

ĐỀ CHÍNH THỨC

Câu 1. (2,0 điểm)

a. Cho x và y là hai số thực dương phân biệt; thỏa mãn: $(1-x)(1-y) + 2\sqrt{xy} = 1$

Tính giá trị biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x-y} - \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

b. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2023}$

Chứng minh rằng $\sqrt{a-2023} + \sqrt{b-2023} = \sqrt{a+b}$

Câu 2. (2,0 điểm)

a. Cho các phương trình bậc hai: $x^2 + 6ax + 2b = 0$ (1) và $x^2 + 4bx + 3a = 0$ (2), trong đó $a, b \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu $3a + 2b \geq 2$ thì ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y \end{cases}$$

Câu 3. (1,5 điểm)

a. Tìm các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn phương trình:

$$x^3 + 2024x = 3^y + 1$$

b. Cho $x; y$ là các số tự nhiên sao cho biểu thức $P = x^2 + y^2 + 2xy + x + 3y + 2$ có giá trị là một số chính phương. Tính giá trị biểu thức $Q = x - y + 2023$

Câu 4. (1,25 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC . Đường thẳng qua A song song với BC , cắt đường

tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Trên đoạn thẳng HD lấy điểm I sao cho $IH = \frac{1}{2}ID$. Tia AI cắt BC tại M, chứng minh rằng M là trung điểm của BC.

Câu 5. (2,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi M là hình chiếu vuông góc của điểm D trên cạnh AB và I là trung điểm của đoạn thẳng DE. Tia BI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F.

- Chứng minh tứ giác AMIF nội tiếp đường tròn;
- Tia AH cắt đường tròn (O) tại K ($K \neq A$). Chứng minh ba điểm F, D, K thẳng hàng.

Câu 6. (0,75 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 5$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3a + 3b + 2c}{\sqrt{6(a^2 + 5)} + \sqrt{6(b^2 + 5)} + \sqrt{c^2 + 5}}$

————— HẾT —————

Họ và tên Thí sinh:Số báo danh:Phòng thi.....

Câu 1. (2,0 điểm)

a. Cho x và y là hai số thực dương phân biệt; thỏa mãn: $(1-x)(1-y) + 2\sqrt{xy} = 1$

$$P = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x - y} - \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$(1-x)(1-y) + 2\sqrt{xy} = 1 \Rightarrow (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = xy$$

$$\text{Do đó } \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{xy} \text{ khi } x > y > 0 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = -\sqrt{xy} \text{ khi } y > x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Rút gọn } P = \frac{x\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x - y} - \frac{x}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

$$\text{Từ đó tính được } P = \begin{cases} 1 \text{ khi } x > y > 0 \\ -1 \text{ khi } y > x > 0 \end{cases}$$

b. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2023}$

Chứng minh rằng $\sqrt{a - 2023} + \sqrt{b - 2023} = \sqrt{a + b}$

Do điều kiện $a > 0, b > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2023}$ nên $a > 2023$ và $b > 2023$

$$\text{Biến đổi : } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2023} \Rightarrow \frac{ab}{a+b} = 2023$$

$$\sqrt{a - 2023} + \sqrt{b - 2023} = \sqrt{a - \frac{ab}{a+b}} + \sqrt{b - \frac{ab}{a+b}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^2}{a+b}} = \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{a+b}} = \frac{(\sqrt{a+b})^2}{\sqrt{a+b}} = \sqrt{a+b}$$

Câu 2. (2,0 điểm)

a. Cho các phương trình bậc hai: $x^2 + 6ax + 2b = 0$ (1) và $x^2 + 4bx + 3a = 0$ (2), trong đó $a, b \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng nếu $3a + 2b \geq 2$ thì ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

Xét phương trình (1): $x^2 + 6ax + 2b = 0$, $\Delta'_1 = 9a^2 - 2b$;

Xét phương trình (2): $x^2 + 4bx + 3a = 0$, $\Delta'_2 = 4b^2 - 3a$.

Tổng $\Delta'_1 + \Delta'_2 = 9a^2 - 2b + 4b^2 - 3a$

$$\Delta'_1 + \Delta'_2 = (3a - 1)^2 + (2b - 1)^2 + 3a + 2b - 2$$

Giải thích được $\Delta'_1 + \Delta'_2 \geq 0, \forall a, b$ sao cho $3a + 2b \geq 2$. Do đó, hoặc $\Delta'_1 \geq 0$ hoặc $\Delta'_2 \geq 0$, tức là một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.

b. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ 2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y \end{cases}$$

Hệ phương trình tương đương
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \quad (1) \\ 6x^2 + 9y^2 = 12x - 27y \quad (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế, biến đổi thành $(x - 2)^3 = (y + 3)^3 \Rightarrow x = y + 5$

Thay $x = y + 5$ vào phương trình $2x^2 + 3y^2 = 4x - 9y$, biến đổi để có được phương trình $5y^2 + 25y + 30 = 0$ (*), giải (*) được $y_1 = -2, y_2 = -3$

a. Tìm các cặp số nguyên dương (x;y) thỏa mãn phương trình:

$$x^3 + 2024x = 3^y + 1.$$

Từ đó tính được $x_1 = 3, x_2 = 2$ tương ứng.

Kết luận nghiệm của hệ: (3; -2), (2; -3).

Câu 3. (1,5 điểm)

$$x^3 + 2024x = 3^y + 1 \Rightarrow (x^3 - x) + 2025x = 3^y + 1$$

Chứng minh được $x^3 - x \vdots 3$ và $2025x \vdots 3$, do đó vế trái $x^3 + 2024x \vdots 3$

Giải thích vế phải $3^y + 1 \not\vdots 3$, kết luận không tồn tại cặp số nguyên dương (x;y)

b. Cho x; y là các số tự nhiên sao cho biểu thức $P = x^2 + y^2 + 2xy + x + 3y + 2$ có giá trị là một số chính phương. Tính giá trị biểu thức $Q = x - y + 2023$

Chứng minh được

$$P = x^2 + y^2 + 2xy + x + 3y + 2 < x^2 + y^2 + 2xy + 4 + 4x + 4y = (x + y + 2)^2$$

$$\text{Và } P = x^2 + y^2 + 2xy + x + 3y + 2 > (x + y)^2$$

$$\text{Nên } (x + y)^2 < P < (x + y + 2)^2$$

Vì P là số chính phương nên $P = x^2 + y^2 + 2xy + x + 3y + 2 = (x + y + 1)^2$ (*)

Từ (*) biến đổi để có được $x - y = 1$. Suy ra $Q = x - y + 2023 = 1 + 2023 = 2024$

Câu 4. (1,25 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh BC. Đường thẳng qua A song song với BC, cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Trên đoạn thẳng HD lấy điểm I sao

cho $\frac{IH}{2} = \frac{1}{2}ID$. Tia AI cắt BC tại M, chứng minh rằng M là trung điểm của BC

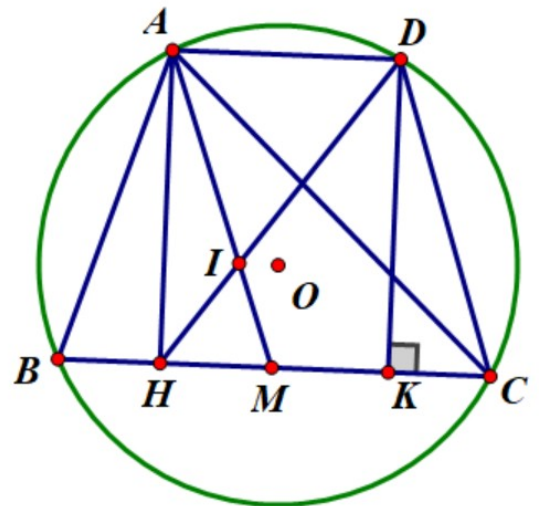
$$\text{Chứng minh được } \frac{HM}{AD} = \frac{IH}{ID} = \frac{1}{2} \quad (1)$$

Giải thích: do ABCD là hình thang nội tiếp nên là hình thang cân.

Kẻ DK vuông góc với BC tại K. Chứng minh được tứ giác ADKH là hình chữ nhật, suy ra

$$AD = HK \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{HM}{HK} = \frac{1}{2}$, hay M là trung điểm của HK



Chứng minh $\triangle AHB = \triangle DKC$, suy ra $HB = KC$
 Từ đó suy ra M là trung điểm của BC

Câu 5. (2,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Gọi M là hình chiếu vuông góc của điểm D trên cạnh AB và I là trung điểm của đoạn thẳng DE. Tia Bì cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F.

- Chứng minh tứ giác AMIF nội tiếp đường tròn.
- Tia AH cắt đường tròn (O) tại K ($K \neq A$). Chứng minh ba điểm F, D, K thẳng hàng.

Chứng minh được tam giác IME cân tại I, suy ra $\angle IME = \angle IEM$ (1) Chứng minh tứ giác BEDC nội tiếp, suy ra $\angle IEM = \angle ICB$ (cùng bù với $\angle BED$) (2) Có $\angle AFI = \angle ICB$ (cùng chắn $\widehat{AB}$ của (O)) (3).

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\angle IME = \angle AFI$, do đó AMIF là tứ giác nội tiếp.

Tia AH cắt đường tròn (O) tại K ($K \neq A$). Chứng minh ba điểm F, D, K thẳng hàng.

Chứng minh $\triangle BMI = \triangle BFA$, suy ra $BM \cdot BA = BI \cdot BF$ (1)

Trong tam giác DAB vuông tại A, đường cao DM, có $BD^2 = BM \cdot BA$ (2)

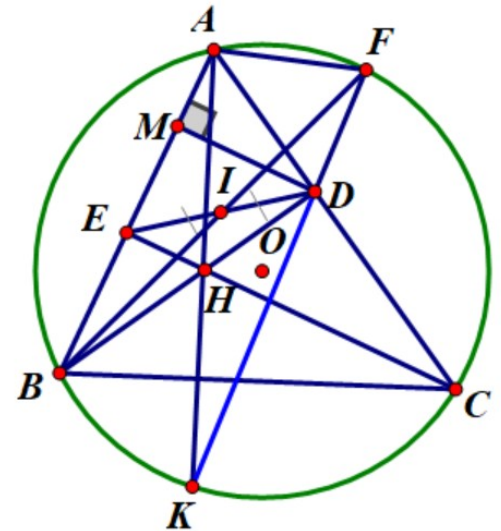
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BD}{BF} = \frac{BI}{BD}$, từ đó chứng minh được $\triangle BDI = \triangle BFD$ (c.g.c)

Suy ra $\angle BID = \angle BFD$ (3)

Chứng minh tứ giác AEHD nội tiếp, suy ra $\angle BID = \angle BAK$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\angle BFD = \angle BAK$.

Giải thích được $\angle BFK = \angle BAK$, suy ra $\angle BFD = \angle BFK$, do đó hai tia FD và FK trùng nhau; tức là ba điểm F, D, K thẳng hàng.



Câu 6. (0,75 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 5$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{3a + 3b + 2c}{\sqrt{6(a^2 + 5)} + \sqrt{6(b^2 + 5)} + \sqrt{c^2 + 5}}$

Biến đổi được $a^2 + 5 = (a + b)(a + c)$. Áp dụng bất đẳng thức Co-si có

$$\sqrt{6(a^2 + 5)} = \sqrt{6(a + b)(a + c)} \leq \frac{3(a + b) + 2(a + c)}{2} = \frac{5a + 3b + 3c}{2} \cdot \sqrt{6(a + b)(a + c)} \leq 3$$

Chứng minh tương tự, suy ra $\sqrt{6(b^2 + 5)} \leq \frac{5b + 3a + 2c}{2}$; $\sqrt{c^2 + 5} \leq \frac{a + b + 2c}{2}$

$$P = \frac{3a + 3b + 2c}{\sqrt{6(a^2 + 5)} + \sqrt{6(b^2 + 5)} + \sqrt{c^2 + 5}} \geq \frac{3a + 3b + 3c}{\frac{9a + 9b + 6c}{2}} = \frac{2(3a + 3b + 2c)}{3(3a + 3b + 2c)}$$

Do đó

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{2}{3} \Leftrightarrow a = b = 1, c = 2$