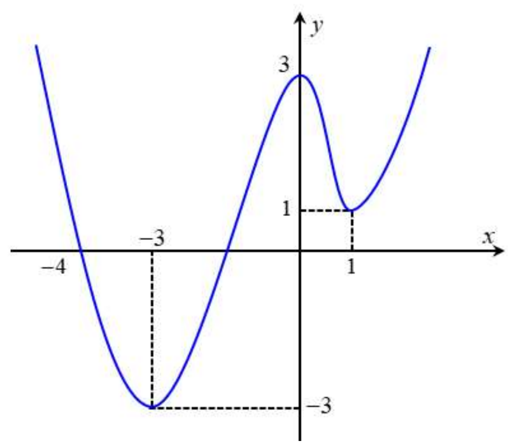
Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(-2)=7$ và có bảng biến thiên như dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6.

Câu 2: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(|x+3|(x-1)\right)=\log m$ có ít nhất năm nghiệm phân biệt?

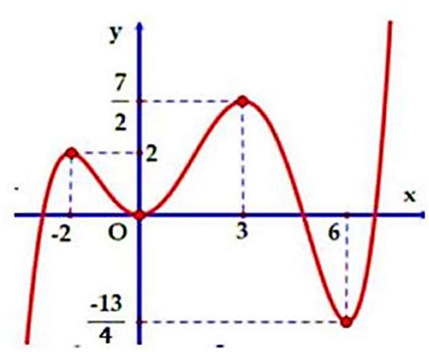


A. 990. **B.** 991. **C.** 989. **D.** 913.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx-3, a,b$ là các tham số thực thỏa mãn $\begin{cases} a+b-2>0 \\ 24+3(3a+b)<0 \end{cases}$. Hỏi phương trình $2.f(x).f''(x)=\left[f'(x)\right]^2$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

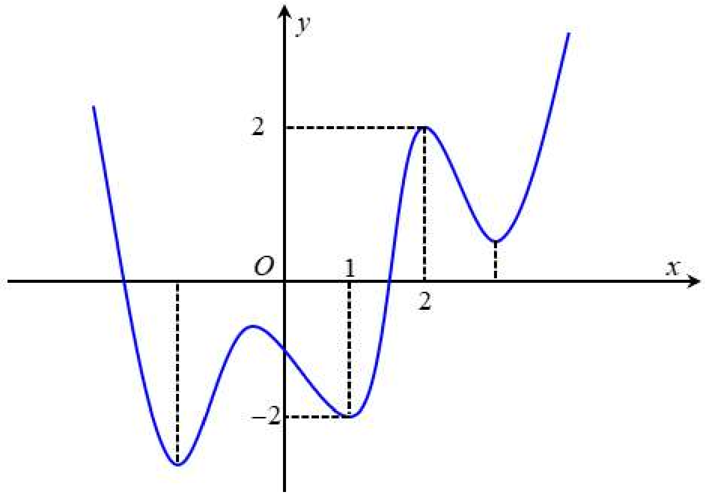
Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số nghiệm thực của phương trình $\left|f\left(2x^3-6x+2\right)\right|=2$ là

A. 15. **B.** 14. **C.** 12. **D.** 13.

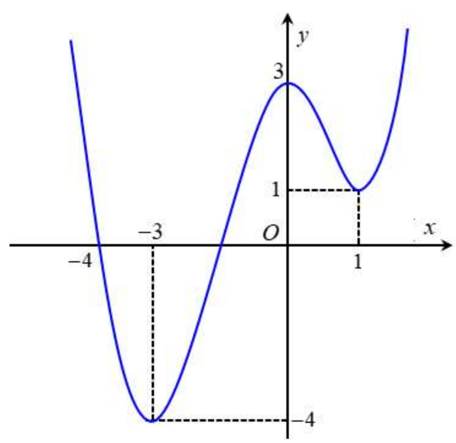
Câu 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$,có đồ thị $f'\left(x\right)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m\in\left[-10;10\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=f\left(\dfrac{x^3+1}{2}\right)-(2m-1)(x^4+2x^2+2019)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$?

A. 8. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 6: Cho hàm số bậc bốn $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x+3\right|\left(x-1\right)\right)=\log m$ có ít nhất năm nghiệm phân biệt ?



A. 990. **B.** 991. **C.** 989. **D.** 913.

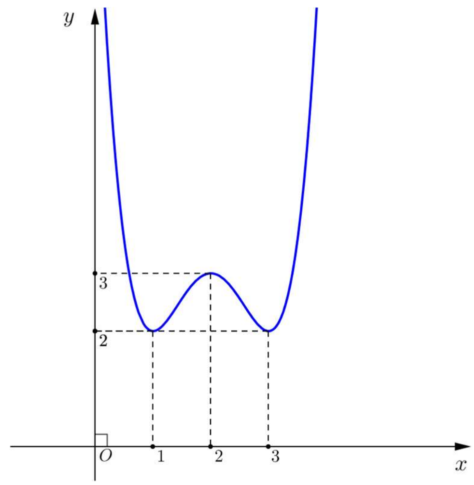
Câu 7: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	0	0	0	
$f(x)$	$-\infty$		0		-3	2	$-\infty$

Số điểm cực đại của hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3\right)\right|$ là

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Số nghiệm thuộc đoạn $\left[-2\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$ của phương trình $2f(\sin x+2)-5=0$ là



A. 11. **B.** 15. **C.** 7. **D.** 9.

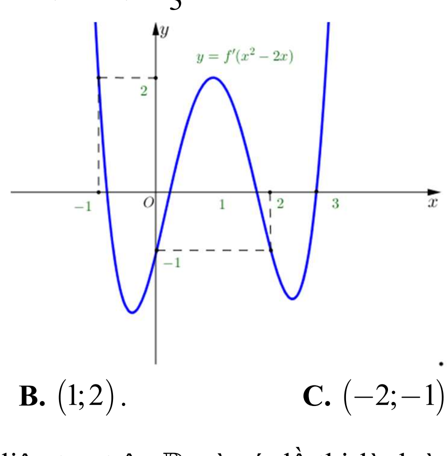
Câu 9: Cho hàm sô $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$, biết $f(1)=\frac{-1}{2}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=|2f(x)-x^2+2x|$ đồng biến trên khoảng

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 10: Cho hàm số bậc bốn $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e(a,b,c,d,e\in\mathbb{R})$, biết $f(1)=-\frac{1}{2}$ và đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Hàm số $g(x)=|2f(x)-x^2+2x|$ đồng biến trên khoảng

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y=f'(x^2-2x)$ như hình vẽ. Hỏi hàm số $y=f(x^2-1)+\frac{2}{3}x^3+1$ đồng biến trên khoảng nào?

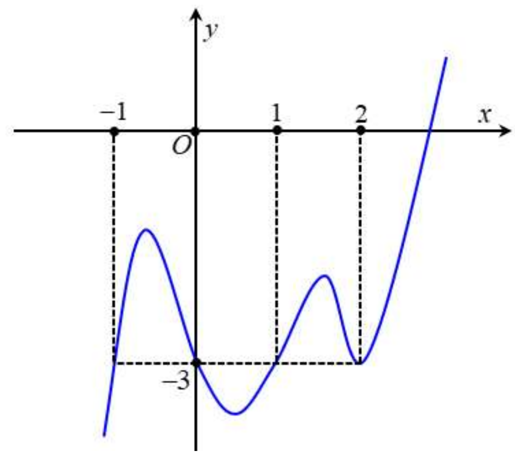


A. $(-3;-2)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong trơn (không bị gãy khúc), tham khảo hình vẽ bên. Gọi hàm số $g(x)=f[f(x)]$. Hỏi phương trình $g'(x)=0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

A. 14. **B.** 10. **C.** 12. **D.** 8.

Câu 13: Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(0\right)<0$. Đồ thị hàm số $y=f'\left(x\right)$ cho bởi hình vẽ dưới đây.

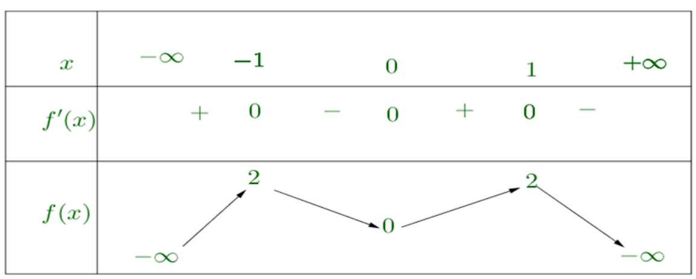


Hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(\left|x\right|\right)+3\left|x\right|\right|$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}$. Tìm m để phương trình $f\left(3m+\dfrac{1}{4}\sin x\right)+f(\cos^2 x)=1$ có đúng 8 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0;3\pi\right]$

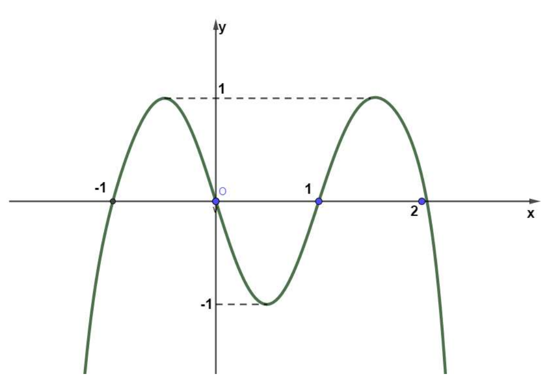
Câu 15: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:



Số nghiệm thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{9\pi}{2}\right]$ phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right)=2$ là

A. 9. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 16: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ với $a\neq 0$ có đồ thị như hình vẽ. Phương trình $\left|f\left(f\left(x\right)\right)\right|=\log_2 m$ (với m là tham số thực dương), có tối đa bao nhiêu nghiệm?

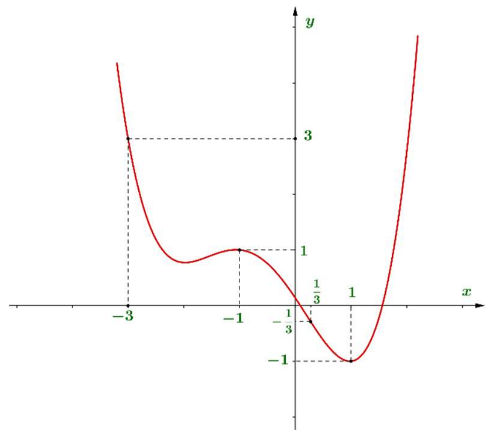


A. 18. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 7.

Câu 17: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị như hình dưới. Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $f\left(2x^3 - 6x + 2\right) = 2m - 1$ có 6 nghiệm phân biện thuộc đoạn $\left[-1;2\right]$?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 18: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$, hàm số $y = f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g\left(x\right) = 2f\left(\dfrac{5\sin x - 1}{2}\right) + \dfrac{\left(5\sin x - 1\right)^2}{4} + 3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $\left(0;2\pi\right)$?



A. 9. **B.** 7. **C.** 6. **D.** 8.

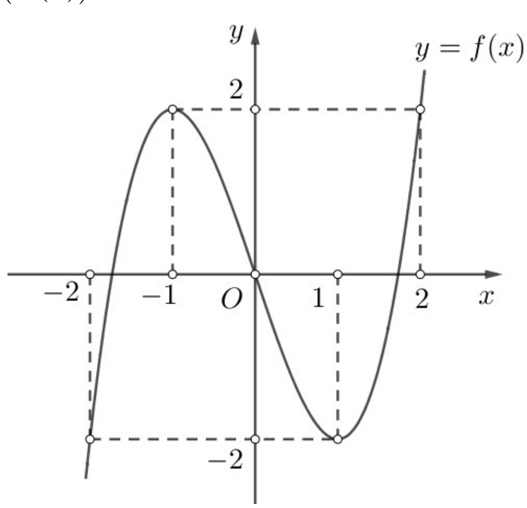
Câu 19: Cho $f\left(x\right)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f\left(0\right) = 0$. Hàm số $f'\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$\frac{-61}{3}$	↗	$+\infty$

Hàm số $g\left(x\right) = \left|f\left(x^3\right) - 3x\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị

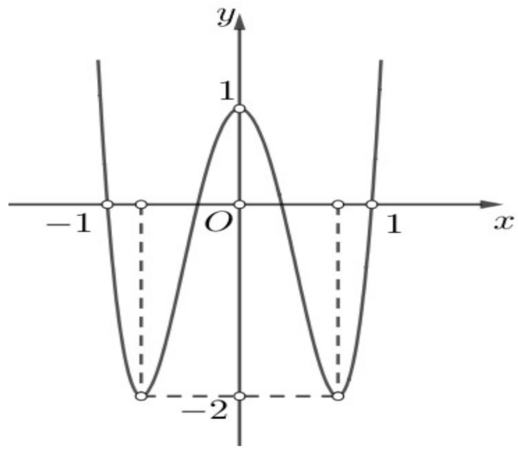
A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3

Câu 20: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực phân biệt của phương trình $f\left(f\left(x\right)\right) = x$ là



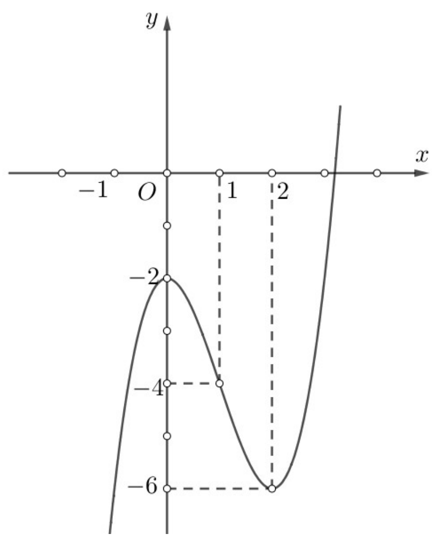
A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ bậc bốn có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)$, biết $g'(x)=x^2\left[f\left(x^2-1\right)\right]^3$.



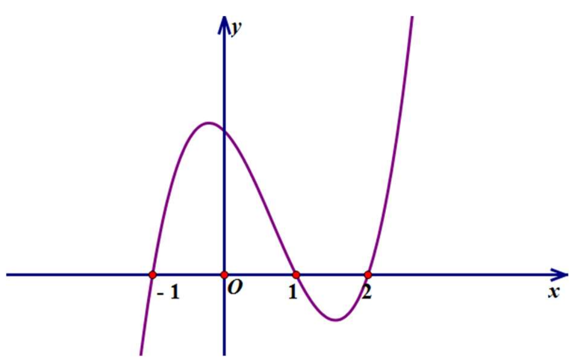
A. 5. **B.** 6. **C.** 9. **D.** 10.

Câu 22: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-20;20]$ để hàm số $g(x)=\left|f(1-|x|)+m\right|$ có 5 điểm cực trị?



A. 14. **B.** 15. **C.** 16. **D.** 17.

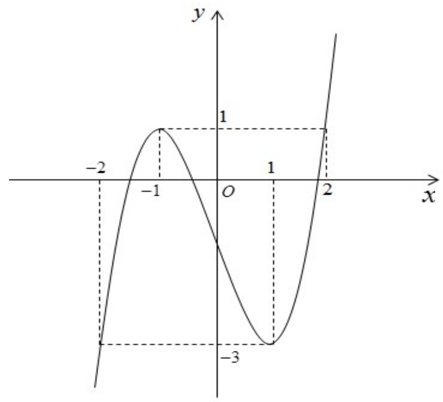
Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ dưới đây.



Hàm số $g(x)=f\left(|x|+\left|x^2-1\right|\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 7.

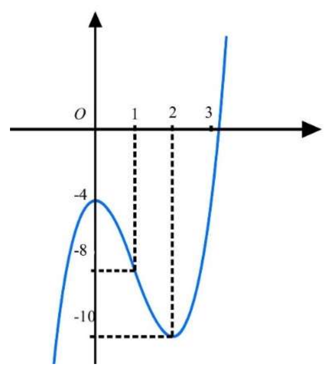
Câu 24: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới.



Số giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $f\left(2\sin x\right)=f\left(m\right)$ có 5 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ là

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 25: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $\left[-20;20\right]$ để hàm số $g\left(x\right)=\left|f\left(1-\left|x\right|\right)+m\right|$ có 5 điểm cực trị.



A. 14. **B.** 13. **C.** 11. **D.** 12.

Câu 26: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x$. Số điểm cực tiểu của hàm số $f\left(\sin 3x-\dfrac{3}{2}(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\right)$ trên $\left[-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{13\pi}{6}\right]$ là?

A. 6. **B.** 5. **C.** 7. **D.** 8

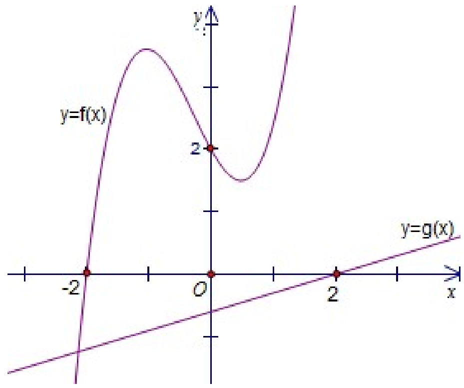
Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, $f(-2)=7$ và có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt?

A. 9. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 6

Câu 28: Cho hàm số bậc ba $y=f\left(x\right)$ và hàm số bậc nhất $y=g\left(x\right)$ có đồ thị như hình dưới đây



Hàm số $h\left(x\right)=\int\limits_0^{f(x)} g\left(t\right)dt$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-3;-2\right)$. **B.** $\left(-2;-1\right)$. **C.** $\left(-1;1\right)$. **D.** $\left(1;3\right)$.

BẢNG ĐÁP ÁN

1.C	2.B	3.A	4.B	5.C	6.B	7.B	8.C	9.C	10.C
11.C	12.C	13.D	14	15.A	16.A	17.D	18.D	19.D	20.D
21.B	22.D	23.A	24.A	25.B	26.A	27.C	28.A		

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Câu 1: Đặt $u = \left|x^2-1\right|-2 \Rightarrow u' = \dfrac{2x\left(x^2-1\right)}{\left|x^2-1\right|}$ với $x \neq \pm 1$.

Ta có: $u'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Ghép trục ta được:

x	$-\infty$				-1	0	1				$+\infty$
u	$+\infty$	1	0	-1	-2	-1	-2	-1	0	1	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	-2	-1	-2	7	-2	7	-2	-1	-2	$+\infty$

$y=m$

Để phương trình $f\left(\left|x^2-1\right|-2\right)=m$ có đúng 6 nghiệm thực phân biệt thì $-1<m<7$.

Suy ra $m \in \{0;1;2;3;4;5;6\}$.

Câu 2: Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$

x	$-\infty$	-4	-3	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	-4	3	1	$+\infty$

Đặt $u=|x+3|(x-1)=\sqrt{(x+3)^2}.(x-1)$

$\Rightarrow u' = \dfrac{x+3}{\sqrt{(x+3)^2}}.(x-1)+\sqrt{(x+3)^2} = \dfrac{(x+3)(2x+2)}{\sqrt{(x+3)^2}}$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $u=u(x)$

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
u'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
u	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Ghép trục ta được:

x	$-\infty$		-3	-1					$+\infty$
u	$-\infty$	-3	0	-3	-4	-3	0	1	$+\infty$
$f(u)$	$+\infty$	-4	3	-4	0	-4	3	1	$+\infty$

$f(u)=\log m$ có ít nhất 5 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4<\log m\le 0 \\ 1\le \log m<3 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 10^{-4}<m\le 1 \\ 10\le m<10^3 \end{array}\right.$ và $m\in\mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{1;10;11;...;999\}$.

Câu 3: Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \\ f(1)=a+b-2>0 \\ f(3)=9a+3b+24=24+3(3a+b)<0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \end{cases}$

Suy ra $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt $x_1<1<x_2<3<x_3$.

Mặt khác: $2.f(x).f''(x)=[f'(x)]^2 \Leftrightarrow 2.f(x).f''(x)-[f'(x)]^2=0$

Xét $g(x)=2.f(x).f''(x)-[f'(x)]^2$

$\Rightarrow g'(x)=2.f'(x).f''(x)+2f(x).f'''(x)-2f'(x).f''(x)=2f(x).f'''(x)=12f(x)$.

Khi đó $g'(x)=0\Leftrightarrow 12f(x)=0\Leftrightarrow f(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1\in(-\infty;1) \\ x=x_2\in(1;3) \\ x=x_3\in(3;+\infty) \end{array}\right.$.

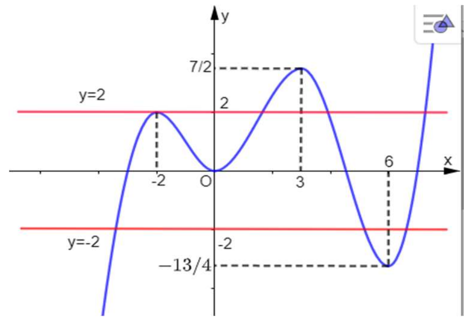
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$g(x_1)$	$\nearrow$	$g(x_2)$	$\searrow$	$g(x_3)$	$\nearrow$	$+\infty$

$y=0$

Do $g(x_2)=2.f(x_2).f''(x_2)-[f'(x_2)]^2=-[f'(x_2)]^2<0$ nên $g(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt.

Câu 4:



Ta có: $\left|f(2x^3-6x+2)\right|=2 \Leftrightarrow \begin{cases} f(2x^3-6x+2)=2 & khi\ f(2x^3-6x+2)\geq 0 \\ f(2x^3-6x+2)=-2 & khi\ f(2x^3-6x+2)<0 \end{cases}$

Theo đồ thị: $f(-2)=2\ (1)$

$f(a)=2\ (0<a<3)\ (2)$

$f(b)=2\ (3<b<6)\ (3)$

$f(c)=2\ (c>6)\ (4)$

Với (1) thì $2x^3-6x+2=-2 \Leftrightarrow 2x^3-6x+4=0 \Leftrightarrow x=-2; x=1$ (2 nghiệm).

Với (2) thì $2x^3-6x+2=a \Leftrightarrow 2x^3-6x+2-a=0$ (3 nghiệm).

Với (3) thì $2x^3-6x+2=b \Leftrightarrow 2x^3-6x+2-b=0$ (3 nghiệm).

Với (4) thì $2x^3-6x+2=c$ (1 nghiệm).

Vậy $f(2x^3-6x+2)=2$ có 2+3+3+1 = 9 nghiệm.

Với $f(2x^3-6x+2)=-2$ thì có 3 trường hợp là $f(d)=-2$ với $d<-2$; $f(e)=-2$ với $3<e<6$ và $f(f)=-2$ với $f>6$.

Với $d<-2$ thì $2x^3-6x+2=d$ có 1 nghiệm.

Với $3<e<6$ thì $2x^3-6x+2=e$ có 3 nghiệm.

Với $f>6$ thì $2x^3-6x+2=f$ có 1 nghiệm.

Trường hợp $f(2x^3-6x+2)=-2$ có 1+3+1 = 5 nghiệm.

Vậy tổng cộng $\left|f(2x^3-6x+2)\right|=2$ có 9 + 5 = 14 nghiệm.

Câu 5: **Chọn C**

Ta có $g'(x)=\frac{3}{2}x^2f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right)-(2m-1)(4x^3+4x)$.

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x)\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right)-(2m-1)(4x^3+4x)\ge 0,\forall x\in(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow 2m-1\le \frac{3x}{8x^2+8}.f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right),\forall x\in(0;+\infty)$

Với $x>0$ thì $\frac{x^3+1}{2}>0\Rightarrow f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right)\ge -2.$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{x^3+1}{2}=1\Leftrightarrow x=1$. Mặt khác, $0<\frac{3x}{8x^2+8}=\frac{3}{8(x+\frac{1}{x})}\le\frac{3}{16}$

Suy ra $\frac{3x}{8x^2+8}.f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right)\ge(-2).\frac{3}{16}\Leftrightarrow \frac{3x}{8x^2+8}.f'\left(\frac{x^3+1}{2}\right)\ge\frac{-3}{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=1$. Như vậy: $2m-1\le\frac{-3}{8}\Leftrightarrow m\le\frac{5}{16}$.

Vì $m\in\mathbb{Z}$ và $m\in[-10;10]$ nên $m\in\{-10;-9;-8;...-1;0\}$. Có 11 giá trị.

Câu 6: Đặt $u(x)=|x+3|(x-1)=\sqrt{(x+3)^2}(x-1)$

$u'(x)=\frac{(x+3)(x-1)}{\sqrt{(x+3)^2}}+\sqrt{(x+3)^2}=\frac{(x+3)(x-1)+(x+3)^2}{\sqrt{(x+3)^2}}=\frac{(x+3)(2x+2)}{\sqrt{(x+3)^2}}$

$u'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-1				$+\infty$
$u(x)$	$-\infty$	-3	0	-3	-4	-3	0	1	$+\infty$
$f(u(x))$	$+\infty$	-4	3	-4	0	-4	3	1	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy, phương trình đã cho có ít nhất năm nghiệm khi :

$\left[\begin{array}{l}-4<\log m\le 0\\1\le\log m<3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}10^{-4}<m\le 1\\10\le m<10^3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=10,11,12,....,999\end{array}\right.$

Vậy có 991 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 7: Xét hàm số $y=|x^2-8x+7|+x^2-3$

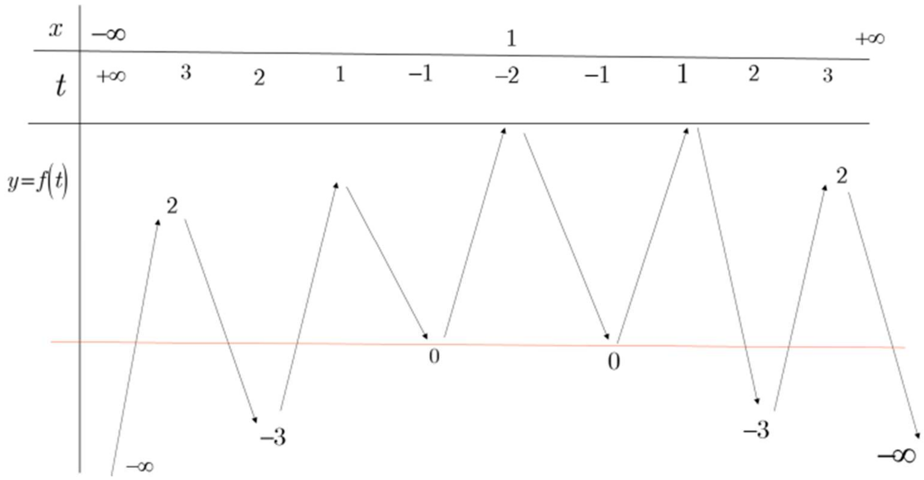
Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$

Ta có $y=|x^2-8x+7|+x^2-3=\begin{cases}2x^2-8x+4, & x\le 1\vee x\ge 7\\8x-10, & 1<x<7\end{cases}$

$$y'=\begin{cases}4x-8, & x<1\vee x>7\\ 8 & , \ 1<x<7\end{cases}$$

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	||	$+$	

Đặt $t=\left|x^2-8x+7\right|+x^2-3$. Khi đó bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(t\right)$ là



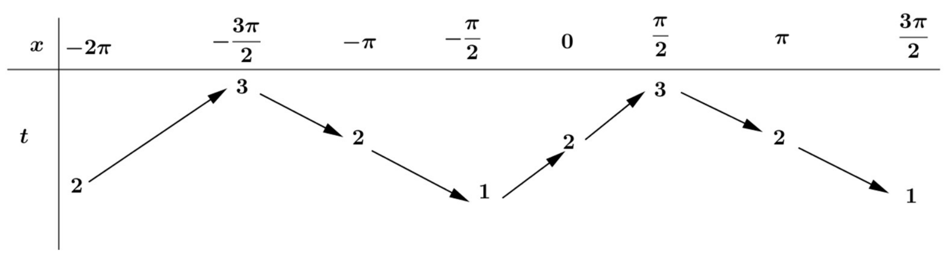
Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số $y=\left|f\left(t\right)\right|$ cho có 7 điểm cực đại.

Câu 8: Đặt $t=\sin x+2, 1\le t\le 3$

Phương trình $2f\left(\sin x+2\right)-5=0$ trở thành:

$$f\left(t\right)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=t_1\in\left(0;1\right)\to PTVN\\ t=t_2\in\left(1;2\right)\\ t=t_3\in\left(2;3\right)\\ t=t_4\in\left(3;4\right)\to PTVN\end{array}\right.$$

BBT:



Dựa vào bảng biến thiên ta có:

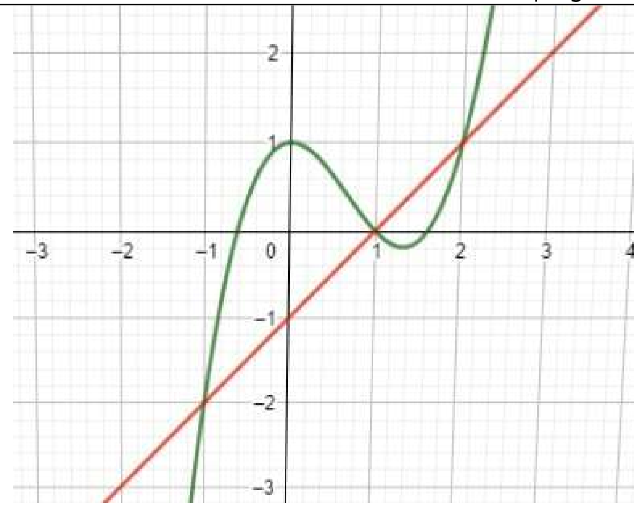
+. $t=t_2$ có 3 nghiệm phân biệt x thuộc $\left[-2\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$

+. $t=t_3$ có 4 nghiệm phân biệt x thuộc $\left[-2\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$

Vậy phương trình đã cho có 7 nghiệm phân biệt.

Câu 9: Xét hàm số $h\left(x\right)=2f\left(x\right)-x^2+2x\Rightarrow h'\left(x\right)=2f'\left(x\right)-2x+2$

$h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=x-1 \ \ (1)$



Vẽ đường thẳng $y = x - 1$. Từ đồ thị hàm số ta thấy đường thẳng $y = x - 1$ cắt đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tại ba điểm. Khi đó phương trình $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$h(1) = 2f(1) - x^2 + 2x = 0$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $h(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

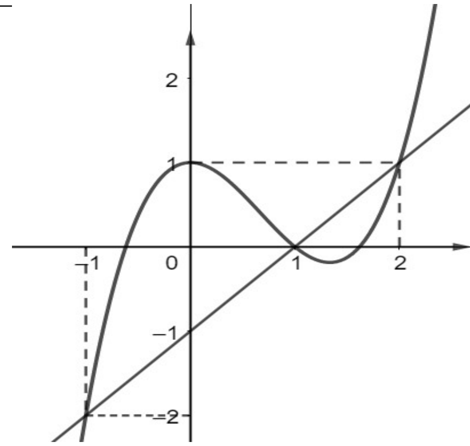
Khi đó ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = \left|h(x)\right|$

x	$-\infty$		-1			1		2	$+\infty$
$h(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\searrow$ 0		$\nearrow$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Câu 10: Xét $h(x) = 2f(x) - x^2 + 2x$

$\Rightarrow h'(x) = 2f'(x) - 2x + 2$

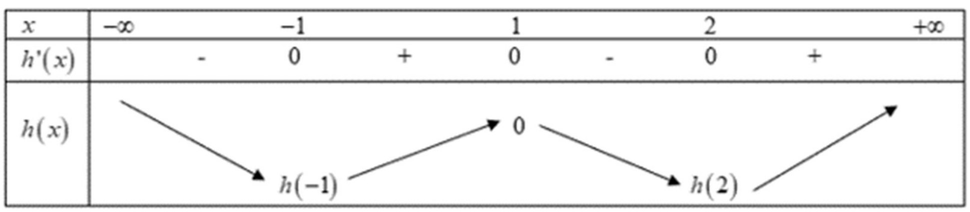
$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x) - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1$



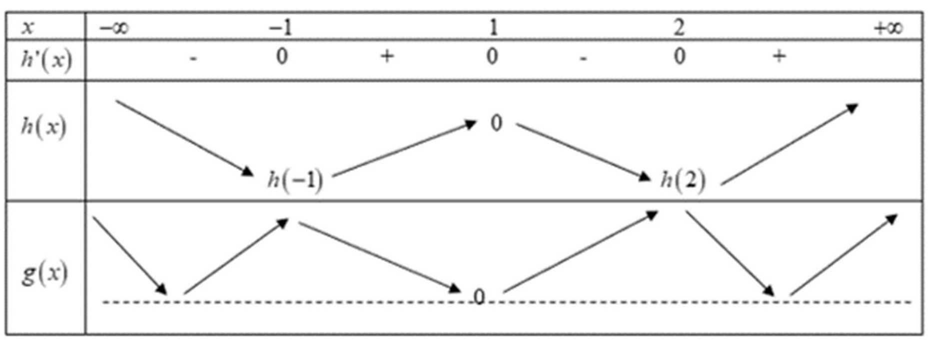
Dựa vào đồ thị ta thấy, đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = x - 1$ cắt nhau tại 3 điểm có hoành độ là $x = -1; x = 1; x = 2$

Do đó phương trình $f'(x) = x - 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên



Bảng biến thiên của hàm số $g(x) = |h(x)|$



Vậy hàm số $g(x) = |2f(x) - x^2 + 2x|$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 11: Xét hàm số $g(x) = f(x^2 - 1) + \dfrac{2}{3}x^3 + 1$

Ta có: $g'(x) = 2x.f'(x^2 - 1) + 2x^2 = 2x\left[f'(x^2 - 1) + x\right]$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ f'(x^2 - 1) = -x \ \ (1) \end{array}\right.$

Xét (1): Đặt $x = t - 1$

Khi đó ta có: $f'\left(t^2-2t\right)=-t+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=a\ \left(a\in(0;1)\right) \\ t=2 \\ t=b\ \left(b\in(2;3)\right) \end{array}\right.$

$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=a-1\ \left(a-1\in(-1;0)\right) \\ x=1 \\ x=b-1\ \left(b-1\in(1;2)\right) \end{array}\right.$

Ta có:

x	$-\infty$		-2		$a-1$		0		1		$b-1$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu trên ta thấy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;-1)$.

Câu 12: Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a\in(-2;-1) \\ x=0 \\ x=b\in(1;2) \\ x=2 \end{array}\right.$

Từ đồ thị ta có $f(a)=M, M>3$ và $f(b)=m, m\in(0;1)$.

Đặt $u=f(x)$, ta có hàm số $g(x)=f(u)$.

Số nghiệm phân biệt của phương trình $g'(x)=0$ chính là số cực trị của hàm số $g(x)=f(u)$.

Dựa vào đồ thi hàm số $y=f(x)$ ta có bảng biến thiên sau:

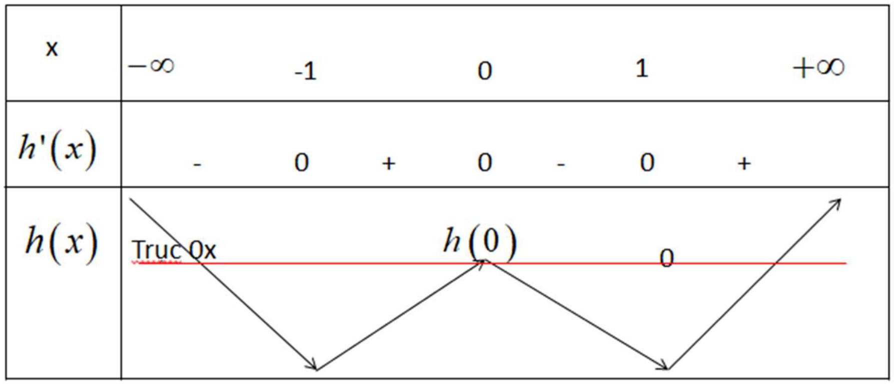
x	$-\infty$										a						0		b		2						$+\infty$
u	$-\infty$		a		0		b		2		M		2		b		0		m		0		b		2		$+\infty$
$f(u)$		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x)=f(u)$ có 12 cực trị.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 12 nghiệm phân biệt.

Câu 13: Đặt: $h(x)=f(x)+3x \Rightarrow h'(x)=f'(x)-(-3)$

Từ đồ thị hàm $y = f'(x)$ ta có BBT:



Số điểm cực trị dương của hàm $|h(x)|$ là 2.

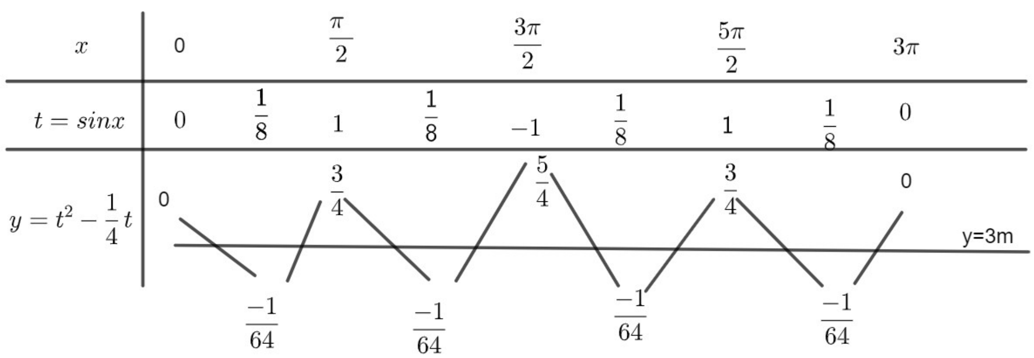
Do đó số điểm cực tiểu của $g(x)$ là: $2.2+1=5$.

Câu 14: Ta có $f(x)+f(1-x)=\dfrac{9^x}{9^x+3}+\dfrac{9^{1-x}}{9^{1-x}+3}=\dfrac{9^x}{9^x+3}+\dfrac{3}{9^x+3}=1\ \forall x$

Do đó

$$f\left(3m+\frac{1}{4}\sin x\right)+f(\cos^2 x)=1$$

$$\Leftrightarrow 3m+\frac{1}{4}\sin x+\cos^2 x=1 \Leftrightarrow 3m=\sin^2 x-\frac{1}{4}\sin x.$$

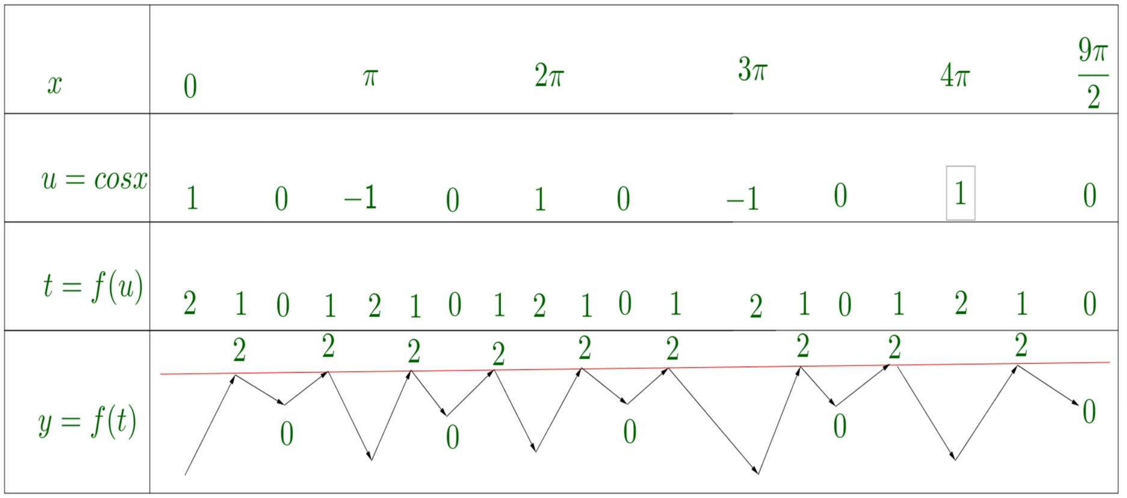


Kết luận: $\dfrac{-1}{64}<3m\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{-1}{192}<m\le 0$.

Câu 15: Đặt $u=\cos x$, $t=f(u)$

Phương trình trở thành: $f(t)=2$.

Ta có bảng biến thiên hàm số $y=f(t)$

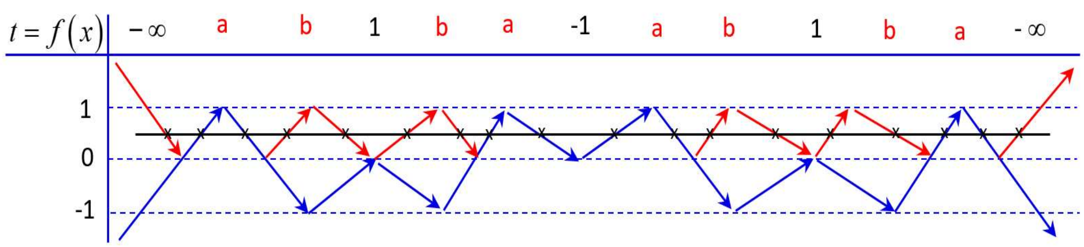


Số nghiệm phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right) = 2$ bằng số giao điểm của đường thẳng $y = 2$ và đồ thị hàm số $y = f(t)$, từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình $f(t) = 2$ có 9 nghiệm.

Vậy phương trình $f\left(f\left(\cos x\right)\right) = 2$ có 9 nghiệm.

Câu 16: Đặt $t = f\left(x\right)$

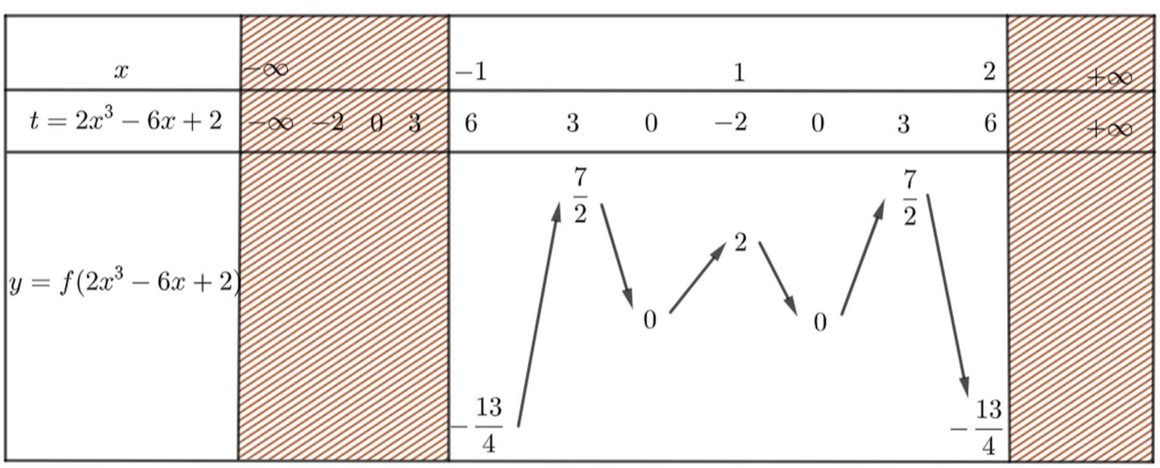
Phương trình trở thành: $\left|f\left(t\right)\right| = \log_2 m$



Số nghiệm phương trình $\left|f\left(f\left(x\right)\right)\right| = \log_2 m$ bằng số giao điểm của đường thẳng $y = \log_2 m$ và đồ thị hàm số $y = \left|f(t)\right|$, từ bảng biến thiên $\Rightarrow$ phương trình có tối đa 18 nghiệm.

Câu 17: Đặt $t = 2x^3 - 6x + 2$

Khi đó $t' = 6x^2 - 6$, $t' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$



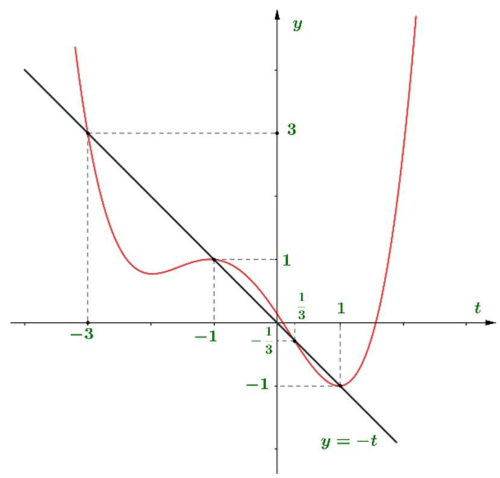
$f\left(2x^3-6x+2\right)=2m-1$ có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0<2m-1<2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<m<\dfrac{3}{2}$

Lại có $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=1$. Vậy có duy nhất 1 số nguyên m thoả mãn bài toán.

Câu 18: Đặt $t=\dfrac{5\sin x-1}{2}$. Suy ra $g\left(t\right)=2f\left(t\right)+t^2+3$

Ta có $g'\left(t\right)=2f'\left(t\right)+2t=0\Leftrightarrow f'\left(t\right)=-t$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\pm1 \\ t=\dfrac{1}{3} \\ t=-3 \end{array}\right.$$



Bảng biến thiên:

t	$-\infty$		-3		-1		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(t)$	$-\infty$	↗	$g(-3)$	↘	$g(-1)$	↗	$g\left(\frac{1}{3}\right)$	↘	$g(1)$	↗	$+\infty$

Suy ra:

x	0			$\frac{\pi}{2}$				$\frac{3\pi}{2}$		2π
t	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1	2	1	$\frac{1}{3}$	-1	-3	-1	$-\frac{1}{2}$
$g(t)$	$g\left(\frac{-1}{2}\right)$	$g\left(\frac{1}{3}\right)$	$g(1)$	$g(2)$	$g(1)$	$g\left(\frac{1}{3}\right)$	$g(-1)$	$g(-3)$	$g(-1)$	$g\left(\frac{-1}{2}\right)$

Câu 19: Đặt $t=x^3\Rightarrow x=\sqrt[3]{t}$. Ta có $h\left(x\right)=f\left(x^3\right)-3x\Rightarrow h\left(t\right)=f\left(t\right)-3\sqrt[3]{t}$

$$\Rightarrow h'\left(x\right)=f'\left(t\right)-\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}=0\Leftrightarrow t=a$$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra

$t=a\Rightarrow x=\sqrt[3]{a}$

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{a}$			$+\infty$
$h'(x)$		-	‖	-	0	+		
$\lvert h(x)\rvert$		↘	0	↗		↘	0	↗

Suy ra hàm số $g(x)=\left|h(x)\right|$ có 3 cực trị

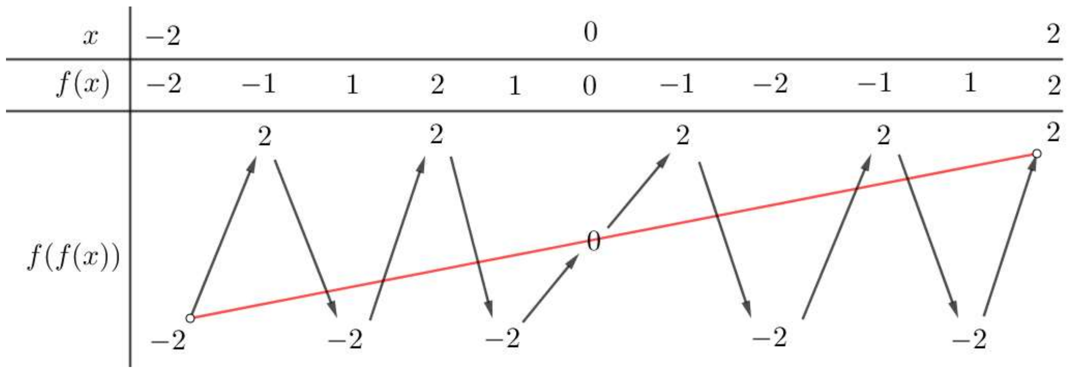
Câu 20: Xét phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=x\ \ (1)$

Nhận xét:

$x>2\Rightarrow f\left(x\right)>x>2\Rightarrow f\left(f\left(x\right)\right)>f\left(x\right)>x\Rightarrow(1)$ không có nghiệm $x>2$.

$x<-2\Rightarrow f\left(x\right)<x<-2\Rightarrow f\left(f\left(x\right)\right)<f\left(x\right)<x\Rightarrow(1)$ không có nghiệm $x<-2$.

Ta xét bảng biến thiên của $f\left(f\left(x\right)\right)$ với $-2\le x\le 2$ như sau:



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy phương trình $f\left(f\left(x\right)\right)=x$ có 9 nghiệm.

Câu 21: $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=0\\ f\left(x^2-1\right)=0\end{array}\right.$. $x^2=0\Leftrightarrow x=0$ (nghiệm kép, loại).

$$f\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-1=-1\ (l)\\ x^2-1=a\ \left(-1<a<0\right)\\ x^2-1=b\ \left(0<b<1\right)\\ x^2-1=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{a+1}\\ x=\pm\sqrt{b+1}\\ x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$$

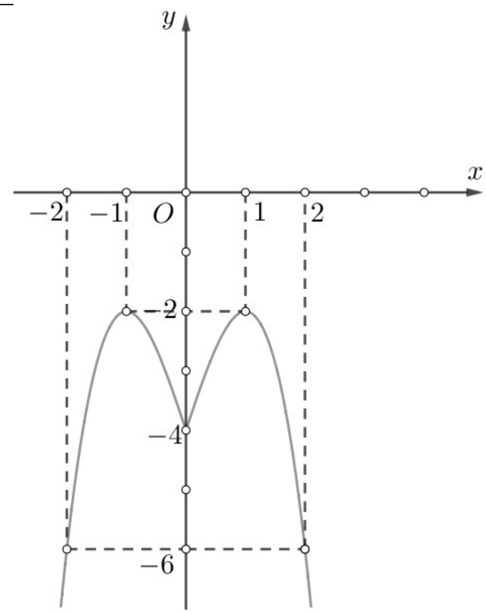
. Vậy $g\left(x\right)$ có 6 cực trị.

Câu 22: $f\left(x\right)$ có hai cực trị là $x=0,x=2\Rightarrow f'\left(x\right)=ax\left(x-2\right)\Rightarrow f\left(x\right)=\frac{a}{3}x^3-ax^2+C.$

$f\left(0\right)=-2,\ f\left(1\right)=-4\Rightarrow a=3,\ c=-2\Rightarrow f\left(x\right)=x^3-3x^2-2$.

$$f\left(1-|x|\right)=\begin{cases}f\left(1-x\right),\ \text{khi } x\ge 0\\ f\left(1+x\right),\ \text{khi } x<0\end{cases}\Rightarrow f\left(1-|x|\right)=\begin{cases}-x^3+3x-4,\ \text{khi } x\ge 0\\ x^3-3x-4,\quad \text{khi } x<0\end{cases}.$$

Ta có đồ thị của $f\left(1-|x|\right)$ như sau:



Đặt $h(x) = f(1-|x|) + m$. Ta có $g(x) = |h(x)|$.

$g(x)$ có 5 cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $h(x) = 0$ có 2 nghiệm đơn $\Leftrightarrow m \geq 4$.

Vậy có 17 giá trị m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 23: Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị là $x = -1;\ x = 1;\ x = 2$.

Đặt $u(x) = |x| + |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 + x - 1, & x \geq 1 \\ -x^2 + x + 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ -x^2 - x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^2 - x - 1, & x \leq -1 \end{cases}$; $u'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{2} \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên ghép trục

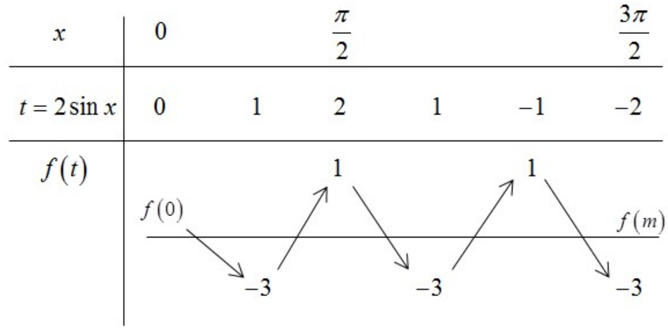
x	$-\infty$		-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	(2)	1	$\frac{5}{4}$	1	$\frac{5}{4}$	1	(2)	$+\infty$
$f(u(x))$		↘	↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗

Hàm số $g(x) = f(u(x))$ có 3 điểm cực đại và 4 điểm cực tiểu.

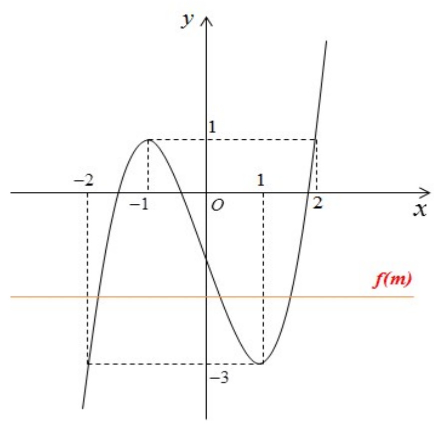
Câu 24: Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta thấy hàm số có các cực trị $x = -1; x = 1$.

Đặt $t = 2\sin x \Rightarrow t' = 2\cos x$; $t' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Ta có bảng ghép trục.



Phương trình $f\left(2\sin x\right)=f\left(m\right)$ có 5 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[0;\dfrac{3\pi}{2}\right]$ khi $-3<f\left(m\right)\le f\left(0\right)$.

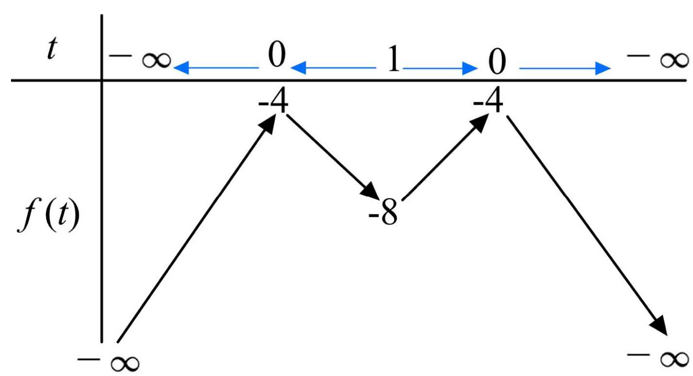


Từ đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ta thấy

$-3<f\left(m\right)\le f\left(0\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m=a\in\left(-2;-1\right)\\ m=b\in\left[0;1\right)\\ m=c\in\left(1;2\right)\end{array}\right.$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=0$.

Câu 25: Đặt $t=1-\left|x\right|\Leftrightarrow f\left(1-\left|x\right|\right)=f\left(t\right)$

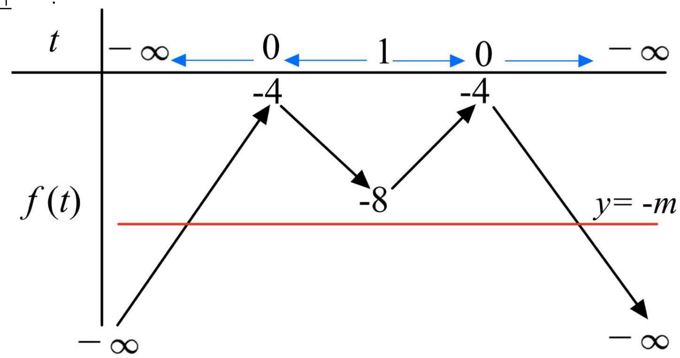
Bảng ghép trục:



Phương trình $g\left(x\right)$ trở thành $g\left(t\right)=\left|f\left(t\right)+m\right|$

YCBT trở thành: $f\left(t\right)+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt

Để $f\left(t\right)+m=0$ có 2 nghiệm phân biệt thì: $-m\le-8\Leftrightarrow m\ge 8\xrightarrow[m\in\left[-20;20\right]]{m\in\mathbb{Z}}$ có 13 giá trị m



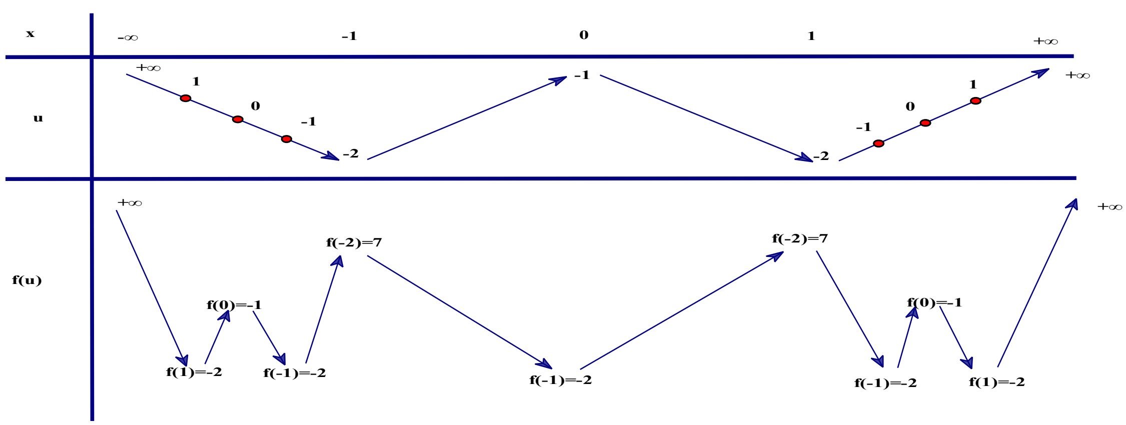
Câu 26: Ta có: $y = f\left[-\sin(3x+\pi) - 3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right] = f\left(4\sin^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - 6\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)$

x	$-\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{6}$					$\frac{7\pi}{6}$					$\frac{13\pi}{6}$
$u=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{1}{2}$ 1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$			$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$			$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
$t=4u^3-6u$	$-\frac{5}{2}$	$-2\sqrt{2}$	-2	$-2\sqrt{2}$	-1	1	$2\sqrt{2}$	2	$2\sqrt{2}$	1	-1	$-2\sqrt{2}$	-2
$y=f(t)$	↘	↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗	↘	↗	

Vậy hàm số trên có 6 điểm cực tiểu.

Câu 27: Đặt $u = \left|x^2-1\right| - 2 \Rightarrow u' = \dfrac{2x.\left(x^2-1\right)}{\left|x^2-1\right|}$

Ta có bảng biến thiên như sau



Từ bảng biến thiên để phương trình có đúng 6 nghiệm thực phân biệt khi $-1 < m < 7$

Suy ra $m \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

Câu 28: Đặt $g(x) = k.(x-2),\ k>0 \Rightarrow h(x) = \int\limits_0^{f(x)} g(t)dt = k\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_0^{f(x)} = k\left(\frac{f^2(x)}{2} - 2f(x)\right).$

$$\Rightarrow h'(x) = k.f'(x)\left(f(x)-2\right) \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = x_1 \in (-2;0) \\ x = x_2 \in (0;2) \\ x = x_3 \in (-2;x_1) \\ x = x_4 \in (x_2;2) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2	x_3		x_1		0		x_2		x_4		2	$-\infty$
$h'(x)$		$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$h(x)$		↘			↗		↘		↗		↘		↗		

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số *h(x)* nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)$.

.

.