_2 &= x_1 - 3 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} &= x_{n-2} - (2n - 3) \\ x_n &= x_{n-1} - (2n - 1) \end{aligned}$$

Cộng từng vế các đẳng thức trên, ta được

$$x_n = 99 - [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)] = 99 - n^2.$$

Vậy công thức số hạng tổng quát của dãy số cần tìm là $x_n = 99 - n^2$.

Ví dụ 3.4. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số* (x_n) *được cho bởi hệ thức truy hồi.*

$$\begin{cases} x_0 = 8 \\ x_{n+1} = 2x_n + 3^n \ \ (2) \end{cases}.$$

Giải. *Do* $\lambda = 2 \neq 3 = \beta$ *nên ta chọn* $x_n^* = d.3^n$. *Thay vào phương trình (2) được* $d = 1 \Rightarrow x_n^* = 3^n$. *Còn* $\hat{x}_n = C.2^n$. *Vậy* $x_n = C.2^n + 3^n$. *Thay vào điều kiện biên được* $C = 7$.

Trả lời: phương trình đã cho có nghiệm. $x_n = 7.2^n + 3^n$.

Giải (Cách khác). *Đặt* $y_n = x_n - 3^n$, *ta được*

$$\begin{cases} y_0 = 8 - 1 = 7 \\ y_{n+1} + 3.3^n = 2(y_n + 3^n) + 3^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 7 \\ y_{n+1} = 2y_n \end{cases}$$

Từ đó có (y_n) *là cấp số nhân* $\Rightarrow y_n = 7.2^n \Rightarrow x_n = 7.2^n + 3^n$ *là công thức số hạng tổng quát cần tìm .*

Ví dụ 3.5. *Tìm tất cả các dãy số* (a_n) *thoả mãn* $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$ *và* (a_n) *là một dãy số tăng.*

Giải. *Xét phương trình sai phân.* $a_{n+1} = 2^n - 3a_n$ (3).
Đặt $a_n = u_n.2^n$*. Thay vào (3) được.*

$$u_{n+1}.2^{n+1} = -3.u_n.2^n + 2^n \Leftrightarrow u_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n + \frac{1}{2}.\ (3.1)$$

Phương trình này có nghiệm tổng quát là.

$$u_n = C.(-\frac{3}{2})^n + \frac{1}{5} \Leftrightarrow a_n = C.(-3)^n + \frac{1}{5}.2^n.$$

Ta có.

$$\begin{aligned}(a_n)\uparrow &\Leftrightarrow a_{n+1} > a_n\\ &\Leftrightarrow -3C.(-3)^n + \frac{2}{5}.2^n > C.(-3)^n + \frac{1}{5}.2^n \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}\\ &\Leftrightarrow 4C.(-3)^n < \frac{1}{5}.2^n \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}.\ (*)\end{aligned}$$

+) Với $C > 0$ *thì* $(*) \Leftrightarrow \frac{1}{20C} > (-\frac{3}{2})^n$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$*. Ta không chọn được* C *vì khi* n *chẵn thì* $(-\frac{3}{2})^n \to +\infty$.
+) Với $C < 0$ *thì* $(*) \Leftrightarrow \frac{1}{20C} < (-\frac{3}{2})^n$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}$*. Ta cũng không chọn được* C *vì khi* n *lẻ thì* $(-\frac{3}{2})^n \to -\infty$.
+) Với $C = 0$ *thì* $a_n = \frac{1}{5}.2^n$ *là dãy số tăng.*
Vậy dãy số cần tìm là. $a_n = \frac{1}{5}.2^n$.

Ví dụ 3.6. *Cho* a ; q ; d *là các số* $\in \mathbb{R}$*, cho trước. Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số* (u_n) *được cho bởi công thức truy hồi.*

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = qu_n + d \ \ (n \geq 1) \end{cases}.\ (4)$$

Hãy xét tất cả các trường hợp có thể xảy ra đối với các tham số a ; q ; d.

(Dãy số được cho bởi công thức trên còn được gọi là cấp số nhân - cộng)

Giải.
+) Nếu $q = 0$ thì (4) xác định dãy số có công thức số hạng tổng quát

$$u_1 = a \; ; \; u_n = d, \; \forall n \in \mathbb{N}^*, \; n \geq 2.$$

+) Nếu $q = 1$ thì (4) xác định một cấp số cộng có công thức số hạng tổng quát

$$u_n = a + (n-1)d.$$

+) Nếu $d = 0$ thì (4) xác định một cấp số nhân có công thức số hạng tổng quát

$$u_n = a \cdot q^{n-1}.$$

+) Ta xét trường hợp $d \neq 0$; $q \neq 0$; $q \neq 1$. Đặt $u_n := v_n + \alpha$ (với α chọn sau) ta được

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = a - \alpha \\ v_{n+1} + \alpha = q(v_n + \alpha) + d \;\; (n \geq 1) \end{cases} . \quad (4.1)$$

Chọn $\alpha = \dfrac{d}{1-q}$ ta được (4.1) là hệ thức truy hồi xác định một cấp số nhân với công bội q và do đó

$$v_n = v_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow u_n = \Big(a - \frac{d}{1-q}\Big) q^{n-1} + \frac{d}{1-q}.$$

Ví dụ 3.7. *Cho a ; b ; p ; q là các số $\in \mathbb{R}$, cho trước. Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được cho bởi công thức truy hồi.*

$$\begin{cases} u_0 = a \; ; \; u_1 = b \\ u_{n+1} = (p+q)u_n - pqu_{n-1}, \;\; (n \geq 1) \;\; (5) \end{cases} .$$

Hãy xét tất cả các trường hợp có thể xảy ra đối với các tham số a ; b ; p ; q.

Giải. *Đặt $v_n = u_n - pu_{n-1}$ ta có được*

$$v_1 = u_1 - pu_0 = a - pb \; ; \; v_{n+1} = qv_n \Rightarrow v_n = v_1 \cdot q^{n-1} \;\; (\alpha).$$

Ap dụng liên tiếp (α) ta có.

$$\begin{aligned} u_1 - pu_0 &= v_1 \\ u_2 - pu_1 &= v_1 q \\ u_3 - pu_2 &= v_1 q^2 \\ \cdots \;\; \cdots & \;\; \cdots \\ u_n - pu_{n-1} &= v_1 q^{n-1}. \end{aligned}$$

Từ các dẳng thức trên dễ dàng nhận được kết quả sau.

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{p^n - q^n}{p-q}b - pq\dfrac{p^{n-1} - q^{n-1}}{p-q}a \ \text{ nếu } p \neq q \\ np^{n-1}b - (n-1)p^n a \ \text{ nếu } p = q \end{cases}.$$

Ví dụ 3.8. *Cho a ; b ; p ; q ; r là các số $\in \mathbb{R}$, cho trước, $pr \neq 0$. Biết rằng phương trình*

$$pt^2 + qt + r = 0 \ \ (\alpha)$$

có hai nghiệm thực $t = t_1$; $t = t_2$. Hãy xác định số hạng tổng quát của dãy số (u_n) được cho bởi công thức truy hồi.

$$\begin{cases} u_1 = a \ ; \ u_2 = b \\ pu_{n+2} + qu_{n+1} + ru_n = 0 \ \ (n \geq 1) \end{cases}. \ (6)$$

HDG. *Chia hai vế của phương trình cho p rồi sử dụng định lý Vieete, đưa về ví dụ 5.*

Ví dụ 3.9. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số được cho bởi hệ thức truy hồi:*

$$\begin{cases} x_0 = 101 \\ x_{n+1} = 7.x_n + 7^{n+1} \ \ (1.4) \end{cases}.$$

Giải. *Coi (1.4) là phương trình sai phân tuyến tính (cấp 1), không thuần nhất, với hệ số hằng số. Do $\lambda = 7 = \beta$ nên ta chọn $x_n^* = d.n.7^n$. Thay vào phương trình (1.4) được $d = 1 \Rightarrow x_n^* = n.7^n$. Còn $\hat{x}_n = C.7^n$. Vậy $x_n = C.7^n + n.7^n$. Thay vào điều kiện biên được $C = 101$.*
Trả lời. phương trình đã cho có nghiệm. $x_n = (101 + n).7^n$.

Giải (Cách khác). *Đặt $x_n = y_n.7^n$. Ta thu được hệ thức truy hồi đối với dãy số (y_n).*

$$\begin{cases} x_0 & = y_0.7^0 \\ y_{n+1}.7^{n+1} & = 7.y_n.7^n + 7^{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 & = 101 \\ y_{n+1} & = y_n + 1 \end{cases}$$

Từ đó ta thấy (y_n) là dãy số cộng với số hạng đầu $y_0 = 101$, công sai $d = 1$. Theo công thức số hạng tổng quát của dãy số cộng ta được

$$y_n = y_0 + n.d \Leftrightarrow y_n = 101 + n.$$

Bởi vậy

$$x_n = (101 + n).7^n$$

là công thức số hạng tổng quát của dãy số cần tìm.

Ví dụ 3.10. *Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số* (x_n) *được cho bởi hệ thức sau .*

$$\begin{cases} x_0 = 1\ ;\ x_1 = 16 \\ x_{n+2} = 8x_{n+1} - 16x_n \end{cases}.$$

Giải. *Coi hệ thức đã cho là phương trình sai phân tuyến tính (cấp 2) thuần nhất, với hệ số hằng số. Ta có phương trình đặc trưng.*

$$\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 \ \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 4 \text{ (có nghiệm kép).}$$

Vậy. $\hat{x}_n = x_n = (A + Bn).4^n$.
Giải điều kiện biên.

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_1 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ (A + B).4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 3 \end{cases}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm. $x_n = (1 + 3n).4^n$.
Giải. *Đặt* $x_n = y_n.4^n$. *Ta thu được hệ thức truy hồi đối với dãy số* (y_n).

$$\begin{cases} y_0.4^0 & = x_0 \\ y_1.4^1 & = x_1 \\ y_{n+2}.4^{n+2} & = 8.y_n.4^{n+1} - 16.y_n.4^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 & = 1 \\ y_1 & = 4 \\ y_{n+2} & = 2y_{n+1} - y_n \end{cases}$$

Đặt tiếp $z_n = y_{n+1} - y_n \ \ (n \geq 0)$ *ta được*

$$\begin{cases} z_0 = 3 \\ z_{n+1} = z_n \ \ \forall n \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow z_n = 3 \ \ \forall n \geq 0$$

Như vậy, ta được hệ thức truy hồi đối với dãy số (y_n) *là.*

$$\begin{cases} y_0 & = 1 \\ y_1 & = 4 \\ y_{n+1} & = y_n + 3 \ \ (n \geq 0) \end{cases}$$

Từ đó ta thấy (y_n) *là dãy số cộng với số hạng đầu* $y_0 = 1$, *công sai* $d = 3$. *Theo công thức số hạng tổng quát của dãy số cộng ta được*

$$y_n = y_0 + n.d \Leftrightarrow y_n = 1 + 3n.$$

Bởi vậy

$$x_n = (1 + 3n).4^n$$

là công thức số hạng tổng quát của dãy số cần tìm.

Bài tập

1. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số* (u_n) *được cho bởi.*

$$u_{n+1} = 3u_n - 6n + 1 \ ; \ u_1 = 1.$$

Đáp số: $u_n = 3n + 1 - 3^n$.

2. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số* (u_n) *được cho bởi.*

$$u_{n+1} = u_n + 2n^2 \ ; \ u_1 = 1.$$

Đáp số: $u_n = \dfrac{1}{3}(2n^3 - 3n^2 + n + 3)$.

3. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số* (u_n) *được cho bởi.*

$$u_{n+1} = 5u_n - 3^n \ ; \ u_0 = 1.$$

Đáp số: $u_n = \dfrac{1}{2}(5^n + 3^n)$.

4. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số* (u_n) *được cho bởi.*

$$u_{n+1} = 2u_n + 6.2^n \ ; \ u_0 = 1.$$

Đáp số: $u_n = (3n + 1).2^n$.

5. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số* (u_n) *được cho bởi.*

$$u_{n+1} = u_n + 2n.3^n \ ; \ u_0 = 0.$$

Đáp số: $u_n = \dfrac{1}{2}[(2n - 3).3^n + 3]$.

6. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số* (u_n) *được cho bởi.*

$$u_{n+1} - 2u_n = (n^2 + 1).2^n \ ; \ u_0 = 1.$$

Đáp số: $u_n = \left(\dfrac{n(2n^2 - 3n + 7)}{6} + 2\right).2^n$.

7. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số* (u_n) *được cho bởi.*

$$u_{n+1} - 2u_n = n + 3^n \ ; \ u_0 = 1.$$

Đáp số. $u_n = 2^n + 3^n - n - 1$.

3.3 Công thức truy hồi là một hệ biểu thức tuyến tính

Xét bài toán sau: Xác định số hạng tổng quát của các dãy số (x_n) ; (y_n) *thoả mãn hệ thức truy hồi dạng.*

$$\begin{cases} x_1 = a\ ;\ y_1 = b\ \ (*) \\ x_{n+1} = px_n + qy_n\ \ (1) \\ y_{n+1} = rx_n + sy_n\ \ (2) \end{cases} \quad (I)\ \text{với } a; b; p; q; r; s \text{ là các hằng số } \in \mathbb{R}$$

Phương pháp giải. *Trong (1) thay* n *bởi* $n+1$ *và biến đổi ta được.*

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= px_{n+1} + qy_{n+1} \\ &= px_{n+1} + q(rx_n + sy_n) \\ &= px_{n+1} + qrx_n + s(x_{n+1} - px_n) \\ \Rightarrow & x_{n+2} - (p+s)x_{n+1} + (ps - qr)x_n = 0 \end{aligned}$$

Từ (1) ta cũng có $x_2 = px_1 + qy_1 = pa + qb$. *Vậy ta thu được phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất:*

$$\begin{cases} x_1 = a\ ;\ x_2 = pa + qb \\ x_{n+2} - (p+s)x_{n+1} + (ps - qr)x_n = 0 \end{cases}$$

Mà ta đã biết cách giải ở chương trước. Giải phương trình này ta tìm được x_n. *Thay vào (1) ta tìm được* y_n.

3.3.1 Ví dụ

Ví dụ 3.11. *Tìm* x_n ; y_n *thoả mãn.*

$$\begin{cases} x_1 = 1\ ;\ y_1 = 1 \\ x_{n+1} = 4x_n - 2y_n\ \ (1) \\ y_{n+1} = x_n + y_n\ \ quad(2) \end{cases}.$$

Giải. *Trong (1) thay* n *bởi* $n+1$ *ta được*

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= 4x_{n+1} - 2y_{n+1} \\ &= 4x_{n+1} - 2(x_n + y_n) = 4x_{n+1} - 2x_n - 2y_n \\ &= 4x_{n+1} - 2x_n + x_{n+1} - 4x_n = 5x_{n+1} - 6x_n \\ &\Rightarrow x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0. \end{aligned}$$

Từ (1) ta có: $x_2 = 4x_1 - 2y_1 = 4.1 - 2.1 = 2$. *Vậy ta có phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất:*

$$\begin{cases} x_1 = 1\ ;\ x_2 = 2 \\ x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0 \end{cases}.$$

Giải phương trình này ta được $x_n = 2^{n-1}$. *Thay* x_n *vào (1) được* $y_n = 2^{n-1}$. *Vậy hệ đã cho có nghiệm.* $\begin{cases} x_n = 2^{n-1} \\ y_n = 2^{n-1} \end{cases}$.

Ví dụ 3.12. *Tìm* $x_n\ ;\ y_n$ *thoả mãn.*

$$\begin{cases} x_0 = 2\ ;\ y_0 = 0 \\ 4x_{n+1} = 2x_n - 3y_n\ \ (1) \\ 2y_{n+1} = 2x_n + y_n\ \ quad(2) \end{cases}.$$

Giải. *Lập luận tương tự ví dụ trên ta được phương trình sai phân tuyến tính thuần nhất:*

$$\begin{cases} x_0 = 2\ ;\ x_1 = 1 \\ x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = 0 \end{cases}.$$

Phương trình đặc trưng.

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \cos\frac{\pi}{3} \pm i\sin\frac{\pi}{3}.$$

Vậy phương trình trên có nghiệm tổng quát.

$$x_n = A.\cos\frac{n\pi}{3} + B.\sin\frac{n\pi}{3}.$$

Thay vào điều kiện biên được $A = 2\ ;\ B = 0 \Rightarrow x_n = 2\cos\frac{n\pi}{3}$. *Thay tiếp vào (1) được* $y_n = \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $\begin{cases} x_n = 2\cos\frac{n\pi}{3} \\ y_n = \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3} \end{cases}$. *Bài tập Tìm* x_n, y_n *thoả mãn:*

1. $\begin{cases} x_0 &= 2; y_0 = 2 \\ x_{n+1} &= \frac{1}{2}x_n - \frac{3}{4}y_n \\ y_{n+1} &= x_n + \frac{1}{2}y_n \end{cases}.$

2. $\begin{cases} x_0 &= 0; y_0 = 6 \\ x_{n+1} &= 3x_n + y_n \\ y_{n+1} &= 5x_n - y_n \end{cases}.$

3. $\begin{cases} x_0 &= 2; y_0 = 1 \\ x_{n+1} &= 2x_n - y_n \\ y_{n+1} &= x_n + 4y_n \end{cases}.$

4. $\begin{cases} x_0 &= -1; y_0 = 2 \\ x_{n+1} &= 2x_n - 8y_n \\ y_{n+1} &= 2x_n - 6y_n \end{cases}.$

5. $\begin{cases} x_0 &= 1; y_0 = 1 \\ x_{n+1} &= 4x_n - 2y_n + 9n - 3 \\ y_{n+1} &= x_n + y_n + 3n \end{cases}.$

6. $\begin{cases} x_0 &= 1; y_0 = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x_{n+1} &= x_n - y_n \\ y_{n+1} &= x_n + y_n \end{cases}.$

3.4 Công thức truy hồi là biểu thức tuyến tính với hệ số biến thiên

Lý thuyết về phương trình sai phân tuyến tính với các hệ số biến thiên cho đến nay vẫn chưa hoàn chỉnh. Việc giải các phương trình sai phân tuyến tính với các hệ số biến thiên là rất phức tạp. Trong phần này ta sẽ chỉ xét một số dạng đặc biệt, đơn giản của các phương trình sai phân tuyến tính với các hệ số biến thiên chủ yếu bằng phương pháp đặt dãy số phụ, đưa về phương trình sai phân tuyến tính.

Ví dụ 3.13. *Tìm u_n biết rằng.*

$$u_1 = 0 \; ; \; u_{n+1} = \frac{n}{n+1}(u_n + 1) \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Giải. *Từ giả thiết có: $(n+1)u_{n+1} = nu_n + n$. Đặt $x_n = nu_n$, ta có*

$$x_1 = 0 \; ; \; x_{n+1} = x_n + n.$$

Giải phương trình này ta được:

$$x_n = \frac{n(n-1)}{2}.\ \textit{Vậy ta có: } u_n = \frac{n-1}{2}.$$

Ví dụ 3.14. *Tìm u_n biết rằng.*

$$u_1 = 0\ ;\ u_{n+1} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}(u_n + 1)\ \ \textit{với mọi } n \geq 1.$$

Giải. *Từ giả thiết có:*

$$(n+1)(n+2)^2(n+3)u_{n+1} = n(n+1)^2(n+2)u_n + n(n+1)^2(n+2).$$

Đặt $x_n = n(n+1)^2(n+2)u_n$, ta có

$$x_1 = 0\ ;\ x_{n+1} = x_n + n(n+1)^2(n+2).$$

Giải phương trình này ta được:

$$x_n = \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)(2n+1)}{10}.$$

Vậy ta có đáp số:

$$u_n = \frac{(n-1)(2n+1)}{10(n+1)}.$$

Ví dụ 3.15. *Tìm:*

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx.$$

Giải. *Sử dụng công thức tích phân từng phần ta có.*

$$\begin{aligned}
J_n &= -\cos x.\sin^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x\cos^2 x\, dx\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\, dx\\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^{n-2} x - \sin^n x\right)\ dx\\
&= (n-1)(J_{n-2} - J_n).
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow J_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}J_n\ \ (1).$$

Dễ thấy: $J_0 = \dfrac{\pi}{2}$; $J_1 = 1$. *Từ đó và từ (1) ta có*

+) Khi n chẵn ($n = 2k$) thì

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2}J_0 \\ J_4 &= \frac{3}{4}J_2 \\ J_6 &= \frac{5}{6}J_4 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ J_{2k} &= \frac{2k-1}{2k}J_{2k-2}. \end{aligned}$$

Nhân từng vế các đẳng thức trên và rút gọn ta được.

$$J_{2k} = \frac{1.3.\cdots.(2k-1)}{2.4.\cdots.(2k)}.\frac{\pi}{2} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.\frac{\pi}{2}.$$

+) Khi n lẻ ($n = 2k+1$) thì.

$$\begin{aligned} J_3 &= \frac{2}{3}J_1 \\ J_5 &= \frac{4}{5}J_3 \\ J_7 &= \frac{6}{7}J_5 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ J_{2k+1} &= \frac{2k}{2k+1}J_{2k-1}. \end{aligned}$$

Nhân từng vế các đẳng thức trên và rút gọn ta được.

$$J_{2k+1} = \frac{2.4.\cdots.(2k)}{1.3.\cdots.(2k+1)}.1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Đáp số.

$$J_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}.\frac{\pi}{2}\ ;\ J_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

Ví dụ 3.16. *Tìm x_n biết rằng.*

$$x_1 = a > 0\ ;\ x_{n+1} = g(n).x_n^k\ \ (1)\ \ \textit{với mọi } n \geq 1,$$

trong đó $g(n) > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$; $k \in \mathbb{R}^+$.

Giải. *Từ giả thiết suy ra* $x_n > 0$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$. *Lấy logarit Neper hai vế của (1) ta được*

$$\ln x_{n+1} = \ln g(n) + k.\ln x_n.\ (2)$$

Đặt $y_n = \ln x_n$, *khi đó (2) có dạng.*

$$y_{n+1} - ky_n = \ln g(n).\ (3)$$

Đặt tiếp $y_n = k^{n-1}u_n$ *khi đó (3) có dạng.*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\ln g(n)}{k^n} \Rightarrow u_n = u_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\ln g(i)}{k^i}.$$

Từ giả thiết $x_1 = a > 0 \Rightarrow u_1 = \ln a$. *Vậy.*

$$u_n = \ln a + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\ln g(i)}{k^i} \Rightarrow y_n = k^{n-1}\left(\ln a + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\ln g(i)}{k^i}\right).$$

Cuối cùng, ta có:

$$x_n = e^{k^{n-1}(\ln a + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\ln g(i)}{k^i})} = exp\left(k^{n-1}(\ln a + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\ln g(i)}{k^i})\right).$$

Ví dụ 3.17. *Tìm* x_n *biết rằng.*

$$x_1 = a > 0\ ;\ x_{n+1} = \frac{f(n+1)}{f^k(n)}.x_n^k\ \ (1)\ \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Trong đó $f(n) > 0$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$ *còn* $k \in \mathbb{N}^*$, *cho trước.*

Giải. *Từ (1) ta có:*

$$\frac{x_{n+1}}{f(n+1)} = \frac{x_n^k}{f^k(n)}.\ (2)$$

Đặt dãy phụ: $v_n = \dfrac{x_n}{f(n)}$, *khi đó (2) có dạng:* $v_{n+1} = v_n^k$. (3). *Đặt tiếp dãy số phụ:* $u_n = \ln v_n$, *khi đó (3) có dạng.*

$$u_{n+1} = ku_n \Rightarrow u_n = C.k^n\ \ (\text{Với } C \text{ là hằng số}).$$

Mà $x_1 = a \Rightarrow v_1 = \dfrac{a}{f(1)} \Rightarrow u_1 = \ln \dfrac{a}{f(1)} = C.k \Rightarrow u_n = \ln \dfrac{a}{f(1)} k^{n-1}$. *Vậy ta có.*

$$v_n = e^{k^{n-1} \ln \frac{a}{f(1)}} = \left(\frac{a}{f(1)}\right)^{k^{n-1}}.\ \text{Hay là. } x_n = f(n)\left(\frac{a}{f(1)}\right)^{k^{n-1}}.$$

Ví dụ 3.18. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số (x_n) biết rằng $x_1 = a$ và*

$$x_{n+1} = a(n)x_n + b(n) \ \ quad(6)$$

trong đó $a(n)$; $b(n)$ là các hàm số đối với $n \in \mathbb{N}$, $a(n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Giải. *Đặt dãy số phụ*

$$x_n = y_n.\prod_{k=0}^{n-1} a(k)$$

Khi đó ta có $y_1 = \dfrac{a}{a(0)}$ và

$$(6) \Leftrightarrow y_{n+1} - y_n = \frac{b(n)}{\prod_{k=0}^{n} a(k)} := g(n). \ \ quad(6.1)$$

Từ đẳng thức (6.1) ta dễ dàng nhận được

$$y_n = y_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g(k) = \frac{a}{a(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} g(k).$$

Vậy nên ta có

$$x_n = \Big(\frac{a}{a(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b(k)}{\prod_{j=0}^{k} a(j)}\Big) \prod_{k=0}^{n-1} a(k).$$

là công thức số hạng tổng quát cần tìm.

Ví dụ 3.19. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số (x_n) biết rằng $x_1 = a$; $x_2 = b$ và*

$$x_{n+2} = a(n)x_{n+1} + b(n)x_n + f(n) \ \ quad(7)$$

trong đó $a(n)$; $b(n)$; $f(n)$ là các hàm số đối với $n \in \mathbb{N}$, $b(n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ và tồn tại số $p \neq 0$, tồn tại hàm số $q(n) \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$p + q(n) = a(n) \ ; \ p.q(n) = -b(n). \ (*)$$

Giải. *Sử dụng điều kiện $(*)$ ta có thể viết lại (7) dưới dạng*

$$(x_{n+2} - px_{n+1}) - q(n)(x_{n+1} - px_n) = f(n) \ \ quad(7.1)$$

Đặt $y_n = x_{n+1} - px_n$ $(*_1)$. Khi đó, (7.1) có dạng.

$$y_{n+1} = q(n)y_n + f(n) \ ; \ y_1 = b - pa := \alpha.$$

Theo ví dụ 6, ta tìm được

$$y_n = \Big(\frac{\alpha}{q(0)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f(k)}{\prod_{j=0}^{k} q(j)}\Big) \prod_{k=0}^{n-1} q(k) := h(n),\ n > 1.$$

Thay y_n vào $(*_1)$, giải phương trình sai phân tuyến tính cấp 1 thu được ta tìm được công thức số hạng tổng quát cần tìm là.

$$x_n = a.p^{n-1} + p^n. \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h(k)}{p^{k+1}},\ \ n > 1.$$

Ví dụ 3.20. *Tìm số hạng tổng quát của dãy số (x_n) nếu biết*

$$x_1 = 1\ ;\ x_2 = 2\ ;\ x_{n+2} = (n+1)(x_{n+1} + x_n),\ n \geq 1.\ (7)$$

Giải. *Đặt $x_n = n!y_n$. Khi đó, (7) có dạng*

$$n!y_n = (n-1)[(n-1)!x_{n-1} + (n-2)!x_{n-2}]$$

hay là

$$ny_n - (n-1)y_{n-1} - y_{n-2} = 0 \Leftrightarrow (y_n - y_{n-1} = -\frac{1}{n}(y_{n-1} - y_{n-2}),\ \forall n \geq 2.$$

Từ đó có

$$y_n - y_{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n!},\ y_3 - y_2 = \frac{1}{6},\ y_2 - y_1 = -\frac{1}{2}.$$

Viết các đẳng thức trên rồi cộng lại ta được

$$y_n = y_1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!},\ n \geq 3.$$

Vậy công thức số hạng tổng quát cần tìm là

$$x_n = n!\Big(1 + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}\Big),\ n \geq 3.$$

Bài tập

Tìm x_n biết rằng:

1. $\begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_{n+1} &= \dfrac{n}{n+1}(x_n+1) \end{cases}.$

2. $\begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_{n+1} &= \dfrac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)}(x_n+1) \end{cases}.$

3. $\begin{cases} x_1 &= \dfrac{1}{2} \\ x_{n+1} &= \dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}x_n + \dfrac{n(n+1)}{n+2}\cdot n! \end{cases}.$

4. $\begin{cases} x_1 &= a \\ x_{n+1} &= (n+1)(x_n+1) \end{cases}.$

5. $\begin{cases} x_1 &= 2 \\ x_{n+1} &= \dfrac{n}{n+2}x_n + \dfrac{4.3^n}{(n+1)(n+2)} \end{cases}.$

6. $\begin{cases} x_1 = 8\ ;\ x_2 = \dfrac{33}{2} \\ x_{n+2} - 2\dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}x_{n+1} - 3\dfrac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)}x_n = -4\dfrac{n(n+3)}{n+2} \end{cases}.$

3.5 Công thức truy hồi dạng phân tuyến tính với hệ số hằng

Trong phần này ta sẽ tìm số hạng tổng quát của dãy số được cho dưới dạng công thức truy hồi dạng phân tuyến tính với hệ số hằng thông qua các ví dụ cụ thể.

Ví dụ 3.21. *Tìm dãy số (x_n) thoả mãn các điều kiện sau.*

$$x_1 = a > 0\ ;\ x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n+2} \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Giải. *Từ giả thiết suy ra $x_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Mà.*

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n+2} \Leftrightarrow \frac{1}{x_{n+1}} = 1 + \frac{2}{x_n}.$$

Đặt $y_n = \dfrac{1}{x_n}$, khi đó ta được.

$$y_{n+1} = 2y_n + 1 \Leftrightarrow y_{n+1} - 2y_n - 1 = 0\ ;\ y_1 = \frac{1}{a}.$$

Giải phương trình sai phân này ta được:

$$y_n = \frac{(a+1)2^{n-1} - a}{a}. \quad \textit{Hay là.} \ x_n = \frac{a}{(a+1)2^{n-1} - a}$$

Ví dụ 3.22. *Tìm dãy số (x_n) thoả mãn các điều kiện sau.*

$$x_0 = a\ ;\ x_{n+1} = \frac{px_n + q}{rx_n + s} \ \textit{với mọi}\ n \in \mathbb{N}.\ (1)$$

trong đó $a, p, q, r, s \in \mathbb{R}$, cho trước.

Giải. *Lời giải của ví dụ này thu được trực tiếp từ Bổ đề sau.*

Bổ đề 3.1. *Nếu y_n và z_n là nghiệm của hệ phương trình sai phân.*

$$\begin{cases} y_{n+1} = py_n + qz_n \ ; \ y_0 = a \\ z_{n+1} = ry_n + sz_n \ ; \ z_0 = 1 \end{cases}.\ (2)$$

thì $x_n = \dfrac{y_n}{z_n}$ là nghiệm của phương trình.

$$x_0 = a\ ;\ x_{n+1} = \frac{px_n + q}{rx_n + s}.$$

Chứng minh. *Thật vậy, ta có: $x_0 = \dfrac{y_0}{z_0} = \dfrac{a}{1} = a$. Ngoài ra.*

$$x_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{z_{n+1}} = \frac{py_n + qz_n}{ry_n + sz_n} = \frac{p\dfrac{y_n}{z_n} + q}{r\dfrac{y_n}{z_n} + s} = \frac{px_n + q}{rx_n + s}.$$

Từ đó suy ra đpcm. Từ Bổ đề trên ta có được cách giải của phương trình sai phân dạng phân tuyến tính (1) bằng cách lập và giải hệ phương trình (2). Từ đó thu được nghiệm của (1) theo Bổ đề. Ví dụ cụ thể xem trong lời giải của ví dụ 3 sau đây.

Ví dụ 3.23. *Tìm dãy số (x_n) thoả mãn các điều kiện sau.*

$$x_0 = 0\ ;\ x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{-x_n + 1} \ \textit{với mọi}\ n \geq 1.$$

Giải. *Xét hệ phương trình*

$$\begin{cases} y_0 = 0 \;;\; z_0 = 1 \\ y_{n+1} = y_n + z_n \\ z_{n+1} = -y_n + z_n \end{cases}.$$

Giải hệ này ta được.

$$y_n = (\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4} \;;\; z_n = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}.$$

Từ đó, theo Bổ đề đã chứng minh trên ta được nghiệm của phương trình đã cho là.

$$x_n = \frac{y_n}{z_n} = \frac{(\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}}{(\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}} = tg\frac{n\pi}{4}.$$

Ví dụ 3.24. *Tìm công thức số hạng tổng quát của dãy số (x_n) được cho bởi hệ thức truy hồi sau*

$$x_1 = a \;;\; x_{n+1} = \frac{bx_n}{cx_n + d} \;\; quad(4).$$

Trong đó, $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^*,\ d \in \mathbb{R}$.

Giải. *Đặt $y_n := \dfrac{1}{x_n}$; $\dfrac{c}{b} := p$; $\dfrac{d}{b} := q$ ta được*

$$(4) \Leftrightarrow y_{n+1} = px_n + q \;;\; y_1 = \frac{1}{a}.$$

Đó là hệ thức xác định dãy số nhân - cộng. Công thức số hạng tổng quát của dãy số này đã được xác định trong phần trước (xem ví dụ 4 mục 2.1 của chương này).

Ví dụ 3.25. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số cho bởi hệ thức truy hồi sau.*

$$x_1 = \frac{1}{2} \;;\; x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}.$$

Giải. *Ta xác định một số số hạng đầu tiên.*

$$x_1 = \frac{1}{2} \;;\; x_2 = \frac{2}{3} \;;\; x_3 = \frac{3}{4}.$$

Ta sẽ chứng minh dãy số đã cho có số hạng tổng quát

$$x_n = \frac{n}{n+1} \;\; quad(*)$$

bằng phương pháp quy nạp. Thật vậy, theo trên, $(*)$ đã đúng tới $n = 3$. Giả sử $(*)$ đúng tới n, khi đó

$$x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n} = \frac{1}{2 - \dfrac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Vậy $(*)$ cũng đúng tới $n + 1$ nên theo nguyên lý quy nạp toán học, $(*)$ đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Đó chính là điều phải chứng minh.

Bài tập

Tìm dãy số thoả mãn điều kiện sau:

1. $x_{n+1} = \dfrac{1 - 4x_n}{1 - 6x_n}\ ;\ x_0 = 1.$

2. $x_{n+1} = \dfrac{2x_n - 2}{3x_n - 4}\ ;\ x_0 = -1.$

3. $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 1}{-x_n + 1}\ ;\ x_0 = 0.$

4. $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 2}{x_n + 4}\ ;\ x_0 = 0.$

5. $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 1}{x_n + 3}\ ;\ x_0 = 1.$

6. $x_{n+1} = \dfrac{x_n - 3}{x_n + 1}\ ;\ x_0 = 0.$

7. $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2x_n + 1}\ ;\ x_0 = 0.$

3.6 Hệ thức truy hồi phi tuyến

Trong phần này ta xét các ví dụ giải các phương trình sai phân phi tuyến. Lý thuyết tổng quát giải các phương trình dạng này cho đến nay còn chưa xây dựng được. Trong phần này chủ yếu ta sẽ xét các phương trình có thể được tuyến tính hoá bằng phép đặt hàm phụ hoặc bằng phương pháp quy nạp toán học.

3.6.1 Quy trình tuyến tính hoá một phương trình sai phân

Tuyến tính hoá một phương trình sai phân nghĩa là đưa một phương trình sai phân ở dạng phi tuyến về dạng tuyến tính. Giả sử dãy số (u_n) *thoả mãn điều kiện.*

$$\begin{cases} u_1 = \alpha_1 \ ; \ u_2 = \alpha_2 \ \cdots \ u_k = \alpha_k \\ u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \cdots, u_{n-k}) \ \text{ với } n; k \in \mathbb{N}^* \ ; \ n > k \end{cases}.$$

Trong đó f *là một đa thức đại số bậc m hoặc là phân thức, hoặc là biểu thức siêu việt. Giả sử hàm số* $f(u_{n-1}, u_{n-2}, \cdots, u_{n-k})$ *có thể tuyến tính hoá được, khi đó tồn tại các giá trị* $x_1; x_2; \cdots; x_k$ *sao cho.*

$$u_n = x_1 u_{n-1} + x_2 u_{n-2} + \cdots + x_k u_{n-k} \ \ (1)$$

Để tìm $x_1; x_2; \cdots; x_k$ *trước hết ta xác định* $u_{k+1}; u_{k+2}; \cdots; u_{2k}$.
Từ công thức lặp đã cho ta có.

$$\begin{cases} u_{k+1} = f(\alpha_k; \alpha_{k-1}; \cdots; \alpha_2; \alpha_1) := \alpha_{k+1} \\ u_{k+2} = f(\alpha_{k+1}; \alpha_k; \cdots; \alpha_3; \alpha_2) := \alpha_{k+2} \\ \cdots \ quad \cdots \ quad \cdots \ quad \\ u_{2k} = f(\alpha_{2k-1}; \alpha_{2k-2}; \cdots; \alpha_{k+1}; \alpha_k) := \alpha_{2k} \end{cases}.$$

Thay các giá trị $u_1; u_2; \cdots; u_k$ *đã cho và các giá trị* $u_{k+1}; u_{k+2} \ \cdots; u_{2k}$ *vừa tìm được ở trên vào (1) ta được hệ phương trình tuyến tính gồm k phương trình với k ẩn* $x_1; x_2; \cdots; x_k$.

$$\begin{cases} u_{k+1} = x_1\alpha_k + x_2\alpha_{k-1} + \cdots + x_k\alpha_1 \\ u_{k+2} = x_1\alpha_{k+1} + x_2\alpha_k + \cdots + x_k\alpha_2 \\ \cdots \ quad \cdots \ quad \cdots \ quad \\ u_{2k} = x_1\alpha_{2k-1} + x_2\alpha_{2k-2} + \cdots + x_k\alpha_k \end{cases}. \ (*)$$

Giải hệ phương trình này ta thu được nghiệm: $x_1; x_2; \cdots; x_k$. *Thay vào (1) ta sẽ được biểu diễn tuyến tính cần tìm.*

$$u_n = f(u_{n-1}, u_{n-2}, \cdots, u_{n-k}) = x_1 u_{n-1} + x_2 u_{n-2} + \cdots + x_k u_{n-k}$$

Sau đó ta chứng minh công thức biểu diễn trên bằng phương pháp quy nạp toán học.
Chú ý. *Nếu hệ (*) vô nghiệm thì hàm* f *không thể tuyến tính hoá được.*

3.6.2 Ví dụ

Ví dụ 3.26. *Cho dãy số* (a_n) *thoả mãn.*

$$a_1 = a_2 = 1\ ;\ a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 2}{a_{n-2}}\ (*)\ \text{với mọi } n \geq 3$$

Hãy tuyến tính hoá, tìm số hạng tổng quát. Chứng minh rằng a_n *nguyên với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$.

Giải. *Giả sử* a_n *có biểu diễn tuyến tính là:*

$$a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + \gamma.\ (1)$$

Ta có.

$$a_3 = \frac{a_2^2 + 2}{a_1} = \frac{1+2}{1} = 3.$$
$$a_4 = \frac{a_3^2 + 2}{a_2} = \frac{9+2}{1} = 11.$$
$$a_5 = \frac{a_4^2 + 2}{a_3} = \frac{121+2}{3} = 41.$$

Thay $a_3 = 3\ ;\ a_4 = 11\ ;\ a_5 = 41$ *vào (1) ta thu được hệ phương trình.*

$$\begin{cases} \alpha a_2 + \beta a_1 + \gamma = a_3 \\ \alpha a_3 + \beta a_2 + \gamma = a_4 \\ \alpha a_4 + \beta a_3 + \gamma = a_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 11 \\ 11\alpha + 3\beta + \gamma = 41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 4 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 0 \end{cases}.$$

Vậy ta có:

$$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}\ (2)$$

Ta sẽ chứng minh dãy số (a_n) *thoả mãn (*) có biểu diễn tuyến tính là.*

$$a_1 = a_2 = 1\ ;\ a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}\ \text{ với mọi } n \geq 3.\ (3)$$

Thật vậy, với $n = 3$ *ta có:* $a_3 = 4.a_2 - a_1 = 4.1 - 1 \Rightarrow (2)$ *đúng với* $n = 3$.

Giả sử (2) đúng tới $n = k$ *tức là:* $a_k = 4a_{k-1} - a_{k-2}\ \ (k \geq 3)$. *Ta có.*

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= \frac{a_k^2+2}{a_{k-1}} = \frac{(4a_{k-1}-a_{k-2})^2+2}{a_{k-1}}\\
&= \frac{16a_{k-1}^2 - 8a_{k-1}a_{k-2} + a_{k-2}^2 + 2}{a_{k-1}}\\
&= \frac{15a_{k-1}^2 - 4a_{k-1}a_{k-2} + a_{k-1}^2 - 4a_{k-1}a_{k-2} + a_{k-1}a_{k-3}}{a_{k-1}}\\
&\quad (\text{ Nhớ rằng: } a_{k-2}^2 + 2 = a_{k-1}a_{k-3})\\
&= \frac{15a_{k-1}^2 - 4a_{k-1}a_{k-2} + a_{k-1}(a_{k-1} - 4a_{k-2} + a_{k-3})}{a_{k-1}}\\
&= \frac{15a_{k-1}^2 - 4a_{k-1}a_{k-2}}{a_{k-1}}\\
&\quad (\text{Do } a_{k-1} - 4a_{k-2} + a_{k-3} = 0)\\
&= 15a_{k-1} - 4a_{k-2} = 4(a_{k-1} - a_{k-2}) - a_{k-1}\\
&= 4a_k - a_{k-1}.
\end{aligned}$$

Vậy (2) cũng đúng tới $n = k+1$. *Theo nguyên lý quy nạp ta được (2) đúng với mọi* $n \in \mathbb{N}\ ;\ n \geq 3$.
Từ (3) ta thấy ngay $\forall n \in \mathbb{N}^* : a_n \in \mathbb{Z}$. *Ngoài ra, ta đã chứng minh được.*

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = \dfrac{a_{n-1}^2+2}{a_{n-2}}\ \ (n \geq 3) \end{cases} \quad (*) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}\ \ (n \geq 3) \end{cases} \quad . \ (**)$$

Để tìm số hạng tổng quát ta giải phương trình (**). Có phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2 + \sqrt{3} \quad \text{hoặc} \quad \lambda = 2 - \sqrt{3}.$$

Do đó:

$$a_n = a.(2+\sqrt{3})^n + b.(2-\sqrt{3})^n. \ (4)$$

Thay vào điều kiện biên ta tìm được

$$a = \frac{1}{2}(3 - \frac{5}{\sqrt{3}})\ ;\ b = \frac{1}{2}(3 + \frac{5}{\sqrt{3}}).$$

Vậy ta có số hạng tổng quát cần tìm là.

$$a_n = \frac{1}{2}\left[(3 - \frac{5}{\sqrt{3}})(2+\sqrt{3})^n + (3 + \frac{5}{\sqrt{3}})(2-\sqrt{3})^n\right].$$

Ví dụ 3.27. *Cho dãy số* (u_n) *thoả mãn.*

$$u_1 = \alpha\ ;\ u_{n+1} = au_n + \sqrt{bu_n^2 + c}\ \text{ với } a^2 - b = 1\ ;\ \alpha > 0\ ;\ a > 1\ \ (*)$$

Hãy tuyến tính hoá dãy số trên.

Giải.

$$\begin{aligned} u_{n+1} = au_n + \sqrt{bu_n^2 + c} &\Leftrightarrow u_{n+1} - au_n = \sqrt{bu_n^2 + c} \\ &\Rightarrow (u_{n+1} - au_n)^2 = bu_n^2 + c \\ &\Rightarrow u_{n+1}^2 + (a^2 - b)u_n^2 = 2au_{n+1}u_n + c \\ &\Rightarrow u_{n+1}^2 + u_n^2 = 2au_{n+1}u_n + c\ \ (1) \\ &\Rightarrow u_n^2 - u_{n-1}^2 = 2au_nu_{n-1} + c\ \ (2) \end{aligned}$$

Trừ từng vế (1) và (2) ta được .

$$u_{n+1}^2 - u_{n-1}^2 = 2au_n(u_{n+1} - u_{n-1})$$

Mà $u_{n+1} - u_{n-1} > 0$ *nên suy ra.*

$$u_{n+1} - 2au_n + u_{n-1} = 0$$

Nói cách khác:

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \alpha\ ;\ u_2 = a\alpha + \sqrt{b\alpha^2 + c} \\ u_{n+1} - 2au_n + u_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Như vậy việc tuyến tính hoá đã thực hiện xong.

Ví dụ 3.28. *Cho dãy số* (x_n) *thoả mãn.*

$$x_1 = \alpha\ ;\ x_{n+1} = \frac{x_n}{a + \sqrt{x_n^2 + b}}\ \text{ với } a^2 - b = 1\ ;\ \alpha > 0\ ;\ a > 1\ \ (**)$$

Hãy tuyến tính hoá dãy số trên.

Giải.

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{a + \sqrt{x_n^2 + b}} \Leftrightarrow \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{a}{x_n} + \sqrt{1 + \frac{b}{x_n}}\ \ (3)$$

Đặt $u_n = \dfrac{1}{x_n}$*. Khi đó ta có thể viết (2) dưới dạng.*

$$u_1 = \frac{1}{\alpha}\ ;\ u_{n+1} = au_n + \sqrt{bu_n^2 + 1}\ \text{ với } a^2 - b = 1\ ;\ \alpha > 0\ ;\ a > 1$$

Đó chính là phương trình sai phân mà ta đã tuyến tính hoá trong ví dụ 2 ở trên.

Ví dụ 3.29. *Cho dãy số* (u_n) *thoả mãn.*

$$u_1 = \alpha \; ; \; u_2 = \beta \; ; \; u_{n+1} = \frac{a + u_n^2}{u_{n-1}} \text{ với } a \; ; \; \alpha \; ; \; \beta \in \mathbb{R} \; (*)$$

Hãy tuyến tính hoá dãy số trên.

Giải.

$$u_{n+1} = \frac{a + u_n^2}{u_{n-1}} \Leftrightarrow u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2 + a \; (1)$$

$$\Rightarrow u_n u_{n-2} = u_{n-1}^2 + a \; (2)$$

Trừ từng vế của (1) và (2) ta được.

$$quad u_{n+1}u_{n-1} - u_n u_{n-2} = u_n^2 - u_{n-1}^2$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}u_{n-1} + u_{n-1}^2 = u_n^2 + u_n u_{n-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_n}{u_{n+1} + u_{n-1}} = \frac{u_{n-1}}{u_n + u_{n-2}}$$

$$\Rightarrow \frac{u_n}{u_{n+1} + u_{n-1}} = \frac{u_{n-1}}{u_n + u_{n-2}} = \cdots = \frac{u_2}{u_3 + u_1} = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \alpha + \beta^2} := k$$

Do đó $u_n = k(u_{n+1} + u_{n-1})$ *hay là.*

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = \alpha \; ; \; u_2 = \beta \\ k u_{n+1} - u_n + k u_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Như vậy việc tuyến tính hoá đã thực hiện xong.

Ví dụ 3.30. *Cho dãy số* (x_n) *thoả mãn.*

$$x_1 = \alpha \; ; \; x_2 = \beta \; ; \; x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2bx_n - bx_{n-1} + c}{b + x_{n-1}} \text{ với } \alpha; \beta \in \mathbb{R} \; ; \; n \geq 2 \; (1)$$

Hãy tuyến tính hoá dãy số trên.

Giải.

$$(1) \Leftrightarrow x_{n+1} + b = \frac{x_n^2 + 2bx_n - bx_{n-1} + c}{b + x_{n-1}} + b = \frac{(x_n + b)^2 + c}{x_{n-1} + b} \; (2)$$

Đặt $y_n = x_n + b$ *ta được phương trình sai phân.*

$$y_1 = \alpha + b \; ; \; y_2 = \beta + b \; ; \; y_{n+1} = \frac{c + y_n^2}{y_{n-1}} \text{ với } c \; ; \; \alpha \; ; \; \beta \in \mathbb{R} \; (*)$$

Đó chính là phương trình sai phân mà ta đã tuyến tính hoá trong ví dụ 4 ở trên.

3.6.3 Một số ví dụ khác

Ví dụ 3.31. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số* $\{f(n)\}$ $(n \in \mathbb{N})$ *được cho bởi.*

$$f(0) = 2\ ;\ f(n+1) = 3f(n) + \sqrt{8f^2(n)+1}\ \ (1)\ \ \text{với mọi } n \geq 0$$

Giải. *Từ giả thiết ta có:* $f(n+1) - 3f(n) = \sqrt{8f^2(n)+1} \geq 0$ *nên.*

$$(f(n+1) - 3f(n))^2 = 8f^2(n) + 1 \Rightarrow f^2(n+1) + f^2(n) = 6f(n)f(n+1) + 1\ \ (*)$$

Thay n *bởi* $n-1$ *ta được:*

$$f^2(n) + f^2(n-1) = 6f(n-1)f(n) + 1\ \ (**)$$

Trừ từng vế (*) và (**) ta được

$$f^2(n+1) - f^2(n-1) = 6f(n)(f(n+1) - f(n-1))\ \ (***)$$

Từ giả thiết ta còn có $f(n) > 0$ *với mọi* n *(chứng minh bằng quy nạp). Ngoài ra.*

$$f(n{+}1) > 3f(n) = 9f(n{-}1) + 3\sqrt{8f^2(n-1)+1} > f(n{-}1) \Rightarrow f(n{+}1) - f(n{-}1) > 0$$

nên: $(***) \Leftrightarrow f(n+1) + f(n-1) = 6f(n)$. *Vậy ta được phương trình sai phân tuyến tính.*

$$\begin{cases} f(0) = 2\ ;\ f(1) = 6 + \sqrt{33} \\ f(n+2) - 6f(n+1) + f(n) = 0 \end{cases}$$

Giải phương trình này ta được.

$$f(n) = \frac{(8+\sqrt{66})(3+\sqrt{8})^n}{8} + \frac{(8-\sqrt{66})(3-\sqrt{8})^n}{8}$$

Dễ thấy $f(n)$ *xác định như trên thoả mãn (1).*

Ví dụ 3.32. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số* $\{f(n)\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *được cho bởi.*

$$f(1) = \alpha\ ;\ f(2) = \beta\ ;\ f(n+1) = \frac{f^2(n) + a}{f(n-1)}\ \ (*)\ \ \text{với mọi } n \geq 2$$

Giải. *Khi đó, (*) có thể được viết lại dưới dạng.*

$$f(n+1)f(n-1) = f^2(n) + a\ \ \text{với mọi } n \geq 2$$

Trong đẳng thức trên thay n *bởi* $n-1$ *ta được .*

$$f(n)f(n-2) = f^2(n-1) + a\ \ \text{với mọi } n \geq 3$$

Trừ từng vế hai đẳng thức sau ta được.

$$f(n+1)f(n-1) - f(n)f(n-2) = f^2(n) - f^2(n-1) \text{ với mọi } n \geq 3$$

Hay là.

$$f(n+1)f(n-1) + f^2(n-1) = f(n)f(n-2) + f^2(n) \text{ với mọi } n \geq 3$$

Từ đó có.

$$\frac{f(n)}{f(n+1)+f(n-1)} = \frac{f(n-1)}{f(n)+f(n-2)} \text{ với mọi } n \geq 3$$

Đặt $g(n) := \dfrac{f(n)}{f(n+1)+f(n-1)}$ $(n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\})$ *ta có.*

$$g(n) = g(n-1) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N} \setminus \{0;1\}$$

Do đó.

$$g(n) = g(n-1) = \cdots = g(2) = \frac{f(2)}{f(3)+f(1)} = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2+a} := k$$

Ta được phương trình sai phân tuyến tính

$$f(1) = \alpha \text{ ; } f(2) = \beta \text{ ; } kf(n+2) - f(n+1) + kf(n) = 0 \ (n \geq 1)$$

Giải phương trình này ta được biểu thức của $f(n)$ *cần tìm.*

Chú ý: *Các phương trình dạng.*

$$1) \ f(n+2) = \frac{f^2(n+1) + 2bf(n+1) - bf(n) + c}{f(n)+b}, \ (n \in \mathbb{N}^*) \ (1)$$

(Trong đó: $f(1) = \alpha, \ f(2) = \beta$*)*

$$2) \ f(n+1) = \frac{f^2(n)}{(1+af^2(n))f(n-1)}, \ (n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2) \ (2)$$

(Trong đó: $a > 0, \ f(1) = \alpha \neq 0, \ f(2) = \beta \neq 0$*)*

có thể đưa được về dạng của ví dụ trên. Thật vậy, ta có.

$$\begin{aligned}(1) \Leftrightarrow f(n+1) &= \frac{f^2(n)+2bf(n)+b^2-bf(n-1)-b^2+c}{f(n-1)+b}\\ &= \frac{[f(n)+b]^2-b[f(n-1)+b]+c}{f(n-1)+b}\\ &= \frac{[f(n)+b]^2+c}{f(n-1)+b}-b\\ \Leftrightarrow f(n+1)+b &= \frac{[f(n)+b]^2+c}{f(n-1)+b} \ \text{ với mọi } n \geq 1\\ \text{Đặt } g(n) &= f(n+1)+b \ \text{ Ta được.}\\ g(n+1) &= \frac{g^2(n)+c}{g(n-1)}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

Đó là phương trình có dạng đã xét ở ví dụ 2 ở trên. Từ các điều kiện của phương trình (2) ta có $f(n) \neq 0$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$*, do đó.*

$$\begin{aligned}(2) \Leftrightarrow \frac{1}{f(n+1)} &= \frac{1+af^2(n)}{f^2(n)}.f(n-1)\\ &= \left(\frac{1}{f^2(n)}+a\right)\frac{1}{\dfrac{1}{f(n-1)}}\\ \Leftrightarrow g(n+1) &= \frac{g^2(n)+a}{g(n-1)}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.\\ \text{Trong đó, } g(n) &= \frac{1}{f(n)}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ g(1) = \frac{1}{\alpha}, \ g(1) = \frac{1}{\beta}\end{aligned}$$

Đó là phương trình có dạng đã xét ở ví dụ 2.

Ví dụ 3.33. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số* $\{f(n)\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *được cho bởi.*

$$f(1) = \frac{9}{8}\ ;\ f(n+1) = nf(n) + n.n! \ \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*$$

Giải. *Ta có nghiệm tổng quát của phương trình* $f(n+1) - nf(n) = 0$ *là.*

$$\hat{f}(n) = C.1.2.\cdots.(n-1) = C.(n-1)!$$

Ta sẽ tìm nghiệm riêng của phương trình đã cho dưới dạng $f^*(n) = C(n).(n-1)!$. *Thay vào phương trình đã cho được:*

$$C(n+1).n! = nC(n).(n-1)! + n.n! \Leftrightarrow \Delta C = C(n+1) - C(n) = n \ \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}$$

Từ đây dễ dàng có.

$$C(n) = \frac{1}{2}(n^2 - n) \Rightarrow f^* = \frac{1}{2}(n^2 - n)(n-1)!$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là.

$$f(n) = C.(n-1)! + \frac{1}{2}(n-1)^2(n-1)!$$

Thay vào điều kiện biên được $C = 1$. *Vậy* $f(n) = (n-1)! + \frac{1}{2}(n-1)^2(n-1)!$. *Dễ thấy* $f(n)$ *xác định như trên thoả mãn bài ra.*

Ví dụ 3.34. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số* $\{f(n)\}$ $(n \in \mathbb{N})$ *được cho bởi.*

$$f(0) = \beta \;;\; f(n+1) = 2f^2(n) - 1 \;\text{ với mọi } n \in \mathbb{N}$$

Giải. *Ta có. Nếu* $\beta = 1$ *thì.*

$$\begin{aligned} &f(0) = 1 \\ &f(1) = 2f^2(0) - 1 = 1 \\ &f(2) = 2f^2(1) - 1 = 1 \\ &f(3) = 2f^2(2) - 1 = 1 \end{aligned}$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được: $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = 1$. *Nếu* $\beta = -1$ *thì tương tự ta cũng chứng minh được:* $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = 1$. *Nếu* $|\beta| < 1$ *thì tồn tại* θ *sao cho* $\cos\theta = \beta \Leftrightarrow \theta = \arccos\beta$. *Khi đó, ta có:*

$$\begin{aligned} &f(0) = \cos\theta = \cos 2^0\theta \\ &f(1) = 2f^2(0) - 1 = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2^1\theta \\ &f(2) = 2f^2(1) - 1 = 2\cos^2 2\theta - 1 = \cos 2^2\theta \\ &f(3) = 2f^2(2) - 1 = 2\cos^2 2^2\theta - 1 = \cos 2^3\theta \end{aligned}$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được: $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = \cos 2^n\theta$. *Nếu* $|\beta| > 1$ *thì tồn tại* θ *sao cho* $\cosh\theta = \beta$. *Khi đó, ta có:*

$$\begin{aligned} &f(0) = \cosh\theta = \cosh 2^0\theta \\ &f(1) = 2f^2(0) - 1 = 2\cosh^2\theta - 1 = \cosh 2^1\theta \\ &f(2) = 2f^2(1) - 1 = 2\cosh^2 2\theta - 1 = \cosh 2^2\theta \\ &f(3) = 2f^2(2) - 1 = 2\cosh^2 2^2\theta - 1 = \cosh 2^3\theta \end{aligned}$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được: $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = \cosh 2^n\theta$. *Vì* $\cosh\theta = \beta$ *nên:* $\dfrac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} = \beta$. *Giải phương trình này ta được.*

$$e^\theta = \beta - \sqrt{\beta^2 - 1} \quad \textit{hoặc} \quad e^\theta = \beta + \sqrt{\beta^2 - 1}$$

Suy ra.

$$f(n) = \frac{1}{2}\left[(e^\theta)^{2^n} + \frac{1}{(e^\theta)^{2^n}}\right] = \frac{1}{2}\left[(\beta - \sqrt{\beta^2-1})^{2^n} + (\beta + \sqrt{\beta^2-1})^{2^n}\right]$$

Dễ thấy các dãy số xác định như trên thoả mãn phương trình đã cho. Vậy ta có.

$$f(n) = \begin{cases} 1 \ \ \textit{khi } \beta = 1 \\ \begin{cases} -1 \ \ (n = 0) \\ \ \ 1 \ \ (n \geq 1) \end{cases} \quad \textit{khi } \beta = -1 \\ \cos 2^n \arccos\beta \ \ \textit{khi } |\beta| < 1 \\ \dfrac{1}{2}\left[(\beta - \sqrt{\beta^2-1})^{2^n} + (\beta + \sqrt{\beta^2-1})^{2^n}\right] \ \ \textit{khi } |\beta| > 1 \end{cases}$$

Ví dụ 3.35. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số* $\{f(n)\}$ $(n \in \mathbb{N})$ *được cho bởi.*

$$f(0) = \alpha\ ;\ f(n+1) = af^2(n) + b \ \ (n \in \mathbb{N}) \ \ \textit{với } ab = -2$$

HDG: *Đặt* $f(n) = -bg(n), n \in \mathbb{N}^*$, *ta được.*

$$g(0) = -\frac{\alpha}{b} := \beta\ ;\ g(n+1) = 2g^2(n) - 1 \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

Đó chính là ví dụ 4.

Ví dụ 3.36. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số* $\{f(n)\}$ $(n \in \mathbb{N})$ *được cho bởi.*

$$f(1) = \alpha\ ;\ f(n+1) = f^2(n) - 2a^{2^n} \ \ (n \in \mathbb{N}^*) \ \ \textit{với } a > 0.$$

HDG: *Đặt* $f(n) = 2a^{2^{n-1}}g(n), n \in \mathbb{N}^*$, *ta được.*

$$g(1) = -\frac{\alpha}{2a} := \beta\ ;\ g(n+1) = 2g^2(n) - 1 \ \ (n \in \mathbb{N}^*).$$

Đó chính là ví dụ 4.

Ví dụ 3.37. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số* $\{f(n)\}$ $(n \in \mathbb{N})$ *được cho bởi.*

$$f(n+1) = af^2(n) + bf(n) + c \ \ (n \in \mathbb{N}) \ \ (1) \ \ \textit{với } a \neq 0\ ;\ c = \frac{b^2 - 2b}{4a}.$$

Giải. *Khi đó ta có.*

$$\begin{aligned}
(1) \Leftrightarrow f(n+1) + \frac{b}{2a} &= a\left[f(n) + \frac{b}{2a}\right]^2 + \frac{b^2-4ac}{4a} + \frac{b}{2a} \\
&= a\left[f(n) + \frac{b}{2a}\right]^2 + \frac{b^2-(b^2-2b)+2b}{4a} \\
&= a\left[f(n) + \frac{b}{2a}\right]^2 \\
\Leftrightarrow g(n+1) &= ag^2(n) \ \ (\text{với } g(n) = f(n) + \frac{b}{2a}) \\
\Rightarrow g(n+1) &= a[g(n)]^2 = a[ag^2(n-1)]^2 = a^3[g(n-1)]^{2^2} = \\
&= \cdots \\
&= a^{2^n-1}[g(1)]^{2^n} = a^{2^n-1}[\alpha + \frac{b}{2a}]^{2^n} \\
\Rightarrow g(n) &= a^{2^{n-1}-1}[\alpha + \frac{b}{2a}]^{2^{n-1}} \\
\Rightarrow f(n) &= a^{2^{n-1}-1}[\alpha + \frac{b}{2a}]^{2^{n-1}} + \frac{b}{2a}
\end{aligned}$$

Bằng phép quy nạp ta dễ dàng chứng tỏ được $f(n)$ xác định như trên thoả mãn phương trình đã cho. Vậy ta được đáp số.

$$f(n) = a^{2^{n-1}-1}[\alpha + \frac{b}{2a}]^{2^{n-1}} + \frac{b}{2a} \ \ (n \in \mathbb{N}^*).$$

Ví dụ 3.38. *Tìm dãy số (x_n) thoả mãn các điều kiện sau.*

$$x_1 = a \ ; \ x_{n+1} = \frac{x_n^2 + d}{2x_n} \ \text{ với mọi } n \geq 1. \ (1).$$

Giải.
+) Nếu $d = 0$ thì ta có ngay.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n \Rightarrow x_n = a.(\frac{1}{2})^{n-1}.$$

+) **Xét trường hợp $d > 0$.** *Giả sử $u_n; v_n$ là một nghiệm của hệ phương trình sai phân.*

$$\begin{cases} u_1 = a \ ; \ v_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + dv_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_nv_n \end{cases}, \ \ (2)$$

khi đó, $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ *là nghiệm của phương trình (1). Thật vậy, ta có:*

$$x_1 = \frac{u_1}{v_1} = \frac{a}{1} = a \Rightarrow \text{ Khẳng định đúng với } n = 1.$$

Giả sử khẳng định đúng tới n, tức là: $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ *là nghiệm của (1). Khi đó.*

$$x_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{u_n^2 + dv_n^2}{2u_nv_n} = \frac{\dfrac{u_n^2}{v_n^2} + d}{2\dfrac{u_n}{v_n}} = \frac{x_n^2 + d}{2x_n}.$$

Vậy x_{n+1} *cũng là nghiệm của (1). Tức là khẳng định cũng đúng tới* $n+1$*. Theo nguyên lý quy nạp toán học, khẳng định trên đúng với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$*. Vậy, để giải (1) ta đi giải (2). Viết lại (2) dưới dạng.*

$$\begin{cases} u_1 = a\ ;\ v_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + dv_n^2 \ \ (*) \\ \sqrt{d}v_{n+1} = 2\sqrt{d}u_nv_n \ \ (**) \end{cases} . \ (3)$$

Cộng từng vế (*) và (**) ta được.

$$u_{n+1} + \sqrt{d}v_{n+1} = (u_n + \sqrt{d}v_n)^2 \ \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Từ đó có.

$$u_{n+1} + \sqrt{d}v_{n+1} = (u_1 + \sqrt{d}v_1)^{2^n} = (a + \sqrt{d})^{2^n}. \ (4)$$

Trừ từng vế (*) và (**) ta được.

$$u_{n+1} - \sqrt{d}v_{n+1} = (u_n - \sqrt{d}v_n)^2 \ \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Từ đó có.

$$u_{n+1} - \sqrt{d}v_{n+1} = (u_1 - \sqrt{d}v_1)^{2^n} = (a - \sqrt{d})^{2^n}. \ (5)$$

Từ (4) và (5) ta có.

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left[(a+\sqrt{d})^{2^n} + (a-\sqrt{d})^{2^n}\right] \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2\sqrt{d}}\left[(a+\sqrt{d})^{2^n} - (a-\sqrt{d})^{2^n}\right] \end{cases} . \ (6)$$

Do $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ *nên từ (6) ta có.*

$$x_n = \sqrt{d}\frac{(a+\sqrt{d})^{2^{n-1}} + (a-\sqrt{d})^{2^{n-1}}}{(a+\sqrt{d})^{2^{n-1}} - (a-\sqrt{d})^{2^{n-1}}}.$$

Có thể kiểm tra nghiệm này thoả mãn bằng cách thử vào (1).
*+)*__Xét trường hợp $d < 0$.__ *Đặt $d = -q$ $(q > 0)$. Tương tự trên, ta sẽ chứng minh.*
Giả sử $u_n; v_n$ là một nghiệm của hệ phương trình sai phân.

$$\begin{cases} u_1 = a\ ;\ v_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - qv_n^2 \\ v_{n+1} = 2u_nv_n \end{cases}, \quad (7)$$

khi đó, $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ là nghiệm của phương trình (1). Thật vậy, ta có:

$$x_1 = \frac{u_1}{v_1} = \frac{a}{1} = a \Rightarrow \text{ Khẳng định đúng với } n = 1.$$

Giả sử khẳng định đúng tới n, tức là: $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ là nghiệm của (1). Khi đó.

$$x_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{u_n^2 - qv_n^2}{2u_nv_n} = \frac{\dfrac{u_n^2}{v_n^2} - q}{2\dfrac{u_n}{v_n}} = \frac{x_n^2 + d}{2x_n}.$$

Vậy x_{n+1} cũng là nghiệm của (1). Tức là khẳng định cũng đúng tới $n+1$. Theo nguyên lý quy nạp toán học, khẳng định trên đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Vậy, để giải phương trình (1) ta đi giải hệ (7). Viết lại (7) dưới dạng.

$$\begin{cases} u_1 = a\ ;\ v_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - qv_n^2 \ \ (***) \\ i\sqrt{q}v_{n+1} = 2i\sqrt{q}u_nv_n \ \ (****) \end{cases}. \quad (8)$$

Trong đó i là đơn vị ảo ($i^2 = -1$). Cộng từng vế (***) và (****) ta được.

$$u_{n+1} + i\sqrt{q}v_{n+1} = (u_n + i\sqrt{q}v_n)^2 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Từ đó có.

$$u_{n+1} + i\sqrt{q}v_{n+1} = (u_1 + i\sqrt{q}v_1)^{2^n} = (a + i\sqrt{q})^{2^n}. \quad (9)$$

Trừ từng vế (***) và (****) ta được.

$$u_{n+1} - i\sqrt{q}v_{n+1} = (u_n - i\sqrt{q}v_n)^2 \text{ với mọi } n \geq 1.$$

Từ đó có.

$$u_{n+1} - i\sqrt{q}v_{n+1} = (u_1 - i\sqrt{q}v_1)^{2^n} = (a - i\sqrt{q})^{2^n}. \quad (10)$$

Từ (9) và (10) ta có.

$$\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left[(a+i\sqrt{q})^{2^n} + (a-i\sqrt{q})^{2^n}\right] \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2i\sqrt{q}}\left[(a+i\sqrt{q})^{2^n} - (a-i\sqrt{q})^{2^n}\right] \end{cases}. \quad (11)$$

Do $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ *nên từ (6) ta có.*

$$x_n = i\sqrt{q}\frac{(a+i\sqrt{q})^{2^{n-1}} + (a-i\sqrt{q})^{2^{n-1}}}{(a+i\sqrt{q})^{2^{n-1}} - (a-i\sqrt{q})^{2^{n-1}}}.$$

Cũng có thể kiểm tra nghiệm này thoả mãn bằng cách thử vào (1).

Ví dụ 3.39. *Biết rằng dãy số* (x_n) *có dạng* $x_n = f(n)$, *trong đó* $f(x)$ *là đa thức bậc không quá 2. Hãy xác định công thức tổng quát của dãy số biết ba số hạng đầu:* $x_1,\ x_2,\ x_3$.

Giải. *Giả sử* $f(x) = ax^2 + bx + c$. *Theo giả thiết ta có*

$$\begin{cases} a+b+c &= x_1 \\ 4a+2b+c &= x_2 \\ 8a+4b+c &= x_3 \end{cases}$$

Giải hệ này ta được

$$\begin{cases} a &= \dfrac{x_1 - 2x_2 + x_3}{2} \\ b &= -\dfrac{5x_1 - 8x_2 + 3x_3}{2} \\ c &= 3x_1 - 3x_2 + x_3 \end{cases}$$

Vậy

$$f(n) = \frac{x_1 - 2x_2 + x_3}{2}n^2 - \frac{5x_1 - 8x_2 + 3x_3}{2}n + 3x_1 - 3x_2 + x_3.$$

là hàm số cần tìm.

Giải. *Viết* $f(n)$ *dưới dạng.*

$$f(n) = a(n-2)(n-3) + b(n-1)(n-3) + c(n-1)(n-2).$$

Lần lượt cho $n = 1,\ 2,\ 3$ *ta được*

$$\begin{cases} x_1 = f(1) = a.(1-2)(1-3) = 2a & \Rightarrow a = \dfrac{x_1}{2} \\ x_2 = f(2) = b.(2-1)(2-3) = -b & \Rightarrow b = -x_2 \\ x_3 = f(3) = c.(3-1)(3-2) = 2c & \Rightarrow c = \dfrac{x_3}{2} \end{cases}$$

Vậy công thức cần tìm có dạng

$$x_n = f(n) = \frac{x_1}{2}(n-2)(n-3) - x_2(n-1)(n-3) + \frac{x_3}{2}(n-1)(n-2).$$

Ví dụ 3.40. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số cho bởi hệ thức truy hồi sau.*

$$x_1 = 0\ ;\ x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{n+1}.$$

Giải. *Viết lại điều kiện đã cho dưới dạng.*

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \ \ quad\ \ (1) \\ 2x_2 &= x_1 + 1 \ \ quad(2) \\ 3x_3 &= x_2 + 1 \ \ quad(3) \\ \cdots\ &\cdots\ \cdots \\ (n-1)x_n &= x_{n-2} + 1 \ \ quad(n-1) \\ nx_n &= x_{n-1} + 1 \ \ quad(n) \end{aligned}$$

Nhân hai vế của đẳng thức thứ k ở trên với $(k-1)!$, cộng từng vế các đẳng thức thu được và rút gọn các số hạng đồng dạng ở hai vế ta được.

$$n!.x_n = 1! + 2! + \cdots + (n-1)! \Rightarrow x_n = \frac{1}{n!}.\sum_{k=1}^{n-1} k!$$

là công thức số hạng tổng quát cần tìm.

3.6.4 Bài tập.

1. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số $\{f(n)\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ được cho bởi hệ thức truy hồi.*

$$f(1) = \alpha\ ;\ f(n+1) = 2a^{2^n} f^2(n) - a^{(n+1)2^n} \ \ (n \in \mathbb{N}^*) \ \ \text{với } a > 0.$$

Đáp số.

$$f(n) = \begin{cases} a^{n2^{n-1}} \ \ (n \in \mathbb{N}^*) \ \ \text{nếu } \alpha = a \\ \begin{cases} -a & quad khi\ n = 1 \\ a^{n2^{n-1}} & khi\ n \geq 2 \end{cases} \quad \text{nếu } \alpha = -a \\ a^{n2^{n-1}} \cos 2^{n-1}\theta \ \ (n \in \mathbb{N}^*) \ \ \text{nếu } |\alpha| < a \\ \dfrac{1}{2} a^{(n-1)2^{n-1}} \left[\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - a^2}\right)^{2^{n-1}} + \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - a^2}\right)^{2^{n-1}} \right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n \in \mathbb{N}^*) \ \ \text{nếu } |\alpha| > a \end{cases}$$

2. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số* $\{f(n)\}$ $(n \in \mathbb{N})$ *được cho bởi hệ thức truy hồi.*

$$f(0) = \alpha\ ;\ f(n+1) = af^3(n) - 3f(n)\ \ (n \in \mathbb{N})\ \ \textit{với}\ a > 0.$$

Đáp số.

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{a}} \cos 3^n \arccos \dfrac{\alpha\sqrt{a}}{2}\ \ (n \in \mathbb{N})\ \ \textit{nếu}\ |\alpha| \le \dfrac{2}{\sqrt{a}} \\ \dfrac{1}{2^{3^n}} \left[\left(\alpha\sqrt{a} - \sqrt{\alpha^2 a - 4}\right)^{3^n} + \left(\alpha\sqrt{a} + \sqrt{\alpha^2 a - 4}\right)^{3^n} \right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (n \in \mathbb{N})\ \ \textit{nếu}\ |\alpha| > \dfrac{2}{\sqrt{a}} \end{cases}$$

3. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số* $\{f(n)\}$ $(n \in \mathbb{N})$ *được cho bởi hệ thức truy hồi.*

$$f(0) = \alpha\ ;\ f(n+1) = f^3(n) - 3a^{3^n} f(n)\ \ (n \in \mathbb{N})\ \ \textit{với}\ a > 0.$$

Đáp số.

$$f(n) = \begin{cases} 2\sqrt{a}^{3^n} \cos 3^n \arccos \dfrac{\alpha}{2\sqrt{a}}\ \ (n \in \mathbb{N})\ \ \textit{nếu}\ |\alpha| \le 2\sqrt{a} \\ \dfrac{1}{2^{3^n}} \left[\left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4a}\right)^{3^n} + \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4a}\right)^{3^n} \right] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (n \in \mathbb{N})\ \ \textit{nếu}\ |\alpha| > \dfrac{2}{\sqrt{a}} \end{cases}$$

4. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số* $\{f(n)\}$ $(n \in \mathbb{N})$ *được cho bởi hệ thức truy hồi:*

$$f(0) = \alpha\ ;\ f(n+1) = af^3(n) + 3f(n)\ \ (n \in \mathbb{N})\ \ \textit{với}\ a > 0\ ;\ |\alpha| > \frac{2}{\sqrt{a}}.$$

Đáp số:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{a}} \left[\left(\frac{\alpha\sqrt{a}}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2 a}{4} + 1} \right)^{3^n} + \left(\frac{\alpha\sqrt{a}}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2 a}{4} + 1} \right)^{3^n} \right]\ (n \in \mathbb{N}^*)$$

5. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số* $\{f(n)\}$ $(n \in \mathbb{N})$ *được cho bởi hệ thức truy hồi:*

$$f(0) = \alpha\ ;\ f(n+1) = f^3(n) + 3a^{3^n} f(n)\ \ (n \in \mathbb{N})\ \ \textit{với}\ |\alpha| > 2\sqrt{a}.$$

Đáp số:

$$f(n) = \frac{1}{2^{3^n}} \left[\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4a}\right)^{3^n} + \left(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4a}\right)^{3^n} \right]\ \ (n \in \mathbb{N}).$$

6. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số* $\{f(n)\}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ *được cho bởi hệ thức truy hồi:*

$$f(1) = \alpha \ ; \ f(n+1) = af^3(n) + bf^2(n) + cf(n) + d \ \ (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$\text{với } a > 0 \ ; \ c = \frac{b^2}{3a} \ ; \ d = \frac{b(c-3)}{9a} \ ; \ \alpha > -\frac{b}{3a}.$$

Đáp số:

$$f(n) = \left(\alpha + \frac{b}{3a}\right)^{3^{n-1}} (\sqrt{a})^{3^{n-1}-1} - \frac{b}{3a} \ \ (n \in \mathbb{N}^*).$$

7. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số* $\{f(n)\}$ $(n \in \mathbb{N})$ *được cho bởi hệ thức truy hồi:*

$$f(0) = \alpha \ ; \ f(n+1) = af^3(n) + bf^2(n) + cf(n) + d \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

$$\text{với } a > 0 \ ; \ c = \frac{b^2 + 9a}{3a} \ ; \ d = \frac{b^3 + 18ab)}{27a^2} \ ; \ \alpha > \frac{2}{\sqrt{a}} - \frac{b}{3a}.$$

Đáp số:

$$f(n) = \frac{1}{2^{3^n}\sqrt{a}}\left[\left(\gamma\sqrt{a} - \sqrt{\gamma^2 a + 4}\right)^{3^n} + \left(\gamma\sqrt{a} + \sqrt{\gamma^2 a + 4}\right)^{3^n}\right] - \frac{b}{3a} \ (n \in \mathbb{N}^*).$$

$$(\text{ Với } \gamma = \alpha + \frac{b}{3a}).$$

8. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số* (x_n) $(n \in \mathbb{N}^*)$ *được cho bởi hệ thức truy hồi:*

$$x_1 = a \ ; \ x_{n+1} = \frac{n+1}{x_n + 1} \ \ (n \geq 1).$$

Đáp số:

$$x_n = n!\Big(a + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k!}\Big).$$

9. *Xác định số hạng tổng quát của dãy số* (x_n) $(n \in \mathbb{N}^*)$ *được cho bởi hệ thức truy hồi:*

$$x_1 = \frac{1}{2} \ ; \ x_{n+1} = \frac{2}{3 - x_n} \ \ (n \geq 1).$$

Đáp số:

$$x_n = \frac{3.2^{n-1} - 2}{3.2^{n-1} - 1}.$$

Chương 4

Phương trình hàm sai phân bậc hai

Trong chương này, ta giải hai bài toán về phương trình hàm tuyến tính thuần nhất bậc hai đối với hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn cộng tính; phương trình hàm tuyến tính thuần nhất bậc hai đối với hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn nhân tính. Ta sẽ giải quyết hai bài toán trên dựa vào kết quả của các bài toán về phương trình hàm tuyến tính bậc nhất đã có trong tài liệu tham khảo [3].

4.1 Hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn cộng tính

Định nghĩa 4.1. *Cho hàm số $f(x)$ và tập M $(M \subset D(f))$ Hàm $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn trên M nếu tồn tại số dương a sao cho*

$$\begin{cases} \forall x \in M \text{ ta đều có } x \pm a \in M \\ f(x+a) = f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

a được gọi là chu kỳ của hàm tuần hoàn $f(x)$.

Chu kỳ nhỏ nhất (nếu có) trong các chu kỳ của $f(x)$ được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm tuần hoàn $f(x)$.

Định nghĩa 4.2. *Cho hàm số $f(x)$ và tập M $(M \subset D(f))$ Hàm $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn trên M nếu tồn tại số dương a sao cho*

$$\begin{cases} \forall x \in M \text{ ta đều có } x \pm a \in M \\ f(x+a) = -f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

a được gọi là chu kỳ của hàm tuần hoàn $f(x)$.

Chu kỳ nhỏ nhất (nếu có) trong các chu kỳ của $f(x)$ được gọi là chu kỳ cơ sở của hàm tuần hoàn $f(x)$.

Định nghĩa 4.3. *$f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ a ($a \notin \{0, 1, -1\}$) trên M nếu $M \subset D(f)$ và*

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) = f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

Định nghĩa 4.4. *$f(x)$ được gọi là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ a ($a \notin \{0, 1, -1\}$) trên M nếu $M \subset D(f)$ và*

$$\begin{cases} \forall x \in M \Rightarrow a^{\pm 1}x \in M \\ f(ax) = -f(x), \forall x \in M \end{cases}$$

4.2 Phương trình hàm sai phân bậc hai với hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn

Bài toán 4.1. *Cho $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện:*

$$f(x + 2a) + \alpha f(x + a) + \beta f(x) = 0 \tag{4.1}$$

Phương trình có dạng (1.2.1) được gọi là phương trình tuyến tính thuần nhất bậc hai

Giải. *Xét phương trình*

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0 \tag{4.2}$$

(gọi là phương trình đặc trưng của phương trình (1.2.1))
Có

$$\triangle = \alpha^2 - 4\beta$$

a) Trường hợp $\triangle > 0$

Khi đó phương trình (4.2) có hai nghiệm thực $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Áp dụng định lý Viete:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -\alpha \\ \lambda_1\lambda_2 = \beta \end{cases}$$

thay vào (4.1)

$$\begin{aligned} (4.1) \ &\Leftrightarrow \ f(x + 2a) - (\lambda_1 + \lambda_2)f(x + a) + \lambda_1\lambda_2 f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ f(x + 2a) - \lambda_1 f(x + a) = \lambda_2[f(x + a) - \lambda_1 f(x)] \end{aligned} \tag{4.3}$$

Đặt $g_1(x) = f(x+a) - \lambda_1 f(x)$, *(1.2.3) trở thành*

$$g_1(x+a) = \lambda_2 g_1(x) \tag{1.2.3*}$$

Đặt $g_1(x) = |\lambda_2|^{\frac{x}{a}}.h(x)$. *Khi đó ta có* $h(x+a) = \begin{cases} h(x) & \text{nếu } \lambda_2 > 0 \\ -h(x) & \text{nếu } \lambda_2 < 0 \end{cases}$ *Khi đó ta có*

$$f(x+a) - \lambda_1 f(x) = |\lambda_2|^{\frac{x}{a}} h_1(x) \tag{4.4}$$

Đổi vai trò λ_2 *cho* λ_1 *và biến đổi tương tự ta được*

$$f(x+a) - \lambda_2 f(x) = |\lambda_1|^{\frac{x}{a}} h_2(x) \tag{4.5}$$

Trừ (4.4) cho (1.2.5) ta được

$$(\lambda_2 - \lambda_1) f(x) = |\lambda_2|^{\frac{x}{a}} h_1(x) - |\lambda_1|^{\frac{x}{a}} h_2(x)$$

Vậy

$$f(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big[|\lambda_2|^{\frac{x}{a}} h_1(x) - |\lambda_1|^{\frac{x}{a}} h_2(x)\Big]$$

trong đó $h_1(x)$ *và* $h_2(x)$ *là hai hàm tuỳ ý thoả mãn:*

$$h_1(x+a) = \begin{cases} h_1(x) & \text{nếu } \lambda_2 > 0 \\ -h_1(x) & \text{nếu } \lambda_2 < 0 \end{cases}; \quad h_2(x+a) = \begin{cases} h_2(x) & \text{nếu } \lambda_1 > 0 \\ -h_2(x) & \text{nếu } \lambda_1 < 0 \end{cases}$$

b) Trường hợp $\triangle = 0$

Tức là

$$\alpha^2 - 4\beta = 0 \text{ hay } \beta = \frac{\alpha^2}{4}$$

Khi đó phương trình (1.2.2) có nghiệm kép $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{\alpha}{2}$. *Do đó*

$$\begin{aligned} (4.1) \Leftrightarrow\ & f(x+2a) + \alpha f(x+a) + \frac{\alpha^2}{4} f(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & f(x+2a) + \Big(\frac{\alpha}{2}\Big) f(x+a) = -\frac{\alpha}{2}\Big[f(x+a) + (\frac{\alpha}{2}) f(x)\Big) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Đặt $f(x+a) + \frac{\alpha}{2} f(x) = g(x)$

b1) Trường hợp $-\dfrac{\alpha}{2} = 1$ *hay* $\alpha = -2$.

Khi đó (1.2.6) trở thành

$$\begin{aligned} & f(x+2a) - f(x+a) = f(x+a) - f(x) \\ \Leftrightarrow\ & f(x+a) - f(x) = g(x), \end{aligned} \tag{1.2.6*}$$

với $g(x+a) = g(x)$
Ta có $g(x) = \frac{(x+a)-x}{a}g(x) = \frac{x+a}{a}g(x+a) - \frac{x}{a}g(x)$, *phương trình (1.2.6*) trở thành*
$f(x+a) - \frac{(x+a)}{a}g(x+a) = f(x) - \frac{x}{a}g(x)$
Đặt $f(x) - \frac{x}{a}g(x) = h(x)$ *ta có*

$$f(x) = h(x) + \frac{xg(x)}{a}$$

trong đó $h(x)$ *là hàm tuỳ ý sao cho* $h(x+a) = h(x)$.

b2) Trường hợp $0 < -\dfrac{\alpha}{2} \neq 1$ *hay* $2 \neq \alpha < 0$ *Bài toán quy về việc giải phương trình dạng*

$$f(x+a) + (\frac{\alpha}{2})f(x) = g(x)$$

với $g(x+a) = -\dfrac{\alpha}{2}g(x)$
Tương tự việc giải (1.2.3) ta có*

$$g(x) = (-\frac{\alpha}{2})^{\frac{x}{a}}h_1(x),\ \text{với}\ h_1(x+a) = h_1(x)$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
&f(x+a) - (-\frac{\alpha}{2})f(x) = (-\frac{\alpha}{2})^{\frac{x}{a}}h_1(x)\\
\Leftrightarrow\ &\frac{f(x+a)}{(-\frac{\alpha}{2})^{\frac{x}{a}}} - (-\frac{\alpha}{2})\frac{f(x)}{(-\frac{\alpha}{2})^{\frac{x}{a}}} = h_1(x)\\
\Leftrightarrow\ &\frac{f(x+a)}{(-\frac{\alpha}{2})^{\frac{x+a}{a}}} - \frac{f(x)}{(-\frac{\alpha}{2})^{\frac{x}{a}}} = \frac{h_1(x)}{-\frac{\alpha}{2}} \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Đặt

$$\frac{f(x)}{(-\frac{\alpha}{2})^{\frac{x}{a}}} = I_1(x);\ \frac{h_1(x)}{-\frac{\alpha}{2}} = h_2(x)$$

$$(4.7)\ \Leftrightarrow\ I_1(x+a) - I_1(x) = h_2(x),\ \text{với}\ h_2(x+a) = h_2(x)$$

Tương tự cách giải (1.2.6) ta có*

$$\begin{aligned} I_1(x) &= k_1(x) + \frac{xh_2(x)}{a} \\ &= k_1(x) - \frac{2xh_1(x)}{\alpha a} \\ \Rightarrow\ f(x) &= (-\frac{\alpha}{2})^{\frac{x}{a}}\Big[k_1(x) - \frac{2xh_1(x)}{\alpha a}\Big] \end{aligned}$$

trong đó $k_1(x)$ *là hàm tuỳ ý thoả mãn* $k_1(x+a) = k_1(x)$.

b3) Trường hợp $-\frac{\alpha}{2} < 0$ *hay* $\alpha > 0$.

Bài toán quy về việc giải phương trình

$$f(x+a) + \frac{\alpha}{2}f(x) = g(x) \tag{4.8}$$

với $g(x+a) = (-\frac{\alpha}{2})g(x)$.

Tương tự việc giải (1.2.3) ta có*

$$g(x) = \Big| -\frac{\alpha}{2}\Big|^{\frac{x}{a}} h_3(x) = \Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{x}{a}} h_3(x) \tag{4.9}$$

với $h_3(x+a) = -h_3(x)$ *(vì* $-\frac{\alpha}{2} < 0$*)*

Từ (4.8) và (4.9) ta có

$$\begin{aligned} f(x+a) + \frac{\alpha}{2}f(x) &= \Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{x}{a}} h_3(x) \\ \Leftrightarrow \frac{f(x+a)}{\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{x}{a}}} + \frac{\alpha}{2}\frac{f(x)}{\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{x}{a}}} &= h_3(x) \\ \Leftrightarrow \frac{f(x+a)}{\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{x+a}{a}}} + \frac{f(x)}{\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{x}{a}}} &= \frac{h_3(x)}{\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Đặt

$$\frac{f(x)}{\Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{x}{a}}} = I_2(x);\ \frac{2h_3(x)}{\alpha} = h_4(x)$$

với $h_4(x)$ *là hàm tuỳ ý thoả mãn:* $h_4(x+a) = -h_4(x)$, *(vì:* $h_4(x+a) = \dfrac{2h_3(x+a)}{\alpha} = \dfrac{2h_3(x)}{\alpha} = h_4(x)$*)*

Khi đó ta có

$$I_2(x+a) + I_2(x) = h_4(x). \tag{1.2.9*}$$

Ta có $h_4(x) = \frac{(a-x)+x}{a}h_4(x) = -\frac{x}{a}h_4(x+a) - \frac{x-a}{a}h_4(x)$.
Vì vậy (1.2.9) trở thành* $k_2(x) = -k_2(x)$
với $k_2(x) = I_2(x) + \frac{x-a}{a}h_4(x)$.
Suy ra

$$I_2(x) = k_2(x) - \frac{2(x-a)h_3(x)}{\alpha a}$$

với $k_2(x)$ *là hàm tuỳ ý thoả mãn* $k_2(x+a) = -k_2(x)$
Vậy

$$f(x) = (\frac{\alpha}{2})^{\frac{x}{a}}\Big[k_2(x) - \frac{2(x-a)h_3(x)}{\alpha a}\Big]$$

c) Trường hợp $\triangle < 0$

Phương trình (1.2.2) có hai nghiệm phức liên hợp $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}$; $\overline{\lambda}_1 = \lambda_2$, *do* $\overline{\text{đó đặt}}$ $\lambda_1 = p - iq,\ \lambda_2 = p + iq$ *suy ra* $|\lambda_0| = |\lambda_1| = |\lambda_2|\sqrt{p^2+q^2}, \overline{arg\lambda_2 = \varphi = arg\lambda_1}, \tan\varphi = \frac{q}{p}$. *Biến đổi tương tự như trường hợp* $\triangle > 0$ *ta được*

$$g_1(x+a) = \lambda_2 g_1(x) \qquad (*)$$

với $g_1(x) = f(x+a) - \lambda_1 f(x)$.

Như vậy hàm: $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Ta có

$$(*) \Leftrightarrow g_1(x+a) = e^{\ln\lambda_2}g_1(x) \Leftrightarrow \frac{g_1(x+a)}{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}} = e^{\ln\lambda_2}.\frac{g_1(x)}{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{g_1(x+a)}{e^{\frac{x+a}{a}\ln\lambda_2}} = \frac{g_1(x)}{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{g_1(x+a)}{e^{\frac{x+a}{a}\ln\lambda_2}} = \frac{g_1(x)}{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}}$$

Đặt

$$\frac{g_1(x)}{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}} = h_1(x) \qquad (4.10)$$

Ta có

$$h_1(x+a) = h_1(x)$$

Đổi vai trò của λ_1, λ_2 *cho nhau và biến đổi tương tự như trên ta được*

$$h_2(x+a) = h_2(x)$$

Với

$$\frac{g_2(x)}{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_1}} = h_2(x) \qquad (4.11)$$

Từ (4.10) và (4.11) ta có

$$\begin{cases} g_1(x) = e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}h_1(x) \\ g_2(x) = e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_1}h_2(x) \end{cases} \tag{i}$$

Ta chứng minh $\overline{h_1(x)} = h_2(x)$

Thật vậy, trước hết ta chứng minh $\overline{g_1(x)} = g_2(x)$.

Ta có $g_1(x) = \overline{f(x+a) - \lambda_1 f(x)}$,

Lấy x_0 *bất kỳ,* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ta có $\overline{g_1(x_0)} = \overline{f(x_0+a) - \lambda_1 f(x_0)} = f(x_0+a) - \overline{\lambda_1} f(x_0) = f(x_0+a) - \lambda_2 f(x_0) = g_2(x_0)$.

Vì x_0 *bất kỳ nên* $\forall x \in \mathbb{R}$ *ta có*

$$\overline{g_1(x)} = g_2(x) \tag{4.12}$$

Tiếp theo ta chứng minh

$$\overline{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}} = e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_1}$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}
\overline{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}} &= \overline{e^{\frac{x}{a}(\ln|\lambda_2| + iarg\lambda_2 + 2k\pi i)}} \\
&= e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_2|}.\overline{e^{iarrg\lambda_2\frac{x}{a}}e^{i2k\pi\frac{x}{a}}} \\
&= e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_2|}\overline{\Big(\frac{\cos\varphi x}{a} + i\sin\frac{\varphi x}{a}\Big)\Big(\cos\frac{2k\pi x}{a} + i\sin\frac{2k\pi x}{a}\Big)} \\
&= e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_2|}\overline{\Big(\cos\frac{\varphi x}{a} + i\sin\frac{\varphi x}{a}\Big)}\,\overline{\Big(\cos\frac{2k\pi x}{a} + i\sin\frac{2k\pi x}{a}\Big)} \\
&= e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_2|}\Big(\cos\frac{\varphi x}{a} - i\sin\frac{\varphi x}{a}\Big)\Big(\cos\frac{2k\pi x}{a} - i\sin\frac{2k\pi x}{a}\Big) \\
&= e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_2|}\Big(\cos\Big(-\frac{\varphi x}{a}\Big) + i\sin\Big(-\frac{\varphi x}{a}\Big)\Big)\Big(\cos\Big(-\frac{2k\pi x}{a}\Big) + i\sin\Big(-\frac{2k\pi x}{a}\Big)\Big) \\
&= e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_2|}e^{i(-\frac{\varphi x}{a})}e^{i(-\frac{2k\pi x}{x})} \\
&= e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_1|}e^{i\frac{arg\lambda_1 x}{a}}e^{i\frac{2k'\pi x}{a}} \\
&= e^{\frac{x}{a}(\ln|\lambda_1| + iarg\lambda_1 + 2k'\pi i)} = e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_1}
\end{aligned} \tag{4.13}$$

ở đây: $(arg\lambda_1 = -\varphi;\ arg\lambda_2 = \varphi;\ -k = k')$

Từ (4.12) và (4.13):

$$\overline{\Big[\frac{g_1(x)}{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_1}}\Big]} = \frac{g_2(x)}{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_1}} \Leftrightarrow \overline{h_1(x)} = h_2(x)$$

Theo trên ta có các hàm $h_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C};\ h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

Như vậy ta sẽ đặt: $h_1(x) = m(x) + in(x)$*; trong đó các hàm:*

$$m:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ \ n:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Theo chứng minh trên: $\overline{h_1(x)} = h_2(x) \ \Rightarrow\ h_2(x) = m(x) - in(x)$
Quay trở lại bài toán ban đầu ta có

$$\begin{cases} f(x+a) - \lambda_1 f(x) = e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2} h_1(x) \\ f(x+a) - \lambda_2 f(x) = e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_1} h_2(x) \end{cases} \tag{4.14}$$

*Trừ (**??**) cho (**??**)*

$$\begin{aligned} f(x) = &\ \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big[e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2} h_1(x) - e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_1} h_2(x)\Big] \\ = &\ \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big[e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2} h_1(x) - \overline{e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}} h_2(x)\Big] \\ = &\ \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big[e^{\frac{x}{a}(\ln|\lambda_2| + iarg\lambda_2 + 2k\pi i)} h_1(x) - \overline{e^{\frac{x}{a}(\ln|\lambda_2| + iarg\lambda_2 + 2k\pi i)}} h_2(x)\Big] \end{aligned}$$

Vì hàm $e^{\frac{x}{a}\ln\lambda_2}$ *là hàm đa trị, ta sẽ chọn một nhánh liên tục bằng cách chọn* $k = 0$*, nên ta có:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big[e^{\frac{x}{a}(\ln|\lambda_2| + iarg\lambda_2)} h_1(x) - \overline{e^{\frac{x}{a}(\ln|\lambda_2| + iarg\lambda_2)}} h_2(x)\Big] \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big[e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_2|}\Big(\cos\frac{\varphi x}{a} + i\sin\frac{\varphi x}{a}\Big)h_1(x) - e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_2|}\Big(\cos\frac{\varphi x}{a} - i\sin\frac{\varphi x}{a}\Big)h_2(x)\Big] \\ &= \frac{e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_0|}}{2iq}\Big[\cos\frac{\varphi x}{a}(h_1(x) - h_2(x)) + i\sin\frac{\varphi x}{a}(h_1(x) + h_2(x))\Big] \\ &= \frac{e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_0|}}{2iq}\Big[2i\cos\frac{\varphi x}{a}.n(x) + 2i\sin\frac{\varphi x}{a}.m(x)\Big] \\ &= \frac{e^{\frac{x}{a}\ln|\lambda_0|}}{q}\Big[\cos\frac{\varphi x}{a}.n(x) + \sin\frac{\varphi x}{a}.m(x)\Big] \\ &= \frac{|\lambda_0|^{\frac{x}{a}}}{q}\Big[\cos\frac{\varphi x}{a}.n(x) + \sin\frac{\varphi x}{a}.m(x)\Big] \end{aligned}$$

Trong đó $n(x)$ *và* $m(x)$ *là hai hàm số bất kỳ thoả mãn*

$$n(x+a) = n(x);\ m(x+a) = m(x)$$
$$n:\mathbb{R} \to \mathbb{R};\ m:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 = p - iq \\ \lambda_2 = p + iq \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{p^2 + q^2};\ arg\lambda_2 = \varphi = \overline{arg\lambda_1}$$

$$\tan\varphi = \frac{q}{p}; \quad \overline{arg\lambda_2} = -\varphi$$

Kết luận:

+) $\triangle > 0$

$$\Rightarrow\ f(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big[|\lambda_2|^{\frac{x}{a}}.h_1(x) - |\lambda_1|^{\frac{x}{a}}.h_2(x)\Big]$$

$h_1(x)$ *và* $(h_2(x)$ *là hai hàm tuỳ ý thoả mãn:*

$$h_1(x+a) = \begin{cases} h_1(x) & \text{nếu } \lambda_2 > 0 \\ -h_1(x) & \text{nếu } \lambda_2 < 0 \end{cases}$$

$$h_2(x+a) = \begin{cases} h_2(x) & \text{nếu } \lambda_1 > 0 \\ -h_2(x) & \text{nếu } \lambda_1 < 0 \end{cases}$$

+) $\triangle = 0$

Trường hợp 1: $\alpha = -2 \ \Rightarrow\ f(x) = h(x) + \frac{xg(x)}{a}$

$h(x)$ *và* $g(x)$ *là hai hàm tuỳ ý thoả mãn:* $\begin{cases} h(x+a) = h(x) \\ g(x+a) = g(x) \end{cases}$

Trường hợp 2: $-2 \neq \alpha < 0$

$$\Rightarrow\ f(x) = \Big(-\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{x}{a}}\Big[k_1(x) - \frac{2xh_1(x)}{\alpha a}\Big]$$

$k_1(x)$ *và* $h_1(x)$ *là hai hàm tuỳ ý thoả mãn:* $\begin{cases} h_1(x+a) = h_1(x) \\ k_1(x+a) = k_1(x) \end{cases}$

Trường hợp 3: $\alpha > 0$

$$\Rightarrow\ f(x) = \Big(\frac{\alpha}{2}\Big)^{\frac{x}{a}}\Big[k_2(x) - \frac{2(x-a)h_2(x)}{\alpha a}\Big]$$

$k_2(x)$ *và* $h_2(x)$ *là hai hàm tuỳ ý thoả mãn:* $\begin{cases} h_2(x+a) = -h_2(x) \\ k_2(x+a) = -k_2(x) \end{cases}$

+) $\triangle < 0$

$$f(x) = \frac{|\lambda_0|^{\frac{x}{a}}}{q}\Big[\cos\frac{\varphi x}{a}.n(x) + \sin\frac{\varphi x}{a}.m(x)\Big]$$

$m(x)$ *và* $n(x)$ *là hai hàm tuỳ ý thoả mãn*

$$\begin{cases} m(x+a) = m(x); & m:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ n(x+a) = n(x); & n:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\lambda_1 = p - iq; \;\; \lambda_2 = p + iq$$
$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_0| = \sqrt{q^2 + q^2};\; arg\lambda_2 = \overline{arg\lambda_1} = \varphi$$

Các ví dụ áp dụng

Ví dụ 4.1. *Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện:*

$$f(x+2) - 8f(x+1) + 15f(x) = 16 \tag{1}$$

Lời giải. *Đặt $f(x) = g(x) + C$; (C: xác định sau)*

$$(1) \;\Leftrightarrow\; g(x+2) - 8g(x+1) + 15g(x) + 8C = 16.$$

Chọn $C = 2$

$$\Rightarrow\; g(x+2) - 8g(x+1) + 15g(x) = 0.$$

Xét phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0; \;\; \triangle = 1 > 0$$
$$\Rightarrow \lambda_1 = 3; \;\; \lambda_2 = 5$$

Áp dụng công thức nghiệm với $\triangle > 0$ ta có

$$g(x) = \frac{1}{2}[5^x h_1(x) - 3^x h_2(x)] \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{1}{2}[5^x h_1(x) - 3^x h_2(x)] + 2$$

$h_1(x)$ và $h_2(x)$ là hai hàm tuỳ ý thoả mãn

$$\begin{cases} h_1(x+1) = h_1(x); & h_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ h_2(x+1) = h_2(x); & h_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}$$

Ví dụ 4.2. *Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện*

4.3 Phương trình với hàm số tuần hoàn, phản tuần hoàn nhân tính

Phương trình hàm là một chuyên đề cơ bản của chương trình toán cho các trường THPT Chuyên. Các bài toán về phương trình hàm cũng là những bài tập thường gặp trong các kỳ thi học sinh giỏi toán cấp Quốc gia, thi Olympic khu vực hay Olympic Quốc tế. Phương trình hàm tuyến tính bậc hai là một vấn đề quan trọng trong lớp phương trình hàm nói chung. Trong chương trình toán cho các trường THPT chuyên,phương trình hàm tuyến tính bậc hai được đề cập trong trường hợp $\Delta > 0$ của phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0(*)$ đối với hàm *tuần hoàn cộng tính; các trường hợp $\Delta = 0$ và $\Delta < 0$ của phương trình $(*)$ chưa được đề cập đến. Ngoài ra, phương trình hàm tuyến tính bậc hai đối với hàm tuần hoàn nhân tính chưa được đề cập đến cả ba trường hợp: $\Delta > 0; \Delta = 0$và $\Delta < 0$ của phương trình $(*)$. Hơn thế nữa, phương trình hàm tuyến tính bậc hai đối với hàm tuần hoàn cộng tính và nhân tính cũng chưa được đề cập đến. Báo cáo này đưa ra ba bài của phương trình hàm tuyến tính bậc hai với vế phải là hàm số đối với hàm tuần hoàn và phản tuần hoàn nhân tính.*

4.3.1 Định nghĩa

Cho $a \in \mathbb{R}\backslash\{0;1;-1\}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các hàm: $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(a^2x) + \alpha f(ax) + \beta f(x) = g(x).$$

trong đó $g(x)$ là hàm cho trước.

4.3.2 Một số bài toán

Bài toán 4.2. *Cho $h(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ a trên $\mathbb{R}(h(ax) = h(x))$; $a \in \mathbb{R}\backslash\{0;1;-1\}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các hàm: $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f(a^2x) + \alpha f(ax) + \beta f(x) = h(x). \tag{4.15}$$

Lời giải:
Xét phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0;\ \Delta = \alpha^2 - 4\beta. \tag{4.16}$$

a) Trường hợp $\Delta > 0$:

Phương trình (2.2.40) có hai nghiệm thực: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Áp dụng định lý Viete ta được:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = -\alpha \\ \lambda_1\lambda_2 = \beta \end{cases} \quad \textit{Thay vào (2.2.39):}$$

$$\begin{aligned}(2.2.39) &\Leftrightarrow f(a^2x) - (\lambda_1 + \lambda_2)f(ax) + \lambda_1\lambda_2 f(x) = h(x) \\ &\Leftrightarrow f(a^2x) - \lambda_1 f(ax) - \lambda_2[f(ax) - \lambda_1 f(x)] = h(x)\end{aligned} \tag{4.17}$$

Đặt $g_1(x) = f(ax) - \lambda_1 f(x)$ *ta có:*

$$(2.2.41) \Leftrightarrow g_1(ax) - \lambda_2 g_1(x) = h(x) \tag{4.18}$$

a1) **Trường hợp 1:**$\lambda_1 = 1$ *hoặc* $\lambda_2 = 1$.
Không mất tính tổng quát ta giả sử: $\lambda_2 = 1$. *Khi đó:*
$(2.2.42) \Leftrightarrow g_1(ax) - g_1(x) = h(x)$ *(theo Bài toán* 1.1*- *chương 1)*
$\Rightarrow g_1(x) = g(x) + \dfrac{\ln|x|h(x)}{\ln|a|}$ *trong đó* $g(x)$ *là hàm tùy ý sao cho:*
$g(ax) = g(x)$. *Hay:*

$$f(ax) - \lambda_1 f(x) = g(x) + \frac{\ln|x|h(x)}{\ln|a|}. \tag{4.19}$$

Đổi vai trò λ_2 *cho* λ_1 *và biến đổi tương tự ta có:*

$$g_2(ax) - \lambda_1 g_2(x) = h(x)$$

trong đó:$g_2(x) = f(ax) - f(x)$.
Vì $\lambda_2 = 1$ *và* $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 \neq 1$. *Theo Bài toán* 1.3* *chương 1 ta có:*

$$g_2(x) = \frac{h(x)}{1-\lambda_1} + |x|^{\log_{|a|}|\lambda_1|}.q(x)$$

trong đó $q(x)$ *là hàm tùy ý sao cho:*

$$q(ax) = \begin{cases} q(x) & \text{nếu } \lambda_1 > 0 \\ -q(x) & \text{nếu } \lambda_1 < 0 \end{cases}$$

Hay:

$$f(ax) - f(x) = \frac{h(x)}{1-\lambda_1} + |x|^{\log_{|a|}|\lambda_1|}.q(x) \tag{4.20}$$

Trừ (2.2.43) cho (2.2.44) ta được:

$$f(x) = \frac{\ln|x|(1-\lambda_1) - \ln|a|}{\ln|a|(1-\lambda_1)^2} h(x) + \frac{1}{1-\lambda_1}\left[g(x) + |x|^{\log_{|a|}|\lambda_1|} q(x)\right].$$

a2) **Trường hợp 2:** $\lambda_1 \neq 1$ *và* $\lambda_2 \neq 1 \Rightarrow 1 + \alpha + \beta \neq 0$.
(vì nếu $1 + \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1$ *hoặc* $\lambda_2 = 1$ *điều này mâu thuẫn với giả thiết.)*
Ta có:

$$h(x) = \frac{1+\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} h(x) = \frac{h(a^2x) + \alpha h(ax) + \beta h(x)}{1+\alpha+\beta}$$

$$(2.2.41) \Leftrightarrow f(a^2x) - \frac{h(a^2x)}{1+\alpha+\beta} + \alpha\big(f(ax) - \frac{h(ax)}{1+\alpha+\beta}\big) + \\ + \beta\big(f(x) - \frac{h(x)}{1+\alpha+\beta}\big) = 0 \tag{4.21}$$

Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{h(x)}{1+\alpha+\beta}$ *ta có:*

$$(2.2.45) \Leftrightarrow g(a^2x) + \alpha g(ax) + \beta g(x) = 0.$$

Theo bài toán 1.2- chương 1- trường hợp $\Delta > 0$ *ta có:*

$$g(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\big[|x|^{\log_{|a|}|\lambda_2|}h_1(x) - |x|^{\log_{|a|}|\lambda_1|}h_2(x)\big]$$

trong đó: λ_1, λ_2 *là nghiệm của phương trình:* $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$.
$h_1(x), h_2(x)$ *là hai hàm tùy ý sao cho:*

$$h_1(ax) = \begin{cases} h_1(x) & \text{nếu } \lambda_2 > 0 \\ -h_1(x) & \text{nếu } \lambda_2 < 0 \end{cases}; \quad h_2(ax) = \begin{cases} h_2(x) & \text{nếu } \lambda_1 > 0 \\ -h_2(x) & \text{nếu } \lambda_1 < 0 \end{cases}$$

Từ đó ta có:

$$f(x) = \frac{h(x)}{1+\alpha+\beta} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\big[|x|^{\log_{|a|}|\lambda_2|}h_1(x) - |x|^{\log_{|a|}|\lambda_1|}h_2(x)\big]$$

b) **Trường hợp $\Delta = 0$.**

Phương trình đặc trưng (2.2.40) có nghiệm: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow \beta = \dfrac{\alpha^2}{4}$

$$(2.2.41) \Leftrightarrow f(a^2x) + \alpha f(ax) + \frac{\alpha^2}{4}f(x) = h(x))$$

$$\Leftrightarrow f(a^2x) + \frac{\alpha}{2}f(ax) + \frac{\alpha}{2}\Big[f(ax) + \frac{\alpha}{2}f(x)\Big] = h(x) \tag{4.22}$$

Đặt $g(x) = f(ax) + \dfrac{\alpha}{2}f(x)$ *thì:*

$$(2.2.46) \Leftrightarrow g(ax) + \frac{\alpha}{2}g(x) = h(x) \tag{4.23}$$

b1) **Trường hợp 1:** $\alpha = 2 : (2.2.47) \Leftrightarrow g(ax) - g(x) = h(x)$. *Theo Bài toán* 1.1*- *chương 1 ta có:* $g(x) = k(x) + \dfrac{\ln|x|h(x)}{\ln|a|}$ *trong đó* $k(x)$ *là hàm tùy ý sao*

cho:
$k(ax) = k(x)$. *Khi đó:*

$$f(ax) - f(x) = k(x) + \frac{\ln|x|h(x)}{\ln|a|}$$
$$\Leftrightarrow f(ax) - f(x) - \frac{\ln|x|h(x)}{\ln|a|} = k(x)$$
$$\Leftrightarrow f(ax) - f(x) - \frac{1}{\ln|a|}\Big[\frac{(\ln|ax|)^2h(ax) - (\ln|x|)^2h(x) - (\ln|a|)^2h(x)}{2\ln|a|}\Big] = k(x)$$
$$\Leftrightarrow f(ax) - f(x) - \Big[\frac{(\ln|ax|)^2h(ax)}{2(\ln|a|)^2} -$$
$$- \frac{(\ln|x|)^2h(x)}{2(\ln|a|)^2} - \Big(\frac{\ln|ax|h(ax)}{2\ln|a|} - \frac{\ln|x|h(x)}{2\ln|a|}\Big)\Big] = k(x)$$

$$\Leftrightarrow f(ax) - f(x) - \Big[\frac{(\ln|ax|)^2 - \ln|a|\ln|ax|}{2(\ln|a|)^2}h(ax) -$$
$$- \frac{(\ln|x|)^2 - \ln|a|\ln|x|}{2(\ln|a|)^2}\Big] = k(x)$$
$$\Leftrightarrow f(ax) - \frac{(\ln|ax|)^2 - \ln|a|\ln|ax|}{2(\ln|a|)^2}h(ax) -$$
$$- \Big[f(x) - \frac{(\ln|x|)^2 - \ln|a|\ln|x|}{2(\ln|a|)^2}h(x)\Big] = k(x) \tag{4.24}$$

Đặt $p(x) = f(x) - \dfrac{(\ln|x|)^2 - \ln|a|\ln|x|}{2(\ln|a|)^2}h(x)$, *khi đó:*
$(2.2.48) \Leftrightarrow p(ax) - p(x) = k(x)$.
Theo Bài toán 1.1^* *chương 1 ta có:* $p(x) = I(x) + \dfrac{\ln|x|k(x)}{\ln|a|}$, *trong đó* $I(x)$ *là hàm tùy ý sao cho:* $I(ax) = I(x)$.

$$f(x) = I(x) + \frac{\ln|x|k(x)}{\ln|a|} + \frac{(\ln|x|)^2 - \ln|a|\ln|x|}{2(\ln|a|)^2}h(x).$$

b2) **Trường hợp 2:** $\alpha \neq -2; \alpha < 0:$

$$(2.2.47)| \Leftrightarrow g(ax) + \frac{\alpha}{2}g(x) = h(x).$$

Theo Bài toán 1.3^* *chương 1 ta có:*

$$g(x) = \frac{h(x)}{\frac{\alpha}{2}+1} + |x|^{\log_{|a|}|\frac{\alpha}{2}|}q_1(x) = \frac{2h(x)}{\alpha+2} + |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})}q_1(x)$$

trong đó $q_1(x)$ *là hàm tùy ý sao cho:* $q_1(ax) = q(x)$ *(vì* $\alpha < 0$*). Ta có:*

$$f(ax) + \frac{\alpha}{2} f(x) = \frac{2h(x)}{\alpha + 2} + |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})} q_1(x)$$

$$\Leftrightarrow f(ax) + \frac{\alpha}{2} f(x) - \frac{2h(x)}{\alpha + 2} = |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})} q_1(x) \tag{4.25}$$

$$\Leftrightarrow f(ax) + \frac{\alpha}{2} f(x) - \frac{2}{\alpha + 2}\Big[\frac{h(ax)}{\frac{\alpha}{2} + 1} + dfrac\alpha 2 \frac{h(x)}{\frac{\alpha}{2} + 1}\Big] = |x|^{\ log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})} q_1(x) \tag{4.26}$$

$$\Leftrightarrow f(ax) + \frac{\alpha}{2} f(x) - \Big[\frac{4h(ax)}{(\alpha + 2)^2} + \frac{\alpha}{2} \frac{4h(x)}{(\alpha + 2)^2}\Big] = |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})} q_1(x)$$

$$\Leftrightarrow f(ax) - \frac{4h(ax)}{(\alpha + 2)^2} + \frac{\alpha}{2}\Big[f(x) - \frac{4h(x)}{(\alpha + 2)^2}\Big] = |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})} q_1(x) \tag{4.27}$$

Đặt $f_1(x) = f(x) - \dfrac{4h(x)}{(\alpha + 2)^2}$ *ta có:*

$$(2.2.49) \Leftrightarrow f_1(ax) + \frac{\alpha}{2} f_1(x) = |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})} q_1(x).$$

Áp dụng kết quả Bài toán 1.2-chương 1 (trường hợp $\Delta = 0, \alpha < 0, \alpha \neq -2$*) ta được:*

$$f_1(x) = |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})}\Big[k_1(x) - \frac{2\ln|x| q_1(x)}{\alpha \ln|a|}\Big]$$

trong đó: $k_1(x)$ *là hàm tùy ý sao cho:* $k_1(ax) = k_1(x)$*. Do đó:*

$$f(x) = \frac{4h(x)}{(\alpha + 2)^2} + |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})}\Big[k_1(x) - \frac{2\ln|x| q_1(x)}{\alpha \ln|a|}\Big]$$

b2) **Trường hợp 3:** $\alpha > 0$, *khi đó* $(2.2.47) \Leftrightarrow g(ax) + \dfrac{\alpha}{2} g(x) = h(x)$

Theo Bài toán 1.3^**- chương 1 ta có:*

$$g(x) = \frac{h(x)}{\frac{\alpha}{2} + 1} + |x|^{\log_{|a|}|\frac{\alpha}{2}|} q_2(x) = \frac{2h(x)}{\alpha + 2} + |x|^{\log_{|a|}\frac{\alpha}{2}} q_2(x)$$

trong đó $q_2(x)$ *là hàm tùy ý sao cho:* $q_2(ax) = -q_2(x)$ *(vì* $\alpha > 0$*). Từ đó có:*

$$f(ax) + \frac{\alpha}{2} f(x) = \frac{2h(x)}{\alpha + 2} + |x|^{\log_{|a|}\frac{\alpha}{2}} q_2(x) \quad (*)$$

Biến đổi tương tự như trường hợp 2 trên ta có:

$$(*) \Leftrightarrow f(ax) - \frac{4h(ax)}{(\alpha+2)^2} + \frac{\alpha}{2}\Big[f(x) - \frac{4h(x)}{(\alpha+2)^2}\Big] = |x|^{\log_{|a|}\frac{\alpha}{2}} q_2(x) \tag{4.28}$$

Đặt $f_2(x) = f(x) - \dfrac{4h(x)}{(\alpha+2)^2}$ *ta có:*

$$(2.2.50) \Leftrightarrow f_2(ax) + \frac{\alpha}{2} f_2(x) = |x|^{\log_{|a|}\frac{\alpha}{2}} q_2(x)$$

Áp dụng kết quả Bài toán 1.2- chương 1 (trường hợp $\Delta = 0, \alpha > 0$*) ta được:*

$$f_2(x) = |x|^{\log_{|a|}\frac{\alpha}{2}}\Big[k_2(x) - \frac{2\ln|\frac{x}{a}|q_2(x)}{\alpha \ln|a|}\Big]$$

trong đó $k_2(x)$ *là hàm tùy ý sao cho:* $k_2(ax) = -k_2(x)$*. Vậy:*

$$f(x) = \frac{4h(x)}{(\alpha+2)^2} + |x|^{\log_{|a|}\frac{\alpha}{2}}\Big[k_2(x) - \frac{2\ln|\frac{x}{a}|q_2(x)}{\alpha \ln|a|}\Big]$$

c) Trường hợp $\Delta < 0 \Leftrightarrow 1 + \alpha + \beta \neq 0$. *(Chứng minh hoàn toàn tương tự như Bài toán 2.1.) ta có:*

$$h(x) = \frac{1+\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} h(x) = \frac{h(a^2x) + \alpha h(ax) + \beta h(x)}{1+\alpha+\beta}$$

(Vì: $h(a^2x) = h(ax) = h(x)$*)*

$$(2.2.39) \Leftrightarrow f(a^2x) - \frac{h(a^2)}{1+\alpha+\beta} + \alpha\Big[f(ax) - \frac{h(ax)}{1+\alpha+\beta}\Big] + \beta\Big[f(x) - \frac{h(x)}{1+\alpha+\beta}\Big] = 0 \tag{4.29}$$

Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{h(x)}{1+\alpha+\beta}$ *ta có:*

$$(2.2.51) \Leftrightarrow g(a^2x) + \alpha g(ax) + \beta g(x) = 0.$$

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0,\ \Delta < 0$ *nên có hai nghiệm phức liên hợp* λ_1, λ_2*. Theo Bài toán (1.2)- chương 1 (trường hợp* $\Delta < 0$*) ta có:*

$$g(x) = \frac{|\lambda_2|^{\frac{\ln|x|}{\ln|a|}}}{q}\Big[\cos\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|} n(x) + \sin\frac{\varphi \ln|x|}{\ln|a|} m(x)\Big]$$

trong đó:

$$\lambda_1 = p - iq;\ \lambda_2 = p + iq \Leftrightarrow |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{p^2+q^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{q}{p};\ \arg\lambda_2 = \overline{\arg\lambda_1} = \varphi$$

$m(x), n(x)$ là hai hàm tùy ý thỏa mãn: $m(ax) = m(x)$; $n(ax) = n(x)$. Từ đó ta có:

$$f(x) = \frac{h(x)}{1+\alpha+\beta} + \frac{|\lambda_2|^{\frac{\ln|x|}{\ln|a|}}}{q}\Big[\cos\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}n(x) + \sin\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}m(x)\Big]$$

Bài toán 4.3. *Cho $h(x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ a trên $\mathbb{R}$ ($h(ax) = -h(x)$); $a \in \mathbb{R}\backslash\{0;1;-1\}; \alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Xác định tất cả các hàm $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f(a^2x) + \alpha f(ax) + \beta f(x) = h(x). \tag{4.30}$$

Lời giải:

Xét phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0 \tag{4.31}$$

có $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$.

a) Trường hợp $\Delta > 0$: *Phương trình (2.2.53) có hai nghiệm thực $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Áp dụng định lí Viete ta có:*

$$\begin{cases}\lambda_1 + \lambda_2 = -\alpha \\ \lambda_1\lambda_2 = \beta\end{cases} \quad \textit{thay vào (2.2.52) ta có:}$$

$$\begin{aligned}(2.2.52) &\Leftrightarrow f(a^2x) - (\lambda_1+\lambda_2)f(ax) + \lambda_1\lambda_2 f(x) = h(x)\\ &\Leftrightarrow f(a^2x) - \lambda_1 f(ax) - \lambda_2[f(ax) - \lambda_1 f(x)] = h(x)\end{aligned} \tag{4.32}$$

Đặt $g_1(x) = f(ax) - \lambda_1 f(x)$, khi đó:

$$(2.2.54) \Leftrightarrow g_1(ax) - \lambda_2 g_1(x) = h(x). \tag{4.33}$$

a1) **Trường hợp 1:** $\lambda_1 \neq \pm 1$ *và* $\lambda_2 = 1$.

$$(2.2.52) \Leftrightarrow f(a^2x) - (\lambda_1+1)f(ax) + \lambda_1 f(x) = h(x).$$

$(2.2.55) \Leftrightarrow g_1(ax) - g_1(x) = h(x)$. *Theo Bài toán 1.2* - chương 1 thì:* $g_1(x) = k(x) - \dfrac{h(x)}{2}$. *trong đó $k(x)$ là hàm tùy ý sao cho: $k(ax) = k(x)$.*

Hay

$$f(ax) - \lambda_1 f(x) = k(x) - \frac{h(x)}{2}. \tag{4.34}$$

Đổi vai trò λ_2 *cho* λ_1 *và biến đổi tương tự ta được:*
$g_2(ax) - \lambda_1 g_2(x) = h(x)$ *trong đó:* $g_2(x) = f(ax) - f(x)$.
Vì $\lambda_1 \neq \pm 1$ *nên theo Bài toán* $1.4^*(ii)$*- chương 1, ta có:*

$$g_2(x) = |x|^{\log_{|a|}|\lambda_1|}q(x) + \frac{h(x)}{-\lambda_1 - 1} = |x|^{\log_{|a|}|\lambda_1|}q(x) - \frac{h(x)}{\lambda_1 + 1}$$

trong đó $q(x)$ *là hàm tùy ý sao cho:*

$$q(ax) = \begin{cases} q(x) & \text{nếu } \lambda_1 > 0 \\ -q(x) & \text{nếu } \lambda_1 < 0 \end{cases}$$

Khi đó:

$$f(ax) - f(x) = |x|^{\log_{|a|}|\lambda_1|}q(x) - \frac{h(x)}{\lambda_1 + 1} \tag{4.35}$$

Trừ (2.2.56) cho (2.2.57) ta được:

$$f(x) = \frac{h(x)}{2(\lambda_1 + 1)} + \frac{1}{1 - \lambda_1}\left[k(x) - |x|^{\log_{|a|}|\lambda_1|}q(x)\right]$$

a2) **Trường hợp 2:** $\lambda_1 = -1$ *và* $\lambda_2 = 1$
$(2.2.52) \Leftrightarrow f(a^2x) - f(x) = h(x)$.
$(2.2.55) \Leftrightarrow g_1(ax) - g_1(x) = h(x)$. *Theo Bài toán* 1.2^**- chương 1 ta có:*
$g_1(x) = k(x) - \dfrac{h(x)}{2}$, *trong đó* $k(x)$ *là hàm tùy ý thỏa mãn:* $k(ax) = k(x)$.
Vậy:

$$f(ax) + f(x) = k(x) - \frac{h(x)}{2} \tag{4.36}$$

Đổi vai trò của λ_1 *và* λ_2 *và biến đổi tương tự ta được:*
$g_2(ax) + g_2(x) = h(x)$ *trong đó* $g_2(x) = f(ax) - f(x)$.
Theo Bài toán $1.4^*(i)$*- chương 1 ta có:* $g_2(x) = q(x) - \dfrac{\ln|\frac{x}{a}|h(x)}{\ln|a|}$ *với* $q(x)$ *là hàm tùy ý sao cho:* $q(ax) = -q(x)$.
Hay:

$$f(ax) - f(x) = q(x) - \frac{\ln|\frac{x}{a}|h(x)}{\ln|a|} \tag{4.37}$$

Trừ (2.2.58) cho (2.2.59) được: $f(x) = \dfrac{k(x) - q(x)}{2} + \dfrac{\ln|\frac{x}{a^3}|}{4\ln|a|}h(x)$.

a3) **Trường hợp 3:** $\lambda_1 \neq \pm 1; \lambda_2 = -1$.

$$(2.2.52) \Leftrightarrow f(a^2x) - (\lambda_1 - 1)f(ax) - \lambda_1 f(x) = h(x).$$

(2.2.55) $\Leftrightarrow g_1(ax) + g_1(x) = h(x)$, *theo Bài toán* 1.4*(*i*)*- chương 1 ta có:*
$g_1(x) = q_1(x) - \dfrac{\ln|\frac{x}{a}|h(x)}{\ln|a|}$, *trong đó* $q_1(x)$ *là hàm tùy ý sao cho:*$q_1(ax) = -q_1(x)$.
Vậy:

$$f(ax) - \lambda f(x) = q_1(x) - \frac{\ln|\frac{x}{a}|h(x)}{\ln|a|} \tag{4.38}$$

Đổi vai trò λ_1 *cho* λ_2 *và biến đổi tương tự ta có:*
$g_2(ax) - \lambda_1 g_2(x) = h(x)$, *trong đó* $g_2(x) = f(ax) + f(x)$.
Vì $\lambda_1 \neq \pm 1$ *nên theo Bài toán* 1.4*(*ii*)*- chương 1 có:*

$$g_2(x) = |x|^{\log_{|a|}|\lambda_1|} q_2(x) - \frac{h(x)}{\lambda_1 + 1}$$

trong đó $q_2(x)$ *là hàm tùy ý sao cho:*

$$q_2(ax) = \begin{cases} q_2(x) & \text{nếu } \lambda_1 > 0 \\ -q_2(x) & \text{nếu } \lambda_1 < 0 \end{cases}$$

hay:

$$f(ax) + f(x) = |x|^{\log_{|a|}|\lambda_1|} q_2(x) - \frac{h(x)}{\lambda_1 + 1}. \tag{4.39}$$

Trừ (2.2.61) cho (2.2.60) ta được:

$$f(x) = \frac{\ln|\frac{x^{\lambda_1+1}}{a^{\lambda_1+2}}|}{\ln|a|(\lambda_1+1)^2} h(x) + \frac{1}{\lambda_1+1}\big[|x|^{\log_{|a|}|\lambda_1|} q_2(x) - q_1(x)\big].$$

a4) **Trường hợp 4:** $\lambda_1 \neq \pm 1, \lambda_2 \neq \pm 1 \Rightarrow 1 + \alpha + \beta \neq 0$.
Ta có: $h(x) = \dfrac{1+\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} h(x) = \dfrac{h(a^2x) + \alpha h(ax) + \beta h(x)}{1+\alpha+\beta}$
(Vì: $h(a^2x) = h(ax) = h(x)$.*)*

$$\begin{aligned} (2.2.52) \Leftrightarrow f(a^2x) - \frac{h(a^2x)}{1+\alpha+\beta} + \alpha\big[f(ax) - \frac{h(ax)}{1+\alpha+\beta}\big] + \\ + \beta\big[f(x) - \frac{h(x)}{1+\alpha+\beta}\big] = 0 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{h(x)}{1+\alpha+\beta}$ *ta có:* (2.2.62) $\Leftrightarrow g(a^2x) + \alpha g(ax) + \beta g(x) = 0$.
Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$ *ta có:* $\Delta > 0$ *nên có hai nghiệm thực*

phân biệt λ_1, λ_2.
Áp dụng kết quả Bài toán 1.2- chương 1 (trường hợp $\Delta > 0$*) ta có:*

$$g(x) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big[|x|^{\log_{|a|}|\lambda_2|}h_1(x) - |x|^{\log_{|a|}|\lambda_1|}h_2(x)\Big]$$

trong đó $h_1(x), h_2(x)$ *là hai hàm tùy ý thỏa mãn:*

$$h_1(ax) = \begin{cases} h_1(x) & \text{nếu } \lambda_2 > 0 \\ -h_1(x) & \text{nếu } \lambda_2 < 0 \end{cases}, \ h_2(ax) = \begin{cases} h_2(x) & \text{nếu } \lambda_1 > 0 \\ -h_2(x) & \text{nếu } \lambda_1 < 0 \end{cases}$$

Vậy:

$$f(x) = \frac{h(x)}{1+\alpha+\beta} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\Big[|x|^{\log_{|a|}|\lambda_2|}h_1(x) - |x|^{\log_{|a|}|\lambda_1|}h_2(x)\Big]$$

b) Trường hợp $\Delta = 0$

Phương trình (2.2.53) có nghiệm: $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow \beta = \dfrac{\alpha^2}{4}$.

$$\begin{aligned}(2.2.52) &\Leftrightarrow f(a^2x) + \alpha f(ax) + \frac{\alpha^2}{4}f(x) = h(x)\\ &\Leftrightarrow f(a^2x) + \frac{\alpha}{2}f(ax) + \frac{\alpha}{2}[f(ax) + \frac{\alpha}{2}f(x)] = h(x) \qquad (4.41)\end{aligned}$$

Đặt $g(x) = f(ax) + \dfrac{\alpha}{2}f(x)$ *thì:*

$$(2.2.63) \Leftrightarrow g(ax) + \frac{\alpha}{2}g(x) = h(x). \qquad (4.42)$$

b1) **Trường hợp 1:** $\alpha = -2$, *khi đó:* $(2.2.64) \Leftrightarrow g(ax) - g(x) = h(x)$.
Theo Bài toán 1.2- chương 1 ta có:* $g(x) = k(x) - \dfrac{h(x)}{2}$ *trong đó* $k(x)$ *là hàm tùy ý thỏa mãn:* $k(ax) = k(x)$. *Ta có:*

$$\begin{aligned}&f(ax) - f(x) = k(x) - \frac{h(x)}{2} \Leftrightarrow f(ax) - f(x) + \frac{h(x)}{2} = k(x)\\ &\Leftrightarrow f(ax) - f(x) + \frac{1}{2}[\frac{h(x)}{2} - \frac{h(ax)}{2}] = k(x)\\ &\Leftrightarrow f(ax) - \frac{h(ax)}{4} - [f(x) - \frac{h(x)}{4}] = k(x) \qquad (4.43)\end{aligned}$$

Đặt $p(x) = f(x) - \dfrac{h(x)}{4}$, *khi đó:* $(2.2.65) \Leftrightarrow p(ax) - p(x) = k(x)$. *Theo Bài toán* 1.1^**- chương 1 ta có:*

$p(x) = q(x) + \dfrac{\ln|x|k(x)}{\ln|a|}$ *trong đó* $q(x)$ *là hàm tùy ý thỏa mãn:* $q(ax) = q(x)$. *Vậy:*

$$f(x) = q(x) + \frac{h(x)}{4} + \frac{\ln|x|k(x)}{\ln|a|}.$$

b2) **Trường hợp 2:** $\alpha = 2$.
Khi đó: (2.2.64) $\Leftrightarrow g(ax) + g(x) = h(x)$. *Theo Bài toán* 1.4*(*i*)- *chương 1 ta có:* $g(x) = g_1(x) - \dfrac{\ln|\frac{x}{a}|h(x)}{\ln|a|}$ *với* $g_1(x)$ *là hàm tùy ý:* $g_1(ax) = -g_1(x)$. *Ta có:*

$$\begin{aligned}
&f(ax) + f(x) = g_1(x) - \frac{\ln|\frac{x}{a}|h(x)}{\ln|a|}\\
&\Leftrightarrow f(ax) + f(x) + \frac{\ln|\frac{x}{a}|h(x)}{\ln|a|} = g_1(x)\\
&\Leftrightarrow f(ax) + f(x) + \frac{\ln|\frac{x}{a}|h(x)}{\ln|a|} - h(x) = g_1(x)\\
&\Leftrightarrow f(ax) + f(x) + \frac{1}{\ln|a|}\frac{(\ln|ax|)^2h(ax) + (\ln|x|)^2h(x) + (\ln|a|)^2h(x)}{-2\ln|a|}\\
&\qquad\qquad - \Big[-\frac{\ln|x|h(ax)}{\ln|a|} - \frac{\ln|\frac{x}{a}|h(x)}{\ln|a|}\Big] = g_1(x)\\
&\Leftrightarrow f(ax) + f(x) - \frac{(\ln|ax|)^2h(ax)}{2(\ln|a|)^2} - \frac{(\ln|x|)^2h(x)}{2(\ln|a|)^2} -\\
&\qquad\qquad - \frac{h(x)}{2} + \frac{\ln|x|h(ax)}{\ln|a|} + \frac{\ln|\frac{x}{a}|h(x)}{\ln|a|} = g_1(x).\\
&\Leftrightarrow f(ax) + f(x) - \frac{(\ln|ax|)^2h(ax)}{2(\ln|a|)^2} - \frac{(\ln|x|)^2h(x)}{2(\ln|a|)^2} + \frac{\ln|x|h(ax)}{\ln|a|} + \frac{\ln|\frac{x}{a}|h(x)}{\ln|a|} -\\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}\Big[-\frac{\ln|x|h(ax)}{\ln|a|} - \frac{\ln|\frac{x}{a}|h(x)}{\ln|a|}\Big] = g_1(x)\\
&\Leftrightarrow f(ax) + \frac{3\ln|a|\ln|x| - (\ln|ax|)^2}{2(\ln|a|)^2}h(ax) +
\end{aligned}$$

$$+ f(x) + \frac{3\ln|a|\ln|\frac{x}{a}| - (\ln|x|)^2}{2(\ln|a|)^2}h(x) = g_1(x). \tag{4.44}$$

Đặt $f_1(x) = f(x) + \dfrac{3\ln|a|\ln|\frac{x}{a}| - (\ln|x|)^2}{2(\ln|a|)^2}h(x)$ *ta có:*
(2.2.66) $\Leftrightarrow f_1(ax) + f_1(x) = g_1(x)$. *Theo Bài toán* 1.4*(*ii*)- *chương 1 ta có:*

$f_1(x) = g_2(x) - \dfrac{\ln|\frac{x}{a}|g_1(x)}{\ln|a|}$, *$g_1(x)$ thỏa mãn: $g_2(ax) = -g_2(x)$. Vậy:*

$$f(x) = g_2(x) - \frac{\ln|\frac{x}{a}|g_1(x)}{\ln|a|} - \frac{3\ln|a|\ln|\frac{x}{a}| - (\ln|x|)^2}{2(\ln|a|)^2}h(x).$$

b3) **Trường hợp 3:** $\alpha < 0, \alpha \neq -2 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} \neq \pm 1.$

$g(ax) + \dfrac{\alpha}{2}g(x) = h(x)$. *Theo Bài toán 1.4*(ii)- chương 1 ta có:*

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{h(x)}{\frac{\alpha}{2}-1} + |x|^{\log_{|a|}|\frac{\alpha}{2}|}q_1(x) \\ &= \frac{2h(x)}{\alpha - 2} + |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})}q_1(x) \end{aligned}$$

trong đó $q_1(x)$ là hàm tùy ý thỏa mãn: $q_1(ax) = q_1(x)$.(Vì: $\alpha < 0$). Như vậy:

$$\begin{aligned} &f(ax) + \frac{\alpha}{2}f(x) = \frac{2h(x)}{\alpha-2} + |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})}q_1(x) \\ \Leftrightarrow\ & f(ax) + \frac{\alpha}{2}f(x) - \frac{2h(x)}{\alpha-2} = |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})}q_1(x) \\ \Leftrightarrow\ & f(ax) + \frac{\alpha}{2}f(x) - \frac{2}{\alpha-2}\Big[\frac{h(ax)}{\frac{\alpha}{2}-1} + \frac{\alpha}{2}\frac{h(x)}{\frac{\alpha}{2}-1}\Big] = |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})}q_1(x) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f(ax) - \frac{4h(x)}{(\alpha-2)^2} + \frac{\alpha}{2}\Big[f(x) - \frac{4h(x)}{(\alpha-2)^2}\Big] = |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})}q_1(x) \tag{4.45}$$

Đặt $g_1(x) = f(x) - \dfrac{4h(x)}{(\alpha-2)^2}$, $(2.2.67) \Leftrightarrow g_1(ax) + \dfrac{\alpha}{2}g_1(x) = |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})}q_1(x).$
Theo Bài toán 1.2- chương 1 (trường hợp $\Delta = 0; \alpha < 0; \alpha \neq -2$) ta có:

$$g_1(x) = |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})}q_1(x)\Big[p_1(x) - \frac{2\ln|x|q_1(x)}{\alpha\ln|a|}\Big]$$

trong đó $p_1(x)$ là hàm tùy ý: $p_1(ax) = p_1(x)$. Vậy:

$$f(x) = \frac{4h(x)}{(\alpha-2)^2} + |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})}\Big[p_1(x) - \frac{2\ln|x|q_1(x)}{\alpha\ln|a|}\Big].$$

b4) **Trường hợp 4:** $\alpha > 0; \alpha \neq 2 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{2} \neq \pm 1$ *Khi đó:*

$g(ax) + \dfrac{\alpha}{2}g(x) = h(x)$. *Theo Bài toán 1.4*(ii)- chương 1:*

$$g(x) = \frac{h(x)}{\frac{\alpha}{2}-1} + |x|^{\log_{|a|}|\frac{\alpha}{2}|}q_2(x) = \frac{2h(x)}{\alpha-2} + |x|^{\log_{|a|}\frac{\alpha}{2}}q_2(x)$$

với $q_2(x)$ *là hàm tùy ý thỏa mãn:* $q_2(ax) = -q_2(x)$ *(Vì:* $\alpha > 0$*). Do đó:*

$$f(ax) + \frac{\alpha}{2}f(x) = \frac{2h(x)}{\alpha - 2} + |x|^{\log_{|a|}|\frac{\alpha}{2}|}q_2(x) \quad (*)$$

Biến đổi tương tự như trường hợp 3 ta được:

$$(*) \Leftrightarrow f(ax) - \frac{4h(ax)}{(\alpha-2)^2} + \frac{\alpha}{2}\big[f(x) - \frac{4h(x)}{(\alpha-2)^2}\big] = |x|^{\log_{|a|}\frac{\alpha}{2}}q_2(x) \tag{4.46}$$

Đặt $g_2(x) = f(x) - \dfrac{4h(x)}{(\alpha-2)^2}$ *ta có:*

$$(2.2.68) \Leftrightarrow g_2(x) + \frac{\alpha}{2}g_2(x) = |x|^{\log_{|a|}\frac{\alpha}{2}}q_2(x).$$

Theo bài toán 1.2- chương 1(trường hợp $\Delta = 0; \alpha > 0; \alpha \neq 2$*):*

$$g_2(x) = |x|^{\log_{|a|}\frac{\alpha}{2}}\big[p_2(x) - \frac{2\ln|\frac{x}{a}|q_2(x)}{\alpha\ln|a|}\big],$$

trong đó $p_2(x)$ *là hàm tùy ý thỏa mãn:* $p_2(ax) = p_2(x)$*. Từ đó ta có:*

$$f(x) = \frac{4h(x)}{(\alpha-2)^2} + |x|^{\log_{|a|}\frac{\alpha}{2}}\big[p_2(x) - \frac{2\ln|\frac{x}{a}|q_2(x)}{\alpha\ln|a|}\big].$$

c) Trường hợp: $\Delta < 0$ *Dễ dàng chứng minh được* $1 - \alpha + \beta \neq 0$*. Ta có:*

$$h(x) = \frac{1-\alpha+\beta}{1-\alpha+\beta}h(x) = \frac{h(a^2x) + \alpha h(ax) + \beta h(x)}{1-\alpha+\beta}$$

(Vì: $h(a^2x) = -h(ax) = h(x)$*)*

$$\begin{aligned}(2.2.52) \Leftrightarrow f(a^2x) - \frac{h(a^2)}{1-\alpha+\beta} + \alpha\big[f(ax) - \frac{h(ax)}{1-\alpha+\beta}\big] +& \\ + \beta\big[f(x) - \frac{h(x)}{1-\alpha+\beta}\big] &= 0\end{aligned} \tag{4.47}$$

Đặt $g(x) = f(x) - \dfrac{h(x)}{1-\alpha+\beta}$ *ta có:*

$$(2.2.69) \Leftrightarrow g(a^2x) + \alpha g(ax) + \beta g(x) = 0.$$

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0,\ \Delta < 0$ *nên có hai nghiệm phức liên hợp* λ_1, λ_2*. Theo Bài toán (1.2)- chương 1 (trường hợp* $\Delta < 0$*) ta có:*

$$g(x) = \frac{|\lambda_o|^{\frac{\ln|x|}{\ln|a|}}}{q}\Big[\cos\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}n(x) + \sin\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}m(x)\Big]$$

trong đó:

$$\lambda_1 = p - iq;\;\; \lambda_2 = p + iq \Leftrightarrow |\lambda_o| = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{p^2+q^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{q}{p};\;\; \arg\lambda_2 = \overline{\arg\lambda_1} = \varphi$$

$m(x), n(x)$ *là hai hàm tùy ý thỏa mãn:* $m(ax) = m(x);\;\; n(ax) = n(x)$. *Từ đó ta có:*

$$f(x) = \frac{h(x)}{1-\alpha+\beta} + \frac{|\lambda_o|^{\frac{\ln|x|}{\ln|a|}}}{q}\Big[\cos\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}n(x) + \sin\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}m(x)\Big].$$

Nhận xét 2.2 *Sau khi thử lại hai bài toán trên ta nhận thấy: Trong biểu thức nghiệm của tất cả các trường hợp, phần biểu thức có chứa $h(x)$ là nghiệm riêng của phương trình: $f(a^2x) + \alpha f(ax) + \beta f(x) = h(x)$.*

Bài toán 4.4. *Cho $g(x)$ là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ $a, (g(ax) = g(x)); h(x)$ là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ $a, (h(ax) = -h(x)); a \in \mathbb{R}\backslash\{0,1,-1\}; \alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Xác định tất cả các hàm: $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:*

$$f(a^2x) + \alpha f(ax) + \beta f(x) = g(x) + h(x). \tag{4.48}$$

Lời giải:

Xét phương trình đặc trưng:

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0, \Delta = \alpha^2 - 4\beta. \tag{4.49}$$

a) Trường hợp $\Delta > 0$*: Phương trình đặc trưng có hai nghiệm thực:* $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

a1) **Trường hợp 1:** $\lambda_1 \neq \pm 1; \lambda_2 = 1$.

Áp dụng định lý Viete:

$$\begin{cases} 1 + \lambda_1 = -\alpha \\ \lambda_1 = \beta \end{cases}$$

$$(2.2.70) \Leftrightarrow f(a^2x) - (\lambda_1+1)f(ax) + \lambda_1 f(x) = g(x) + h(x) \tag{4.50}$$

Xét phương trình:

$$f_1(a^2x) - (\lambda_1+1)f_1(ax) + \lambda_1 f_1(x) = g(x). \tag{4.51}$$

Áp dụng kết quả của Bài toán 2.4 (trường hợp a1) và nhận xét 2.2 ta có biểu thức: $\dfrac{\ln|x|(1-\lambda_1) - \ln|a|}{\ln|a|(1-\lambda_1)^2}g(x)$ *là nghiệm riêng của (2.2.73). Thay vào ta được:*

$$\begin{aligned} &\frac{\ln|a^2x|(1-\lambda_1) - \ln|a|}{\ln|a|(1-\lambda_1)^2}g(a^2x) - (\lambda_1+1)\frac{\ln|ax|(1-\lambda_1) - \ln|a|}{\ln|a|(1-\lambda_1)^2}g(ax) + \\ &\qquad + \lambda_1\frac{\ln|x|(1-\lambda_1) - \ln|a|}{\ln|a|(1-\lambda_1)^2}g(x) = g(x) \end{aligned} \tag{4.52}$$

Thay (2.2.74) vào (2.2.72):

$$\begin{aligned}(2.2.72) \Leftrightarrow f(a^2x) - \frac{\ln|a^2x|(1-\lambda_1) - \ln|a|}{\ln|a|(1-\lambda_1)^2}g(a^2x) - \\ -(\lambda_1+1)\big[f(ax) - \frac{\ln|ax|(1-\lambda_1) - \ln|a|}{\ln|a|(1-\lambda_1)^2}g(ax)\big] + \\ +\lambda_1\big[f(x) - \frac{\ln|x|(1-\lambda_1) - \ln|a|}{\ln|a|(1-\lambda_1)^2}g(x)\big] = g(x)\end{aligned} \quad (4.53)$$

Đặt $f_2(x) = f(x) - \dfrac{\ln|x|(1-\lambda_1) - \ln|a|}{\ln|a|(1-\lambda_1)^2}g(x)$ *(i) ta có:*

$$(2.2.75) \Leftrightarrow f(a^2x) - (\lambda_1+1)f_2(ax) + \lambda_1 f_2(x) = h(x).$$

Áp dụng kết quả Bài toán 2.5 (trường hợp a1) ta được:

$$f_2(x) = \frac{h(x)}{2(\lambda_1+1)} + \frac{1}{1-\lambda_1}\big[k(x) - |x|^{\log_{|a|}|\lambda_1|}q(x)\big] \qquad (ii)$$

trong đó $k(x); q(x)$ *là hai hàm tùy ý thỏa mãn:*

$$k(ax) = k(x); q(ax) = \begin{cases} q(x) & \text{nếu } \lambda_1 > 0 \\ -q(x) & \text{nếu } \lambda_1 < 0 \end{cases}$$

Từ (i) và (ii) ta có:

$$f(x) = \frac{h(x)}{2(\lambda_1+1)} + \frac{\ln|x|(1-\lambda_1) - \ln|a|}{\ln|a|(1-\lambda_1)^2}g(x) + \frac{1}{1-\lambda_1}\big[k(x) - |x|^{\log_{|a|}|\lambda_1|}q(x)\big].$$

a2) **Trường hợp 2:** $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = 1.$
Biến đổi tương tự như trường hợp a1) ta được:

$$f(x) = \frac{\ln|\frac{x}{a^3}|}{4\ln|a|}h(x) + \frac{\ln|\frac{x^2}{a}|}{\ln a^4}g(x) + \frac{k(x) - q(x)}{2}$$

trong đó $k(x), q(x)$ *là hai hàm tùy ý thỏa mãn:* $k(ax) = k(x); q(ax) = -q(x).$
a3) **Trường hợp 3:** $\lambda_1 \neq \pm 1; \lambda_2 = -1.$
Biến đổi tương tự như trường hợp a1) ta có:

$$f(x) = \frac{\ln|\frac{x^{\lambda_1+1}}{a^{\lambda_1+2}}|h(x)}{\ln|a|(\lambda_1+1)^2} + \frac{g(x)}{2(1-\lambda_1)} + \Big[|x|^{\log_{|a|}|\lambda_1|}q_2(x) - q_1(x)\Big]$$

với $q_1(x), q_2(x)$ là hai hàm tùy ý thỏa mãn:

$$q_1(ax) = -q_1(x);\ q_2(ax) = \begin{cases} q_2(x) & \text{nếu } \lambda_1 > 0 \\ -q_2(x) & \text{nếu } \lambda_1 < 0 \end{cases}$$

a4) **Trường hợp 4:** $\lambda_1 \neq \pm 1; \lambda_2 \neq \pm 1.$
Biến đổi tương tự như trường hợp a1) ta có:

$$f(x) = \frac{h(x)}{1-\alpha+\beta} + \frac{g(x)}{1+\alpha+\beta} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\big[|x|^{\log_{|a|}|\lambda_2|}h_1(x) - |x|^{\log_{|a|}|\lambda_1|}h_2(x)\big]$$

trong đó $h_1(x), h_2(x)$ là hai hàm tùy ý thỏa mãn:

$$h_1(x) = \begin{cases} h_1(x) & \text{nếu } \lambda_2 > 0 \\ -h_1(x) & \text{nếu } \lambda_2 < 0 \end{cases} \quad h_2(x) = \begin{cases} h_2(x) & \text{nếu } \lambda_1 > 0 \\ -h_2(x) & \text{nếu } \lambda_1 < 0 \end{cases}$$

b) Trường hợp $\Delta = 0$
b1) **Trường hợp 1:** $\alpha = -2$
Biến đổi tương tự như trường hợp a1) ta có:

$$f(x) = \frac{h(x)}{4} + \frac{(\ln|x|)^2 - \ln|a|\ln|x|}{2(\ln|a|)^2}h(x) + q(x) + \frac{\ln|x|k(x)}{\ln|a|}$$

Với $k(x), q(x)$ là hai hàm tùy ý thỏa mãn: $k(ax) = k(x), q(ax) = q(x)$.
b2) **Trường hợp 2:** $\alpha = 2$
Biến đổi tương tự như trường hợp a1) ta có:

$$f(x) = -\frac{3\ln|a|\ln|\frac{x}{a}| - (\ln|x|)^2}{2(\ln|a|)^2}h(x) + \frac{g(x)}{4} + g_2(x) - \frac{\ln|\frac{x}{a}|g_1(x)}{\ln|a|}$$

với $g_1(x), g_2(x)$ là hai hàm tùy ý thỏa mãn: $g_1(ax) = -g_1(x); g_2(ax) = -g_2(x)$.
b3) **Trường hợp 3:** $\alpha < 0; \alpha \neq -2$
Biến đổi tương tự như trường hợp a1) ta có:

$$\frac{4h(x)}{(\alpha-2)^2} + \frac{4g(x)}{(\alpha+2)^2} + |x|^{\log_{|a|}(-\frac{\alpha}{2})}\big[p_1(x) - \frac{2\ln|x|q_1(x)}{\alpha\ln|a|}\big],$$

trong đó: $p_1(x), q_1(x)$ là hai hàm tùy ý: $p_1(ax) = p_1(x); q_1(ax) = q_1(x)$
b4) **Trường hợp 4:** $\alpha > 0; \alpha \neq 2$
Biến đổi tương tự như trường hợp a1) ta có:

$$\frac{4h(x)}{(\alpha-2)^2} + \frac{4g(x)}{(\alpha+2)^2} + |x|^{\log_{|a|}\frac{\alpha}{2}}\big[p_2(x) - \frac{2\ln|\frac{x}{a}|q_2(x)}{\alpha\ln|a|}\big]$$

trong đó: $p_2(x), q_2(x)$ *là hai hàm tùy ý:* $p_2(ax) = -p_2(x); q_2(ax) = -q_2(x)$
c) Trường hợp $\Delta < 0$ *Biến đổi tương tự như trường hợp a1) ta có:*

$$f(x) = \frac{h(x)}{1-\alpha+\beta} + \frac{g(x)}{1+\alpha+\beta} + \frac{|\lambda_o|^{\frac{\ln|x|}{\ln|a|}}}{q}\Big[\cos\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}n(x) + \sin\frac{\varphi\ln|x|}{\ln|a|}m(x)\Big]$$

trong đó:
$\lambda_1 = p - iq;\ \lambda_2 = p + iq$ *là nghiệm phương trình:* $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$.
$\Leftrightarrow |\lambda_o| = |\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{p^2+q^2}$
$\tan\varphi = \dfrac{q}{p};\ \arg\lambda_2 = \overline{\arg\lambda_1} = \varphi$; $m(x), n(x)$ *là hai hàm tùy ý thỏa mãn:* $m(ax) = m(x);\ n(ax) = n(x)$.

4.3.3 Một số ví dụ áp dụng

Ví dụ 4.3. *Cho* $g(x)$ *là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ* $3, (g(3x) = g(x)); h(x)$ *là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ* $3, (h(3x) = -h(x))$. *Xác định tất cả các hàm* $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ *sao cho:*

$$f(9x) - 7f(3x) + 10f(x) = 5g(x) + 21h(x).$$

Lời giải:
Xét phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2; \lambda_2 = 5$.
áp dụng Bài toán 2.6 (trường hợp a4) ta có:

$$f(x) = \frac{h(x)}{18} + \frac{g(x)}{4} + \frac{1}{3}\big[|x|^{\log_3 5}h_1 x - |x|^{\log_3 2}h_2 x\big]$$

trong đó h_1, h_2 *là hai hàm tùy ý:* $h_1(3x) = h_1(x); h_2(3x) = h_2(x)$

Ví dụ 4.4. *Cho* $g(x)$ *là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ* $-\dfrac{1}{3}, (g(-\dfrac{1}{3}x) = g(x)); h(x)$ *là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ* $-\dfrac{1}{3}, (h(-\dfrac{1}{3}x) = h(x))$. *Xác định tất cả các hàm:* $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ *sao cho:*

$$f(\frac{1}{9}x) + 2f(-\frac{1}{3}x) + f(x) = 4g(x) - 7h(x) + 13.$$

Lời giải:
Đặt $g_1(x) = 4g(x) + 13 \Rightarrow g_1(-\frac{1}{3}x) = g_1(x)$.
Xét phương trình đặc trưng: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0, \Delta = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -1$ *hơn nữa* $\alpha = 2$, *áp dụng bài toán 2.6 trường hợp b2) ta có:*

$$f(x) = \frac{4g(x)+13}{4} - \frac{\ln 9\ln|3x| - (\ln|x|)^2}{2(\ln 3)^2}7h(x) + \frac{\ln|3x|g_1(x)}{\ln 3} + g_2(x),$$

$g_1(x), g_2(x)$ *là các hàm tùy ý thỏa mãn:* $g_1(-\frac{1}{3}x) = -g_1(x); g_2(-\frac{1}{3}x) = -g_2(x)$.

Ví dụ 4.5. *Cho hàm* $g(x)$ *là hàm tuần hoàn nhân tính chu kỳ* $-e, (g(-ex) = g(x)); h(x)$ *là hàm phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ* $-e, (h(-ex) = -h(x))$. *Xác định tất cả các hàm:* $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ *sao cho:*

$$f(e^2x) - 2\sqrt{3}f(-ex) + 4f(x) = h(x) - 3g(x).$$

Lời giải:
Xét phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 2\sqrt{3}\lambda + 4 = 0, \Delta = -1 < 0$ *phương trình có các nghiệm:*
$\lambda_1 = \sqrt{3} - i; \lambda_2 = \sqrt{3} + i; r = |\lambda_1| = |\lambda_2| = 2; q = 1; \cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{6}.$
áp dụng Bài toán 2.6 (phần c)) ta có:

$$f(x) = \frac{h(x)}{5 + 2\sqrt{3}} - \frac{3g(x)}{5 - 2\sqrt{3}} + 2^{\ln|x|}\big[\cos\frac{\pi\ln|x|}{6}n(x) + \sin\frac{\pi\ln|x|}{6}m(x)\big],$$

trong đó $m(x), n(x)$ *là hai hàm thỏa mãn:* $m(-ex) = m(x); n(-ex) = n(x)$.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Thủy Thanh (1990), Lý thuyết hàm biến phức một biến, NXB Đại học và Trung học Chuyên nghiệp.

[2] Nguyễn Văn Mậu (2004, 2006), Đa thức đại số và phân thức hữu tỉ, NXB Giáo dục.

[3] Nguyễn Văn Mậu (2003), Phương trình hàm, NXB Giáo dục.

[4] Lê Đình Thịnh và các tác giả khác, Phương trình sai phân và một số ứng dụng, NXB Giáo dục.

[5] Nguyễn Trọng Tuấn, Bài toán hàm số qua các kỳ thi Olimpic, NXB Giáo dục.

[6] Kuczma Marek (1968), Functional equations in a single variable, PWN- Polish scientific publishers.

Chương 5

Dãy số sinh bởi hàm số

5.1 Hàm số chuyển đổi phép tính số học và đại số

Trong mục này, ta khảo sát một số tính chất cơ bản của một số dạng hàm số thông qua các hệ thức hàm đơn giản. Ta cũng khảo sát một số dạng hàm bảo toàn và chuyển đổi các tính chất cơ bản của phép tính đại số như giao hoán, phân bố và kết hợp.

Bài toán 1. *Xác định các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Giải.

Đặt $f(x) = g(x) - 1$, ta thu được

$$g(x+y) - 1 = g(x) - 1 + g(y) - 1 + [g(x) - 1][g(y) - 1], \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

hay

$$g(x+y) = g(x)g(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Do $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g(x)$ cũng là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Suy ra (2) có nghiệm $g(x) = e^{ax}, a \in \mathbb{R}$ và (1) có nghiệm

$$f(x) = e^{ax} - 1, \ a \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 2. *Cho hàm số $F(u, v)$ $(u, v \in \mathbb{R})$. Giả sử phương trình hàm:*

$$f(x+y) = F[f(x), f(y)], \ \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (3)$$

có nghiệm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $F(u, v)$ là hàm đối xứng ($F(u, v) = F(v, u)$ và có tính kết hợp

$$F[F(u, v), w] = F[u, F(v, w)], \ \forall u, v, w \in \Im f. \quad (4)$$

Giải.

Nhận xét rằng tính đối xứng của $F(u,v)$ được suy trực tiếp từ (3). Mặt khác, theo (3), ta có

$$f(x+y+z) = f[(x+y)+z] = F\{F[f(x), f(y)], f(z)\},\ \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (5)$$

và

$$\begin{aligned} f(x+y+z) &= f[x+(y+z)] = f[(y+z)+x] = F\{F[f(y), f(z)], f(x)\} \\ &= F\{f(x), F[f(y), f(z)]\},\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (6) \end{aligned}$$

Từ (5) và (6) suy ra (4):

$$F[F(u,v), w] = F[u, F(v,w)],\ \forall u, v, w \in \Im f.$$

Bài toán 3. *Giả sử phương trình hàm:*

$$f(x+y) = F[f(x), f(y)],\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

với hàm số $F(u,v)$ $(u, v \in \mathbb{R})$ là một đa thức (khác hằng), có nghiệm $f(x)$ xác định và liên tục (khác hằng) trên $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $F(u,v)$ có dạng

$$F(u,v) = auv + bu + bv + c. \quad (7)$$

Giải.

Giả sử $F(u,v)$ là đa thức bậc m theo u và bậc n theo v. Khi đó, do $F(u,v)$ đối xứng nên $m = n$. Theo (4) thì

$$F[F(u,v), w] = F[u, F(v,w)],\ \forall u, v, w \in \Im f$$

nên vế trái là một đa thức bậc n theo w còn vế phải là đa thức bậc n^2 theo w. Suy ra $n^2 = n$ hay $n = 1$. Vậy $F(u,v)$ có dạng

$$F(u,v) = auv + b_1u + b_2v + c.$$

Do $F(u,v)$ là đa thức đối xứng nên $b_1 = b_2$ và

$$F(u,v) = auv + bu + bv + c.$$

Nhận xét rằng, với $F(u,v) = auv + bu + bv + c$ và $F(u,v)$ thoả mãn điều kiện (4) thì

$$ac = b^2 - b.$$

Vậy với $a \neq 0$ thì

$$ac = b^2 - b \Leftrightarrow c = \frac{b^2 - b}{a},\ a \neq 0. \quad (8)$$

Bây giờ, ta chuyển sang xét các dạng đặc biệt của (7).

Bài toán 4. *Cho đa thức $F(u, v) = bu + bv + c$, $b \neq 0$. Xác định các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện*

$$f(x + y) = F[f(x), f(y)], \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

tức là

$$f(x + y) = bf(x) + bf(y) + c, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Giải.

Nhận xét rằng, nếu $b \neq 1$ thì từ (9) với $y = 0$, ta có ngay $f(x) = \text{const}$. Khi $b = \dfrac{1}{2}$ và $c = 0$ thì mọi hàm hằng đều thoả mãn (8). Khi $b = \dfrac{1}{2}$ và $c \neq 0$ thì (9) vô nghiệm. Các trường hợp khác ($b \neq 1$, $b \neq \dfrac{1}{2}$ thì nghiệm của (9) là $f(x) = \dfrac{c}{1 - 2b}$.

Xét trường hợp $b = 1$. Khi đó (9) có dạng

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + c, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

và phương trình hàm này có nghiệm $f(x) = \alpha x - c$.

Bài toán 5. *Cho đa thức $F(u, v) = auv + bu + bv + \dfrac{b^2 - b}{a}$, $a \neq 0$. Xác định các hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện*

$$f(x + y) = F[f(x), f(y)], \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

tức là

$$f(x + y) = af(x)f(y) + bf(x) + bf(y) + \frac{b^2 - b}{a}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Giải.

Nhận xét rằng, nếu đặt

$$f(x) = \frac{h(x) - b}{a}$$

thì thì từ (10) ta nhận được

$$h(x + y) = h(x)h(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

và phương trình hàm này có nghiệm $h(x) = e^{\alpha x}$. Suy ra nghiệm của (10) có dạng

$$f(x) = \frac{e^{\alpha x} - b}{a}.$$

Bài toán 6. *Giả sử $f(x)$ là nghiệm của phương trình hàm:*

$$f(ax + by + c) = Af(x) + Bf(y) + C \, (abAB \neq 0), \ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{11}$$

Chứng minh rằng hàm số $g(x) = f(x) - f(0)$ thoả mãn phương trình Cauchy

$$g(x+y) = g(x) + g(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải.

Lần lượt đặt $x = \dfrac{u}{a}$, $y = \dfrac{v-c}{b}$; $x = \dfrac{u}{a}$, $y = -\dfrac{c}{b}$; $x = 0$, $y = \dfrac{v-c}{b}$; $x = 0$, $y = -\dfrac{c}{b}$ *vào (11), ta thu được các đẳng thức*

$$f(u+v) = Af\Big(\frac{u}{a}\Big) + Bf\Big(-\frac{v-c}{b}\Big) + C,$$

$$f(u) = Af\Big(\frac{u}{a}\Big) + Bf\Big(-\frac{c}{b}\Big) + C,$$

$$f(v) = Af(0) + Bf\Big(\frac{v-c}{b}\Big) + C,$$

$$f(0) = Af(0) + Bf\Big(-\frac{c}{b}\Big) + C.$$

Suy ra

$$f(u+v) = f(u) + f(v) - f(0).$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 7. *Giả sử hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ là nghiệm của phương trình hàm:*

$$f(ax+by+c) = Af(x) + Bf(y) + C\ (abAB \neq 0),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad (11)$$

Chứng minh rằng khi đó $A = a$, $B = b$.

Giải.

Thật vậy, nghiệm của

$$g(x+y) = g(x) + g(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

trong lớp các hàm liên tục là hàm tuyến tính $g(x) = \alpha x$. Do vậy, nghiệm $f(x)$ có dạng $f(x) = \alpha x + \beta$. Thế vào (11), ta thu được $A = a$, $B = b$ và

$$\alpha c - C = (a+b-1)\beta. \qquad (12)$$

Bài toán 8. *Giải và biện luận phương trình hàm sau trong lớp các hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$:*

$$f(ax+by+c) = Af(x) + Bf(y) + C\ (abAB \neq 0),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad (11)$$

Giải.

Theo Bài toán 7, thì điều kiện cần để phương trình hàm (11) có nghiệm là $a = A$, $b = B$.

Giả sử điều kiện này được thoả mãn. Theo (12), ta chia các trường hợp riêng để khảo sát.

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp $b + a = 1,\ c = 0$.

Khi đó, (11) có dạng

$$f(ax + (1-a)y) = af(x) + (1-a)f(y)\,(abAB \neq 0),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Ta thu được (13) thuộc lớp hàm chuyển tiếp các đại lượng trung bình cộng. Vì vậy (13) có nghiệm $f(x) = \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Trường hợp $b + a = 1,\ c \neq 0$.

Khi đó, (11) có dạng

$$f(ax + (1-a)y + c) = af(x) + (1-a)f(y) + C\,(abAB \neq 0),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Đặt $f(x) = \dfrac{C}{c}x + h(x)$. *Ta thu được (13) dưới dạng*

$$h(ax + (1-a)y + c) = ah(x) + (1-a)h(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Dễ kiểm tra, phương trình (14) chỉ có nghiệm hằng tuỳ ý (xem (12)) và vì vậy, (13) có nghiệm $f(x) = \dfrac{C}{c}x + \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Trường hợp $b + a \neq 1$. *Theo Bài toán 6 thì nghiệm của (13) có dạng* $f(x) = \alpha x + \beta$. *Theo (12) thì* $\alpha c - C = (a + b - 1)\beta$. *Vậy nếu cho* $\alpha \in \mathbb{R}$ *giá trị tuỳ ý thì* $\beta = \dfrac{\alpha c - C}{a + b - 1}$.

Chú ý

Nếu không đòi hỏi nghiệm của (11) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ *thì các đẳng thức* $a = A$, $b = B$ *và (12) có thể không thoả mãn. Tuy nhiên, ta vẫn có các tính chất đại số sau đây.*

Bài toán 9. *Giả sử phương trình hàm*

$$f(ax + y) = Af(x) + f(y)\ \ (aA \neq 0),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{15}$$

có nghiệm khác hằng. Chứng minh rằng nếu a *(hoặc* A*) là số đại số với đa thức tối tiểu* $P_a(t)$*(tương ứng* $P_A(t)$*) thì* A *(tương ứng* a*) là số đại số và*

$$P_a(t) \equiv P_A(t). \tag{16}$$

Giải.

Ta thấy $f(0) = 0$ *nên* $f(ax) = af(x)$ *và bằng quy nạp toán học, dễ dàng chứng minh*

$$f(a^k x) = A^k f(x), \;\; k \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Giả sử

$$P_a(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} r_i t^i, \;\; r_0, \dots, r_{n-1} \in \mathbb{Q}.$$

Khi đó, theo (17) thì

$$f\Big[(a^n + \sum_{i=0}^{n-1} r_a^i)x\Big] = f(a^n x) + \sum_{i=0}^{n-1} r_i f(a^i x)$$

$$\Big(A^n + \sum_{i=0}^{n-1} r_A^i\Big) f(x).$$

Vì $f(x)$ *khác hằng nên*

$$A^n + \sum_{i=0}^{n-1} r_A^i = 0 \tag{18}$$

và vì vậy A *là số đại số. Suy ra* $P_a(t)$ *là ước của* $P_A(t)$ *và do* $P_A(t)$ *là đa thức tối tiểu nên có (16).*

Ngược lại, nếu A *là số đại số thoả mãn (18) thì thực hiện quy trình ngược lại, ta thu được*

$$a^n + \sum_{i=0}^{n-1} r_a^i = 0 \tag{19}$$

và từ đó suy ra (16).

Bài toán 10. *Giả sử phương trình hàm*

$$f(ax + y) = Af(x) + f(y) \;\; (aA \neq 0,\, a \in \mathbb{Q}), \;\; \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{20}$$

có nghiệm khác hằng. Chứng minh rằng khi đó $a = A$.

Giải.

Thật vậy, theo Bài toán 9 thì $P_a(t)$ *là đa thức bậc nhất và vì vậy* $P_A(t)$ *cũng là đa thức bậc nhất (với hệ số bậc cao nhất đều bằng 1) nên* $a = A$.

Bài toán 11. *Giải phương trình hàm sau trong lớp các hàm số* $f(x)$ *liên tục trên* $\mathbb{R}$*:*

$$f(x + y) = a^{xy} f(x) f(y) \, (a > 0), \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Giải.

Dễ thấy $f(1) \geqslant 0$. Nếu $f(1) = 0$ thì từ (21) ta có ngay $f(x) \equiv 0$. Xét trường hợp $f(1) > 0$. Bằng quy nạp, dễ dàng kiểm chứng hệ thức

$$f(nx) = a^{\frac{(n^2-n)x^2}{2}}[f(x)]^n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy với $x = 1$ thì

$$f(n) = a^{\frac{n^2-n}{2}}[f(1)]^n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Với $x = \dfrac{m}{n}$, ta thu được

$$f(m) = a^{\frac{(n^2-n)(\frac{m}{n})^2}{2}}\Big[f(\frac{m}{n})\Big]^n, \ \ \forall m, n \in \mathbb{N}^*.$$

và

$$f(m) = a^{\frac{m^2-m}{2}}[f(1)]^m, \ \ \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

Suy ra

$$f\Big(\frac{m}{n}\Big) = a^{\frac{1}{2}(\frac{m}{n})^2}\Big[a^{-\frac{1}{2}}f(1)\Big]^{\frac{m}{n}}. \tag{22}$$

Do $f(1) > 0$ nên có thể viết

$$c = -\frac{1}{2} + \log_a f(1).$$

Từ (21) suy ra

$$f(x) = a^{\frac{1}{2}x^2+cx}, \ \ \forall x \in \mathbb{Q}^+. \tag{23}$$

Do $f(x)$ liên tục nên (16) thoả mãn với mọi $x \in \mathbb{R}^+$. Với $x < 0$, ta đặt $-x = y$ và do $f(0) = 1$ nên từ giả thiết (21) ta nhận được

$$1 = a^{-x^2}f(x)a^{(x^2/2)-cx},$$

hay

$$f(x) = a^{\frac{1}{2}x^2+cx}, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Nhận xét.

Bằng cách đặt

$$f(x) = a^{x^2/2}g(x)$$

ta đưa (15) về dạng quen biết

$$g(x+y) = g(x)g(y), \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 12. *Xác định các hàm số f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện*

$$f(x+y) + f(z) = f(x) + f(y+z), \ \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Giải.

Đặt $f(0) = a$ *thì với* $z = 0$ *trong (1) ta thu được*

$$f(x+y) + a = f(x) + f(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Đặt $f(x) = g(x) + a$. *Từ (2) ta nhận được*

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Phương trình (3) có nghiệm $g(x) = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Suy ra phương trình (1) có nghiệm

$$f(x) = \alpha x + \beta, \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Thử lại, ta thấy hàm $f(x) = \alpha x + \beta$ *thoả mãn điều kiện bài ra.*

Bài toán 13. *Xác định các hàm số* f *xác định và liên tục trên* $\mathbb{R}$ *thoả mãn điều kiện*

$$f(x+y)f(z) = f(x)[f(y) + f(z)], \ \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Giải.

Thay $y = z = 0$ *trong (4), ta thu được* $f(0)f(x) = 0$. *Vậy* $f(0) = 0$. *Với* $z = 0$ *thì*

$$f(x+y)f(0) = f(x)[f(y) + f(0)], \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

hay

$$f(x)f(y) = 0, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Suy ra $f(x) \equiv 0$.

5.2 Về các dãy số xác định bởi dãy các phương trình

Trong toán học, có rất nhiều trường hợp ta không xác định được giá trị cụ thể đối tượng mà chúng ta đang xét (ví dụ số, hàm số) nhưng vẫn có thể thực hiện các phép toán trên các đối tượng đó. Ví dụ ta có thể không biết giá trị các nghiệm của một phương trình, nhưng vẫn biết được tổng của chúng:

Ví dụ 5.1. *Tìm tổng các nghiệm của phương trình* $\cos^5 x - 5\cos^3 x + 3\cos x - 1 = 0$ *trên đoạn* $[0, 2]$.

Đôi khi ta cần tính tích phân của một hàm mà ta không có biểu thức tường minh:

Ví dụ 5.2. *Chứng minh rằng với mọi* $t \geq 0$, *phương trình* $x^3 + tx - 8 = 0$ *luôn có 1 nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là* $x(t)$. *Tính* $\int_0^7 [x(t)]^2 dt$.

Trong bài viết nhỏ này, chúng ta sẽ đề cập đến một tình huống căn bản khác, đó là khảo sát những dãy số xác định bởi dãy các phương trình.

Bài toán 5.1. *Cho dãy các hàm số $f_n(x)$ xác định bởi công thức tường minh hoặc truy hồi thoả mãn điều kiện: các phương trình $f_n(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_n \in D$. Cần khảo sát các tính chất của x_n như khảo sát sự hội tụ, tìm giới hạn...*

Chúng ta bắt đầu từ một bài toán thi tuyển sinh vào khoa Toán trường Đại học Độc lập Matxcơva năm 2000.

Bài toán 5.2. *Ký hiệu x_n là nghiệm của phương trình*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-n} = 0$$

thuộc khoảng $(0, 1)$

a) Chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ;

b) Hãy tìm giới hạn đó.

Bình luận*: Dãy x_n được xác định duy nhất vì hàm số*

$$f_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \cdots + \frac{1}{x-n}$$

liên tục và đơn điệu trên $(0, 1)$. Tuy nhiên, ta không thể xác định được giá trị cụ thể của x_n. Rất may mắn, để chứng minh tính hội tụ của x_n, ta không cần đến điều đó. Chỉ cần chứng minh tính đơn điệu và bị chặn là đủ. Với tính bị chặn, mọi thứ đều ổn vì $0 < x_n < 1$. Với tính đơn điệu, ta chú ý một chút đến mối liên hệ giữa $f_n(x)$ và $f_{n+1}(x)$ trong đó

$$f_{n+1}(x) = f_n(x) + f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{x-n-1}.$$

Đây chính là chìa khoá để chứng minh tính đơn điệu của x_n.

Lời giải. *Rõ ràng x_n được xác định một cách duy nhất, $0 < x_n < 1$. Ta có*

$$f_{n+1}(x_n) = f_n(x_n) + 1/(x_n - n - 1) = 1/(x_n - n - 1) < 0,$$

trong khi đó $f_{n+1}(0^+) > 0$. Theo tính chất của hàm liên tục, trên khoảng $(0, x_n)$ có ít nhất một nghiệm của $f_{n+1}(x)$. Nghiệm đó chính là x_{n+1}. Như thế ta đã chứng minh được $x_{n+1} < x_n$, tức là dãy số $\{x_n\}$ đơn điệu giảm. Do dãy này bị chặn dưới bởi 0 nên dãy số đã cho có giới hạn.

Ta sẽ chứng minh giới hạn nói trên bằng 0. Để chứng minh điều này, ta cần đến kết quả quen thuộc sau:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln n$$

(Có thể chứng minh dễ dàng bằng cách sử dụng đánh giá $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ *).*

Thật vậy, giả sử $\lim x_n = a > 0$. *Khi đó, do dãy số giảm nên ta có* $x_n \geq a$ *với mọi* n.

Do $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \to \infty$ *khi* $n \to \infty$ *nên tồn tại* N *sao cho với mọi* $n \to N$ *ta có* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \frac{1}{a}$.

Khi đó với $n \geq N$ *ta có*

$$0 = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_n - 1} + \cdots + \frac{1}{x_n - n} < \frac{1}{x_n} + \frac{1}{-1} + \frac{1}{-2} + \cdots + \frac{1}{x_n} < \frac{1}{a} + \frac{1}{a} = 0,$$

mâu thuẫn. Vậy ta phải có $\lim x_n = 0$.

Bài toán 5.3. *Cho* n *là một số nguyên dương* $(n > 1)$. *Chứng minh rằng phương trình* $x^n = x + 1$ *có một nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là* x_n. *Chứng minh rằng* x_n *dần về 1 khi* n *dần đến vô cùng và tìm*

$$\lim_{n\to\infty} n(x_n) - 1).$$

Lời giải. *Rõ ràng* $x_n > 1$. *Đặt* $f_n(x) = x_n - x - 1$. *Khi đó* $f_{n+1}(1) = -1 < 0$ *và*

$$f_{n+1}(x_n) = x_{n+1}^n - x_n - 1 > x_n^n - x_n - 1 = f_n(x_n) = 0.$$

Từ đó ta suy ra $1 < x_{n+1} < x_n$. *Suy ra dãy* $\{x_n\}$ *có giới hạn hữu hạn* a. *Ta chứng minh* $a = 1$. *Thật vậy, giả sử* $a > 1$. *Khi đó* $x_n \geq a$ *với mọi* n *và ta tìm được* n *đủ lớn sao cho:* $x_n^n \geq a^n > 3$ *và* $x_n + 1 < 3$, *mâu thuẫn với* $f_n(x_n) = 0$.

Để giải phần cuối của bài toán, ta đặt $x_n = 1 + y_n$ *với* $\lim y_n = 0$. *Thay vào phương trình* $f_n(x_n) = 0$, *ta được* $(1 + y_n)^n = 2 + y_n$. *Lấy logarith hai vế, ta được*

$$n \ln(1 + y_n) = \ln(2 + y_n)$$

Từ đó suy ra

$$\lim n \ln(1 + y_n) = \ln 2$$

Nhưng $\lim \ln(1 + y_n)/y_n = 1$ *nên từ đây ta suy ra* $\lim n y_n = \ln 2$, *tức là*

$$\lim_{n\to\infty} n(x_n - 1) = \ln 2.$$

Bài toán 5.4 (*VMO 2007*). *Cho số thực $a > 2$ và $f_n(x) = a^{10}x^{n+10} + x^n + \cdots + x + 1$.*

a) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n, phương trình $f_n(x) = a$ luôn có đúng một nghiệm dương duy nhất.

b) Gọi nghiệm đó là x_n, chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi n dần đến vô cùng.

Lời giải. *Kết quả của câu a) là hiển nhiên vì hàm $f_n(x)$ tăng trên $(0, +\infty)$. Dễ dàng nhận thấy $0 < x_n < 1$. Ta sẽ chứng minh dãy x_n tăng, tức là $x_{n+1} > x_n$. Tương tự như ở những lời giải trên, ta xét*

$$f_{n+1}(x_n) = a^{10}x_n^{n+11} + x_n^{n+1} + x_n^n + \cdots + x + 1 = x_n f_n(x_n) + 1 = ax_n + 1$$

Vì ta đã có $f_{n+1}(1) = a^{10} + n + 1 > a$ nên ta chỉ cần chứng minh $ax_n + 1 < a$ là sẽ suy ra $x_n < x_{n+1} < 1$. Như vậy, cần chứng minh $x_n < \dfrac{a-1}{a}$. Thật vậy, nếu $x_n \geq \dfrac{a-1}{a}$ thì

$$f_n(x_n) \geq a^{10}\Big(\frac{a-1}{a}\Big)^{n+10} + \frac{1 - \Big(\dfrac{a-1}{a}\Big)^{n+1}}{1 - \dfrac{a-1}{a}} =$$

$$= (a-1)^{10}\Big(\frac{a-1}{a}\Big)^n + a - (a-1)\Big(\frac{a-1}{a}\Big)^n > a$$

(do $a - 1 > 1$). Vậy dãy số tăng $\{x_n\}$ tăng và bị chặn bởi 1 nên hội tụ.

Nhận xét 5.1. *Một lần nữa mối liên hệ $f_{n+1}(x) = xf_n(x) + 1$ lại giúp chúng ta tìm được mối quan hệ giữa x_n và x_{n+1}. Từ lời giải trên, ta có thể chứng minh được rằng $\lim x_n = \dfrac{a-1}{a}$. Thật vậy, đặt $c = \dfrac{a-1}{a} < 1$, theo tính toán ở trên thì*

$$f_n(c) - f_n(x_n) = kc^n \text{ (với } k = (a-1)((a-1)^9 - 1) > 0)$$

Theo định lý Lagrange thì

$$f_n(c) - f_n(x_n) = f'(\xi)(c - x_n) \text{ với } \xi \text{ thuộc } (x_n, c)$$

Nhưng $f'(\xi) = (n+10)a^{10}\xi^{n+9} + n\xi^{n-1} + \cdots + 1 > 1$ nên từ đây suy ra

$$kc^n > c - x_n$$

Từ đó ta có

$$c - kc^n < x_n < c$$

Và có nghĩa làm $\lim x_n = c$.

Bài toán 4. *(VMO 2002) Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng phương trình*

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4x-1}+\cdots+\frac{1}{n^2x-1}=\frac{1}{2}$$

có một nghiệm duy nhất $x_n > 1$*. Chứng minh rằng khi n dần đến vô cùng,* x_n *dần đến 4.*

Bình luận: Việc chứng minh phương trình có nghiệm duy nhất $x_n > 1$ *là hiển nhiên. Mối liên hệ* $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \dfrac{1}{((n+1)^2x-1)}$ *cho thấy* x_n *là dãy số tăng (ở đây* $f_n(x) = \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{4x-1}+\cdots+\dfrac{1}{n^2x-1}-\dfrac{1}{2}$*). Đề bài cho sẵn giới hạn của* x_n *là 4 đã làm cho bài toán trở nên dễ hơn nhiều. Tương tự như cách chứng minh* $\lim x_n = c$ *ở nhận xét trên, ta sẽ dùng định lý Lagrange để đánh giá khoảng cách giữa* x_n *và 4. Để làm điều này, ta cần tính* $f_n(4)$*, với* $f_n(x) = \dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{4x-1}+\cdots+\dfrac{1}{n^2x-1}-\dfrac{1}{2}$*. Rất may mắn, bài tính* $f_n(4)$ *này liên quan đến 1 dạng tổng quen thuộc.*

Lời giải*: Đặt* $f_n(x)$ *như trên và gọi* x_n *là nghiệm > 1 duy nhất của phưng trình* $f_n(x) = 0$*. Ta có*

$$\begin{aligned}f_n(4) &= \frac{1}{4-1}+\frac{1}{16-1}+\cdots+\frac{1}{4n^2-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{2}\\ &=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\Big)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4n}\end{aligned}$$

Áp dụng định lý Lagrange, ta có

$$\frac{1}{4n}=|f_n(x_n)-f(4)|=|f'(c)||x_n-4|$$

với c thuộc $(x_n, 4)$

Nhưng do

$$|f'(c)|=\frac{1}{(c-1)^2}+\frac{1}{(4c-1)^2}+\cdots>\frac{1}{9}$$

Nên từ đây $|x_n-4|<\dfrac{9}{4n}$*, suy ra* $\lim x_n = 4$.

Trong ví dụ trên (và trong phần nhận xét ở bài toán 3) chúng ta đã sử dụng định lý Lagrange để đánh giá hiệu số giữa x_n *và giá trị giới hạn. Ở ví dụ cuối cùng của bài viết này, ta tiếp tục nếu ra ứng dụng dụng định lý này trong một tình huống phức tạp hơn.*

Bài toán 5. *Cho n là một số nguyên dương > 1. Chứng minh rằng phương trình $x^n = x^2 + x + 1$ có một nghiệm dương duy nhất, ký hiệu là x_n. Hãy tìm số thực a sao cho giới hạn $\lim_{n\to\infty} n^a(x_n - x_{n+1})$ tồn tại, hữu hạn và khác 0.*

Bình luận. *Dễ thấy giá trị a, nếu tồn tại, là duy nhất. Tương tự như ở bài toán 2, có thể chứng minh được rằng $x_n \approx 1 + \dfrac{\ln(3)}{n}$. Từ đó có dự đoán là $a = 2$. Định lý Lagrange sẽ giúp chúng ta đánh giá hiệu $x_n - x_{n+1}$ và chứng minh dự đoán này.*

Lời giải. *Đặt*

$$P_n(x) = x^n - x^2 - x - 1.$$

Ta có

$$P_{n+1}(x) = x^{n+1} - x^2 - x - 1 = x^{n+1} - x^n + P_n(x) = x^n(x-1) + P_n(x).$$

Từ đó

$$P_{n+1}(x_n) = x_n^n(x_n - 1) + P_n(x_n) = (x_n^2 + x_n + 1)(x_n - 1) = x_n^3 - 1.$$

Áp dụng định lý Lagrange, ta có

$$(x_n^2 + x_n + 1)(x_n - 1) = P_{n+1}(x_n) - P_{n+1}(x_{n+1}) = (x_n - x_{n+1})P'_{n+1}(c)$$

với c thuộc (x_{n+1}, x_n), $P'_{n+1}(x) = (n+1)x^n - 2x - 1$.

Từ đó

$$(n+1)\Big)x_{n+1} + 1 + \frac{1}{x_{n+1}}\Big) - 2x_{n+1} - 1 = P'_{n+1}(x_{n+1}) < P'_{n+1}(c) <$$
$$< P'_{n+1}(x_n) = (n+1)(x_n^2 + x_n + 1) - 2x_n - 1.$$

Từ đây, với lưu ý $\lim x_n = 1$, ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P'_{n+1}(c)}{n} = 3$$

Tiếp tục sử dụng $\lim n(x_n - 1) = 3$, ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty} nP'_{n+1}(c)(x_n - x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} n(x_n^2 + x_n + 1)(x_n - 1) = 3\ln(3)$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} n^2(x_n - x_{n+1})\frac{P'_{n+1}(c)}{n} = 3\ln(3)$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} n^2(x_n - x_{n+1}) \lim_{n\to\infty} \frac{P'_{n+1}(c)}{n} = 3\ln(3)$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} n^2(x_n - x_{n+1})3 = 3\ln(3)$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} n^2(x_n - x_{n+1}) = \ln(3)$$

Vậy với $c = 2$ thì giới hạn đã cho tồn tại, hữu hạn và khác 0. Dễ thấy với $c > 2$ thì giới hạn đã cho bằng vô cùng và với $c < 2$ thì giới hạn đã cho bằng 0. Vậy $c = 2$ là đáp số duy nhất của bài toán.

Qua các ví dụ trên, chúng ta thấy công cụ cơ bản để khảo sát các dãy số cho bởi dãy các phương trình là các định lý cơ bản của giải tích (về hàm liên tục, hàm đơn điệu, định lý về sự hội tụ của dãy số đơn điệu và bị chặn, định lý Lagrange) và mối liên hệ mang tính truy hồi giữa các phương trình. Hy vọng rằng việc phân tích các tình huống ở 5 ví dụ trên đây sẽ giúp chúng ta có một cách nhìn tổng quát cho các bài toán ở dạng này.

5.3 Định lý về ba mệnh đề tương đương

Định lý 5.1 (*Về ba mệnh đề tương đương*)**.** *. Cho dãy số $\{c_k\}$ với $0 < c_k < 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Xét các dãy số*

$$X_n = \prod_{i=1}^{n}(1 + c_i);\ Y_n = \prod_{i=1}^{n}(1 - c_i).$$

Khi đó ba khẳng định sau là tương đương

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = +\infty$,

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n = 0$,

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\Big) = +\infty$.

Chứng minh.

Xét khẳng định (i)⇒ (iii).

Giả sử $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i < M$, với $0 < M < +\infty$. Khi đó

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + c_i) < \Big(1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i\Big)^n < \Big(1 + \frac{M}{n}\Big)^n < e^M,$$

vô lý vì rằng $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = +\infty$. Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} c_i\Big) = +\infty$.

Xét khẳng định (iii)⇒ (i). Điều này là hiển nhiên đúng vì rằng

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + c_i) > \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Xét khẳng định (ii)⇒ (iii). Nhận xét rằng, ứng với bộ n số bất kỳ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *với* $0 < a_i < 1$, *thì*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i > 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - a_i).$$

Dễ dàng kiểm tra tính đúng đắn của bất đẳng thức này bằng qui nạp.

Do $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{i=1}^{n}(1-c_i) = 0$ *nên ứng với mỗi m luôn tồn tại n sao cho* $\prod\limits_{i=1}^{n}(1-c_i) < \frac{1}{2}$. *Từ đó ta có*

$$\sum_{i=1}^{n} c_i > 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - c_i) > \frac{1}{2}.$$

Suy ra $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} c_i = +\infty$.

Xét khẳng định (i)⇒ (ii). Ta có

$$1 > \prod_{i=1}^{n}(1 - c_i^2) = \prod_{i=1}^{n}(1 + c_i)\prod_{i=1}^{n}(1 - c_i).$$

Nhưng vì $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{i=1}^{n}(1 + c_i) = +\infty$ *nên* $\lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{i=1}^{n}(1 - c_i) = 0$ *(theo nguyên lý kẹp). Do đó* $\lim\limits_{n\to+\infty} Y_n = 0$.

□

Bây giờ ta chuyển sang phần áp dụng định lý trên để giải quyết một số bài toán.

5.4 Một số bài toán về ước lượng tổng và tích

Bài toán 5.5. *Cho dãy số thực tăng* $\{u_n\}$ *có tính chất*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Chứng minh rằng luôn tồn tại $k \in \mathbb{N}$ *sao cho*

$$\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \cdots + \frac{u_k}{u_{k+1}} < k - 2007$$

(ta giả sử $u_1 > 0$*).*

Giải.

Ta sử dụng biến đổi tương đương sau

$$k - \Big(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_2}{u_3} + \cdots + \frac{u_k}{u_{k+1}}\Big) > 2007 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \Big(1 - \frac{u_i}{u_{i+1}}\Big) > 2007.$$

Do $\{u_n\}$ *là dãy tăng nên* $0 < 1 - \dfrac{u_i}{u_{i+1}} < 1$.

Đặt $c_i = 1 - \dfrac{u_i}{u_{i+1}}$. *Suy ra* $0 < c_i < 1$. *Mặt khác, ta có*

$$\prod_{i=1}^{n}(1 - c_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{u_1}{u_{n+1}}$$

tiến dần tới 0 *khi* $n \to +\infty$. *Vậy nên* $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = +\infty$ *(Từ 2)⇒ 3). Do đó* $\exists k \in \mathbb{N}$ *để*

$$\sum_{i=1}^{k} \Big(1 - \frac{u_i}{u_{i+1}}\Big) = \sum_{i=1}^{k} c_i > 2007.$$

Bài toán 5.6. *Cho dãy số* $\{a_n\}$ *dương có tính chất* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. *Chứng minh rằng luôn tồn tại* $k \in \mathbb{N}$ *sao cho*

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_i} > 26^{3^{2007}}.$$

Giải.

Đặt $c_i = \dfrac{a_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_i}$ *Vì* $a_i > 0$ *nên* $0 < c_i < 1$ *và*

$$1 - c_i = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{i-1}}{a_1 + a_2 + \cdots + a_i}, \quad \text{với } i \geq 2.$$

Suy ra

$$\prod_{i=2}^{n}(1 - c_i) = \frac{a_1}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$$

tiến dần tới 0 *khi* $n \to +\infty$.

Vì $a_i > 0$ *và* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, *nên* $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i = +\infty$ *hay* $\exists k \in \mathbb{N}$ *để* $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i > 26^{3^{2007}}$, *điều phải chứng minh.*

Bài toán 5.7. *Xét dãy tất cả các số nguyên tố* $\{p_n\}$, $2 = p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$. *Chứng minh rằng*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty.$$

Giải.

Bài toán 5.8. *Xét dãy số* $\{a_n\}$ *xác định bởi công thức*

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n+2} a_n, \ \ n = 1, 2, \ldots.$$

Chứng minh rằng

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1.$$

Giải.

Bài toán 5.9. *Cho dãy số* $\{a_n\}$ *dương, tăng và không bị chặn. Chứng minh rằng*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big[\arccos\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}\Big)\Big]^2 = +\infty.$$

Giải.

5.5 Bài tập

Bài 5.1. *Cho dãy số* $\{a_n\}$ *dương, tăng và không bị chặn. Chứng minh rằng*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \arccos\Big(\frac{a_n}{a_{n+1}}\Big) = +\infty.$$

Chương 6

Một số lớp hàm chuyển đổi các cấp số

Trong chương này sẽ mô tả một số lớp hàm số chuyển đổi các cấp số.

6.1 Cấp số cộng, cấp số nhân và cấp số điều hoà

Trong chương trình toán bậc trung học, các bài toán về cấp số cộng và cấp số nhân đã được đề cập khá đầy đủ. Đặc biệt, trong các sách giáo khoa và sách bồi dưỡng, nâng cao có một số lượng rất lớn các bài toán về tính tổng, xác định số hạng tổng quát, điều kiện để một dãy lập thành một cấp số,... . Vì vậy, trong mục này chúng ta chủ yếu tập trung khảo sát một số đặc trưng có liên quan trực tiếp đến dãy số là các cấp số cộng, cấp số nhân và một vài dạng cấp số mở rộng.

Định nghĩa 6.1. *(i) Dãy số $\{u_n\}$ (hoặc (u_n)) thoả mãn điều kiện*

$$u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = \cdots = u_{n+1} - u_n = \cdots$$

được gọi là một cấp số cộng.

(ii) Khi dãy số $\{u_n\}$ lập thành một cấp số cộng thì hiệu $d = u_1 - u_0$ được gọi là công sai của cấp số đã cho.

Nhận xét rằng khi cho một dãy hữu hạn số $\{u_0, u_1, \dots, u_s\}$ thoả mãn điều kiện

$$u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = \cdots = u_s - u_{s-1}$$

thì ta cũng nói rằng dãy hữu hạn đã cho lập thành một cấp số cộng với công sai $d = u_1 - u_0$.

Định nghĩa 6.2. *(i) Dãy số $\{u_n\}$ ($u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$) thoả mãn điều kiện*

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = \cdots = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \cdots$$

được gọi là một cấp số nhân.

(ii) Khi dãy số $\{u_n\}$ lập thành một cấp số nhân thì thương $q = \dfrac{u_1}{u_0}$ được gọi là công bội của cấp số đã cho.

Nhận xét rằng khi cho một dãy hữu hạn số khác 0 : $\{u_0, u_1, \ldots, u_s\}$ thoả mãn điều kiện

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{u_2}{u_1} = \cdots = \frac{u_s}{u_{s-1}}$$

thì ta cũng nói rằng dãy hữu hạn đã cho lập thành một cấp số nhân với công bội $p = \dfrac{u_1}{u_0}$.

Ta luôn có mối liên hệ giữa cấp số cộng và cấp số nhân sau đây.

Bài toán 6.1. *(i) Nếu dãy số $\{u_n\}$ là một cấp số cộng thì dãy số $\{v_n\}$ với*

$$v_n = a^{u_n}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \ a > 0$$

sẽ lập thành một cấp số nhân.

(ii) Ngược lại, nếu dãy số $\{u_n\}$ là một cấp số nhân với các số hạng dương thì dãy số $\{v_n\}$ với

$$v_n = \log_a u_n, \ \ \forall n, \in \mathbb{N}, \ \ 0 < a \neq 1$$

sẽ lập thành một cấp số cộng.

Giải *Chứng minh được suy ra trực tiếp từ Định nghĩa 6.1 và 6.2* □

Định nghĩa 6.3. *Dãy số $\{u_n\}$ ($u_n \neq 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}$) thoả mãn điều kiện*

$$u_n = \frac{2u_{n-1}u_{n+1}}{u_{n-1} + u_{n+1}}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

được gọi là cấp số điều hoà.

6.2 Dãy số tuần hoàn

Tương tự như đối với hàm số thông thường, ta có thể coi dãy số $\{x_n\}$ như một hàm $f(n) = x_n$ xác định trên tập $\mathbb{N}$ và nhận giá trị trong $\mathbb{R}$. Ta chỉ quan tâm đến hai loại dãy tuần hoàn cơ bản là tuần hoàn cộng tính và tuần hoàn nhân tính.

Định nghĩa 6.4. *Dãy số* $\{u_n\}$ *được gọi là một dãy tuần hoàn (cộng tính) nếu tồn tại số nguyên dương* l *sao cho*

$$u_{n+l} = u_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Số nguyên dương l *nhỏ nhất để dãy* $\{u_n\}$ *thoả mãn* (1) *được gọi là chu kỳ cơ sở của dãy.*

Trong thực hành, để chứng minh một dãy đã cho là tuần hoàn, không nhất thiết phải xác định chu kỳ cơ sở của nó.

Nhận xét 6.1. *Dãy tuần hoàn chu kỳ 1 khi và chỉ khi dãy đó là một dãy hằng.*
Tương tự, ta cũng có định nghĩa về dãy tuần hoàn nhân tính.

Định nghĩa 6.5. *Dãy số* $\{u_n\}$ *được gọi là một dãy tuần hoàn nhân tính nếu tồn tại số nguyên dương* s $(s > 1)$ *sao cho*

$$u_{sn} = u_n, \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Số nguyên dương s *nhỏ nhất để dãy* $\{u_n\}$ *thoả mãn* (2) *được gọi là chu kỳ cơ sở của dãy.*

Bài toán 6.2. *Chứng minh rằng dãy* $\{u_n\}$ *tuần hoàn (cộng tính) chu kỳ 2 khi và chỉ khi dãy có dạng*

$$u_n = \frac{1}{2}[\alpha + \beta + (\alpha - \beta)(-1)^{n+1}], \ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Giải *Giả sử* $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$ *và* $u_{n+2} = u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Khi đó ta thấy ngay (bằng quy nạp toán học) dãy* $\{u_n\}$ *có dạng (3). Ngược lại, mọi dãy xác định theo (3) là một dãy tuần hoàn chu kỳ 2.* □

Bài toán 6.3. *Chứng minh rằng dãy* $\{u_n\}$ *tuần hoàn nhân tính chu kỳ 2 khi và chỉ khi dãy có dạng*

$$u_n = \begin{cases} \text{tuỳ ý} & \text{với } n \text{ lẻ}, \\ u_{2k+1} & \text{với } n = 2^m(2k+1),\ m \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Giải *Chứng minh được suy trực tiếp từ hệ thức truy hồi.*

Bài toán 6.4. *Chứng minh rằng dãy* $\{u_n\}$ *tuần hoàn chu kỳ 3 khi và chỉ khi dãy có dạng*

$$u_n = \frac{1}{3}[\alpha+\beta+\gamma+(-\alpha-\beta+2\gamma)]\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha-\beta)\sin\frac{2n\pi}{3}, \ \ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Giải. *Giả sử* $u_0 = \alpha$, $u_1 = \beta$, $u_2 = \gamma$ *và* $u_{n+3} = u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Khi đó, ta thấy ngay (bằng quy nạp toán học) dãy* $\{u_n\}$ *có dạng* (4).

Ngược lại, mọi dãy xác định theo (4) là một dãy tuần hoàn chu kỳ 3 :

$$\alpha, \beta, \gamma, \alpha, \beta, \gamma, \ldots.$$

Bài toán 6.5. *Cho* $k \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$. *Chứng minh rằng dãy số* $\{u_n\}$ *xác định theo công thức*

$$u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_{n+1} = ku_n - u_{n-1},\ \ n \in \mathbb{N}^*$$

không là một dãy tuần hoàn.

Giải. *Khi* $|k| > 2$ *thì*

$$|u_{n+1}| \geqslant |k||u_n| - |u_{n-1}| > 2|u_n| - |u_{n-1}|.$$

Nếu luôn luôn xảy ra $|u_n| < |u_{n-1}|$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$ *thì ta có ngay điều phải chứng minh. Nếu xảy ra* $|u_m| \geqslant |u_{m-1}| > 0$ *thì suy ra*

$$|u_m| < |u_{m+1}| < \cdots$$

và do đó dãy $\{u_n\}$ *không là một dãy số tuần hoàn.*

Xét $|k| \leqslant 2$ *với* $k = \dfrac{p}{q}$, $(p, q) = 1$, $2 \leqslant q \in \mathbb{Z}^*$, $p \in \mathbb{Z}$. *Bằng quy nạp theo* n *ta thu được*

$$u_j = \frac{p_j}{q^{j-1}},\ \ p_j \in \mathbb{Z},\ \ (p_j, q) = 1,\ \ \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Từ đó suy ra

$$u_{n+1} = \frac{p}{q}u_n - u_{n-1} = \frac{p_{n+1}}{q^n},$$

trong đó

$$p_{n+1} = pp_n - q^2 p_{n-1} \in \mathbb{Z}$$

và $(p_{n+1}, q) = 1$. *Do* $q \geqslant 2$ *nên* $u_n \neq u_m$ *khi* $n \neq m$ *và dãy* $\{u_n\}$ *không là dãy số tuần hoàn.* □

Bài toán 6.6. *Xác định các giá trị của* $k \in \mathbb{Q}$ *để dãy số* $\{u_n\}$ *xác định theo công thức*

$$u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_{n+1} = ku_n - u_{n-1},\ \ n \in \mathbb{N}^*$$

là một dãy số tuần hoàn.

Giải.

Theo kết quả của Bài toán 4, khi $|k| > 2$ *và* $|k| \leqslant 2$, $k = \dfrac{p}{q}$ *với* $(p, q) = 1$, $2 \leqslant q \in \mathbb{Z}^*$ *thì dãy* $\{u_n\}$ *không là dãy số tuần hoàn.*

Xét $|k| \leqslant 2$ *và* $k \in \mathbb{Z}$.

Với $k = 2$ *thì* $\{u_n\}$ *là một cấp số cộng với công sai bằng* -2 *nên hiển nhiên dãy* $\{u_n\}$ *không là dãy tuần hoàn.*

Với $k = 1$ *thì* $\{u_n\}$ *là dãy tuần hoàn chu kỳ 6 :*

$$u_2 = -2,\ u_3 = -1,\ u_4 = 1,\ u_5 = 2,\ u_6 = 1, u_7 = -1,\ \ldots .$$

Với $k = 0$ *thì* $\{u_n\}$ *là dãy tuần hoàn chu kỳ 4 :*

$$u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_2 = -1,\ u_3 = 1,\ u_4 = 1, u_5 = -1,\ \ldots .$$

Với $k = -1$ *thì* $\{u_n\}$ *là dãy tuần hoàn chu kỳ 3 :*

$$u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_2 = 0,\ u_3 = 1,\ u_4 = -1,\ \ldots .$$

Với $k = -2$ *thì* $\{u_n\}$ *là dãy tuần hoàn chu kỳ 2 :*

$$u_0 = 1,\ u_1 = -1,\ u_2 = 1,\ u_3 = -1,\ u_4 = 1,\ \ldots .$$

$\square$

Định nghĩa 6.6. *a) Dãy số* $\{u_n\}$ *được gọi là một dãy phản tuần hoàn (cộng tính) nếu tồn tại số nguyên dương* l *sao cho*

$$u_{n+l} = -u_n,\ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Số nguyên dương l *nhỏ nhất để dãy* $\{u_n\}$ *thoả mãn* (5) *được gọi là chu kỳ cơ sở của dãy.*

b) Dãy số $\{v_n\}$ *được gọi là một dãy phản tuần hoàn nhân tính nếu tồn tại số nguyên dương* s $(s > 1)$ *sao cho*

$$v_{sn} = -v_n,\ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Số nguyên dương s $(s > 1)$ *nhỏ nhất để dãy* $\{v_n\}$ *thoả mãn* (6) *được gọi là chu kỳ cơ sở của dãy.*

Nhận xét 6.2. *a) Dãy phản tuần hoàn với chu kỳ* l *là một dãy tuần hoàn chu kỳ* $2l$.

b) Dãy phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ s *là một dãy tuần hoàn nhân tính chu kỳ* $2s$.

Bài toán 6.7. *Chứng minh rằng mọi dãy $\{u_n\}$ phản tuần hoàn chu kỳ r đều có dạng*

$$u_n = \frac{1}{2}(v_n - v_{n+r}) \text{ với } v_{n+2r} = v_n. \quad (7)$$

Giải. *Giả sử $u_{n+r} = -u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Khi đó, ta thấy ngay rằng dãy $\{u_n\}$ tuần hoàn chu kỳ $2r$ và*

$$u_n = \frac{1}{2}(u_n - u_{n+r}),$$

tức là có dạng (7).

Ngược lại, kiểm tra trực tiếp, ta thấy mọi dãy xác định theo (7) đều là dãy phản tuần hoàn chu kỳ r. $\square$

Bài toán 6.8. *Cho $f(x)$ là một đa thức với $\deg f = k \geq 1$, $f(x) \in \mathbb{Z}$ ứng với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Ký hiệu $r(k) = \min\{2^s |\, s \in \mathbb{N}^*,\ 2^s > k\}$. Chứng minh rằng dãy số $\{(-1)^{f(k)}\}$ $(k = 1, 2, \dots)$ là dãy tuần hoàn với chu kỳ $r(k)$.*

Giải. *Ta có $k!f(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Biểu diễn $f(x)$ dưới dạng*

$$f(x) = a_0 + a_1\binom{x}{1} + \cdots + a_k\binom{x}{k},$$

trong đó

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}.$$

Ta cần chứng minh $f(x + r(k)) - f(x)$ chia hết cho 2 với mọi $x \in \mathbb{Z}$.
Nhận xét rằng

$$M_i = \binom{x+2^s}{i} - \binom{x}{i}$$

chia hết cho 2 với mọi $i \in \mathbb{N}^*$, $2^s \geq i$, $x \in \mathbb{Z}$. Thật vậy, ta có

$$M_i = \frac{1}{i!}\big[(2^s + x)(2^s + x - 1)\dots(2^s + x - i + 1) - x(x-1)\dots(x - i + 1)\big].$$

Tử số hiển nhiên chia hết cho 2^s. Mặt khác, số mũ của 2 trong khai triển của $i!$ là

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Big[\frac{i}{2^j}\Big] < \sum_{j=1}^{\infty}\frac{i}{2^j} = i \leq 2^s,$$

nên M_i chia hết cho 2 với mọi $i \in \mathbb{N}^*$, $i \leq 2^s$, $x \in \mathbb{Z}$. Từ đó suy ra

$$T_i = \binom{x + r(k)}{i} - \binom{x}{i}$$

chia hết cho 2 với mọi $i \in \mathbb{Z},\ \ i \leq k,\ \ \forall x \in \mathbb{Z}$. *Do* $a_j \in \mathbb{Z}$ *nên*

$$f(x + r(k)) - f(x) = \sum_{j=0}^{k} a_j T_j$$

chia hết cho 2, điều phải chứng minh. □

Bài toán 6.9. *Xác định dãy số* $\{u_n\}$ *thoả mãn điều kiện*

$$u_{2n+1} = 3u_n,\ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Giải. *Đặt* $n + 1 = m$, $m = 1, 2, \ldots$. *Khi đó có thể viết (8) dưới dạng*

$$u_{2m-1} = 3u_{m-1},\ \ \forall m \in \mathbb{N}^*$$

hay

$$v_{2m} = 3v_m,\ \ \forall m \in \mathbb{N}^* \tag{9}$$

với

$$v_m = u_{m-1}, \forall m \in \mathbb{N}^*. \tag{10}$$

Từ (9) ta có $v_0 = 0$. *Đặt* $v_m = m^{\log_2 3} y_m$, $m \in \mathbb{N}^*$. *Khi đó (9) có dạng*

$$y_{2m} = y_m,\ m \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy $\{y_m\}$ *là một dãy tuần hoàn nhân tính chu kỳ 2. Khi đó theo Bài toán 2 ta có*

$$y_n = \begin{cases} \text{tuỳ ý} & \text{với } n \text{ lẻ},\\ y_{2k+1} & \text{với } n \text{ có dạng } 2^m(2k+1),\ m \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$u_m = v_{m+1} = m^{\log_2 3} y_{m+1},$$

với

$$y_n = \begin{cases} \text{tuỳ ý} & \text{với } n \text{ lẻ},\\ y_{2k+1} & \text{với } n \text{ có dạng } 2^m(2k+1),\ m \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

□

Bài toán 6.10. *Xác định dãy* $\{u_n\}$ *thoả mãn điều kiện*

$$u_{2n+1} = -3u_n + 4,\ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Giải. *Đặt $n+1=m$, $m=1,2,\ldots$. Khi đó có thể viết (11) dưới dạng*

$$u_{2m-1}=-3u_{m-1}+4,\ \ \forall m\in\mathbb{N}^*$$

hay

$$v_{2m}=-3v_m+4,\ \ \forall m\in\mathbb{N}^* \tag{12}$$

với $v_m=u_{m-1}$.

Đặt $v_m=1+x_m$. Khi đó (12) có dạng

$$x_{2m}=-3x_m,\ \ \forall m\in\mathbb{N}^*. \tag{13}$$

Đặt $x_m=m^{\log_2 3}y_m$, $m\in\mathbb{N}^*$. Khi đó (13) có dạng

$$y_{2m}=-y_m,\ m\in\mathbb{N}^*.$$

Vậy $\{y_m\}$ là một dãy phản tuần hoàn nhân tính chu kỳ 2.

Khi đó, theo Bài toán 2, ta có

$$y_n=\begin{cases}\textit{tuỳ ý} & \textit{với } n \textit{ lẻ},\\ -y_{2k+1} & \textit{với } n \textit{ có dạng } 2^{2m+1}(2k+1),\ \ m,k\in\mathbb{N},\\ y_{2k+1} & \textit{với } n \textit{ có dạng } 2^{2m}(2k+1),\ m\in\mathbb{N}^*,k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

Từ đó suy ra

$$u_m=v_{m+1}=1+(m+1)^{\log_2 3}y_{m+1},$$

với

$$y_n=\begin{cases}\textit{tuỳ ý} & \textit{với } n \textit{ lẻ},\\ -y_{2k+1} & \textit{với } n \textit{ có dạng } 2^{2m+1}(2k+1),\ \ m,k\in\mathbb{N},\\ y_{2k+1} & \textit{với } n \textit{ có dạng } 2^{2m}(2k+1),\ m\in\mathbb{N}^*,k\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

6.3 Hàm số chuyển đổi cấp số cộng

Bài toán 6.11. *Nếu dãy số $\{u_n\}$ là một cấp số cộng thì dãy số $\{v_n\}$ với $v_n=au_n+b$, $\forall n\in\mathbb{N}$ sẽ lập thành một cấp số cộng.*

Giải. *Giả sử $\{u_n\}$ là cấp số cộng với công sai bằng d.*

Xét dãy số $\{v_n\}$ với $v_n=au_n+b$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Ta có $v_0=au_0+b, v_1=au_1+b\ldots v_n=au_n+b, v_{n+1}=a(n+1)+b$.

Khiđó

$$v_1-v_0=v_2-v_1=v_3-v_2\cdots=v_{n+1}-v_n=ad$$

Vậy dãy $\{v_n\}$ là cấp số nhân với công sai bằng ad □

Vấn đề đặt ra là ta đi tìm tất cả các hàm số có tính chất chuyển cấp số cộng thành cấp số cộng. Xét bổ đề sau.

Bổ đề 6.1. *Cho cấp số cộng* $\{a_n\}$ *và hàm số* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *thoả mãn điều kiện*

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \ \ \forall x, y > 0.$$

Khi đó dãy $\{f(a_n)\}$ *là một cấp số cộng.*

Chứng minh. *Từ giả thiết, ta có các hệ thức*

$$a_1 - a_0 = \cdots = a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = \ldots$$

Suy ra

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Khi đó

$$f(a_n) = f(\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}) = \frac{f(a_{n-1})+f(a_{n+1})}{2}.$$

Từ đó ta có $\{f(a_n)\}$ *là một cấp số cộng.* □

Bài toán 6.12. *Tìm hàm số* $f(x)$ *xác định và liên tục trên* $\mathbb{R}$ *thoả mãn điều kiện:*

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Giải. *Đặt* $f(x) - f(0) = g(x)$, *ta có* $g(x)$ *liên tục trên* $\mathbb{R}$, *với* $g(0) = 0$ *và*

$$g\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{g(x)+g(y)}{2}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Lần lượt cho $y = 0$ *và* $x = 0$, *thì*

$$g(\frac{x}{2}) = \frac{g(x)}{2}$$

và

$$g(\frac{y}{2}) = \frac{g(y)}{2}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Do đó

$$g\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = g\Big(\frac{x}{2}\Big) + g\Big(\frac{y}{2}\Big), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Vậy

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Vì $g(x)$ *liên tục trên* $\mathbb{R}$, *nên phương trình trên là phương trình Cauchy và do đó* $g(x) = ax$. *Suy ra* $f(x) = ax + b, (a, b \in \mathbb{R})$.

6.4 Hàm số chuyển đổi cấp số cộng vào cấp số nhân

Bài toán 6.13. *Nếu dãy số $\{u_n\}$ là một cấp số cộng thì dãy số $\{v_n\}$ với $v_n = a^{u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}, a > 0$ sẽ lập thành một cấp số nhân.*

Giải. *Giả sử $\{u_n\}$ là cấp số cộng với công sai bằng d.*
Xét dãy số $\{v_n\}$ với $v_n = a^{u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}, a > 0$.
Ta có $v_0 = a^{u_0}, v_1 = a^{u_1} \dots v_n = a^n, v_{n+1} = a^{n+1}$.
Khiđó

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_3}{v_2} \dots = \frac{v_{n+1}}{v_n} = a^d$$

Vậy dãy$\{v_n\}$ là cấp số nhân với công bội bằng a^d

Bổ đề 6.2. *Cho cấp số cộng $\{a_n\}$ và hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện*

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \sqrt{f(x)f(y)},\ \ \forall x, y > 0.$$

Khi đó dãy $\{f(a_n)\}$ là một cấp số nhân.

Chứng minh. *Từ giả thiết, ta có các hệ thức*

$$a_1 - a_0 = \dots = a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n = \dots$$

Suy ra

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Khi đó

$$f(a_n) = f\Big(\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}\Big) = \sqrt{f(a_{n-1})f(a_{n+1})}.$$

Từ đó ta có $\{f(a_n)\}$ là một cấp số nhân. □

Như vậy ta có hai hàm số trên chuyển cấp số cộng thành cấp số nhân, vấn đề đặt ra là ta đi tìm tất cả các hàm số có tính chất chuyển một cấp số cộng bất kỳ thành một cấp số nhân.Trước hết ta xét bài toán sau.

Bài toán 6.14. *Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiên $f\big(\frac{x+y}{2}\big) = \sqrt{f(x)f(y)}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$*

Giải. *Theo điều kiện bài toán ta suy ra$f(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.*
Nếu tồn tại x_0 để$f(x_0) = 0$ thì
$f\big(\frac{x_0+y}{2}\big) = \sqrt{f(x_0)f(y)} = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$,
tức là $f(x) \equiv 0$
Xét trường hợp $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có

$\ln f(\frac{x+y}{2}) = \frac{\ln f(x) + \ln f(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
hay

$$g\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{g(x) + g(y)}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

trong đó $g(x) = \ln f(x)$. *Theo kết quả Bài toán 4 thì* $g(x) = ax + b$.
Vậy $f(x) = e^{ax+b}, a, b \in \mathbb{R}$ *tuỳ ý.*

6.5 Hàm số chuyển đổi cấp số nhân vào cấp số cộng

Bài toán 6.15. *Nếu dãy số* $\{u_n\}$ *là một cấp số nhân với các số hạng dương thì dãy số* $\{v_n\}$
với $v_n = \log_a^{u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, 0 < a \neq 1$ *sẽ lập thành một cấp số cộng.*

Giải. *Giả sử* $\{u_n\}$ *là cấp số nhân với công bội bằng q. Xét dãy số* $\{v_n\}$ *với*$v_n = \log_a^{u_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, 0 < a \neq 1.$
Ta có

$$v_0 = \log_a^{u_0}, v_1 = \log_a^{u_1}, v_2 = \log_a^{u_2} \ldots, v_n = \log_a^{u_n}$$

Khi đó
$v_1 - v_0 = v_2 - v_1 = v_3 - v_2 \cdots = v_n - v_{n-1} = \log_a^d$
Vậy$\{v_n\}$ *là cấp số cộng với công sai bằng* $\log_a^d$ □

Bổ đề 6.3. *Cho cấp số nhân* $\{a_n\}$ *với* $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ *và hàm số* $f(x)$ *thoả mãn điều kiện*

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{f(x) + f(y}{2}, \quad \forall x, y > 0.$$

Khi đó dãy $\{f(a_n)\}$ *là một cấp số cộng.*

Chứng minh. *Từ giả thiết, ta có các hệ thức*

$$\frac{a_0}{a_1} = \cdots = \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \ldots$$

Suy ra

$$a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Khi đó

$$f(a_n) = f(\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}) = f(\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}).$$

Từ đó ta có $\{f(a_n)\}$ *là một cấp số cộng.* □
Vấn đề đặt ra ta đi tìm tất cả các hàm số chuyển đổi một cấp số nhân bất kỳ thành một cấp số cộng. Trước hết ta xét bài toán sau.

Bài toán 6.16. *Tìm hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện*

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Giải *Vì $x > 0, y > o$ nên có thể đặt $x = e^u, y = e^v$ và $f(e^u) = g(u)$.*

Khi đó $g(u)$ liên tục tên $\mathbb{R}$ và có dạng

$$g\Big(\frac{u+v}{2}\Big) = \frac{g(u)+g(v)}{2}, \ \ \forall u, v \in \mathbb{R}.$$

Theo kết quả của bài toán 8.52 thì$g(u) = au + b$.

Vậy ta có kết quả $f(x) = a\ln x + b, a, b \in \mathbb{R}$ tuỳ ý.

Theo bổ đề 6.3 trên ta có hàm số $f(x) = a\ln x + b, a, b \in \mathbb{R}$ chuyển đổi mọi cấp số nhân thành cấp số cộng.

6.6 Hàm số chuyển đổi cấp số nhân vào cấp số điều hoà

Ta xét bài toán sau.

Bài toán 6.17. *Cho cấp số nhân $\{a_n\}$ với $a_n > 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$ và cho hàm số $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện*

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Chứng minh rằng dãy $\{f(a_n)\}$ là một cấp số điều hoà.

Giải. *Từ giả thiết, ta có các hệ thức*

$$\frac{a_1}{a_0} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ldots$$

Suy ra

$$a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Khi đó

$$f(a_n) = f(\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}}) = \frac{2f(a_{n-1})f(a_{n+1})}{f(a_{n-1})+f(a_{n+1})}).$$

Từ đó ta có $\{f(a_n)\}$ là một cấp số điều hoà. □

Bây giờ ta đi tìm tất cả các hàm số có tính chất chuyển một cấp số cộng bất kỳ thành cấp số điều hoà thông qua việc tìm tất cả các hàm số có tính chất sau.

Bài toán 6.18. *Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện*

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Giải. *Ta có*

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{2f(x)f(y)}{f(x)+f(y)}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Suy ra

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{2}{\dfrac{1}{f(x)} + \dfrac{1}{f(y)}}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Hay

$$\frac{1}{f(\sqrt{xy})} = \frac{\dfrac{1}{f(x)} + \dfrac{1}{f(y)}}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Đặt $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$. *Khi đó ta có*

$$g(\sqrt{xy}) = \frac{g(x)+g(y)}{2}, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+$$

Theo kết quả của Bài toán 6.16 thì $g(x) = a\ln x + b$. *Để* $f(x)$ *liên tục trong* $\mathbb{R}^+$ *thì* $g(x) \neq 0$ *với mọi* $x \in \mathbb{R}^+$. *Điều đó tương đương với* $a = 0, b \neq 0$

Vậy

$f(x) \equiv b \in \mathbb{R}\diagdown\{0\}$ *tuỳ ý.*

□

Chương 7

Một số lớp hàm chuyển đổi các cấp số trong tập rời rạc

Trong chương này sẽ mô tả một số lớp hàm số chuyển đổi các cấp số trong tập hợp $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$.

7.1 Hàm số chuyển đổi cấp số cộng thành cấp số cộng

Trước hết ta xét bài toán sau.

Bài toán 7.1. *Tìm các hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{Z}$ thoả mãn tính chất*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

Giải. *Trước hết ta khảo sát hàm số $f(x)$ trong tập hợp $\mathbb{N}$*

Tại $x = 0, y = 0$, ta được $f(0) = 0$

Tại $x = 1, y = 1$, ta có $f(2) = 2f(1)$ đặt $f(1) = a$ ta có $f(2) = 2a$

Tại $x = 2, y = 1$, ta có $f(3) = f(2) + f(1) \Rightarrow f(3) = 3f(1)$ hay $f(3) = 3a$

Bằng phép qui nạp ta chứng minh được $f(n) = nf(1)$ hay $f(n) = na, \ \forall \in \mathbb{N}^*$

Vớix, $y \in \mathbb{Z}$

Thay $x = -y$ ta có $f(0) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(x) = -f(-x)$. Khi đó ta có hàm $f(x)$ là hàm lẻ.

Xét $n \in \mathbb{Z}, n < 0 \Rightarrow -n > 0$, khi đó theo chứng minh ở phần trên ta có

$f(-n) = -na$

mà $f(n) = -f(-n) \Rightarrow f(n) = na$

Vậy hàm số cần tìm là $f(x) = ax \forall x \in \mathbb{Z}$.

Bài toán 7.2. *Tìm hàm số $f(x)$ xác định trên $\mathbb{Z}$ thoả mãn điều kiện:*

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \ \forall x, y \in \mathbb{Z}, x + y = 2k, k \in \mathbb{Z}$$

Giải. *Đặt $f(0) = b, f(x) = b + g(x)$ thì $g(0) = 0$, thay vào công thức trên ta có*

$$b + g(\frac{x+y}{2}) = \frac{b + g(x) + b + g(y)}{2}$$

$$\Rightarrow g(\frac{x+y}{2}) = \frac{g(x) + g(y)}{2}$$

Lần lượt chọn $x = 2k, y = 0$, hoặc $x = 0, y = 2k$ ta có

$$\frac{g(x+y)}{2} = \frac{g(x) + g(y)}{2}$$

$$\Leftrightarrow g(x+y) = g(x) + g(y) \forall x, y \in \mathbb{Z}$$

Theo kết quả Bài toán 7.1 ta có $g(x) = ax,\ \forall x \in \mathbb{Z}$
Vậy $f(x) = ax + b$

Bài toán 7.3. *Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để dãy số $\{a_n\}$ lập thành một cấp số cộng là dãy đã cho phải thoả mãn hệ thức*

$$2a_{m+n} = a_{2m} + a_{2n},\ \forall m, n \in \mathbb{N}. \tag{7.1}$$

Giải.
Điều kiện cần.
Giả sử dãy $\{a_n\}$ là một cấp số cộng với công sai bằng d.
Khi đó

$$a_n = a_o + (n-1)d,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy nên

$$a_{2n} + a_{2m} = 2a_o + (2m + 2n - 2)d$$

Và

$$2a_{m+n} = 2\left[a_o + (m + n - 1)d\right]$$

Từ đó ta có ngay công thức 7.1
Điều kiện đủ.
Giả sử dãy $\{a_n\}$ thoả mãn điều kiện 7.1. Ta chứng minh dãy $\{a_n\}$ là một cấp số cộng với công sai bằng $d = a_1 - a_o$
Thay $m = 0$ vào công thức 7.1 ta có

$$2a_n = a_o + a_{2n}$$

Thay $n = 0$ vào công thức 7.1 ta có

$$2a_m = a_o + a_{2m}$$

Thay kết quả trên vào công thức 7.1 ta thu được

$$2a_{m+n} = 2a_m + 2a_n - 2a_o$$
$$a_{m+n} = a_m + a_n - a_o \tag{7.2}$$

Thay $m = 1$ *vào công thức 7.2 ,ta có*
$a_{n+1} = a_n + d, d = a_1 - a_o$
Vậy dãy $\{a_n\}$ *là một cấp số cộng.* □

Bổ đề 7.1. *Điều kiện cần và đủ để một hàm số chuyển mọi cấp số cộng nguyên dương thành cấp số cộng là hàm đó chuyển tập các số tự nhiên thành cấp số cộng.*

Chứng minh *Điều kiện cần.*
Nếu hàm f *chuyển mọi cấp số cộng thành cấp số cộng thì hiển nhiên hàm* f *chuyển tập các số tự nhiên thành một cấp số cộng vì tập các số tự nhiên là cấp số cộng với công sai nhỏ nhất là 1.*
Điều kiện đủ.
Hàm f *chuyển tập các số tự nhiên thành cấp số cộng,tức là dãy* $\{f(n)\}$ *là cấp số cộng* $\forall n \in \mathbb{N}$*.Dãy* $\{a_n\}$ *là cấp số cộng nguyên dương, với công bội là* $d \in \mathbb{N}$ *ta phải chứng minh dãy* $\{f(a_n)\}$ *là cấp số cộng.*
Vì dãy $\{f(n)\}$ *là cấp số cộng nên theo công thức 7.2 ta có*

$$f(m+n) = f(m) + f(n) - f(o), \ \ \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Dãy $\{a_n\}$ *là cấp số cộng nguyên dương, với công bội là* $d \in \mathbb{N}$ *suy ra* $a_{n+1} = a_n + d$
Khi đó

$$f(a_{n+1}) = f(a_n + d) = f(a_n) + f(d) - f(0)$$

hay $f(a_{n+1}) - f(a_n + d) = f(d) - f(0)$ *không đổi.*
Vậy dãy $\{f(a_n)\}$ *là cấp số cộng với công sai là* $f(d) - f(0)$

□

Bài toán 7.4. *Xác định các hàm số* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ *chuyển mọi cấp số cộng* $\{a_n\}, a_n \in \mathbb{Z}$ *thành cấp số cộng.*

Giải. *Để giải bài toán này theo Bổ đề 7.1 ta chỉ cần xác định các hàm số chuyển dãy số tự nhiên thành cấp số cộng.Hàm* f *chuyển dãy số tự nhiên thành cấp số cộng thì ta có:*

$$f(m+n) = f(m) + f(n) - f(o), \ \ \forall m, n \in \mathbb{N}$$

$$f(m+n) - f(0) = f(m) - f(0) + f(n) - f(0), \ \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Đặt $g(n) = f(n) - f(0)$ *ta có*

$$g(m+n) = g(m) + g(n)$$

Khi đó theo bài toán 7.1 ta có $g(x) = ax, \forall x \in \mathbb{N}$ *trong đó* $a = g(1)$

Do đó $f(x) = g(x) + f(0)$ *.Đặt* $f(0) = b$ *thì* $f(x) = ax + b \forall x \in \mathbb{N}$

Kết hợp Bài toán 7.2 ta có:

Hàm số chuyển đổi mọi cấp số cộng thành cấp số cộng trong tập các số nguyên là $f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{Z}$. □

Bài toán 7.5. *Xác định hàm số* f *chuyển cấp số cộng nguyên dương* $\{a_n\}$ *cho trước thành cấp số cộng* $\{b_n\}$ *cho trước.*

Giải. *Ta xét hai trường hợp sau:*

(i) Nếu $\{a_n\} \equiv \mathbb{N}$, *theo kết quả Bài toán 7.4 ta có* $f(x) = ax + b, \ \forall x \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R}$.

(ii) Nếu $\{a_n\} \subset \mathbb{N}$, *ta có hàm số* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *được xác định như sau*

$$f(n) = \begin{cases} b_n & \text{nếu } n \in \{a_n\} \\ c_n & \text{nếu } n \notin \{a_n\} \end{cases} \tag{7.3}$$

trong đó c_n *tuỳ ý trong* $\mathbb{R}$. *chuyển cấp số cộng nguyên dương* $\{a_n\}$ *cho trước thành cấp số cộng* $\{b_n\}$ *cho trước.*

7.2 Hàm số chuyển đổi cấp số nhân thành cấp số nhân

Trên cơ sở các bài toán trên ta tìm các hàm số chuyển các cấp số khác trên tập hợp số nguyên.Trước hết ta đi tìm những dãy số thực hiện phép chuyển tiếp một đại lượng trung bình của cặp phần tử tương ứng của dãy số.Các bài toán này liên quan chặt chẽ đến việc chuyển tiếp các cấp số, đến sự phỏng đoán các cấp số tổng quát.

Bài toán 7.6. *Xác định dãy số* $\{u_n\}$, *sao cho*

$$u_{(}\frac{m+n}{2}) = \sqrt{u(m)u(n)}, \ \forall m, n, \frac{m+n}{2} \in \mathbb{N}^*. \tag{7.4}$$

Giải. *Ta có*

$$u(n) = u(\frac{n+n}{2}) = \sqrt{u(n)u(n)} = \sqrt{[u(n)]^2} = \mid u(n) \mid$$

Đặt $u(1) = \alpha, u(2) = \beta(\alpha \geq 0, \beta \geq o)$.

a) Nếu $\alpha = 0$ *thì*

$$u(n) = u(\frac{1 + 2n - 1}{2}) = \sqrt{u(1)u(2n-1)} = 0, \ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Vậy $u(n) \equiv 0$ *là nghiệm duy nhất của phương trình* (7.4)

b) Nếu $\alpha > 0$ *và* $\beta = 0$ *thì*

$$u(n) = u(\frac{2 + 2n - 2}{2}) = \sqrt{u(2)u(2n-2)} = 0, \ \ \forall n \geq 2$$

Suy ra

$$u(n) = \begin{cases} \alpha & \text{nếu } n = 1 \\ 0 & \text{nếu } n \geq 2 \end{cases}$$

là nghiệm của phương trình (7.4)

c)Xét trường hợp $\alpha > 0$ *và* $\beta > 0$. *Giả sử tồn tại* $n_o \geq 3$ *sao cho* $u(n_o) = 0$

Thế thì

$$u(n_o - 1) = u(\frac{n_o + n_o - 2}{2}) = \sqrt{u(n_o)u(n_o - 2)} = 0.$$

Chọn $n_o = 3$ *thì* $u(n_o - 1) = u(2) = 0$, *hay* $\beta = 0$, *mâu thuẫn .*

Do đó, ta có thể giả thiết rằng $u(n) > 0$, *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$. *Khi đó*

$$u(2) = u(\frac{3+1}{2}) = \sqrt{u(3)u(1)} = 0.$$

Suy ra

$$u(3) = \frac{u^2(2)}{u(1)} = \frac{\beta^2}{\alpha}.$$

Mặt khác

$$u(3) = u(\frac{4+2}{2}) = \sqrt{u(4)u(2)}.$$

Suy ra

$$u(4) = \frac{u^2(3)}{u(2)} = \frac{(\dfrac{\beta^2}{\alpha})^2}{\beta} = \frac{\beta^3}{\alpha^2}$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta chứng minh được rằng

$$u(n) = \frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-2}}, \ \ \forall n \geq 3.$$

Ta có

$$\frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-2}} = (\frac{\alpha^2}{\beta}).(\frac{\beta}{\alpha})^n$$

Đặt

$$\begin{cases} \alpha = ab, \\ \beta = ab^2 (a > 0, b > 0) \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{\alpha^2}{\beta} = a, \frac{\beta}{\alpha} = b.$$

Vậy nghiệm của phương trình (7.4) *là*

$$u(n) = \begin{cases} \alpha & \text{nếu } n = 1 \\ 0 & \text{nếu } n \geq 2 \ \ (\forall \alpha \geq 0) \end{cases}$$

hoặc $u(n) = ab^n \ \ (a > 0, b > 0)$.

Bài toán 7.7. *Xác định dãy số* $\{u_n\}$*, sao cho*

$$u(\frac{m+n}{2}) = \frac{2u(m)u(n)}{u(m)+u(n)}, \ \ \forall m, n, \frac{m+n}{2} \in \mathbb{N}^* \tag{7.5}$$

Giải.

$$u(\frac{m+n}{2}) = \frac{2u(m)u(n)}{u(m)+u(n)}$$

$$u(\frac{m+n}{2}) = \frac{2}{\dfrac{1}{u(m)} + \dfrac{1}{u(n)}}$$

Đặt $\frac{1}{u(n)}$*, thì phương trình đã cho tương đương với*

$$v(\frac{m+n}{2}) = \frac{v(m)+v(n)}{2}.$$

Theo Bài toán 7.2, ta có $v(n) = an + b$ *với* $a, b \geq 0, a + b > 0$*. Vậy nghiệm của phương trình* (7.5) *là*

$$u(n) = \frac{1}{an+b}, a, b \geq 0, a + b > 0.$$

Bổ đề 7.2. *Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để dãy các số dương $\{a_n\}$ lập thành một cấp số nhân là dãy đã cho phải thoả mãn hệ thức*

$$a_{m+n}^2 = a_{2m}a_{2n}, \;\; \forall x, y \in \mathbb{N} \tag{7.6}$$

Chứng minh. *Đặt $\ln a_n = b_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$. Khi đó $a_n = e_n^b$ và (7.6) có dạng*

$$e^2bm + n = e_{2m}^b + b_{2n}, \;\; \forall m, n \in \mathbb{N}$$

Hay

$$2b_{m+n} = b_{2m} + b_{2n} \tag{7.7}$$

Theo bài toán 7.3 thì (7.7) là điều kiện cần và đủ để dãy số $\{b_n\}$ lập thành một cấp số cộng với công sai $d = b_1 - b_0$.

Từ đó theo bài toán 6.13 suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét:Từ công thức (7.6) ta có

Xét $m = 0$ ta có $a_n^2 = a_0a_{2n}$ Xét $n = 0$ ta có $a_m^2 = a_0a_{2m}$

Suy ra $a_{2m}a_{2n} = \dfrac{a_n^2a_m^2}{a_0^2}$

Do đó $a_{m+n}^2 = \dfrac{a_n^2a_m^2}{a_0^2}$

Nên $a_{m+n} = \dfrac{a_na_m}{a_0}$ □

Bài toán 7.8. *Xác định dãy các số dương $\{x_n\}$ thoả mãn điều kiện*

$$x_{mn} = x_mx_n, \;\; \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

Giải. *Ta có $x_{1.n} = x_1x_n$. Suy ra $x_1 = 1$. Giả sử $n = p$ là số nguyên tố. Khi đó bằng qui nạp ta chứng minh được $x_{p^k} = (x_p)^k$ và nếu $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_s^{\alpha_s}$ thì:*

$$x_n = (x_{p_1})^{\alpha_1}(x_{p_2})^{\alpha_2}\ldots(x_{p_s})^{\alpha_s}$$

x_p có thể nhận giá trị tuỳ ý khi p là một số nguyên tố.

Từ đó ta có kết luận:

x_p có thể nhận giá trị tuỳ ý khi p là một số nguyên tố và

$$x_n = (x_{p_1})^{\alpha_1}(x_{p_2})^{\alpha_2}\ldots(x_{p_s})^{\alpha_s}$$

khi $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_s^{\alpha_s}$

Bây giờ ta xét tiếp bài toán sau:

Bài toán 7.9. *Xác định hàm số f thoả mãn tính chất $f(mn) = f(m)f(n)$ trong đó $m, n \;\in \mathbb{N}$.*

Giải. *Ta có* $f(1.n) = f(1)f(n)$. *Suy ra* $f(1) = 1$. *Giả sử* $n = p$ *là số nguyên tố. Khi đó bằng qui nạp ta chứng minh được* $f(p^k) = f(p)^k$ *và nếu* $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ *thì:*

$$f(n) = f(p_1)^{\alpha_1} f(p_2)^{\alpha_2} \dots f(p_s)^{\alpha_s}$$

$f(p)$ *có thể nhận giá trị tuỳ ý khi* p *là một số nguyên tố.*
Từ đó ta có kết luận:
$f(p)$ *có thể nhận giá trị tuỳ ý khi* p *là một số nguyên tố và*

$$f(n) = f(p_1)^{\alpha_1} f(p_2)^{\alpha_2} \dots f(p_s)^{\alpha_s}$$

khi $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$

Bài toán 7.10. *Chứng minh hàm số* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *xác định như sau với* $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$, p_i *là các số nguyên tố thì* $f(n) = f(p_1)^{\alpha_1} f(p_2)^{\alpha_2} \dots f(p_s)^{\alpha_s}$ *trong đó* $f(p_i)$ *tuỳ ý,* $i = 1, 2, 3, \dots$ *chuyển cấp số nhân có công bội nguyên tố thành cấp số nhân.*

Giải. *Giả sử có cấp số nhân* $\{n_0 q^k\}, k = 0; 1; 2 \dots, n_0; q \in \mathbb{N}^*$ *ta phải chứng minh* $\{f(n_0 q^k)\}$ *cũng là cấp số nhân. Thật vậy theo kết qủa bài toán 7.9 trên ta có ngay điều phải chứng minh.*

Sau đây ta xét bài toán

Bài toán 7.11. *Chứng minh rằng hàm số* f *chuyển mọi cấp số nhân thành cấp số nhân khi và chỉ khi hàm số đó chuyển cấp số nhân có công bội nguyên tố thành cấp số nhân.*

Giải. *Điều kiện cần.*

Nếu hàm số f *chuyển mọi cấp số nhân thành cấp số nhân thì hiển nhiên nó chuyển cấp số nhân có công bội nguyên tố thành cấp số nhân.*

Điều kiện đủ.

Nếu hàm số $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *chuyển cấp số nhân có công bội nguyên tố thành cấp số nhân. Giả sử* $\{u_n\}$ *là cấp số nhân ta phải chứng minh* $\{f(u_n)\}$ *cũng là cấp số nhân. Với* $u_n = u_0 q^n$ *ta xét hai trường hợp sau:*

Nếu q *là số nguyên tố thì bài toán được chứng minh.*

Nếu q *không là số nguyên tố thì* $q = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}$ *trong đó* $p_i,\ i \in \mathbb{N}^*$ *là các số nguyên tố. Khi đó ta có*

$$f(u_n) = f(u_0 q^n) = f(u_0 (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s})^n)$$

$$= f(u_0 (p_1)^{\alpha_1.n} (p_2)^{\alpha_2.n} \dots (p_s)^{\alpha_s.n})$$

$$= f(u_0) f_{(p_1)}^{\alpha_1.n} f_{(p_2)}^{\alpha_2.n} \dots f_{(p_s)}^{\alpha_s.n}$$

Theo Bổ đề 7.6 ta chứng minh $f^2(u_{m+n}) = f(u_{2m})f(u_{2n})$
Ta có $f^2(u_{m+n}) = (f(u_0)f_{(p_1)}^{\alpha_1.(m+n)}f_{(p_2)}^{\alpha_2.(m+n)}\dots f_{(p_s)}^{\alpha_s.(m+n)})^2$
$= f^2(u_0)f_{(p_1)}^{2\alpha_1.(m+n)}f_{(p_2)}^{2\alpha_2.(m+n)}\dots f_{(p_s)}^{2\alpha_s.(m+n)}$
$f(u_{2m})f(u_{2n}) = f(u_0)f_{(p_1)}^{\alpha_1.2m}f_{(p_2)}^{\alpha_2.2m}\dots f_{(p_s)}^{\alpha_s.2m}f(u_0)f_{(p_1)}^{\alpha_1.2n}f_{(p_2)}^{\alpha_2.2n}\dots f_{(p_s)}^{\alpha_s.2n}$
$= f^2(u_0)f_{(p_1)}^{2\alpha_1.(m+n)}f_{(p_2)}^{2\alpha_2.(m+n)}\dots f_{(p_s)}^{2\alpha_s.(m+n)}$
Vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

Chương 8

Một số bài toán xác định dãy số trong lớp dãy tuần hoàn cộng tính và nhân tính.

8.1 Một số bài toán xác định dãy số trong lớp dãy tuần hoàn cộng tính

Bài toán 8.1. *Xác định dãy* $\{x_n\}$ *sao cho* $x_{n+3} = x_n + 1, n = 1; 2; 3; \dots$

Giải. *Đặt* $x_n = \frac{n}{3} + y_n$. *Khi đó ta có*

$$y_{n+3} + \frac{n+3}{3} = \frac{n}{3} + y_n + 1$$

hay $y_{n+3} = y_n, \forall n \in \mathbb{N}$. *Vậy nên*

$$\begin{cases} y_0 = y_3 = y_6 = \cdots \\ y_1 = y_4 = y_7 = \cdots \\ y_2 = y_5 = y_8 = \cdots \end{cases} \Leftrightarrow \quad y_n = \begin{cases} a \ \text{tuỳ ý} & \text{với } n = 3k, k \in \mathbb{N} \\ b \ \text{tuỳ ý} & \text{với } n = 3k+1, k \in \mathbb{N} \\ c \ \text{tuỳ ý} & \text{với } n = 3k+2, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Bài toán 8.2. *Xác định dãy số* $\{x_n\}$ *sao cho* $x_{n+3} = 2x_n$

Giải. *Đặt* $x_n = 2^{\frac{n}{3}} y_n$. *Suy ra*

$$2^{\frac{n+3}{3}} y_{n+3} = 2(2^{\frac{n}{3}} y_n) \Leftrightarrow y_{n+3} = y_n \Leftrightarrow y_{n+3} = y_n.$$

Vậy nên

$$\begin{cases} y_0 = y_3 = y_6 = \cdots \\ y_1 = y_4 = y_7 = \cdots \\ y_2 = y_5 = y_8 = \cdots \end{cases} \Leftrightarrow \quad y_n = \begin{cases} a \ \text{tuỳ ý} & \text{với } n = 3k, k \in \mathbb{N} \\ b \ \text{tuỳ ý} & \text{với } n = 3k+1, k \in \mathbb{N} \\ c \ \text{tuỳ ý} & \text{với } n = 3k+2, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Vậy $x_n = 2^{\frac{n}{3}} y_n$ *trong đó*

$$y_n = \begin{cases} a \ \text{tuỳ ý} & \text{với } n = 3k, k \in \mathbb{N} \\ b \ \text{tuỳ ý} & \text{với } n = 3k+1, k \in \mathbb{N} \\ c \ \text{tuỳ ý} & \text{với } n = 3k+2, k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Sau đây ta xây dựng bài toán tổng quát sau.

Bài toán 8.3. *Xác định dãy số* $\{u_n\}$ *thoả mãn điều kiện*

$$u_{n+b} = u_n + d$$

Trong đó $n, b \ \in \mathbb{N}, d \ \in \mathbb{R}$

Giải. *Đặt* $u_n = \dfrac{d}{b} n + v_n$. *Thay vào công thức* $u_{n+b} = u_n + d$, *ta có*

$$\frac{d}{b}(n+b) + v_{n+b} = \frac{d}{b} n + v_n + d.$$

Suy ra $v_{n+b} = v_n$ *do đó* v_n *là dãy tuần hoàn cộng tính chu kỳ* b

Vậy $u_n = \dfrac{d}{b} n + v_n$ *với* v_n *là dãy tuần hoàn cộng tính chu kỳ* b.

Bài toán 8.4. *Xác định dãy số* $\{u_n\}$ *thoả mãn điều kiện*

$$u_{n+b} = c.u_n,$$

trong đó $n, b \ \in \mathbb{N}^*, c \ \in \mathbb{R}$

Giải. *Đặt* $u_n = c^{\frac{n}{b}} v_n$ *ta có*

$$c^{\frac{n+b}{b}} v_{n+b} = c c^{\frac{n}{b}} v_n.$$

Suy ra $v_{n+b} = v_n$ *do đó* v_n *là dãy tuần hoàn cộng tính chu kỳ* b *Vậy* $u_n = c^{\frac{n}{b}} v_n$ *với* v_n *là dãy tuần hoàn cộng tính chu kỳ* b.

Bài toán 8.5. *Xác định dãy số* $\{u_n\}$ *thoả mãn điều kiện*

$$u_{n+b} = c u_n + d,$$

trong đó $n, b \ \in \mathbb{N}^*, \ \ c, d \ \in \mathbb{R}$.

Giải. *Xét trường hợp* $c = 1$ *theo kết quả bài toán* 8.3, *ta có*

$$u_n = \frac{d}{b}n + v_n$$

với v_n *là dãy tuần hoàn cộng tính chu kỳ* b.

Xét trường hợp $c \neq 1$. *Đặt* $u_n = v_n + \dfrac{d}{1-c}$. *Khi đó ta có*

$$v_{n+b} + \frac{d}{1-c} = c(v_n + \frac{d}{1-c}) + d, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

hay

$$v_{n+b} = cv_n.$$

Theo kết quả bài toán 8.4, *ta có* $v_n = \mid c \mid^{\frac{n}{b}} x_n$, *trong đó*

$$x_{n+b} = \begin{cases} x_n & \text{với } c > 0 \\ -x_n & \text{với } c < 0 \end{cases}$$

Vậy nên

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{d}{1-c} + c^{\frac{n}{b}} x_n, \ \ \text{với } x_n \text{ tuỳ ý sao cho } x_{n+b} = x_n, \text{với } c > 0 \\ \\ \dfrac{d}{1-c} + \mid c \mid^{\frac{n}{b}} x_n, \ \ \text{với } x_n \text{ tuỳ ý sao cho } x_{n+b} = -x_n, \text{với } c < 0 \end{cases}$$

Kết luận:

- *Nếu* $c = 1$ *thì* $u_n = \dfrac{d}{b}n + v_n$ *với* v_n *là dãy tuần hoàn cộng tính chu kỳ* b.
- *Nếu* $c \neq 1$ *thì*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{d}{1-c} + c^{\frac{n}{b}} x_n, \ \ \text{với } x_n \text{ tuỳ ý sao cho } x_{n+b} = x_n, \text{với } c > 0 \\ \\ \dfrac{d}{1-c} + \mid c \mid^{\frac{n}{b}} x_n, \ \ \text{với } x_n \text{ tuỳ ý sao cho } x_{n+b} = -x_n \ \text{ với } \ c < 0 \end{cases}$$

Bài toán 8.6.

8.2 Hàm số xác định trên tập các số nguyên

8.2.1 Hàm số chuyển đổi các phép tính số học

Khi xét lớp phương trình hàm với cặp chỉ số tự do dạng đối xứng quen biết, ta thường sử dụng phép thế chỉ số bằng các biến mới để đưa phương trình hàm đã cho về một dạng phương trình hàm mới đã biết cách giải. Tuy nhiên, trong các trường hợp sử dụng phép thế chỉ số tổng quát, nghiệm nhận được của phương trình mới, nhìn chung không thoả mãn điều kiện bài ra. Vì vậy, nghiệm của phương trình mới cần được thử lại thông qua các dữ liệu của bài ra. Ta xét một số ví dụ minh hoạ.

Bài toán 8.7. *Xác định hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ thoả mãn các điều kiện*

$$f(m+n) = f(m) + f(n) + mn \ \ (m, n \in \mathbb{Z}). \tag{1}$$

Giải. *Từ phương trình (1) ta nhận được*

$$f(n+1) = f(1) + f(n) + n, \ \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

hay

$$f(n+1) - f(n) = a + n, \ \ a = f(1), \ \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Phương trình $f(n+1) - f(n) = a + n$ là một phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất cấp 1. Do phương trình đặc trưng tương ứng có nghiệm $\lambda = 1$, nên ta có nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $f(n+1) - f(n) = 0$ là

$$\hat{f}(n) = c \tag{3}$$

Ta viết

$$n = \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}.$$

Khi đó, nghiệm riêng của (2) có dạng

$$f(n)^* = n(dn + e).$$

Thay $f(n)^*$ vào (2) ta được

$$f(n)^* = \Big(a - \frac{1}{2}\Big)n. \tag{4}$$

Vì $f(n) = \hat{f}(n) + f(n)^*$ nên từ (3) và (4) ta có nghiệm của (2) là

$$f(n) = c + \frac{1}{2}n^2 + \Big(a - \frac{1}{2}\Big)n. \tag{5}$$

Do $f(1) = a$*, từ (5) ta có* $c = 0$.

Thay $c = 0$ *vào (5), ta thu được nghiệm của (2)*

$$f(n) = \frac{1}{2}n^2 + \Big(a - \frac{1}{2}\Big). \tag{6}$$

Thử lại ta thấy nghiệm dạng (6) thoả mãn điều kiện của đầu bài.

Bài toán 8.8. *Tồn tại hay không tồn tại một hàm số* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *thoả mãn điều kiện*

$$f(m+n) = f(m) + f(n) + m + n, \ \ (m, n \in \mathbb{Z}). \tag{7}$$

Giải. *Lặp lại cách giải như đối với Bài toán 1, từ phương trình (l) ta suy ra*

$$f(n+1) = f(1) + f(n) + n + 1$$

hay

$$f(n+1) - f(n) = a + n \ \text{ với } a = f(1) + 1. \tag{8}$$

Phương trình $f(n+1) - f(n) = a + n$ *là một phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất cấp 1. Do phương trình đặc trưng có nghiệm* $\lambda = 1$ *nên ta có nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất* $f(n+1) - f(n) = 0$ *là*

$$\hat{f}(n) = c \tag{9}$$

Ta viết

$$n = \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}.$$

Khi đó, nghiệm riêng của (8) có dạng $x'_n = n(dn + e)$. *Thay* $f(n)^*$ *vào (8) ta được*

$$f(n)^* = \frac{1}{2}n^2 + \Big(a - \frac{1}{2}\Big)n. \tag{10}$$

Vì $f(n) = \hat{f}(n) + f(n)^*$ *nên từ (9) và (10) ta có nghiệm của (8) là*

$$f(n) = c + \frac{1}{2}n^2 + \Big(a - \frac{1}{2}\Big)n. \tag{11}$$

Do $f(1) = a - 1$*, từ (11) ta có* $c = 1$.

Thay $c = 1$ *vào (11), ta có nghiệm của (8)*

$$f(n) = \frac{1}{2}n^2 + \Big(a - \frac{1}{2}\Big)n + 1. \tag{12}$$

Thử lại ta thấy nghiệm dạng (12) không thoả mãn điều kiện của đầu bài. Vậy không tồn tại một hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *thoả mãn điều kiện*

$$f(m+n) = f(m). + f(n) + m + n \ \ (m, n \in \mathbb{Z}).$$

Bài toán 8.9. *Xác định $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}^+$ thoả mãn điều kiện*

$$f(mn)=f(m)f(n)\ \ (m,n\in\mathbb{Z}).$$

Giải.

Ta có $x_{1.n}=f(1)f(n)$. Suy ra $f(1)=1$. Giả sử $n=p$ là một số nguyên tố. Khi đó $f(p^k)=(f(p))^k$ (quy nạp) và nếu $n=p_1^{\alpha_1}\dots p_s^{\alpha_s}$ thì

$$f(n)=(f(p_1))^{\alpha_1}\cdots(f(p_s))^{\alpha_s}.$$

Vậy $f(p)$ có thể nhận giá trị tuỳ ý khi p là một số nguyên tố.

Kết luận:

$f(p)$ có thể nhận giá trị tuỳ ý khi p là một số nguyên tố và

$$f(n)=(f(p_1))^{\alpha_1}\cdots(f(p_s))^{\alpha_s}$$

khi $n=p_1^{\alpha_1}\dots tp_s^{\alpha_s}$.

Bài toán 8.10. *Xác định dãy $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện*

$$F(m+n)+f(n-m)=f(3n)\ \ (m,n\in\mathbb{Z},\ n\geq m).$$

Giải.

Cho $m=0$, ta có $2f(n)=f(3n)$. Suy ra $f(0)=0$. Đặt $m=n$ ta được $f(2n)=f(3n)$. Suy ra, một mặt thì

$$f(4n)=f(6n)=f(9n)$$

và mặt khác thì

$$f(4n)+f(2n)=f(9n).$$

Từ đó suy ra

$$f(n)=\frac{1}{2}f(3n)=\frac{1}{2}f(2n)=0$$

với mọi $n\in\mathbb{Z}$.

8.2.2 Hàm số chuyển tiếp các đại lượng trung bình

Trong mục này, ta đi tìm những hàm số thực hiện phép chuyển tiếp một đại lượng trung bình của cặp chỉ số sang một đại lượng trung bình của cặp phần tử tương ứng của hàm số. Các bài toán này liên quan chặt chẽ đến việc chuyển tiếp các cấp số; đến sự mô phỏng các cấp số tổng quát, chẳng hạn, ta có thể chuyển một cấp số cộng sang một cấp số nhân, cấp số điều hoà,...

Dưới đây ta xét một số bài toán chuyển tiếp các đại lượng trung bình cơ bản trong chương trình phổ thông.

1) Phép chuyển các đại lượng trung bình cộng

Bài toán 8.11. *Xác định hàm số $u(n)$, sao cho*

$$u\left(\frac{m+n}{2}\right)=\frac{u(m)+u(n)}{2}\quad\left(m,n,\frac{m+n}{2}\in\mathbb{Z}\right)$$

Giải. *Đặt $u(1)=\alpha$, $u(2)=\beta$. Ta có*

$$u(2)=u\left(\frac{3+1}{2}\right)=\frac{u(3)+u(1)}{2}.$$

Suy ra

$$u(3)=2u(2)-u(1)=2\beta-\alpha.$$

Tiếp tục quá trình như vậy, ta được

$$u(3)=u\left(\frac{4+2}{2}\right)=\frac{u(4)+u(2)}{2}.$$

Suy ra

$$u(4)=2u(3)-u(2)=2(2\beta-\alpha)-\beta=3\beta-2\alpha.$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta thu được

$$u(n)=(n-1)\beta-(n-2)\alpha,\ \ \forall n.$$

Vậy

$$\begin{cases}u(n)= & (\beta-\alpha)n+2\alpha-\beta,\ \ \forall n,\\ u(1)= & \alpha,\ \ u(2)=\beta.\end{cases}$$

Đặt $\alpha=a+b$; $\beta=2a+b$, thì $a=\beta-\alpha$ và $b=2\alpha-\beta$.

Do đó, nghiệm của phương trình là $u(n)=an+b$; a,b tuỳ ý.

2) Phép chuyển đại lượng trung bình cộng sang trung bình điều hoà

Bài toán 8.12. *Xác định hàm số $u(n)\in\mathbb{Z}$ sao cho*

$$u\left(\frac{m+n}{2}\right)=\frac{2u(m)u(n)}{u(m)+u(n)}\quad\left(m,n,\frac{m+n}{2}\in\mathbb{Z}\right).$$

Giải. *Ta có*

$$u\left(\frac{m+n}{2}\right)=\frac{2u(m)u(n)}{u(m)+u(n)}\Leftrightarrow u\left(\frac{m+n}{2}\right)=\frac{2}{\dfrac{1}{u(m)}+\dfrac{1}{u(n)}}.$$

Đặt $\frac{1}{u(n)}=v(n)$, thì phương trình đã cho tương đương với

$$v\left(\frac{m+n}{2}\right)=\frac{v(m)+v(n)}{2}.$$

Theo Bài toán 1, $v(n) = an + b$; $a, b \geq 0$, $a + b > 0$.
Vậy nghiệm của phương trình là

$$u(n) = \frac{1}{an+b};\ \ a, b \geq 0;\ \ a + b > 0.$$

3) Phép chuyển đại lượng trung bình cộng sang trung bìuh nhân

Bài toán 8.13. *Xác định hàm số* $u(n)$ *sao cho*

$$u\left(\frac{m+n}{2}\right) = \sqrt{u(m)u(n)};\ \ \left(m, n, \frac{m+n}{2}\right) \in \mathbb{Z}.$$

Giải. *Ta có*

$$u(n) = u\left(\frac{n+n}{2}\right) = \sqrt{u(n)u(n)} = \sqrt{[u(n)]^2} = |u(n)| \geq 0.$$

Đặt $u(1) = \alpha$, $u(2) = \beta$ $(\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0)$.
a) Nếu $\alpha = 0$ *thì*

$$u(n) = u\left(\frac{1+2n-1}{2}\right) = \sqrt{u(1)u(2n-1)} = 0,\ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Vậy $u(n) \equiv 0$ *là nghiệm duy nhất của phương trình .*
b) Nếu $\alpha > 0$ *và* $\beta = 0$ *thì*

$$u(n) = u\left(\frac{2+2n-2}{2}\right) = \sqrt{u(2)u(2n-2)} = 0,\ \ \forall n \geq 2.$$

Suy ra

$$u(n) = \begin{cases} \alpha, & \text{nếu } n = 1 \\ 0 & \text{nếu } n \geq 2 \end{cases}$$

là nghiệm của phương trình.
c) Xét trường hợp $\alpha > 0$ *và* $\beta > 0$. *Giả sử tồn tại* $n_0 \geq 3$ *sao cho* $u(n_0) = 0$. *Thế thì*

$$u(n_0 - 1) = u\left(\frac{n_0 + n_0 - 2}{2}\right) = \sqrt{u(n_0)u(n_0 - 2)} = 0.$$

Chọn $n_0 = 3$ *thì* $u(n_0 - 1) = u(2) = 0$, *hay* $\beta = 0$, *mâu thuẫn.*
Do đó, có thể giả thiết rằng $u(n) > 0$ *với mọi* $n \in \mathbb{Z}$. *Ta có*

$$u(2) = u\left(\frac{3+1}{2}\right) = \sqrt{u(3)u(1)}.$$

Suy ra

$$u(3) = \frac{u^2(2)}{u(1)} = \frac{\beta^2}{\alpha}.$$

Mặt khác

$$u(3) = u\left(\frac{4+2}{2}\right) = \sqrt{u(4)u(2)}.$$

Suy ra

$$u(4) = \frac{u^2(3)}{u(2)} = \frac{\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^2}{\beta} = \frac{\beta^3}{\alpha^2}.$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta chứng minh được rằng

$$u(n) = \frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-2}},\ \ \forall n \geq 3.$$

Mà

$$\frac{\beta^{n-1}}{\alpha^{n-2}} = \left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n$$

Đặt

$$\begin{cases} \alpha = ab, \\ \beta = ab^2 \end{cases} (a > 0,\, b > 0).$$

Suy ra

$$\frac{\alpha^2}{\beta} = a,\ \ \frac{\beta}{\alpha} = b.$$

Vậy nghiệm của phương trình là

$$u(n) = \begin{cases} \alpha \ \text{ nếu } n = 1 \\ 0 \ \text{ nếu } n \geq 2 \end{cases} (\alpha \geq 0)$$

hoặc $u(n) = a.b^n \ \ (a > 0, b > 0)$.

4) Phép chuyển đại lượng trung bình cộng sang trung bình bậc hai

Bài toán 8.14. *Xác định hàm số* $u(n)$*, sao cho*

$$u\left(\frac{m+n}{2}\right) = \sqrt{\frac{u^2(m)+u^2(n)}{2}} \ \ \left(m, n, \frac{m+n}{2} \in \mathbb{Z}\right).$$

Giải. *Ta có*

$$u(n) = u\left(\frac{n+n}{2}\right) = \sqrt{\frac{u^2(n)+u^2(n)}{2}} = \sqrt{u^2(n)} = |u(n)| \geq 0, \ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Đặt $u(1) = \alpha \geq 0$ *;* $u(2) = \beta \geq 0$. *Ta có*

$$u(2) = u\left(\frac{3+1}{2}\right) = \sqrt{\frac{u^2(3)+u^2(1)}{2}}.$$

Suy ra

$$u^2(3) = 2u^2(2) - u^2(1) = 2\beta^2 - \alpha^2$$
$$\Rightarrow u(3) = \sqrt{2\beta^2 - \alpha^2} \ \ (\alpha \leq \beta\sqrt{2}).$$

Tương tự

$$u(3) = u\left(\frac{4+2}{2}\right) = \sqrt{\frac{u^2(4)+u^2(2)}{2}}.$$

Suy ra

$$u^2(4) = 2u^2(3) - u^2(2) = 2(2\beta^2 - \alpha^2) - \beta^2 = 3\beta^2 - 2\alpha^2$$

hay

$$u(4) = \sqrt{3\beta^2 - 2\alpha^2} \ \ \left(\alpha \leq \beta\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

Bằng quy nạp toán học, ta chứng minh được hệ thức

$$u(n) = \sqrt{(n-1)\beta^2 - (n-2)\alpha^2}, \ \ \forall n \geq 3.$$

Nhận xét rằng, ta luôn có

$$\sqrt{(n-1)\beta^2 - (n-2)\alpha^2} = \sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)n + 2\alpha^2 - \beta^2}.$$

Đặt

$$\begin{cases} \alpha^2 = a + b \\ \beta^2 = 2a + b. \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} a = \beta^2 - \alpha^2 \\ b = 2\alpha^2 - \beta^2. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $u(n) = \sqrt{an+b}$ *;* $a \geq 0,\ a + b \geq 0.$

Nhận xét 8.1. *Trong cả bốn bài toán đã nêu ở trên, nếu ta thay* m *bởi* $(n+1)$ *và* n *bởi* $(n-1)$ *thì ta có thể đưa chúng được về các phương trình sai phân quen biết.*

8.2.3 Phương trình trong hàm số với cặp biến tự do

Trong mục này, ta đi tìm những hàm số thực hiện phép chuyển tiếp một biểu thức đại số của cặp chỉ số sang một đại lượng khác của cặp phần tử tương ứng của dãy số. Các bài toán này liên quan chặt chẽ đến việc chuyển tiếp các hàm số; đến sự mô phỏng các hàm số đặc biệt trong số học, đại số,...

Bài toán 8.15. *Tìm hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn các điều kiện $f(1) = a \in \mathbb{Z}$ và*

$$f(m+n) + f(m-n) = 2f(m)f(n), \ \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Giải. *Cho $m = n = 0$ ta được $f(0) = 0$ hoặc $f(0) = 1$. Nếu $f(0) = 0$ thì thay $n = 0$ ta được $2f(m) = 0$ với mọi $m \in \mathbb{Z}$. Do vậy $f(m) \equiv 0$ và ứng với $a = 0$.*

Nếu $f(0) = 1$, cho $m = n = 1$ ta thu được $f(2) = 2a^2 - 1$.

Tiếp tục thay $m = 2; n = 1$ vào điều kiện bài ra ta được $f(3) = 4a^3 - 3a$. Từ đó ta có dự đoán $f(n) = T_n(a)$ với mọi $n \geq 1$.

Dự đoán đó được chứng minh dễ dàng bằng phương pháp quy nạp.

Mặt khác, cho $m = 0$ ta được $f(n)+f(-n) = 2f(0)f(n) = 2f(n)$ nên $f(-n) = f(n)$. Vậy $f(n)$ là hàm chẵn. Vậy ta được

$$f(m) = \begin{cases} 1 \ \ \textit{khi } m = 0, \\ a \ \ \textit{khi } m = \pm 1, \\ T_{|m|}(a) \ \ \textit{khi } |m| \geq 1, \ \ m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Bài toán 8.16. *Tìm hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ thỏa mãn các điều kiện $f(0) \neq 0$, $f(1) = \dfrac{5}{2}$ và*

$$f(m+n) + f(m-n) = f(m)f(n), \ \forall m, n \in \mathbb{Z}.$$

Giải. *Cho $m = n = 0$ ta được, do $f(0) \neq 0$, $f(0) = 2$. Tiếp theo, theo quy nạp ta được*

$$f(n) = 2^n + 2^{-n}, \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Thử lại ta thấy hàm này thoả mãn điều kiện bài ra.

Bài toán 8.17. *Tìm hàm $f : \mathbb{Z} \to [0, +\infty)$ thỏa mãn các điều kiện $f(1) = 1$ và*

$$f(m+n) + f(m-n) = \frac{1}{2}[f(2m) + f(2n)], \ \forall m, n \in \mathbb{Z}, \ m \geq n.$$

Giải. *Cho $m = n = 0$ ta được $f(0) = 0$. Cho $m = 1$, $n = 0$ thì*

$$f(1) + f(1) = \frac{1}{2}[f(2) + f(0)].$$

Suy ra $f(2) = 4$.

Chứng minh bằng quy nạp ta được $f(n) = n^2$.
Thật vậy, do $f(k) + f(k) = \frac{1}{2}[f(2k) + f(0)]$ *nên có ngay* $f(2k) = 4k^2$.
Cũng vậy, do $f(k+1) + f(k-1) = \frac{1}{2}[f(2k) + f(2)]$ *nên ta có*

$$f(k+1) = \frac{1}{2}f(2k) + 2 - f(k-1) = (k+1)^2.$$

Bài toán 8.18. *Tìm các đa thức hai biến* $P(m,n)$ $(m,n \in \mathbb{Z})$ *thoả mãn điều kiện*
a) $P(am, an) = a^2P(m,n)$ *với mọi* $m, n, a \in \mathbb{Z}$,
b) $P(b+c, a) + P(c+a, b) + P(a+b, c) = 0$ *với mọi* $a, b, c \in \mathbb{Z}$,
c) $P(1,0) = 1$.

Giải.
Trong b) đặt $b = 1 - a$; $c = 0$ *ta được*

$$P(1-a, a) = -1 - P(a, 1-a). \tag{1}$$

Lại đặt $c = 1 - a - b$ *và kết hợp với a) ta được*

$$P(a+b, 1-a-b) = P(a, 1-a) + P(b, 1-b) + 2. \tag{2}$$

Đặt $f(m) = P(m, 1-m) + 2$. *Khi đó* $f(1) = P(1,0) + 2 = 3$ *và (5) trở thành* $f(m+n) = f(m) + f(n)$. *Đó là phương trình dãy chuyển đổi phép cộng*

$$\begin{cases} f(m+n) = f(m) + f(n), \\ f(1) = 3. \end{cases} \tag{3}$$

Phương trình (3) có nghiệm duy nhất $f(n) = 3n$. *Vậy nên*

$$P(n, 1-n) = 3n - 2. \tag{4}$$

Bằng phương pháp quy nạp ta sẽ thu được

$$P(a,b) = (a+b)^2\big(3\frac{a}{a+b} - 2\big) = (a+b)(a-2b),\ \ \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

Tóm lại $P(m,n) = (m+n)^2(m-2n)$.

Bài toán 8.19. *Cho đa thức Chebyshev* $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. *Chứng minh rằng với* $m, n \in \mathbb{Z}$; $n \geq m$ *và* $x \in \mathbb{R}$ *thì* $T_n(x)$ *là nghiệm của phương trình dãy sau*

$$T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x) = 2T_n(x)T_m(x).$$

Giải. *Sử dụng định nghĩa $T_n(x)$ và phương pháp quy nạp hoặc sử dụng các công thức*

$$\cos(n+m)x + \cos(n-m)x = 2\cos nx \cos mx$$

và

$$\cosh(n+m)x + \cosh(n-m)x = 2\cosh(nx)\cosh(mx),$$

ta có ngay điều phải chứng minh.

Bài toán 8.20. *Tìm hàm $f\ \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thỏa mãn các điều kiện*

$$\exists N \in \mathbb{Z}: -N < f(n) < N \ \ \forall n \in \mathbb{Z},$$

$$f(m+n) + f(m-n) = 2f(m)f(n) \ \ \forall m, n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Giải. *Cho $m = n = 0$ ta được $f(0) \in \{0, 1\}$. Giả sử $f(0) = 0$. Cho $n = 0$ trong (1) ta được $2f(m) = 2f(m)f(0) = 0$ và $f \equiv 0$.*

Giả sử $f(0) = 1$. Cho $m = 0$ trong (1) ta thu được $f(-n) = f(n)$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$. Vậy chỉ cần xét $n \in \mathbb{Z}$. Cho $n = 1$ trong (1), ta được

$$f(m+1) = 2f(m)f(1) - f(m-1)$$

và thu được công thức truy hồi theo $f(1)$. Nếu $|f(1)| \geq 2$ thì từ giả thiết ta có

$$f(2n) = 2[f(n)]^2 - 1$$

tăng và không giới nội, trái với giả thiết. Vậy $f(1) \in \{-1, 0, 1\}$.

Với $f(1) = -1$ thì $f(n) = (-1)^n$ (quy nạp).

Với $f(1) = 1$ thì $f(n) \equiv 1$.

Với $f(1) = 0$ ta được dãy tuần hoàn (quy nạp)

$$f(4m) = 1, \ \ f(4m+1) = 0, \ \ f(4m+2) = -1, \ \ f(4m+3) = 0.$$

Suy ra $f(2) = 4$. Chứng minh bằng quy nạp ta được $f(n) = n^2$. Thật vậy, do $f(k) + f(k) = (1/2)[f(2k) + f(0)]$ nên có ngay $f(2k) = 4k^2$. Cũng vậy, do $f(k+1) + f(k-1) = (1/2)[f(2k) + f(2)]$ nên ta có

$$f(k+1) = \frac{1}{2}f(2k) + 2 - f(k-1) = (k+1)^2.$$

8.2.4 Một số dạng toán liên quan đến dãy truy hồi

Bài toán 8.21. *Ký hiệu*

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Xác định hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ theo công thức

$$f(n) = (n+1)u_n g(n+1), \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Giải. *Sử dụng công thức tích phân từng phần, ta thu được*

$$u_n = -\cos x \sin^{n-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1)\sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx$$

$$= (n-1)(u_{n-1} - u_n).$$

Từ đây suy ra

$$g(n+2) = \frac{n+1}{n+2}u_n, \ \ n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Từ (1) ta nhận được

$$f(n+1) = (n+2)g(n+1)g(n+2)$$

$$= (n+2)g(n+1)\frac{n+1}{n+2}u_n$$

$$= (n+1)g(n+1)u_n = f(n).$$

Vậy nên

$$f(n) = f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Bài toán 8.22. *Ký hiệu*

$$u_n = \int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx dx, \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Xác định hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ theo công thức

$$f(n) = 2^n u_n, \ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Giải. *Đặt* $\cos^n x = u$ *và* $\cos nxdx = dv$ *thì theo công thức tích phân từng phần, ta thu được*

$$u_n = \frac{1}{n}\cos^n x \sin x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^{n-1} x \sin x \sin nxdx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^{n-1} x[\cos(n-1)x + \cos(n+1)x]dx$$

$$= \frac{1}{2}u_{n-1} - \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^{n-1} x \sin x + \sin nxdx$$

$$= \frac{1}{2}u_{n-1} - \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}u_n.$$

Vậy nên

$$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} = \frac{1}{4}u_{n-2} = \cdots = \frac{1}{2^{n-1}}u_1 = \frac{1}{2^{n-1}}\frac{\pi}{2}.$$

Bài toán 8.23. *Xác định hàm số* $\{u_n\}$ *được tính theo công thức*

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} xdx$$

Giải. *Ta viết* u_n *dưới dạng sau*

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} xdx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n-2} x[(\tan^2 x + 1) - 1]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n-2} xd\tan x - u_{n-1}$$

$$= \frac{\tan^{2n-1} x}{2n-1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - u_{n-1}$$

$$= \frac{1}{2n-1} - u_{n-1}.$$

Do vậy

$$u_n + u_{n-1} = \frac{1}{2n-1},$$

$$u_{n-1} + u_{n-2} = \frac{1}{2n-3},$$

$$\cdots$$

$$u_1 + u_0 = \frac{1}{2-1}.$$

Suy ra

$$u_n = (-1)^n\Big[\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{2k-1}\Big].$$

Bài toán 8.24. *Xác định hàm số $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ được tính theo công thức*

$$f(n) = \int\limits_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx,\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Giải. *Đặt $x^n = u$, $\sqrt{1-x}dx = dv$ thì*

$$f(n) = \int\limits_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$$

$$= \big[-\frac{2}{3}x^n(1-x)^{\frac{3}{2}}\big]\big|_0^1 + \frac{2n}{3}\int\limits_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}(1-x)dx$$

$$= \frac{2n}{3}\int\limits_0^1 (x^{n-1} - x^n)\sqrt{1-x}dx$$

$$= \frac{2n}{3}\int\limits_0^1 (x^{n-1}\sqrt{1-x}dx - \frac{2n}{3}\int\limits_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$$

$$\frac{2n}{3}x_{n-1} - \frac{2n}{3}f(n).$$

Vậy nên

$$f(n) = \frac{2n}{2n-3}x_{n-1}.$$

Vì $f(0) = \dfrac{2}{3}$ nên ta có ngay

$$f(n) = \int\limits_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx = 2\frac{(2n)!!}{(2n+3)!!},\ \ n \in \mathbb{Z}.$$

Bài toán 8.25. *Xác định hàm $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ thoả mãn các điều kiện*

$$f(0) = 1,\ \ f(f(n) = f(f(n+2)+2) = n\ \ \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Giải. *Nhận xét rằng f là ánh xạ 1-1*

$$f(m) = f(n) \;\Rightarrow\; f(f(m)) = f(f(n)) \;\Rightarrow\; m = n.$$

Vậy nên

$$f(n) = f(n+2) + 2 \;\; \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Suy ra

$$f(n+2) = f(n) - 2, \;\; f(0) = 1, \;\; f(1) = f(f(0)) = 0.$$

Vậy nên

$$f(2) = f(0) - 2 = -1,$$
$$f(3) = f(1) - 2 = -2,$$
$$f(n) = -(n-1).$$

Tương tự

$$f(-1) = f(1) + 2 = 2,$$
$$f(-2) = f(0) + 2 = 3,$$
$$f(-3) = f(1) + 2 = 5,$$
$$f(n) = -(n-1).$$

Bài toán 8.26. *Cho góc α với $0 < \alpha < \pi$. Xác định cặp số a, b sao cho dãy hàm $\{P_n(x)\}$ được tính theo công thức*

$$P_n(x) = x^n \sin\alpha - x\sin(n\alpha) + \sin(n-1)\alpha$$

luôn luôn chia hết cho $f(x) = x^2 + ax + b$.

Giải. *Với $n = 3$ thì*

$$P_3(x) = x^3 \sin\alpha - x\sin(3\alpha) + \sin 2\alpha = \sin\alpha(x + 2\cos\alpha)(x^2 - 2x\cos\alpha + 1).$$

Từ đó suy ra với $f(x) = x^2 + 2x\cos\alpha + 1$ thì $P_3(x) \vdots f(x)$. Với $n \geq 3$ thì

$$P_{n+1}(x) = xP_n(x) + (x^2 - 2x\cos\alpha + 1)\sin n\alpha.$$

Suy ra $f(x) = x^2 + 2x\cos\alpha + 1$.

Bài tập

Bài 1. *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *nếu biết:* $f(1) = a$, $f(m+n) = f(n) + f(m)$;
Bài 2. *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *nếu biết:* $f(1) = a$, $f(m-n) = f(n) + f(m)$ $(m, n, m-n \in \mathbb{Z})$.
Bài 3. *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *nếu biết* $f\left(\frac{m}{n}\right) = f(n) + f(m)$ $(m, n, \frac{m}{n} \in \mathbb{Z})$.
Bài 4. *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *thoả mãn điều kiện* $f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) - f(n)$ $(m, n, \frac{m}{n} \in \mathbb{Z})$.
Bài 5. *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *thoả mãn điều kiện* $f(m+n) = f(m)f(n)$ $(m, n \in \mathbb{Z})$.
Bài 6. *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ *nếu biết* $f(m+n) + f(m-n) = \frac{1}{2}(f(2m) + f(2n)$, $(m, n, m-n \in \mathbb{Z})$.
Bài 7. *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ *thoả mãn điều kiện* $f(m+n) = \frac{f(m)}{f(n)}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$.
Bài 8. *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ *thoả mãn điều kiện* $f\left(\frac{m+n}{2}\right) = \sqrt{f(m)f(n)}$ $(m, n, \frac{m+n}{2} \in \mathbb{Z})$.
Bài 9 . *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ *thoả mãn điều kiện* $x_{\frac{m+n}{2}} = \frac{2f(m)f(n)}{f(m)+f(n)}$ $(m, n, \frac{m+n}{2} \in \mathbb{Z})$.
Bài 10 . *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^+$ *thoả mãn điều kiện* $f\left(\frac{m+n}{2}\right) = \sqrt{\frac{f(m)^2+f(n)^2}{2}}$ $(m, n, \frac{m+n}{2} \in \mathbb{Z})$.

8.3 Hàm số xác định trên tập các số hữu tỷ

Bài toán 8.27. *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *thoả mãn các điều kiện*

$$f(\mu + \nu) = f(\mu) + f(\nu) + \mu\nu \ \ (\mu, \nu \in \mathbb{Q}). \tag{1}$$

Giải. *Từ phương trình (1) ta nhận được*

$$f(\nu + 1) = f(1) + f(\nu) + \nu$$

hay

$$f(\nu + 1) - f(\nu) = a + \nu, \ \ a = f(1). \tag{2}$$

Phương trình $f(\nu + 1) - f(\nu) = a + \nu$ *là một phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất cấp 1. Do phương trình đặc trưng có nghiệm* $\lambda = 1$ *nên ta có nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất* $f(\nu + 1) - f(\nu) = 0$ *là*

$$\hat{f}(\nu) = c \tag{3}$$

Ta viết

$$\nu = \frac{1}{2}(\nu+1)^2 - \frac{1}{2}\nu^2 - \frac{1}{2}.$$

Khi đó, nghiệm riêng của (2) có dạng

$$f(\nu)^* = \nu(d\nu + e).$$

Thay $f(\nu)^*$ vào (2) ta được

$$f(\nu)^* = \Big(a - \frac{1}{2}\Big)\nu. \tag{4}$$

Vì $f(\nu) = \hat{f}(\nu) + f(\nu)^*$ nên từ (3) và (4) ta có nghiệm của (2) là

$$f(\nu) = c + \frac{1}{2}\nu^2 + \Big(a - \frac{1}{2}\Big)n. \tag{5}$$

Do $f(1) = a$, từ (5) ta có $c = 0$.

Thay $c = 0$ vào (5), ta thu được nghiệm của (2)

$$f(\nu) = \frac{1}{2}\nu^2 + \Big(a - \frac{1}{2}\Big). \tag{6}$$

Thử lại ta thấy nghiệm dạng (6) thoả mãn điều kiện của đầu bài.

Bài toán 8.28. *Tồn tại hay không tồn tại một hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện*

$$f(\mu + n) = f(\mu) + f(\nu) + \mu + n, \;\; (\mu, \nu \in \mathbb{Q}). \tag{7}$$

Giải. *Lặp lại cách giải như đối với Bài toán trên, từ phương trình (l) ta suy ra*

$$f(\nu + 1) = f(1) + f(\nu) + \nu + 1$$

hay

$$f(\nu + 1) - f(\nu) = a + \nu \;\; \text{với } a = f(1) + 1. \tag{8}$$

Phương trình $f(\nu + 1) - f(\nu) = a + \nu$ là một phương trình sai phân tuyến tính không thuần nhất cấp 1. Do phương trình đặc trưng có nghiệm $\lambda = 1$ nên ta có nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất $f(\nu + 1) - f(\nu) = 0$ là

$$\hat{f}(\nu) = c \tag{9}$$

Ta viết

$$\nu = \frac{1}{2}(\nu+1)^2 - \frac{1}{2}\nu^2 - \frac{1}{2}.$$

Khi đó, nghiệm riêng của (8) có dạng $x'_n = n(d\nu + e)$*. Thay* $f(\nu)^*$ *vào (8) ta được*

$$f(\nu)^* = \frac{1}{2}\nu^2 + \Big(a - \frac{1}{2}\Big)\nu. \tag{10}$$

Vì $f(\nu) = \hat{f}(\nu) + f(\nu)^*$ *nên từ (9) và (10) ta có nghiệm của (8) là*

$$f(\nu) = c + \frac{1}{2}\nu^2 + \Big(a - \frac{1}{2}\Big)\nu. \tag{11}$$

Do $f(1) = a - 1$*, từ (11) ta có* $c = 1$*.*

Thay $c = 1$ *vào (11), ta có nghiệm của (8)*

$$f(\nu) = \frac{1}{2}\nu^2 + \Big(a - \frac{1}{2}\Big)\nu + 1. \tag{12}$$

Thử lại ta thấy nghiệm dạng (12) không thoả mãn điều kiện của đầu bài. Vậy không tồn tại một hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *thoả mãn điều kiện*

$$f(\mu + \nu) = f(\mu). + f(\nu) + \mu + \nu \ \ (\mu, \nu \in \mathbb{Q}).$$

Bài toán 8.29. *Xác định* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ *thoả mãn điều kiện*

$$f(\mu\nu) = f(\mu)f(\nu) \ \ (\mu, \nu \in \mathbb{Q}).$$

Giải. *Ta có* $x_{1.\nu} = f(1)f(\nu)$*. Suy ra* $f(1) = 1$*. Giả sử* $\nu = p$ *là một số nguyên tố. Khi đó* $f(p^k) = (f(p))^k$ *(quy nạp) và nếu* $\nu = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$ *thì*

$$f(\nu) = (f(p_1))^{\alpha_1} \cdots (f(p_s))^{\alpha_s}.$$

Vậy $f(p)$ *có thể nhận giá trị tuỳ ý khi* p *là một số nguyên tố.*

Kết luận:

$f(p)$ *có thể nhận giá trị tuỳ ý khi* p *là một số nguyên tố và*

$$f(\nu) = (f(p_1))^{\alpha_1} \cdots (f(p_s))^{\alpha_s}$$

khi $\nu = p_1^{\alpha_1} \dots tp_s^{\alpha_s}$*.*

Bài toán 8.30. *Xác định dãy* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *thoả mãn điều kiện*

$$F(\mu + \nu) + f(\nu - \mu) = f(3\nu) \ \ (\mu, \nu \in \mathbb{Q},\ \nu \geq \mu).$$

Giải. *Cho* $\mu = 0$*, ta có* $2f(\nu) = f(3\nu)$*. Suy ra* $f(0) = 0$*. Đặt* $\mu = \nu$ *ta được* $f(2\nu) = f(3\nu)$*. Suy ra, một mặt thì*

$$f(4\nu) = f(6\nu) = f(9\nu)$$

và mặt khác thì

$$f(4\nu) + f(2\nu) = f(9\nu).$$

Từ đó suy ra

$$f(\nu) = \frac{1}{2}f(3\nu) = \frac{1}{2}f(2\nu) = 0$$

với mọi $\nu \in \mathbb{Q}$.

Tiếp theo, ta đi tìm những hàm số thực hiện phép chuyển tiếp một đại lượng trung bình của cặp chỉ số sang một đại lượng trung bình của cặp phần tử tương ứng của hàm số. Các bài toán này liên quan chặt chẽ đến việc chuyển tiếp các cấp số; đến sự mô phỏng các cấp số tổng quát, chẳng hạn, ta có thể chuyển một cấp số cộng sang một cấp số nhân, cấp số điều hoà,...

Dưới đây ta xét một số bài toán chuyển tiếp các đại lượng trung bình cơ bản trong chương trình phổ thông.

1) Phép chuyển các đại lượng trung bình cộng

Bài toán 8.31. *Xác định hàm số* $u(\nu)$, *sao cho*

$$u\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) = \frac{u(\mu)+u(\nu)}{2} \quad \left(\mu, \nu, \frac{\mu+\nu}{2} \in \mathbb{Q}\right)$$

Giải. *Đặt* $u(1) = \alpha$, $u(2) = \beta$. *Ta có*

$$u(2) = u\left(\frac{3+1}{2}\right) = \frac{u(3)+u(1)}{2}.$$

Suy ra

$$u(3) = 2u(2) - u(1) = 2\beta - \alpha.$$

Tiếp tục quá trình như vậy, ta được

$$u(3) = u\left(\frac{4+2}{2}\right) = \frac{u(4)+u(2)}{2}.$$

Suy ra

$$u(4) = 2u(3) - u(2) = 2(2\beta - \alpha) - \beta = 3\beta - 2\alpha.$$

Bằng phương pháp quy nạp, ta thu được

$$u(\nu) = (n-1)\beta - (n-2)\alpha, \ \forall n.$$

Vậy

$$\begin{cases} u(\nu) = & (\beta - \alpha)n + 2\alpha - \beta, \ \forall n, \\ u(1) = & \alpha, \ u(2) = \beta. \end{cases}$$

Đặt $\alpha = a + b$; $\beta = 2a + b$, *thì* $a = \beta - \alpha$ *và* $b = 2\alpha - \beta$.

Do đó, nghiệm của phương trình là $u(\nu) = an + b$; a, b *tuỳ ý.*

2) Phép chuyển đại lượng trung bình cộng sang trung bình điều hoà

Bài toán 8.32. *Xác định hàm số $u(\nu) \in \mathbb{Q}$ sao cho*

$$u\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) = \frac{2u(\mu)u(\nu)}{u(\mu)+u(\nu)} \quad \left(\mu, \nu, \frac{\mu+\nu}{2} \in \mathbb{Q}\right).$$

Giải. *Ta có*

$$u\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) = \frac{2u(\mu)u(\nu)}{u(\mu)+u(\nu)} \Leftrightarrow u\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) = \frac{2}{\dfrac{1}{u(\mu)} + \dfrac{1}{u(\nu)}}.$$

Đặt $\frac{1}{u(\nu)} = v(\nu)$, thì phương trình đã cho tương đương với

$$v\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) = \frac{v(\mu)+v(\nu)}{2}.$$

Theo Bài toán 1, $v(\nu) = a\nu + b$; $a, b \geq 0,\ \ a+b > 0$.

Vậy nghiệm của phương trình là

$$u(\nu) = \frac{1}{a\nu + b};\ \ a, b \geq 0;\ \ a+b > 0.$$

3) Phép chuyển đại lượng trung bình cộng sang trung bìuh nhân

Bài toán 8.33. *Xác định hàm số $u(\nu)$ sao cho*

$$u\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) = \sqrt{u(\mu)u(\nu)};\ \ \left(\mu, \nu, \frac{\mu+\nu}{2}\right) \in \mathbb{Q}.$$

Giải. *Ta có*

$$u(\nu) = u\left(\frac{\nu+\nu}{2}\right) = \sqrt{u(\nu)u(\nu)} = \sqrt{[u(\nu)]^2} = |u(\nu)| \geq 0.$$

Đặt $u(1) = \alpha,\ \ u(2) = \beta\ \ (\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0)$.

a) Nếu $\alpha = 0$ thì

$$u(\nu) = u\left(\frac{1+2\nu-1}{2}\right) = \sqrt{u(1)u(2n-1)} = 0,\ \ \forall \nu \in \mathbb{Q}.$$

Vậy $u(\nu) \equiv 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình .

b) Nếu $\alpha > 0$ và $\beta = 0$ thì

$$u(\nu) = u\left(\frac{2+2\nu-2}{2}\right) = \sqrt{u(2)u(2n-2)} = 0,\ \ \forall \nu \geq 2.$$

Suy ra

$$u(\nu) = \begin{cases} \alpha, & \text{nếu } \nu = 1 \\ 0 & \text{nếu } \nu \geq 2 \end{cases}$$

là nghiệm của phương trình.

c) Xét trường hợp $\alpha > 0$ và $\beta > 0$. Giả sử tồn tại $n_0 \geq 3$ sao cho $u(n_0) = 0$. Thế thì

$$u(n_0 - 1) = u\left(\frac{n_0 + n_0 - 2}{2}\right) = \sqrt{u(n_0)u(n_0 - 2)} = 0.$$

Chọn $n_0 = 3$ thì $u(n_0 - 1) = u(2) = 0$, hay $\beta = 0$, mâu thuẫn.

Do đó, có thể giả thiết rằng $u(\nu) > 0$ với mọi $\nu \in \mathbb{Q}$. Ta có

$$u(2) = u\left(\frac{3+1}{2}\right) = \sqrt{u(3)u(1)}.$$

Suy ra

$$u(3) = \frac{u^2(2)}{u(1)} = \frac{\beta^2}{\alpha}.$$

Mặt khác

$$u(3) = u\left(\frac{4+2}{2}\right) = \sqrt{u(4)u(2)}.$$

Suy ra

$$u(4) = \frac{u^2(3)}{u(2)} = \frac{\left(\frac{\beta^2}{\alpha}\right)^2}{\beta} = \frac{\beta^3}{\alpha^2}.$$

Bằng phương pháp quy nạp toán học, ta chứng minh được rằng

$$u(\nu) = \frac{\beta^{\nu-1}}{\alpha^{\nu-2}}, \ \forall \nu \geq 3.$$

mà

$$\frac{\beta^{\nu-1}}{\alpha^{\nu-2}} = \left(\frac{\alpha^2}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n.$$

Đặt

$$\begin{cases} \alpha = ab, \\ \beta = ab^2 \end{cases} (a > 0, b > 0).$$

Suy ra

$$\frac{\alpha^2}{\beta} = a, \ \frac{\beta}{\alpha} = b.$$

Vậy nghiệm của phương trình là

$$u(\nu) = \begin{cases} \alpha \ \textit{nếu } \nu = 1 \\ 0 \ \textit{nếu } \nu \geq 2 \end{cases} (\alpha \geq 0)$$

hoặc $u(\nu) = a.b^\nu \ (a > 0, b > 0)$.

4) Phép chuyển đại lượng trung bình cộng sang trung bình bậc hai

Bài toán 8.34. *Xác định hàm số* $u(\nu)$*, sao cho*

$$u\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{u^2(\mu)+u^2(\nu)}{2}} \ \left(\mu, \nu, \frac{\mu+\nu}{2} \in \mathbb{Q}\right).$$

Giải. *Ta có*

$$u(\nu) = u\left(\frac{\nu+\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{u^2(\nu)+u^2(\nu)}{2}} = \sqrt{u^2(\nu)} = |u(\nu)| \geq 0, \ \forall \nu \in \mathbb{Q}.$$

Đặt $u(1) = \alpha \geq 0\,;\ u(2) = \beta \geq 0$. *Ta có*

$$u(2) = u\left(\frac{3+1}{2}\right) = \sqrt{\frac{u^2(3)+u^2(1)}{2}}.$$

Suy ra

$$u^2(3) = 2u^2(2) - u^2(1) = 2\beta^2 - \alpha^2$$

$$\Rightarrow u(3) = \sqrt{2\beta^2 - \alpha^2} \ (\alpha \leq \beta\sqrt{2}).$$

Tương tự

$$u(3) = u\left(\frac{4+2}{2}\right) = \sqrt{\frac{u^2(4)+u^2(2)}{2}}.$$

Suy ra

$$u^2(4) = 2u^2(3) - u^2(2) = 2(2\beta^2 - \alpha^2) - \beta^2 = 3\beta^2 - 2\alpha^2$$

hay

$$u(4) = \sqrt{3\beta^2 - 2\alpha^2} \ \left(\alpha \leq \beta\sqrt{\frac{3}{2}}\right).$$

Bằng quy nạp toán học, ta chứng minh được hệ thức

$$u(\nu) = \sqrt{(n-1)\beta^2 - (n-2)\alpha^2}, \ \forall n \geq 3.$$

Nhận xét rằng, ta luôn có

$$\sqrt{(\nu-1)\beta^2 - (\nu-2)\alpha^2} = \sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)\nu + 2\alpha^2 - \beta^2}.$$

Đặt

$$\begin{cases} \alpha^2 = a + b \\ \beta^2 = 2a + b. \end{cases}$$

Suy ra

$$\begin{cases} a = \beta^2 - \alpha^2 \\ b = 2\alpha^2 - \beta^2. \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình là $u(\nu) = \sqrt{a\nu + b}$; $a \geq 0,\ a + b \geq 0.$

Nhận xét 8.2. *Trong cả bốn bài toán đã nêu ở trên, nếu ta thay* m *bởi* $(n+1)$ *và* n *bởi* $(n-1)$ *thì ta có thể đưa chúng được về các phương trình sai phân quen biết.*

8.4 Phương trình trong hàm số với cặp biến tự do

Trong mục này, ta đi tìm những hàm số thực hiện phép chuyển tiếp một biểu thức đại số của cặp chỉ số sang một đại lượng khác của cặp phần tử tương ứng của dãy số. Các bài toán này liên quan chặt chẽ đến việc chuyển tiếp các hàm số; đến sự mô phỏng các hàm số đặc biệt trong số học, đại số,...

Bài toán 8.35. *Tìm hàm* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *thỏa mãn các điều kiện* $f(1) = a \in \mathbb{Q}$ *và*

$$f(\mu + n) + f(m - \nu) = 2f(\mu)f(\nu),\ \ \forall m, \nu \in \mathbb{Q}.$$

Giải. *Cho* $m = n = 0$ *ta được* $f(0) = 0$ *hoặc* $f(0) = 1$. *Nếu* $f(0) = 0$ *thì thay* $n = 0$ *ta được* $2f(\mu) = 0$ *với mọi* $m \in \mathbb{Q}$. *Do vậy* $f(\mu) \equiv 0$ *và ứng với* $a = 0$.

Nếu $f(0) = 1$, *cho* $m = n = 1$ *ta thu được* $f(2) = 2a^2 - 1$.

Tiếp tục thay $m = 2; n = 1$ *vào điều kiện bài ra ta được* $f(3) = 4a^3 - 3a$. *Từ đó ta có dự đoán* $f(\nu) = T_n(a)$ *với mọi* $\nu \geq 1$.

Dự đoán đó được chứng minh dễ dàng bằng phương pháp quy nạp.

mặt khác, cho $m = 0$ *ta được* $f(\nu) + f(-\nu) = 2f(0)f(\nu) = 2f(\nu)$ *nên* $f(-\nu) = f(\nu)$. *Vậy* $f(\nu)$ *là hàm chẵn. Vậy ta được*

$$f(\mu) = \begin{cases} 1 \ \ khi\ m = 0, \\ a \ \ khi\ m = \pm 1, \\ T_{|m|}(a) \ \ khi\ |m| \geq 1,\ \ m \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Bài toán 8.36. *Tìm hàm* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *thỏa mãn các điều kiện* $f(0) \neq 0$, $f(1) = \dfrac{5}{2}$ *và*

$$f(\mu + n) + f(m - \nu) = f(\mu)f(\nu),\ \ \forall m, \nu \in \mathbb{Q}.$$

Giải. *Cho $m = n = 0$ ta được, do $f(0) \neq 0$, $f(0) = 2$. Tiếp theo, theo quy nạp ta được*

$$f(\nu) = 2^{\nu} + 2^{-\nu}, \ \ \forall \nu \in \mathbb{Q}.$$

Thử lại ta thấy hàm này thoả mãn điều kiện bài ra.

Bài toán 8.37. *Tìm hàm $f : \mathbb{Q} \to [0, +\infty)$ thỏa mãn các điều kiện $f(1) = 1$ và*

$$f(\mu + n) + f(m - \nu) = \frac{1}{2}[f(2m) + f(2n)], \ \ \forall m, \nu \in \mathbb{Q},\ m \geq n.$$

Giải. *Cho $m = n = 0$ ta được $f(0) = 0$. Cho $m = 1$, $\nu = 0$ thì*

$$f(1) + f(1) = \frac{1}{2}[f(2) + f(0)].$$

Suy ra $f(2) = 4$.

Chứng minh bằng quy nạp ta được $f(\nu) = \nu^2$.

Thật vậy, do $f(k) + f(k) = \frac{1}{2}[f(2k) + f(0)]$ nên có ngay $f(2k) = 4k^2$.

Cũng vậy, do $f(k+1) + f(k-1) = \frac{1}{2}[f(2k) + f(2)]$ nên ta có

$$f(k+1) = \frac{1}{2}f(2k) + 2 - f(k-1) = (k+1)^2.$$

Bài toán 8.38. *Tìm các đa thức hai biến $P(m, n)$ $(m, \nu \in \mathbb{Q})$ thoả mãn điều kiện*

a) $P(am, an) = a^2P(m, n)$ với mọi $m, n, a \in \mathbb{Q}$,

b) $P(b + c, a) + P(c + a, b) + P(a + b, c) = 0$ với mọi $a, b, c \in \mathbb{Q}$,

c) $P(1, 0) = 1$.

Giải. *Trong b) đặt $b = 1 - a$; $c = 0$ ta được*

$$P(1 - a, a) = -1 - P(a, 1 - a). \tag{1}$$

Lại đặt $c = 1 - a - b$ và kết hợp với a) ta được

$$P(a + b, 1 - a - b) = P(a, 1 - a) + P(b, 1 - b) + 2. \tag{2}$$

Đặt $f(\mu) = P(m, 1 - \mu) + 2$. Khi đó $f(1) = P(1, 0) + 2 = 3$ và (5) trở thành $f(m + n) = f(\mu) + f(\nu)$. Đó là phương trình dãy chuyển đổi phép cộng

$$\begin{cases} f(m + n) = f(\mu) + f(\nu), \\ f(1) = 3. \end{cases} \tag{3}$$

Phương trình (3) có nghiệm duy nhất $f(\nu) = 3n$. Vậy nên

$$P(n, 1 - \nu) = 3n - 2. \tag{4}$$

Bằng phương pháp quy nạp ta sẽ thu được

$$P(a,b) = (a+b)^2\big(3\frac{a}{a+b} - 2\big) = (a+b)(a-2b), \ \ \forall a, b \in \mathbb{Q}.$$

Tóm lại $P(\mu,\nu) = (\mu+n)^2(m-2n)$.

Bài toán 8.39. *Cho đa thức Chebyshev* $T_n(x) = \cos(\nu \arccos x)$. *Chứng minh rằng với* $m, n \in \mathbb{Q}$; $\nu \geq m$ *và* $x \in \mathbb{R}$ *thì* $T_n(x)$ *là nghiệm của phương trình dãy sau*

$$T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x) = 2T_n(x)T_m(x).$$

Giải. *Sử dụng định nghĩa* $T_n(x)$ *và phương pháp quy nạp hoặc sử dụng các công thức*

$$\cos(n+m)x + \cos(n-m)x = 2\cos nx \cos mx$$

và

$$\cosh(n+m)x + \cosh(n-m)x = 2\cosh(nx)\cosh(mx),$$

ta có ngay điều phải chứng minh.

Bài toán 8.40. *Tìm hàm* $f\ \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *thỏa mãn các điều kiện*

$$\exists \nu \in \mathbb{Q}: \ -\nu < f(\nu) < \nu \ \ \forall \nu \in \mathbb{Q},$$

$$f(\mu+n) + f(m-\nu) = 2f(\mu)f(\nu) \ \ \forall m, \nu \in \mathbb{Q}. \tag{1}$$

Giải. *Cho* $m = n = 0$ *ta được* $f(0) \in \{0, 1\}$. *Giả sử* $f(0) = 0$. *Cho* $\nu = 0$ *trong (1) ta được* $2f(\mu) = 2f(\mu)f(0) = 0$ *và* $f \equiv 0$.

Giả sử $f(0) = 1$. *Cho* $m = 0$ *trong (1) ta thu được* $f(-\nu) = f(\nu)$ *với mọi* $\nu \in \mathbb{Q}$. *Vậy chỉ cần xét* $\nu \in \mathbb{Q}$. *Cho* $\nu = 1$ *trong (1), ta được*

$$f(\mu+1) = 2f(\mu)f(1) - f(m-1)$$

và thu được công thức truy hồi theo $f(1)$. *Nếu* $|f(1)| \geq 2$ *thì từ giả thiết ta có*

$$f(2n) = 2[f(\nu)]^2 - 1$$

tăng và không giới nội, trái với giả thiết. Vậy $f(1) \in \{-1, 0, 1\}$.

Với $f(1) = -1$ *thì* $f(\nu) = (-1)^n$ *(quy nạp).*

Với $f(1) = 1$ *thì* $f(\nu) \equiv 1$.

Với $f(1) = 0$ *ta được dãy tuần hoàn (quy nạp)*

$$f(4m) = 1, \ \ f(4\mu+1) = 0, \ \ f(4\mu+2) = -1, \ \ f(4\mu+3) = 0.$$

Suy ra $f(2) = 4$. *Chứng minh bằng quy nạp ta được* $f(\nu) = \nu^2$. *Thật vậy, do* $f(k) + f(k) = (1/2)[f(2k) + f(0)]$ *nên có ngay* $f(2k) = 4k^2$. *Cũng vậy, do* $f(k+1) + f(k-1) = (1/2)[f(2k) + f(2)]$ *nên ta có*

$$f(k+1) = \frac{1}{2}f(2k) + 2 - f(k-1) = (k+1)^2.$$

Bài toán 8.41. *Ký hiệu*

$$u_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \ \ \nu \in \mathbb{Q}.$$

Xác định hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *theo công thức*

$$f(\nu) = (\nu+1)u_n g(\nu+1), \ \ \nu \in \mathbb{Q}.$$

Giải. *Sử dụng công thức tích phân từng phần, ta thu được*

$$u_\nu = -\cos x \sin^{\nu-1} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\nu-1)\sin^{\nu-2} x \cos^2 x dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\nu-1)\sin^{\nu-2} x(1-\sin^2 x)dx$$

$$= (\nu-1)(u_{\nu-1} - u_n).$$

Từ đây suy ra

$$g(\nu+2) = \frac{\nu+1}{\nu+2}u_n, \ \ \nu \in \mathbb{Q}. \quad (1)$$

Từ (1) ta nhận được

$$f(\nu+1) = (\nu+2)g(\nu+1)g(\nu+2)$$

$$= (\nu+2)g(\nu+1)\frac{\nu+1}{\nu+2}u_\nu$$

$$= (\nu+1)g(\nu+1)u_\nu = f(\nu).$$

Vậy nên

$$f(\nu) = f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Bài toán 8.42. *Ký hiệu*

$$u_\nu = \int_0^{\pi} \cos^\nu x \cos nx dx, \ \ \nu \in \mathbb{Q}.$$

Xác định hàm số $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *theo công thức*

$$f(\nu) = 2^\nu u_\nu, \ \ \nu \in \mathbb{Q}.$$

Giải. *Đặt* $\cos^n x = u$ *và* $\cos nxdx = dv$ *thì theo công thức tích phân từng phần, ta thu được*

$$u_\nu = \frac{1}{\nu}\cos^n x \sin x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos^{\nu-1} x \sin x \sin nxdx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^{\nu-1} x[\cos(\nu-1)x + \cos(\nu+1)x]dx$$

$$= \frac{1}{2}u_{\nu-1} - \frac{1}{2}u_\nu + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^{\nu-1} x \sin x + \sin nxdx$$

$$= \frac{1}{2}u_{\nu-1} - \frac{1}{2}u_\nu + \frac{1}{2}u_\nu.$$

Vậy nên

$$u_\nu = \frac{1}{2}u_{\nu-1} = \frac{1}{4}u_{\nu-2} = \cdots = \frac{1}{2^{\nu-1}}u_1 = \frac{1}{2^{\nu-1}}\frac{\pi}{2}.$$

Bài toán 8.43. *3. Xác định hàm số* $\{u_\nu\}$ *được tính theo công thức*

$$u_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2\nu} xdx$$

Giải. *Ta viết* u_n *dưới dạng sau*

$$u_\nu = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2\nu} xdx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2\nu-2} x[(\tan^2 x + 1) - 1]dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2\nu-2} xd\tan x - u_{\nu-1}$$

$$= \frac{\tan^{2\nu-1} x}{2\nu-1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - u_{\nu-1}$$

$$= \frac{1}{2\nu-1} - u_{\nu-1}.$$

Do vậy

$$u_\nu + u_{\nu-1} = \frac{1}{2\nu-1},$$

$$u_{\nu-1} + u_{\nu-2} = \frac{1}{2\nu-3},$$

$$\cdots$$

$$u_1 + u_0 = \frac{1}{2-1}.$$

Suy ra

$$u_\nu = (-1)^\nu\Big[\frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\nu}\frac{(-1)^k}{2k-1}\Big].$$

Bài toán 8.44. *Xác định hàm số $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ được tính theo công thức*

$$f(\nu) = \int\limits_0^1 x^\nu\sqrt{1-x}dx, \ \ \nu\in\mathbb{Q}.$$

Giải. *Đặt $x^\nu = u$, $\sqrt{1-x}dx = dv$ thì*

$$f(\nu) = \int\limits_0^1 x^\nu\sqrt{1-x}dx$$

$$= \big[-\frac{2}{3}x^n(1-x)^{\frac{3}{2}}\big]\big|_0^1 + \frac{2\nu}{3}\int\limits_0^1 x^{\nu-1}\sqrt{1-x}(1-x)dx$$

$$= \frac{2\nu}{3}\int\limits_0^1(x^{\nu-1}-x^n)\sqrt{1-x}dx$$

$$= \frac{2\nu}{3}\int\limits_0^1(x^{\nu-1}\sqrt{1-x}dx - \frac{2\nu}{3}\int\limits_0^1 x^\nu\sqrt{1-x}dx$$

$$\frac{2\nu}{3}x_{\nu-1} - \frac{2\nu}{3}f(\nu).$$

Vậy nên

$$f(\nu) = \frac{2\nu}{2\nu-3}x_{\nu-1}.$$

Vì $f(0) = \dfrac{2}{3}$ nên ta có ngay

$$f(\nu) = \int\limits_0^1 x^\nu\sqrt{1-x}dx = 2\frac{(2n)!!}{(2\nu+3)!!}, \ \ \nu\in\mathbb{Q}.$$

Bài toán 8.45. *Xác định hàm $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ thoả mãn các điều kiện*

$$f(0) = 1, \ \ f(f(\nu) = f(f(\nu+2)+2) = \nu \ \ \forall\nu\in\mathbb{Q}.$$

Giải. *Nhận xét rằng f là ánh xạ 1-1*

$$f(\mu) = f(\nu) \;\; \Rightarrow \;\; f(f(\mu)) = f(f(\nu)) \;\; \Rightarrow \;\; m = n.$$

Vậy nên

$$f(\nu) = f(\nu + 2) + 2 \;\; \forall \nu \in \mathbb{Q}.$$

Suy ra

$$f(\nu + 2) = f(\nu) - 2, \;\; f(0) = 1, \;\; f(1) = f(f(0)) = 0.$$

Vậy nên

$$f(2) = f(0) - 2 = -1,$$
$$f(3) = f(1) - 2 = -2,$$
$$f(\nu) = -(\nu - 1).$$

Tương tự

$$f(-1) = f(1) + 2 = 2,$$
$$f(-2) = f(0) + 2 = 3,$$
$$f(-3) = f(1) + 2 = 5,$$
$$f(\nu) = -(\nu - 1).$$

Bài toán 8.46. *Cho góc α với $0 < \alpha < \pi$. Xác định cặp số a, b sao cho dãy hàm $\{P_n(x)\}$ được tính theo công thức*

$$P_n(x) = x^\nu \sin\alpha - x\sin(\nu\alpha) + \sin(\nu - 1)\alpha$$

luôn luôn chia hết cho $f(x) = x^2 + ax + b$.

Giải. *Với $\nu = 3$ thì*

$$P_3(x) = x^3 \sin\alpha - x\sin(3\alpha) + \sin 2\alpha = \sin\alpha(x + 2\cos\alpha)(x^2 - 2x\cos\alpha + 1).$$

Từ đó suy ra với $f(x) = x^2 + 2x\cos\alpha + 1$ thì $P_3(x) \vdots f(x)$. Với $\nu \geq 3$ thì

$$P_{\nu+1}(x) = xP_n(x) + (x^2 - 2x\cos\alpha + 1)\sin\nu\alpha.$$

Suy ra $f(x) = x^2 + 2x\cos\alpha + 1$.

Bài tập

Bài 1. *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *nếu biết:* $f(1) = a,\ f(\mu + n) = f(\nu) + f(\mu)$;

Bài 2. *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *nếu biết:* $f(1) = a,\ f(m - \nu) = f(\nu) + f(\mu)$ $(\mu, \nu, m - \nu \in \mathbb{Q})$.

Bài 3. *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *nếu biết* $f\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = f(\nu) + f(\mu)$ $(\mu, \nu, \frac{m}{\nu} \in \mathbb{Q})$.

Bài 4. *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *thoả mãn điều kiện* $f\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = f(\mu) - f(\nu)$ $(\mu, \nu, \frac{m}{\nu} \in \mathbb{Q})$.

Bài 5. *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *thoả mãn điều kiện* $f(\mu + n) = f(\mu)f(\nu)$ $(m, \nu \in \mathbb{Q})$.

Bài 6. *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ *nếu biết* $f(\mu+n)+f(m-\nu) = \frac{1}{2}(f(2m)+f(2n)$, $(\mu, \nu, m - \nu \in \mathbb{Q})$.

Bài 7. *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ *thoả mãn điều kiện* $f(\mu + \nu) = \frac{f(\mu)}{f(\nu)}$ $(m, \nu \in \mathbb{Q})$.

Bài 8. *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ *thoả mãn điều kiện* $f\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) = \sqrt{f(\mu)f(\nu)}$ $(\mu, \nu, \frac{\mu+\nu}{2} \in \mathbb{Q})$.

Bài 9 . *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ *thoả mãn điều kiện* $x_{\frac{\mu+\nu}{2}} = \frac{2f(\mu)f(\nu)}{f(\mu)+f(\nu)}$ $(\mu, \nu, \frac{\mu+\nu}{2} \in \mathbb{Q})$.

Bài 10 . *Xác định hàm số* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}^+$ *thoả mãn điều kiện* $f\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{f(\mu)^2+f(\nu)^2}{2}}$ $(\mu, \nu, \frac{\mu+\nu}{2} \in \mathbb{Q})$.

Bài 11. *Xác định các hàm* $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *thoả mãn các điều kiện* $f(1) = 2$ *và*

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1,\ x, y \in \mathbb{Q}.$$

8.5 Sử dụng giới hạn để giải phương trình hàm

Một trong những tính chất cần thiết để sử dụng giới hạn là tính liên tục của hàm số. Khi sử dụng giới hạn để giải phương trình hàm người ta thường làm như sau.

1. *Xây dựng một đẳng thức đúng với mọi giá trị của n sau đó lấy giới hạn hai vế nhờ sử dụng tính chất liên tục của hàm số.*

2. *Tính liên tục không có tác dụng đối với phương trình hàm trong tập hữu tỷ* $\mathbb{Q}$. *Tuy nhiên nếu biết chắc chắn là hàm liên tuc, ta có thể thiết lập công thức cho hàm trong* $\mathbb{Q}$ *và suy ra công thức phải tìm tương tự trong tập* $\mathbb{R}$.

Bài toán 8.47. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục, thoả mãn điều kiện

$$f(x + y) = f(x) + f(y),\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Giải. *Cho* $x = y = 0$*, suy ra* $f(0) = 2f(0$*, suy ra* $f(0) = 0$*. Cho* $x = y = 1$*, thì được* $f(2) = 2f(1)$*. Cho* $x = 2$*,* $y = 1$ *thì được* $f(3) = f(2) + f(1) = 3f(1)$*. Quy nạp ta được* $f(n) = nf(1)$*, với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$*.*

Ký hiệu $f(1) = a$*, suy ra* $f(n) = na$*, với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$*. Cho* $x = n$*,* $y = -n$ *ta được* $0 = f(0) = f(n) + f(-n)$*. Suy ra* $f(n) = -f(n)$*,* $f(-n) = a(-n)$*, và* $f(n) = an$ *với mọi* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Đặt $x = y$*, ta có* $f(2x) = 2f(x)$*,* $f(3x) \leqslant f(2x + x) = 2f(x) + f(x)$*,* $f(3x) = 3f(x)$*. Suy ra*

$$f(mx) = mf(x), \ \forall m \in \mathbb{N}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Từ

$$an = f(n) = f\left(m - \frac{n}{m}\right) = mf\left(\frac{n}{m}\right)$$

suy ra $f(n/m) = an/m$*. Suy ra* $f(x) = ax$*, với mọi* $x \in \mathbb{Q}$*. Từ đó suy ra với mọi* $x \in \mathbb{R}$ *luôn tồn tại* $\{x_n\}_1^\infty$*,* $x_n \in \mathbb{Q}$ *sao cho* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$*. Ta có*

$$f(x_n) = ax_n.$$

Lấy giới hạn ta có

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (ax_n).$$

Từ đó $f(x) = ax$*, với mọi* $x \in \mathbb{R}$*.*

Bài toán 8.48. Tìm tất cả các hàm liên tục $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn điều kiện

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y).$$

Giải. *Cho* $x = y = 0$*, suy ra* $f(0) = 0$*. Cho* $x = 0$ *suy ra* $f(y) + f(-y) = 2f(y)$*. Do đó* $f(-y) = f(y)$*, tức là* $f(x)$ *là hàm số chẵn trên* $\mathbb{R}$*.*

Ký hiệu $f(1) = a$*. Đặt* $x = y = 1$*, suy ra* $f(2) + f(0) = 4f(1) = 4a$*. Từ đó* $f(2) = 4a$*. Đặt* $x = 2, y = 1$ *suy ra* $f(3) + f(1) = 2f(2) + 2f(1)$*,* $f(3) = 2f(2) + f(1) = 9a$*.*

Ta chứng minh quy nạp $f(n) = an^2$*. Ta giả sử* $f(n) = an^2$*, phải chứng minh* $f(n+1) = a(n+1)^2$*. Cho* $x = n$*,* $y = 1$*, ta có* $f(n+1) + f(n-1) = 2f(n) + 2f(1)$*. Suy ra* $f(n + 1) = 2an^2 - a(n - 1)^2 + 2a = a(2n^2 - (n - 1)^2 + 2)$*. Tiếp tục khai triển cho ta*

$$f(n + 1) = a(n + 1)^2.$$

Do f *là hàm số chẵn nên* $f(-n) = f(n) = an^2 = a(-n)^2$*. Ta có* $f(n) = an^2$ *với mọi* $n \in \mathbb{Z}$*.*

Bây giờ ta chứng minh công thức $f(nx) = n^2 f(x)$*, với mọi* $n \in \mathbb{N}$*. Với* $x = y$ *ta có* $f(2x) + f(0) = 2f(x) + 2f(x) = 2^2 f(x)$*. Suy ra* $f(2x) = 2^2 f(x)$*.*

Giả sử $f(nx) = n^2 f(x)$*, ta phải chứng minh* $f((n+1)x) = (n+1)^2 f(x)$*. Thật vậy* $f((n+1)x) + f((n-1)x) = 2f(nx) + 2f(x)$*. Suy ra*

$$f((n+1)x) = -(n-1)^2 f(x) + 2n^2 f(x) + 2f(x)$$

Từ đây tiếp tục khai triển cho ta $f((n+1)x) = (n+1)^2 f(x)$*. Khi đó* $an^2 = f(n) = f(m.\frac{n}{m}) = m^2 f(n/m)$*. Suy ra* $f(n/m) = a(n/m)^2$*, với mọi* $m, n \in \mathbb{N}$*. Suy ra ta có* $f(x) = ax^2$*, với mọi* $x \in \mathbb{Q}$*.*

Vậy với mọi $x \in \mathbb{R}$ *luôn tồn tại* $\{x_n\}_n^\infty$*,* $x_n \in \mathbb{Q}$ *sao cho* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$*. Từ đó* $f(x_n) = ax_n^2$*, hay là*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} ax_n^2.$$

Từ đó $f(x) = ax^2$*, với mọi* $x \in \mathbb{R}$*.*

Giải (2). *Ta có* $f(0) = 0$*, cho* $x = y$ *ta được* $f(2x) = 4f(x)$*. Suy ra*

$$\frac{f(2x)}{(2x)^2} = \frac{f(x)}{x^2}, \ \ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Suy ra

$$g(2x) = g(x), \ \ g(x) = \frac{f(x)}{x^2}. \tag{8.1}$$

Suy ra

$$g(x) = g\Big(\frac{x}{2}\Big) = g\Big(\frac{x}{2^2}\Big) = \cdots = g\Big(\frac{x}{2^n}\Big),$$

Do f *liên tục nên* g *liên tục trên* $\mathbb{R} - \{0\}$*. Suy ra* $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x/2^n) = g(0) = a$*. Suy ra*

$$g(x) = a, \ \ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Vậy $f(x) = ax^2$*, với mọi* $x \in \mathbb{R} - \{0\}$*. Do* $f(0) = 0$ *nên* $f(x) = ax^2$*, với mọi* $x \in \mathbb{R}$*.*

Bài toán 8.49. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ và thỏa mãn các điều kiện

1. $f(1) = 1$,
2. $f(x+y) = f(x) + f(y), \ \ x, y \in \mathbb{R}$,
3. $f(x).f(1/x) = 1, \ x \neq 0$.

Giải. *Ta chứng tỏ rằng hàm cần tìm là* $f(x) = x$*, với mọi* $x \in \mathbb{R}$*. Theo bài toán (8.47), từ điều kiện thứ nhất và thứ hai ta suy ra* $f(x) = x$*, với mọi* $x \in \mathbb{Q}$*.*

Bây giờ ta chứng tỏ $f(x$ *là hàm liên tục. Cần chứng minh* $\lim\limits_{h\to\infty} f(x+h) = f(x)$ *hay là* $\lim\limits_{h\to 0}(f(x) + f(h)) = f(x)$*. Tức là cần chứng tỏ* $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = 0$*.*

Nếu $a, b > 0$ thì $|a+b| = |a| + |b|$, từ điều kiện thứ ba suy ra rằng với $x \neq 0$ ta có $f(x)$ và $f(1/x)$ cùng dấu. Chú ý rằng theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$\begin{aligned}\left|f\Big(x+\frac{1}{x}\Big)\right| &= \left|f(x)+f\Big(\frac{1}{x}\Big)\right| = |f(x)| + \left|f\Big(\frac{1}{x}\Big)\right| \\ &\geqslant 2\sqrt{f(x).f\Big(\frac{1}{x}\Big)} = 2.\end{aligned}$$

Suy ra

$$f(y) \geqslant 2 \ \text{ với mọi } y \geqslant 2. \tag{8.2}$$

Vậy nếu $|y| \leqslant \frac{1}{2}$ hay $|1/y| \geqslant 2$ thì theo (8.2) ta có $f(1/y) \geqslant 2$.

Từ điều kiện thứ ba ta có

$$1 = |f(y).f(1/y)| \geqslant |f(y)|.2.$$

Suy ra

$$|f(y)| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{8.3}$$

Nếu $|y| \leqslant \frac{1}{4}$, suy ra $|2y| \leqslant \frac{1}{2}$, suy ra $|f(2y)| \leqslant \frac{1}{2}$. Do đó

$$|f(y)| \leqslant \frac{1}{4}. \tag{8.4}$$

Bằng quy nạp, ta chứng minh được

$$|f(y)| \leqslant \frac{1}{2^n}, \ \text{ với mọi } |y| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Thật vậy, giả sử $|f(y)| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ với $|y| \leqslant 1/2^{n-1}$. Khi đó nếu $|y| \leqslant 1/2^n$ thì theo giả thiết quy nạp ta có

$$\frac{1}{2^{n-1}} \geqslant |2y|.$$

Suy ra $1/2^{n-1} \geqslant |f(2y)|$, hay là

$$\left|\frac{1}{2^{n-1}}\right| \geqslant 2f(y).$$

Tức là $|f(y)| \leqslant 1/2^n$ với $|y| \leqslant 1/2^n$. Vậy $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = 0$, suy ra $f(x)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, mà $f(x) = x$, với mọi $x \in \mathbb{Q}$. Vậy

$$f(x) = x, \ \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}.$$

Bài toán 8.50. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn điều kiện $f(1) = 1$, $f(x+y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(x).f(y)$.

(a) Chứng minh rằng $f(x)$ cộng tính: $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(b) Hãy tìm tất cả các hàm f thỏa mãn điều kiện

$$f(x + y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(x).f(y).$$

Giải. *Câu (a). Cho $y = 1$, thì ta có*

$$f(x + 1) = f(x) + 1. \tag{8.5}$$

Thay x bởi $x + 1$, ta có

$$f(x + 1 + y) + f((x + 1)y) = f(x + 1) + f(y) + f(x + 1)f(y).$$

Vì $f(x + 1) = f(x) + 1$ nên ta có

$$\begin{aligned} f(x + y) + 1 + f(xy + y) &= f(x) + 1 + f(y) + f(x + 1).f(y) \\ &= f(x) + f(y) + f(x)f(y) + 1 + f(y) \\ &= f(x + y) + f(xy) + f(y) + 1. \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$f(xy + y) = f(xy) + f(y) \tag{8.6}$$

Vậy với u, v bất kỳ, tồn tại x sao cho $u = vx$, suy ra $x = \frac{u}{v} \neq 0$. Suy ra

$$f(u + v) = f(vx + v) = f(vx) + f(v) = f(u) + f(v). \tag{8.7}$$

Nếu $v = 0$ thì $f(u) = f(u) + f(0)$, suy ra $f(0) = 0$. Thay $x = y = 0$ vào

$$f(x + y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(x).f(y),$$

ta được

$$f(0) + f(0) = f(0) + f(0) + f(0).f(0).$$

Suy ra

$$f(0) = 0 \tag{8.8}$$

Từ (8.7) và (8.8) suy ra f cộng tính.

Câu (b). Từ câu (a) suy ra $f(x + y) = f(x) + f(y)$, và $f(xy) = f(x).f(y)$. Tức là hàm $f(x)$ vừa cộng tính vừa nhân tính. Suy ra $f(x) = x$, $x = \frac{m}{n}$, thành *thử* $x \in \mathbb{Q}$. *Suy ra với mọi* $x \in \mathbb{R}$, *luôn tồn tại* $x_n \in \mathbb{Q} : x_n \to x$ *khi* $n \to \infty$. *Do* $f x)$ *liên tục trên* $\mathbb{R}$ *nên* $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, *hay là* $x = f(x)$.

Giả sử hàm số không giảm. Cho $x = y$, *ta có* $f(x^2) = f^2(x) \geqslant 0$, *suy ra* $f(u) \geqslant 0$ *với mọi* $u \geqslant 0$. *Nếu* $x > y$ *thì* $f(x) = f(y + x - y) = f(y) + f(x - y) \geqslant f(y)$, *vì* $f(x - y) \geqslant 0$ *với* $x - y \geqslant 0$.

Với mọi $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, *tồn tại* $r_n : r_n \in \mathbb{Q}$ *sao cho*

$$r_n > x : \lim_{n\to\infty} r_n = x. \tag{8.9}$$

Tồn tại $s_n : s_n \in \mathbb{Q}$ *sao cho*

$$s_n < x : \lim_{n\to\infty} s_n = x. \tag{8.10}$$

Suy ra $s_n < x < r_n$. *Do* f *là hàm số không giảm nên* $f(s_n) \leqslant f(x) \leqslant f(r_n)$, *hay là*

$$s_n \leqslant f(x) \leqslant r_n. \tag{8.11}$$

Lấy giới hạn cho ta

$$\lim_{n\to\infty} s_n \leqslant f(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} r_n.$$

Từ (8.9), (8.10) và (8.11), theo nguyên lý kẹp ta có $x \leqslant f(x) \leqslant x$. *Suy ra* $f(x) = x$. *Cho* $x = y = 1$, *từ đó ta có* $f(2) = 2$. *Thay* $x = x - 1$ *và* $y = y - 1$ *ta có*

$$f(x + y) + f((x - y)(y + 1)) = f(x - 1) + f(y + 1) + f(x - 1).f(y + 1). \tag{8.12}$$

Cho $y = 1$, *ta có*

$$f(x + 1) + f(x) = f(x) + f(1) + f(x).f(1).$$

Đẳng thức này tương đương với

$$f(x + 1) = f(x) + 1. \tag{8.13}$$

Cho $x = 2$, *từ (8.12) cho ta*

$$f(2 + y) + f(y + 1) = f(1) + f(y + 1) + f(1).f(y + 1).$$

Vì (8.13) nên từ đây ta có

$$f(2 + y) = f(1)(1 + f(y + 1)) = 1 + f(y + 1),$$

hay

$$f(2 + y) = f(2) + f(y). \tag{8.14}$$

Cho $x = 2$, *từ đẳng thức*

$$f(x+y) + f(xy) = f(x) + f(y) + f(x).f(y),$$

ta được

$$f(2+y) + f(2y) = f(2) + f(y) + f(2).f(y).$$

Phương trình này tương đương với

$$f(2y) = 2f(y), \tag{8.15}$$

hay là

$$\frac{f(2y)}{2y} = \frac{f(y)}{y}. \tag{8.16}$$

Đặt $g(x) = f(x)/x$, $x \neq 0$, *ta có (8.16) tương đương với*

$$g(x) = g(2x).$$

Suy ra

$$g(x) = g\Big(\frac{x}{2}\Big) = g\Big(\frac{x}{4}\Big) = \cdots = g\Big(\frac{x}{2^n}\Big). \tag{8.17}$$

Suy ra tồn tại $(x_n)_0^\infty$ *với mọi* $x \in \mathbb{R}$ *sao cho* $x_n \to x$, $g(x)$ *là hàm số liên tục trên* $\mathbb{R} - \{0\}$. *Thành ra,* $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$. *Tức là*

$$\lim_{n\to\infty} g\Big(\frac{1}{2^n}\Big) = g(x).$$

Vì (8.17) nên từ đây ta có $g(1) = g(x)$, *hay* $\frac{f(1)}{1} = g(x)$, $f(1) = g(x) = f(x)/x$. *Cuối cùng ta được* $f(x) = x$.

Suy ra f *cộng tính.*

Chú ý rằng trong ý (b) nếu cần xét riêng $x \in \mathbb{Q}$ *thì ta có*

$$f(n) = f(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ số } 1}) = nf(1) = n.$$

Ta có

$$f(n.\frac{m}{n}) = f(n).f(m/n)$$

tương đương với mỗi

$$f(m) = n.f(n/m)$$
$$f(m) = nf(m/n)$$

Suy ra

$$f\Big(\frac{m}{n}\Big) = \frac{f(m)}{n} = \frac{mf(1)}{n} = \frac{m}{n}.$$

Vậy $f(m/n) = m/n$, *hay* $f(x) = x$, *với mọi* $x \in \mathbb{Q}$.

Bài toán 8.51. Tìm hàm $f(x)$ xác định $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ $(0 \leqslant x < +\infty)$ thỏa mãn các điều kiện

1. $f(x.f(y)).f(y) = f(x+y)\ \ \forall x, y \geqslant 0,$
2. $f(2) = 0$
3. $f(x) \neq 0\ \forall x \in [0, 2).$

Giải. *Cho* $y = 2$ *thì từ điều kiện thứ nhất ta có* $f(x.f(2)).f(2) = f(x+2)$. *Từ điều kiện thứ hai suy ra* $f(x+2) = 0$ *với mọi* $x \geqslant 0$. *Vì điều kiện thứ ba nên* $f(x) \neq 0$ *với mọi* $x \in [0, 2)$, *suy ra* $t = x + 2 \geqslant 2$, *suy ra* $f(t) = 0$ *với mọi* $t \geqslant 2$.

Suy ra

$$f(x) = 0, \ \ \forall x \geqslant 2. \tag{8.18}$$

Vậy

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{nếu } x \in [2, +\infty) \\ \neq 0 & \textit{nếu } x \in [0, 2) \end{cases} \tag{8.19}$$

Ta chỉ cần tìm hàm $f(x)$ *với* $0 \leqslant x \leqslant 2$ *thì* $f((2-x).f(x)).f(x) = f(2-x+x) = f(2) = 0$.

Suy ra $f((2-x).f(x)) = 0$. *Kết hợp với (8.18) ta có* $(2-x)f(x) \geqslant 2$. *Suy ra* $1/f(x) \neq 0$ *và* $f(x) \geqslant 2/(2-x)$. *Do đó*

$$\frac{1}{f(x)} \leqslant \frac{2-x}{2}. \tag{8.20}$$

Mặt khác, $f((y-x).f(x)) \neq 0$, *nên* $(y-x).f(x) < 2$ *theo (8.19). Ta cố định* x *và cho* $y \to 2$, *do tính liên tục của* f *nên* $(y-x)f(x) \to (2-x)f(x) \leqslant 2$. *Với* $2 - x > 0$ *thì* $f(x) \leqslant 2/(2-x)$. *Suy ra*

$$\frac{1}{f(x)} \geqslant \frac{2-x}{x}. \tag{8.21}$$

Từ (8.20) và (8.21) suy ra

$$\frac{2-x}{2} \leqslant \frac{1}{f(x)} \leqslant \frac{2-x}{x}.$$

Do đó $f(x) = 2/(2-x)$. *Tóm lại*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{2-x} & \textit{khi } 0 \leqslant x < 2 \\ 0 & \textit{khi } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Cách 2. Khi $0 \leqslant x < 2$, ta có $2 - x > 0$,

$$f((2-x).f(x)).f(x) = f(2-x+x) = f(2) = 0.$$

Do $f(x) \neq 0$ nên $f((2-x)f(x)) = 0$, suy ra $(2-x)f(x) \geqslant 2$. Thành thử,

$$f(x) \geqslant \frac{2}{2-x} \tag{8.22}$$

Mặt khác, $f((y-x)f(x)) \neq 0$ nên $(y-x)f(x) < 2$. Ta cố định x và cho $y \to 2$, do tính liên tục của f nên $(y-x)f(x) \to (2-x)f(x) \leqslant 2$. Suy ra

$$f(x) \leqslant \frac{2}{2-x}. \tag{8.23}$$

Từ (8.22) và (8.23) suy ra $f(x) = \frac{2}{2-x}$. Tóm lại

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{2-x} & \text{khi } 0 \leqslant x < 2 \\ 0 & \text{khi } x \geqslant 2 \end{cases}$$

Bài toán 8.52. Tìm hàm $f(x)$ xác định và liên tục với mọi $x > 0$ và thoả mãn điều kiện

1. $f(uv) = f(v) + f(u),\ \ \forall u, v > 0$
2. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0,$
3. $f(x) \neq 0, \forall x > 0.$

Giải. *Giả sử $f(x) \not\equiv 0$, với mọi $x > 0$.*

$$f(x) = f(1.x) = f(1) + f(x),$$

suy ra $f(1) = 0$. Lấy $x > 0$, $x_n \to x_0$ khi $n \to \infty$. Suy ra $x_n/x_0 \to 1$ khi $n \to \infty$. Suy ra

$$\lim f\left(\frac{x_n}{x_0}\right) = 0.$$

Vậy $f(x_n) = f(x_0, \frac{x_n}{x_0}) = f(x_0) + f(\frac{x_n}{x_0}) \to f(x_0) + 0$. Tức là

$$\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = f(x_0).$$

$$f(uv) = f(u) + f(v),\ \ \forall u, v > 0. \tag{8.24}$$

Suy ra $f(x^n) = nf(x)$, *với* $x > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$. *Do* $f(1) = 0$ *nên* $f(x^n) = nf(x)$ *đúng khi* $n = 0$. *Hơn nữa, với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$ *thì* $0 = f(1) = f(x^n, x^{-n}) = f(x^n) + f(x^{-1}) = nf(x) + f(x^{-n})$. *Suy ra* $f(x^{-n}) = -nf(x)$, *và*

$$f\left(x^{\frac{m}{n}}\right) = f\left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m\right) = mf(x^{1/n}) = m\frac{1}{n}f(x) = \frac{m}{n}f(x).$$

Suy ra $f(x^{m/n}) = \frac{m}{n}f(x),\ \ m, n \in \mathbb{Z}$. *Do đó*

$$f(x^r) = rf(x),\ \ \forall x > 0\ \ r \in \mathbb{Q}.$$

Đặc biệt $f(2^r) = r.f(2) = r.A,\ r \in \mathbb{Q},\ A = f(2)$. *Nếu* $x > 0$ *thì* $x = 2^{\log_2 x}$ *suy ra với mọi* $x > 0$ *thì tồn tại một dãy số hữu tỷ* $\{r_n\}_0^\infty$ *sao cho*

$$\lim_{r\to\infty} r_n = \log_2 x.$$

Suy ra

$$\lim_{r\to\infty} 2^{r_n} = 2^{\log_2 x} = x$$

dẫn đến $\lim\limits_{n\to\infty} f(2^{r_n}) = f(x)$, *mà* $f(2^{r_n}) = A.r_n \to A.\log_2 x$ *khi* $n \to \infty$.

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} f(2^{r_n}) = A.\log_2 x = f(x).$$

Do $f(x) \not\equiv 0$ *với* $x > 0$ *nên với mọi* $x > 0$ *ta có* $A \neq 0$, *đặt* $A = \log_a 2$, $a > 0$ *và* $a \neq 1$, $f(x) - A\log_2 x = \log_a 2.\log_2 x = \log_a x$. *Vậy*

$$f(x) = \log_a x,\ \ \forall x > 0,\ \ 0 < a \neq 1.$$

Bài toán 8.53. Tìm $f(x)$ xác định và liên tục với mọi $x > 0$ và thoả mãn điều kiện

1. $f(uv) = f(u).f(v),\ \ \forall u, v > 0$
2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$.

Giải. *Ta có với mọi* $x > 0$

$$f(x) = f(\sqrt{x}.\sqrt{x}) = f^2(\sqrt{x}) \geqslant 0.$$

Suy ra $f(x) \geqslant x$, $\forall x > 0$.

Nếu tồn tại $x_0 > 0$ *để* $f(x_0) = 0$ *thì với mọi* $x > 0$ *ta có* $f(x) = f(x_0.\frac{x}{x_0}) = f(x_0).f\left(\frac{x}{x_0}\right) = 0$. *Theo giả thiết ta cũng có* $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$. *Vậy* $f(x) > 0$, *với mọi* $x > 0$.

Xét hàm số $g(x) = \lim f(x)$*, với mọi* $x > 0$ *thoả mãn điều kiện*

$$\begin{aligned} g(u,v) &= \ln f(uv) = \ln(f(u).f(v)) = \\ &= \ln f(u) + \ln f(v) \\ &= g(u) + g(v) \end{aligned}$$

và $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 0$*.*

Vậy $g(x)$ *thỏa mãn điều kiện bài toán 8.52 ở trên. Suy ra*

$$g(x) = \log_a x, \ \ 0 < a \neq 1, \ \ x > 0.$$

Suy ra $\ln f(x) = \log_\alpha x = log_\alpha e. \ln x$*. Do đó*

$$f(x) = x^\alpha$$

với $\alpha = \log_a e$*,* $(0 < a \neq 1)$

Bài toán 8.54. Cho $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ liên tục và

$$f(x) = f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right), \ \ \forall x \in [-1, 1].$$

Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm hằng.

Giải. *Ta cố định* x*, xét dãy số* $(x_n)_1^\infty$ *xác định bởi*

$$x_0 = x > 0, \ \ x_{n+1} = \frac{2x}{1+x^2}. \tag{8.25}$$

Dãy (x_n) *là dãy số tăng. Suy ra* $x_{n+1} \geqslant x_n$*, hay* $2x_n/(1+x_n^2) \geqslant x_n$*. Từ đây ta có* $-1 \leqslant x_n \leqslant 1$*. Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có*

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+x_n^2} \leqslant 1.$$

Do dãy số (x_n) *tăng và bị chặn dưới bởi* 1 *nên tồn tại giới hạn* $\lim_{n\to\infty} x_n = l > 0$*. Ta có (8.25) tương đương với*

$$l = \frac{2l}{1+l^2},$$

từ đó ta có $l = 1$*.*

Dãy số

$$f(x_{n+1}) = f\left(\frac{2x_n}{1+x_n^2}\right) = f(x_n).$$

Lấy $f(x) = f(x_0) = \cdots = f(x_n)$*. Do* $f(x)$ *liên tục trên* $[-1, 1]$ *nên* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ $= f(1)$*, hay* $f(x) = f(1) = c$*, với* c *là hằng số.*

(trường hợp $x_0 = x < 0$ *xét tương tự)*

Bài toán 8.55. Tìm tất cả các hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R} - \{0\}$ và thỏa mãn điều kiện sau

$$(f(x^2) - x^2)(f(x) - x) = \frac{1}{x^3}, \quad \forall\, x \neq 0. \tag{8.26}$$

Giải. *Phương trình (8.26) tương đương với*

$$(x^2 f(x^2) - x^4)(xf(x) - x^2) = 1.$$

Đặt $xf(x) - x^2 = g(x)$*, ta thu được*

$$g(x^2)g(x) = 1. \tag{8.27}$$

Suy ra $g(x) \neq 0$*, với mọi* $x \in \mathbb{R}$*. Ta có* $g(0) = \pm 1$ *và* $g(1) = \pm 1$*. Thay* x *bởi* $-x$ *vào trong (8.27) ta thu được*

$$g(x^2)g(-x) = 1 = g(x^2)g(x).$$

Suy ra $g(-x) = g(x)$ *trên tập đối xứng qua gốc toạ độ* $\mathbb{R}$*. Suy ra* $g(x)$ *là hàm số chẵn trên* $\mathbb{R}$*, nên ta chỉ cần xét* $g(x)$ *trên tập* $x \geqslant 0$ *là đủ.*

Xét $0 \leqslant x \leqslant 1$*, ta có*

$$g(x) = \frac{1}{g(x^2)} = \frac{1}{\frac{1}{g(x^4)}} = g(x^4).$$

Suy ra $g(x) = g(x^4)$*.*

Lại có

$$g(x^4) = \frac{1}{g((x^4)^2)} = \frac{1}{\frac{1}{g((x^4)^2)}} = g((x^4)^4) = g(x^{4^2}).$$

Suy ra $g(x^4) = g(x^{4^2})$*. Vậy ta thu được*

$$g(x) = g(x^4) = g((x^4)^4) = \cdots = g((\cdots(x^4)^4)^4\cdots)^4) = g(x^{4^n}),\ n \to +\infty.$$

Qua giới hạn ta thu được

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} g(x^{(1/4)^n}),$$

do $\lim\limits_{0\ x\ 1} x^{4^n} = 0$*. Suy ra*

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} g(x^{4^n}) = g(0),$$

mà $g(0) = \pm 1$*. Suy ra* $g(x) = \pm 1 = c$*.*

Xét $x > 1$, ta có

$$g(x) = \frac{1}{g(x^{\frac{1}{2}})} = \frac{1}{\frac{1}{g(x^{\frac{1}{4}})}} = g(x^{\frac{1}{4}}) = \cdots = g(x^{(\frac{1}{4})^n}).$$

Qua giới hạn, ta thu được $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x^{(\frac{1}{4})^n} = g(1)$ *vì với* $x > 1$ *thì* $\lim_{n\to+\infty} = 1$, *suy ra* $g(x) = g(1) = \pm 1 = c$.

Vậy $c = xf(x) - x^2$, *hay* $f(x) = c/x + x$, *c là một hằng số.*

Bài toán 8.56. Cho $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ liên tục thoả mãn điều kiện

$$f(x) = f\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right), \quad \forall x \in (-1, 1). \tag{8.28}$$

Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm hằng.

Giải. *Xét* $0 < x < 1$. *Ta cố định x, xét dãy số* $(x_n)_1^{+\infty}$ *như sau*

$$x_0 = x, \quad x_{n+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - x_n^2}}{x_n}. \tag{8.29}$$

Dãy này được suy ra từ việc xét dãy số

$$x_n = \frac{2x_n + 1}{1 + x_{n+1}^2}.$$

Ta chứng minh rằng $(x_n)_1^{\infty}$ *xác định với mọi n và*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0. \tag{8.30}$$

Từ (8.28) suy ra $f(x) = f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n)$. *Do* $f(x)$ *liên tục trên* $(-1, 1)$ *nên* $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$.

Ta chứng minh dãy số $(x_n)_1^{\infty}$ *bị chặn.*

Dễ thấy $(x_n)_1^{\infty}$ *luôn dương với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$. *Ta chứng minh* $x_n \leqslant 1$, *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$.

Nếu $n = 0$ *thì* $x_0 = x < 1$, *đúng theo giả thiết.*

Giả sử $x_k < 1$, *ta có*

$$x_{k+1} = \frac{1 - \sqrt{1 - x_n^2}}{x_k} \leqslant 1.$$

Bất đẳng thức này tương đương với $1 - x_k \leqslant \sqrt{1 - x_k^2}$. *Từ đây ta có* $x_k(x_k - 1) \leqslant 0$, *điều này luôn đúng với* $x_k < 1$.

Suy ra $(x_n)_1^\infty$ *là dãy số giảm.*

Bây giờ ta chứng minh dãy số $(x_n)_1^\infty$ *bị chặn bởi số* 0*. Thật vật, vì* $(x_n)_1^\infty$ *là dãy số giảm nên tồn tại* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$ *(ta đi chứng minh* $c = 0$*).*

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n+1}{1+x_{n+1}^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n}{1+x_n^2}.$$

Từ đó $c = c/(1+c^2)$*, suy ra* $c = 0$ *hoặc* $c = 1$*. Do dãy số giảm nên* $c = 0$*, suy ra* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$*. Vậy dãy số* $(x_n)_1^\infty$ *giảm và bị chặn bởi* 0 *vậy dãy số* $(x_n)_1^\infty$ *bị chặn.*

Ta có

$$f(x_n) = f\left(\frac{2x_{n+1}}{1+x_{n+1}^2}\right) = f(x_{n+1}).$$

Suy ra $f(x) = f(x_{n+1}) = f(x_n) = \cdots = f(x_1) = f(0)$*. Do* $f(x)$ *liên tục trên* $(-1, 1)$ *nên* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$*, hay là* $f(x) = f(0) = c$ *với* c *là một hằng số.*

Trường hợp $-1 < x < 0$*. Ta chứng minh dãy số* $(x_n)_1^\infty$ *đơn điệu tăng và bị chặn bởi số* 0*.*

Nhận xét. Bài toán 8.54 và 8.56 khác nhau cơ bản ở điều kiện nên ở bài 8.54 xét dãy số $x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+x_n^2}$*, ở bài toán 8.56 xét dãy số* $x_n = \frac{2x_n+1}{1+x_n^2}$ *sao cho dãy số không thể bằng* 1 *được, suy ra* $x_n = \frac{1-\sqrt{1-x_n^2}}{x_n}$*.*

Bài toán 8.57. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục, $0 < c < \frac{1}{4}$. Giả sử f thoả mãn điều kiện $f(x) = f(x^2 + c)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm hằng.

Giải. *Nhận xét rằng* f *là hàm số chẵn trên* $\mathbb{R}$*. Suy ra, ta chỉ cần xét* $x \geqslant 0$*. Xét* $x^2 + c = x$*, tức với* $0 < c < \frac{1}{4}$ *thì tồn tại hai nghiệm phân biệt* α, β *của phương trình*

$$x^2 - x + c = 0. \tag{8.31}$$

Trường hợp 1. Xét $x \in [0, \alpha]$*. Cố định* x_0*, xét dãy số*

$$x_0 = x,\ \ x_{n+1} = x_n^2 + c. \tag{8.32}$$

Ta có

$$f(x_{n+1}) = f(x_n^2 + c) = f(x_n),\ \ \forall 0, 1, 2, ...,.$$

Suy ra

$$f(x) = f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_n),$$

và $f(x)$ *liên tục trên* $\mathbb{R}$*. Suy ra* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$*.*

Ta chứng minh $(x_n)_1^\infty : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$. *Suy ra* $\lim f(x_n) = f(\alpha)$ *vì* $f(x)$ *liên tục trên* $\mathbb{R}$, *hay là* $f(x) = f(\alpha)$, *với mọi* $x \in [0, \alpha]$, *hay* $f(x) = c$, *với* c *là một hằng số.*

a) Chứng minh $\lim\limits_{n\to\infty} = \alpha$ *với* $(x_n)_1^\infty$ *xác định bởi (8.32).*

Ta có $(x_n)_1^\infty$ *là dãy số tăng. Xét* $g(x) = x^2 + c$, $g'(x) = 2x > 0$ *với* $x \in [0, \alpha]$. *Suy ra* $g(x)$ *đồng biến trên* $[0, \alpha]$. *Do đó,* $g(x_1) > g(x_0)$, *tương tự với* $x_2 > x_1$ *ta có* $g(x_2) > g(x_1)$. *Vậy* $(x_n)_1^\infty$ *là dãy số tăng.*

b) Chứng minh $(x_n)_1^\infty$ *bị chặn bởi* α *(bằng phương pháp quy nạp). Với* $x_0 = x < \alpha$. *Giả sử (8.32) đúng với* $n = k$: $x_k < \alpha$. *Suy ra* $x_{k+1} = x_k^2 + c < \alpha^2 + c = \alpha$ *vì* α *là nghiệm của (8.31). Suy ra (8.32) đúng với* $n = k + 1$.

Từ a) và b) suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

Trường hợp 2. Xét $x \in [\alpha, \beta]$, *xét dãy số*

$$x_0 = x, \ \ x_{n+1} = x_n^2 + c. \tag{8.33}$$

Chứng minh tương tự như trường hợp 1, $(x_n)_1^\infty$ *là dãy số giảm.,* $x_n \geqslant \alpha$, *suy ra* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

Suy ra

$$f(x) = f(\alpha), \ \forall x \in [\alpha, \beta].$$

Trường hợp 3. $x \in [\beta, +\infty)$, *xét dãy số xác định bởi*

$$x = x_0, \ \ x_{n+1} = \sqrt{x_n - c} \ \text{với}\ x_n = x_{n+1}^2 + c. \tag{8.34}$$

Chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$.

Xét $g(x) = \sqrt{x - c}$. *Tính đạo hàm cho ta*

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x - c}} > 0, \ \ \text{với}\ x \in [\beta, +\infty).$$

Suy ra $g(x)$ *đồng biến trên* $[\beta, +\infty)$.

Ta có $x_1 = \sqrt{x_0 - c} < x_0$, *hay* $x_0^2 - x_0 + c > 0$ *luôn đúng do* $x_0 \in [\beta, +\infty)$. *Nếu* $x_1 < x_0$ *thì dãy số* $(x_n)_1^\infty$ *giảm.*

Ta chứng minh $(x_n)_1^\infty$ *bị chặn dưới bởi* β *bằng phương pháp quy nạp. Nếu* $x_0 = x \geqslant \beta$, *giả sử* $x_k > \beta$, $x_{k+1} = \sqrt{x_k + c} \geqslant \sqrt{\beta - c} = \beta$. *Điều này luôn đúng vì* β *là một nghiệm của* $\beta^2 - \beta + c = 0$. *Suy ra tồn tại* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ $(l \geqslant \beta)$. *Từ đó*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \beta. \tag{8.35}$$

Từ dãy số (8.32) suy ra $f(x_n) = f(x_{n+1}^2 + c) = f(x_{n+1})$. *Lấy*

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n).$$

$f(x)$ liên tục trên $[\beta, +\infty)$. Do đó

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\beta),$$

hay là $f(x) = f(\beta) = c$, với c là hằng số.

Phép chứng minh hoàn tất.

Bài toán 8.58. Chứng minh rằng không tồn tại hàm số $f : (0, \to \infty) \to (0, +\infty)$ thoả mãn điều kiện

1. $f(x)$ là hàm số tăng: $\forall x > y > 0$ thì $f(x) > f(y)$.
2. $f\left(x + \frac{1}{f(x)}\right) \geqslant 2f(x)$.

Giải. *Giả sử $f(x)$ tồn tại, ta cố định $x_0 > 0$. Xét dãy số xác định bởi*

$$x_0 = x \tag{8.36}$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{f(x_n)}. \tag{8.37}$$

Điều kiện thứ nhất trong đề bài cho ta

$$\begin{aligned} f(x_{n+1}) \geqslant 2f(x_n) \geqslant 2(2f(x_{n-1})) = 2^2 f(x_{n-1}) \geqslant 2^2.2f(x_{n-2}) \\ \geqslant \cdots \geqslant 2^n f(x_1) \geqslant 2^{n+1} f(x_0). \end{aligned}$$

Vậy ta có

$$f(x_k) \geqslant 2^k f(x_0) \ \text{ với mọi } k = 0, 1, 2, ... \tag{8.38}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \frac{1}{f(x_0)}, \\ x_2 &= x_1 + \frac{1}{f(x_1)}, \\ x_3 &= x_2 + \frac{1}{f(x_2)}, \\ &... \\ x_n &= x_{n-1} + \frac{1}{f(x_{n-1})}, \end{aligned}$$

Suy ra

$$x_n = x_0 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{f(x_k)}.$$

Từ (8.38) suy ra

$$\frac{1}{f(x_k)} \leqslant \frac{1}{2^k f(x_0)}.$$

Suy ra

$$x_n \leqslant x_0 + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k f(x_0)} = x_0 + \frac{1}{f(x_0)}.\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = x_0 + \frac{2}{f(x_0)}.$$

Vì

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$$

nên

$$x_n \leqslant a \quad \left(= x_0 + \frac{2}{f(x_0)}\right), \ \forall n.$$

Do f *là hàm số tăng nên* $2^n f(x_0) \leqslant f(x_0) < f(a)$*, với mọi* a*. Từ đây và (8.38) ta suy ra* $f(a) > 2^n f(x_0)$ *với mọi* n*. Suy ra* $f(a) > \infty$*, mâu thuẫn với giả thiết rằng* $f(x)$ *tồn tại. Điều mâu thuẫn này cho ta điều phải chứng minh.*

Bài toán 8.59. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục tại $x = 0$ và thoả mãn điều kiện $nf(nx) = f(x) + nx$, trong đó $n > 1$ là số tự nhiên cố định nào đó.

Giải. *Cho* $n = 0$*, từ đó thay giá trị này vào biểu thức đã cho, ta có* $nf(0) = f(0) + 0$*, hay* $(n-1)f(0) = 0$*. Suy ra* $f(0) = 0$*, vì* $n > 1$*. Cũng từ biểu thức đã cho, thay* x *bởi* x/n *thì*

$$nf\left(n\frac{x}{n}\right)= f\left(\frac{x}{n}\right)+n\frac{x}{n},$$

hay

$$nf(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)+x.$$

Suy ra

$$f(x) = \frac{1}{n}.f\left(\frac{x}{n}\right)+\frac{x}{n}. \tag{8.39}$$

Trong (8.39) thay x *bởi* x/n*, ta có*

$$f\left(\frac{x}{n}\right)= \frac{1}{n}\left(\frac{x}{n^2}\right) + \frac{x}{n^2}.$$

Suy ra

$$f(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{x}{n^2}\right)+\frac{x}{n^2}\right) + \frac{x}{n} = \frac{1}{n^2}f\left(\frac{x}{n^2}\right) + \frac{x}{n^3} + \frac{x}{n}. \tag{8.40}$$

Trong (8.39) lại thay x bởi x/n^2 thì ta có

$$f\Big(\frac{x}{n^2}\Big)=\frac{1}{n}f\Big(\frac{x}{n^3}\Big)+\frac{x}{n^3}. \tag{8.41}$$

Từ (8.40) suy ra

$$f(x)=\frac{1}{n^3}f\left(\frac{x}{n^3}\right)+fracxn^5+\frac{x}{n^3}+\frac{x}{n}.$$

Từ đó, ta có thể chứng minh quy nạp theo k rằng

$$f(x)=\frac{1}{n^k}f\left(\frac{x}{n^k}\right)+\frac{x}{n^{2k-1}}+\frac{x}{n^{2k-3}}+\cdots+\frac{x}{n}. \tag{8.42}$$

Ta có

$$S_k=\frac{x}{n^{2k-1}}+\frac{x}{n^{2k-3}}+\cdots+\frac{x}{n}$$

là tổng cấp số nhân hữu han. Suy ra

$$S_k=\frac{x.\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n^2}}=\frac{nx}{n^2-1}.$$

Suy ra

$$\lim_{k\to\infty}S_k=\frac{nx}{n^2+1},$$

và

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n^k}f\left(\frac{x}{n^k}\right)=0.f(0),$$

vì $f(x)$ liên tục tại $x=0$ suy ra $f(x)=nx/(n^2-1)$.

Thử lại, ta được kết quả đúng. Vậy

$$f(x)=\frac{nx}{n^2-1},\ \ n>1,\ n\in\mathbb{N}^*,\ x\in\mathbb{R}.$$

Bài tập

Bài 8.1. Tìm tất cả các hàm f xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^3)-x^2f(x)=\frac{1}{x^3}-x,\ \forall x\neq 0.$$

Bài 8.2. Giả sử $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ liên tục và $f(x+y).f(x-y)=f^2(x)$ với mọi $x,y\in\mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f=0$ hoặc f không có không điểm.

Bài 8.3. Giả sử $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và $f(x-y).f(x+y) = f^2(x).f^2(y)$, với mọi $x, y \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $f(x) = 0$ hoặc $f(x)$ không có không điểm.

Bài 8.4. Tìm hàm liên tục thoả mãn

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + ax^2 + bxy + cy^2, \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Bài 8.5. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2) + f(x) = x^2 + x, \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bài 8.6. Giả sử $a \in \mathbb{R}$, $f(x)$ liên tục trên $[0.1]$ thoả mãn điều kiện

1. $f(0) = 0$
2. $f(1) = 1$
3. $f(\frac{x+y}{2}) = (1-a)f(x) + af(y)$, với mọi $x, y \in [0,1]$, $x \leqslant slanty$.

Tìm các giá trị có thể của a.

Tài liệu tham khảo

[1] *Nguyễn Văn Mậu, "Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ", NXB Giáo dục 2002.*

[2] *Nguyễn Văn Mậu,"Phương trình hàm", NXB Giáo Dục, 1996.*

[3] *B.J.Venkatachala, "Functional Equations - A problem Solving Approach", PRISM 2002.*

[4] *Các tạp chí Kvant, Toán học và tuổi trẻ, tư liệu Internet.*