

ĐỀ XUẤT ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI MÔN TOÁN 9

(Thời gian làm bài 150 phút, không kể thời gian giao đề)

UBND THÀNH PHỐ TỪ
SƠN
TRƯỜNG THCS TÂN
HỒNG

KÌ THI HỌC SINH GIỎI CẤP THÀNH PHỐ
LỚP 9

NĂM HỌC 2023-2024

Môn thi: TOÁN

Thời gian: **150 phút** (không kể thời gian giao đề)

ĐỀ THI THỬ

Câu 1 (6,0 điểm).

1) Cho biểu thức $S = \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{ab} + 1} + \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{1 - \sqrt{ab}} + 1 \right) : \frac{a + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab}}{1 - ab}$

với $a \geq 0, b \geq 0, a^2 + b^2 > 0$ và $ab \neq 1$.

a) Rút gọn S

b) Tính giá trị của biểu thức S với $a = 3 + 2\sqrt{2}$ và $b = 11 - 6\sqrt{2}$.

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = (m^2 + 1)x + 2$. Tìm m sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng (d) lớn nhất.

Câu 2 (4,0 điểm).

1) Giải phương trình $x^2 + x + 4 - (2 + x)\sqrt{x^2 - x + 4} = 0$.

2) Cho ba số dương x, y và z thỏa mãn $x + y + z \leq 1$.

Chứng minh rằng $\left(\frac{1}{x^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{y^2} - 1 \right) \left(\frac{1}{z^2} - 1 \right) \geq 512$.

Câu 3 (3,0 điểm).

1) Tìm tất cả các nghiệm nguyên thỏa mãn phương trình $(xy - 1)^2 = x^2 + y^2$

2) Cho các đa thức $P(x) = x^2 + ax + b$, $Q(x) = x^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số thực..

a) Tìm tất cả các giá trị của a, b để 1 và a là nghiệm của phương trình $P(x) = 0$.

b) Giả sử phương trình $P(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $Q(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 sao cho $P(x_3) + P(x_4) = Q(x_1) + Q(x_2)$. Chứng minh rằng $|x_1 - x_2| = |x_3 - x_4|$.

Câu 4 (4,5 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, có các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi I, K lần lượt là hình chiếu của điểm D trên các đường thẳng BE, CF . Chứng minh rằng

a) $BH \cdot BE + CH \cdot CF = BC^2$.

b) Trong các tam giác AEF, BDF, CDE có ít nhất một tam giác có diện tích nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác ABC .

Câu 5 (1,5 điểm). Chứng minh rằng: Nếu tất cả các cạnh của một tam giác nhỏ hơn 1 thì diện tích tam giác nhỏ hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Câu 6 (1,0 điểm). Cho a và b là hai số thực phân biệt thỏa mãn điều kiện $a^4 - 4a = b^4 - 4b$.

Chứng minh rằng $0 < a + b < 2$.

.....**Hết**.....

Họ và tên thí sinh..... Số báo danh.....

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Hướng dẫn chấm gồm 05 trang)

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

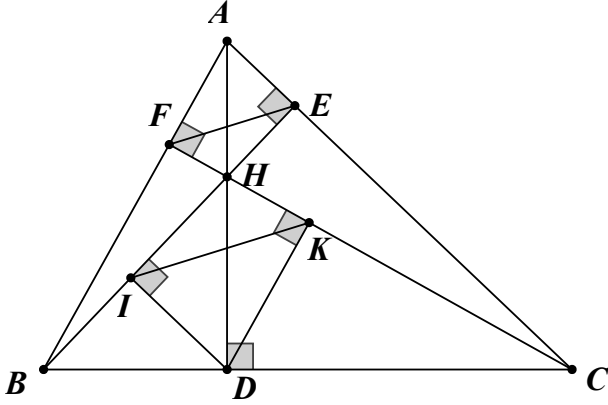
- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì vẫn được điểm theo thang điểm tương ứng.
- Đối với bài toán hình học nếu học sinh chứng minh có sử dụng đến hình vẽ thì yêu cầu phải vẽ hình, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không cho điểm phần tương ứng.
- Điểm toàn bài không làm tròn.

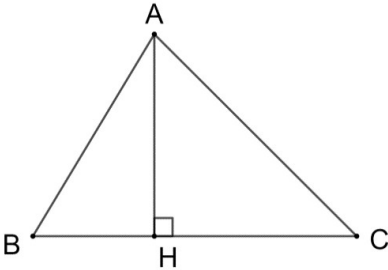
II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
1. (6,0 điểm)	1) Cho biểu thức $S = \left(\frac{\sqrt{a} + 1}{\sqrt{ab} + 1} + \frac{\sqrt{ab} + \sqrt{a}}{1 - \sqrt{ab}} + 1 \right) : \frac{a + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab}}{1 - ab}$ với $a \geq 0, b \geq 0, a^2 + b^2 > 0$ và $ab \neq 1$.	2,5
	a) Rút gọn S	
	Ta có $S = \frac{(\sqrt{a} + 1)(1 - \sqrt{ab}) + (\sqrt{ab} + \sqrt{a})(\sqrt{ab} + 1) + 1 - ab}{1 - ab} : \frac{a + \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab}}{1 - ab}$	0,75
	$= \frac{2\sqrt{a} + 2}{1 - ab} : \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + 1)}{1 - ab}$	0,75
	$= \frac{2\sqrt{a} + 2}{1 - ab} \cdot \frac{1 - ab}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} + 1)}$	0,5
	$= \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$	0,5
	b) Tính giá trị của biểu thức S với $a = 3 + 2\sqrt{2}$ và $b = 11 - 6\sqrt{2}$.	1,5

	$a = 3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2 \Rightarrow \sqrt{a} = 1 + \sqrt{2}.$	0,5
	$b = 11 - 6\sqrt{2} = (3 - \sqrt{2})^2 \Rightarrow \sqrt{b} = 3 - \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}.$	0,5
	$S = \frac{2}{1 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$	0,5
	2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = (m^2 + 1)x + 2$. Tìm m sao cho khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng (d) lớn nhất.	2,0
	$d \cap Ox = A\left(-\frac{2}{(m+2)^2}; 0\right), d \cap Oy = B(0; 2)$ +) $\Rightarrow OA = \frac{2}{(m+2)^2}, OB = 2$ Gọi H là hình chiếu của O trên (d)	0,5
	+) Xét $\triangle AOB$ vuông tại O, đường cao OH, áp dụng hệ thức lượng $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{4} + \frac{(m+2)^2}{4} = \frac{(m+2)^2 + 1}{4} \geq \frac{1}{4}$	0,5
	Để khoảng cách từ gốc tọa độ tới đường thẳng (d) lớn nhất thì OH lớn nhất $\Leftrightarrow \frac{1}{OH^2}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow m + 2 = 0 \Rightarrow m = -2$	0,5
2. (4,0 điểm)	1) Giải phương trình $x^2 + x + 4 - (2 + x)\sqrt{x^2 - x + 4} = 0..$	2,0
	TXĐ: $\mathbb{R}$.	0.25
	Đặt $t = \sqrt{x^2 - x + 4} (t \geq 0)$, khi đó phương trình (1) trở thành $t^2 - (2 + x)t + 2x = 0 \quad (2)$	0.25
	$\Leftrightarrow (t - 2)(t - x) = 0$	0,5
	Với $t_1 = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 - x + 4} = 2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = 1.$	0,5
	Với $t_2 = x \Rightarrow \sqrt{x^2 - x + 4} = x \Rightarrow -x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4.$	0,5
	Thử lại, ta đi tới kết luận $S = \{0; 1; 4\}$.	
	2) Cho ba số dương x, y và z thỏa mãn $x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng $\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right)\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \geq 512.$	2,0

	$\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)\left(\frac{1}{y^2} - 1\right)\left(\frac{1}{z^2} - 1\right) \geq 512$ $\Leftrightarrow (1 - x^2)(1 - y^2)(1 - z^2) \geq 512x^2y^2z^2$ $\Leftrightarrow (1 - x)(1 + x)(1 - y)(1 + y)(1 - z)(1 + z) \geq 512x^2y^2z^2$	0,5
	Do $x + y + z \leq 1$ nên ta có $(1 - x)(1 - y)(1 - z)(1 + x)(1 + y)(1 + z)$ $\geq (y + z)(z + x)(x + y)(2x + y + z)(x + 2y + z)(x + y + 2z) \quad (1)$	0,5
	Chúng minh được: $(x + y)(y + z)(z + x) \geq 8xyz \quad (2).$ Và: $(2x + y + z)(x + 2y + z)(x + y + 2z)$ $\geq 2\sqrt{x + y}\sqrt{x + z} \quad 2\sqrt{y + x}\sqrt{y + z} \quad 2\sqrt{z + x}\sqrt{z + y}$ $= 8(x + y)(y + z)(z + x)$ $\geq 8.8xyz \quad (3).$	0,75
	Từ (1), (2) và (3) suy ra điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.	0,25
3. (3,0 điểm)	1) Tìm tất cả các nghiệm nguyên thỏa mãn phương trình $(xy - 1)^2 = x^2 + y^2$	1,5
	$(xy - 1)^2 = x^2 + y^2 \hat{=} (xy)^2 - 2xy + 1 = x^2 + y^2 \hat{=} (x + y)^2 - (xy)^2 = 1$	0,5
	$\Leftrightarrow (x + y - xy)(x + y + xy) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y - xy = 1 & (1) \\ x + y + xy = 1 & (2) \end{cases} \\ \begin{cases} x + y - xy = -1 & (3) \\ x + y + xy = -1 & (4) \end{cases} \end{cases}$	0,5
	Giải hệ (1) ta được cặp nghiệm (0;1),(1;0) Giải hệ (2) ta được cặp nghiệm (0;-1),(-1;0)	0,5
	2) Cho các đa thức $P(x) = x^2 + ax + b$, $Q(x) = x^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số thực.. a) Tìm tất cả các giá trị của a, b để 1 và a là nghiệm của phương trình $P(x) = 0$. b) Giả sử phương trình $P(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $Q(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 sao cho $P(x_3) + P(x_4) = Q(x_1) + Q(x_2)$. Chứng minh rằng $x_1 - x_2 = x_3 - x_4$.	1,5
	a) Để 1 và a là nghiệm thì ta phải có $P(1) = 1 + a + b = 0$,	0,25

	$P(a) = a^2 + a^2 + b = 0$. Rút $b = -1 - a$ từ phương trình đầu, thay vào phương trình sau, ta được $2a^2 - a - 1 = 0$. Từ đó $a = 1$ hoặc $a = -\frac{1}{2}$, tương ứng $b = -2$ hoặc $b = -\frac{1}{2}$. Vậy có hai cặp (a, b) thỏa mãn điều kiện đề bài là $(1; -2)$ và $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$.	0,25
	b) Do x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của phương trình $P(x) = 0$ nên $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$. Tương tự, ta cũng có $Q(x) = (x - x_3)(x - x_4)$. Điều kiện đề bài $P(x_3) + P(x_4) = Q(x_1) + Q(x_2)$ có thể viết lại thành $(x_3 - x_1)(x_3 - x_2 + x_1 - x_4) + (x_4 - x_1 + x_2 - x_3)(x_4 - x_2) = 0$. Hay $(x_3 - x_2 + x_1 - x_4)(x_3 - x_1 + x_2 - x_4) = 0$. Một cách tương đương, ta có $(x_1 - x_2)^2 = (x_3 - x_4)^2$ hay $ x_1 - x_2 = x_3 - x_4 $. Đây chính là kết quả cần chứng minh.	0,5
	Hay $(x_3 - x_2 + x_1 - x_4)(x_3 - x_1 + x_2 - x_4) = 0$. Một cách tương đương, ta có $(x_1 - x_2)^2 = (x_3 - x_4)^2$ hay $ x_1 - x_2 = x_3 - x_4 $. Đây chính là kết quả cần chứng minh.	0,5
4. (4,5 điểm)	 Vẽ hình đúng, chính xác	0,5
	a) a) Tam giác vuông AEB và tam giác vuông HFB có góc B chung nên đồng dạng với nhau. $\Rightarrow \frac{AB}{BH} = \frac{BE}{BF} \Rightarrow BH \cdot BE = AB \cdot BF \quad (1)$ Tam giác vuông AFC và tam giác vuông HEC có góc C chung nên đồng dạng với nhau. $\Rightarrow \frac{AC}{CH} = \frac{CF}{CE} \Rightarrow CH \cdot CF = AC \cdot CE \quad (1)$ Từ (1) và (2) suy ra: $BH \cdot BE + CH \cdot CF = AB \cdot BF + AC \cdot CE \quad (3)$	0,75

	Suy ra đpcm.	
5. (1,5 điểm)	Chứng minh rằng: Nếu tất cả các cạnh của một tam giác nhỏ hơn 1 thì diện tích tam giác nhỏ hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$.	
	Kẻ $AH \perp BC$ Ta có $AB < 1, AC < 1, BC < 1$ $\Rightarrow \begin{cases} AH < 1 \\ BH \leq \frac{BC}{2} \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông ABH. Ta có: $AH^2 + BH^2 = AB^2$ Mà $AB^2 < 1 \Rightarrow AH^2 + BH^2 < 1$ $\Rightarrow AH^2 < 1 - BH^2$ $\Rightarrow AH^2 < 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ $\Rightarrow AH < \frac{\sqrt{3}}{2}$ $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC < \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Vậy tất cả các cạnh của một tam giác nhỏ hơn 1 thì diện tích tam giác nhỏ hơn $\frac{\sqrt{3}}{4}$	 0.5
		0.5
		0.5
6. (1,0 điểm)	Cho a và b là hai số thực phân biệt thỏa mãn điều kiện $a^4 - 4a = b^4 - 4b$. Chứng minh rằng $0 < a + b < 2$.	1,0
	a) Ta có $a^4 - b^4 = 4(a - b)$, mà $a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$ nên đẳng thức được viết lại thành $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = 4(a - b)$. Mà $a \neq b$ nên $(a + b)(a^2 + b^2) = 4$. Vì $a^2 + b^2 > 0$ (do a, b không thể đồng thời bằng 0) nên ta có $a + b > 0$.	0,5

	Ngoài ra, ta cũng có đánh giá $a^2 + b^2 > \frac{(a+b)^2}{2}$ (đẳng thức không xảy ra vì $a \neq b$) Nên $4 > \frac{(a+b)^3}{2} \Leftrightarrow (a+b)^3 < 8 \Leftrightarrow a+b < 2$. Vậy ta được $0 < a+b < 2$.	0,5
--	---	-----

-----HẾT-----