

ĐỀ SỐ 8: ĐỀ BỒI DƯỠNG HSG CẤP HUYỆN LỚP 8

NĂM HỌC: 2023-2024

Thời gian làm bài 120 phút

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Chọn một phương án đúng

Câu 1. Sau khi rút gọn biểu thức $Q = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{x^2 - 3x} \right) : \left(\frac{x^2}{27 - 3x^2} + \frac{1}{x + 3} \right)$ với $x \neq -3; 0; 3$ là:

A. $Q = \frac{x+3}{x}$

B. $Q = -\frac{x-3}{x}$

C. $Q = \frac{x-3}{x}$

D. $Q = \frac{-x-3}{x}$

Câu 2. Cho $A = \frac{2}{60.63} + \frac{2}{63.66} + \dots + \frac{2}{117.120} + \frac{2}{2003}$ và $B = \frac{5}{40.44} + \frac{5}{44.48} + \dots + \frac{5}{76.80} + \frac{5}{2003}$ thì:

A. $A > B$

B. $A = B$

C. $A < B$

D. $A = 2B$

Câu 3. Giá trị của biểu thức: $C = \frac{a}{ab + a + 2017} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{2017c}{ac + 2017c + 2017}$.

Biết $abc = 2017$ là:

A. 2017

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 4. Trong hộp có 6 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt là 2; 3; 5; 6; 11; 17. Lấy ngẫu nhiên một tấm thẻ từ hộp. Xác suất thực nghiệm của biến cố “Số ghi trên thẻ là số chẵn” là:

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{2}{5}$

Câu 5. Cho bảng thống kê về tỉ số phần trăm các loại sách trong tủ sách của lớp 8A như sau :

Loại sách	Tỉ số phần trăm
Lịch sử Việt Nam	25%
Truyện tranh	20%
Thế giới động vật	30%
Các loại sách khác	25%

Cho các phát biểu sau :

(I) Dữ liệu định lượng là các loại sách Lịch sử Việt Nam, Truyện tranh, thế giới động vật, các loại sách khác;

(II) Dữ liệu định tính là tỉ số phần trăm: 25%; 20%; 30%; 25%;

(III) Dữ liệu chưa hợp lí là tỉ số phần trăm.

Số phát biểu sai là :

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Câu 6. Cho đa thức $A(x) = ax^2 + bx + c$. Xác định b biết rằng khi chia đa thức $A(x)$ cho $x - 1$ và $x + 1$ đều có cùng số dư là:

A. 0

B. 1

C. 2

D. -1

Câu 7. Dư của phép chia đa thức $x^{27} + x^9 + x^3 + x$ cho đa thức $x^2 - 1$ là:

A. $4x - 1$

B. $4x$

C. $1 - 4x$

D. $2x$

Câu 8. Cho đa thức $P(x) = x^2 + bx + c$, trong đó b và c là các số nguyên. Biết rằng đa thức $x^4 + 6x^2 + 25$ và $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$ đều chia hết cho $P(x)$. Giá trị $P(1)$ là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 9. Cho tứ giác ABCD có $\angle C = 50^\circ$, $\angle D = 80^\circ$, $AD = BC$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các AB và CD. Số đo $\angle EFC$ là:

- A. 55° B. 75° C. 90° D. 105°

Câu 10. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H, trọng tâm I; Giao điểm 3 đường trung trực là O, trung điểm của BC là M. Giá trị biểu thức: $\sqrt{\frac{IO^2 + OM^2}{IH^2 + HA^2}}$ là:

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{16}$

Câu 11. Tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BD. Tia phân giác của góc A cắt BD tại I. Biết $IB = 10\sqrt{5}$ cm, $ID = 5\sqrt{5}$ cm, Diện tích của tam giác ABC là:

- A. 500cm^2 ; B. 560cm^2 C. 600cm^2 ; D. 660cm^2

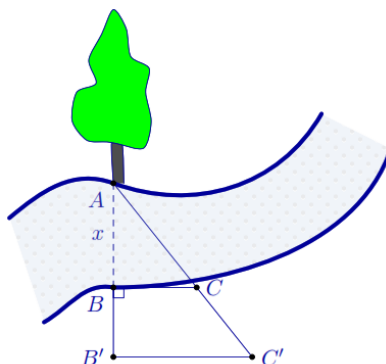
Câu 12. Bạn An gieo một con xúc xắc 50 lần và thống kê kết quả các lần gieo ở bảng sau:

Mặt	1 chấm	2 chấm	3 chấm	4 chấm	5 chấm	6 chấm
Số lần xuất hiện	10	8	6	12	4	10

Xác suất thực nghiệm của biến cố “Gieo được mặt có số chấm chẵn” là:

- A. 0,6 B. 0,7 C. 0,8 D. 0,5

Câu 13: Người ta tiến hành đo đạc các yếu tố cần thiết để tính chiều rộng của một khúc sông mà không cần phải sang bờ bên kia sông (như hình vẽ). Biết $BB' = 20\text{ m}$, $BC = 30\text{ m}$ và $B'C' = 40\text{ m}$.

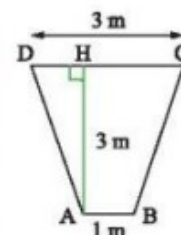


Khi đó, độ rộng x của khúc sông là:

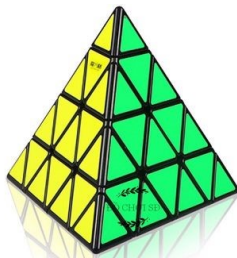
- A. 60 m B. 15 m . C. 80 m D. $26,7\text{ m}$

Câu 14: Một khung cửa sổ có dạng hình thang cân có chiều cao 3 m , hai đáy là 3 m và 1 m (hình bên). Độ dài cạnh bên của khung cửa bằng:

- A. $\sqrt{10}\text{ m}$
B. 4 m
C. $\sqrt{13}\text{ m}$
D. 6 m



Câu 15: Tính thể tích khối rubik có dạng hình chóp tam giác đều (hình bên). Biết khối rubik này có bốn mặt là các tam giác đều bằng nhau cạnh $5,2\text{cm}$ và chiều cao của tam giác là $4,5\text{cm}$; chiều cao của khối rubik bằng $4,2\text{cm}$.



- A. $16,38\text{cm}^3$; B. $32,76\text{cm}^3$; C. $49,14\text{cm}^3$; D. $98,28\text{cm}^3$

Câu 16. Một đội tuyển tham dự kỳ thi học sinh giỏi 3 môn Văn, Toán, Ngoại ngữ do thành phố tổ chức đạt được 15 giải. Biết rằng:

Học sinh nào cũng có giải.

Bất kỳ môn nào cũng có ít nhất 1 học sinh chỉ đạt 1 giải.

Bất kỳ hai môn nào cũng có ít nhất 1 học sinh đạt giải cả hai môn.

Có ít nhất 1 học sinh đạt giải cả 3 môn.

Tổng số học sinh đạt 3 giải, 2 giải, 1 giải tăng dần.

Hỏi đội tuyển học sinh giỏi đó có bao nhiêu học sinh?

- A. 8 B. 10 C. 15 D. 12

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,5 điểm): a. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì: $7^{n+2} + 8^{2n+1} : 57$

b. Tìm số nguyên tố p sao cho $p + 10; p + 14$ cũng là nguyên tố.

Câu 2 (3,0 điểm):

a. Giải phương trình $(x^2 - 4)^3 - (7x - 10)^3 = (x^2 - 7x + 6)^3$

b. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn đồng nhất hệ thức: $xP(x-1) = (x-2)P(x)$ (1), với

$\forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 3 (4,5 điểm): Cho hình vuông $ABCD$, M là điểm bất kì trên cạnh BC , trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa C dựng hình vuông $AMHN$, Qua M dựng đường thẳng d song song với AB , d cắt AH ở E , cắt DC ở F

a) Chứng minh rằng $BM = ND$

b) Chứng minh rằng N, C, D thẳng hàng

c) $EMFN$ là hình gì?

d) Chứng minh $DF + BM = FM$ và chu vi tam giác MCF không đổi khi M thay đổi trên BC .

Câu 4 (1,0 điểm): Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$$

---Hết---

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Mỗi câu đúng 0,5 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	D	C	B	A	B	A	B	D	D	C
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	C	A	A	A	A	B				

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu 1: Cho biểu thức $Q = \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{x^2 - 3x} \right) : \left(\frac{x^2}{27 - 3x^2} + \frac{1}{x + 3} \right)$

Rút gọn P

Kết quả: ĐKXĐ: $x \neq -3; 0; 3$

$$A = \frac{x^2 - 3x + 9}{3x(x-3)} : \frac{x^2 - 3x + 9}{3(3-x)(3+x)} = -\frac{x+3}{x}$$

Câu 2. So sánh: $A = \frac{2}{60.63} + \frac{2}{63.66} + \dots + \frac{2}{117.120} + \frac{2}{2003}$ và

$$B = \frac{5}{40.44} + \frac{5}{44.48} + \dots + \frac{5}{76.80} + \frac{5}{2003}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Lại áp dụng cách làm ở bài trên ta có: } A &= \frac{2}{3} \left(\frac{3}{60.63} + \frac{3}{63.66} + \dots + \frac{3}{117.120} \right) + \frac{2}{2003} = \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{60} - \frac{1}{63} + \frac{1}{63} - \frac{1}{66} + \dots + \frac{1}{117} - \frac{1}{200} \right) + \frac{2}{2003} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{60} - \frac{1}{120} \right) + \frac{2}{2003} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{120} + \frac{2}{2003} = \\ &= \frac{1}{180} + \frac{2}{2003} \end{aligned}$$

T-ong tự cách làm trên ta có:

$$B = \frac{5}{4} \left(\frac{1}{40} - \frac{1}{80} \right) + \frac{5}{2003} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{80} + \frac{5}{2003} = \frac{1}{64} + \frac{5}{2003}$$

Ta lại có: $2A = 2 \left(\frac{1}{180} + \frac{2}{2003} \right) = \frac{2}{180} + \frac{4}{2003} = \frac{1}{90} + \frac{4}{2003}$ Từ đây ta thấy ngay

$B > 2A$ thì hiển nhiên $B > A$

Câu 3. b) Tính giá trị của biểu thức: $C = \frac{a}{ab + a + 2017} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{2017c}{ac + 2017c + 2017}$

Biết $abc = 2017$.

$$C = \frac{a}{ab + a + abc} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{abc^2}{ac + abc^2 + abc}$$

$$= \frac{1}{bc+b+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{bc}{1+bc+b} = \frac{bc+b+1}{bc+b+1} = 1$$

Câu 4. Giải bất phương trình : $x^3 + 5x^2 + 3x - 9 > 0$

$$x^3 + 5x^2 + 3x - 9 > 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+3)^2 > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 (x \neq -3)$$

$$\Leftrightarrow x > 1$$

Câu 5. Tính tổng các nghiệm của phương trình sau $\left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \left| (-3, 2) + \frac{2}{5} \right|$

Giải

$$\left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \left| (-3, 2) + \frac{2}{5} \right| \Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \left| \frac{-16}{5} + \frac{2}{5} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{3} \right| + \frac{4}{5} = \frac{14}{5} \Leftrightarrow \left| x - \frac{1}{3} \right| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{3} = 2 \\ x - \frac{1}{3} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \\ x = -2 + \frac{1}{3} = \frac{-5}{3} \end{cases}$$

Câu 6. Cho đa thức $A(x) = ax^2 + bx + c$. Xác định b biết rằng khi chia đa thức $A(x)$ cho $x - 1$ và $x + 1$ đều có cùng số dư.

$$\text{Đặt } A(x) = ax^2 + bx + c = (x-1).Q_1 + R \quad (1)$$

$$A(x) = ax^2 + bx + c = (x+1).Q_2 + R \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $A(1) = a + b + c = R$; Từ (2) suy ra $A(-1) = a - b + c = R$

$$\Rightarrow a + b + c = a - b + c \Rightarrow b = -b \Rightarrow 2b = 0 \Rightarrow b = 0$$

Câu 7. Tìm dư của phép chia đa thức $x^{27} + x^9 + x^3 + x$ cho đa thức $x^2 - 1$

$$x^{27} + x^9 + x^3 + x = x^{27} - x + x^9 - x + x^3 - x + 4x$$

$$= x(x^{26} - 1) + x(x^8 - 1) + x(x^2 - 1) + 4x$$

$$\dots \Rightarrow x^{27} + x^9 + x^3 + x \text{ chia cho } 4x$$

Câu 8. Cho đa thức $P(x) = x^2 + bx + c$, trong đó b và c là các số nguyên. Biết rằng đa thức $x^4 + 6x^2 + 25$ và $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$ đều chia hết cho $P(x)$. Tính $P(1)$

$$x^4 + 6x^2 + 25 = (x^2 + 2x + 5)(x^2 - 2x + 5)$$

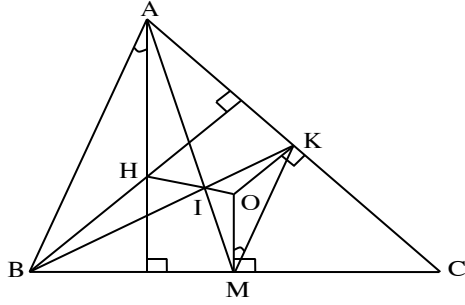
$$3x^4 + 4x^2 + 28x + 5 = (3x^2 + 6x + 1)(x^2 - 2x + 5)$$

Vì các đa thức $x^4 + 6x^2 + 25$ và $3x^4 + 4x^2 + 28x + 5$ đều chia hết cho $P(x) = x^2 + bx + c$ nên $P(x)$ là nhân tử chung bậc hai của hai đa thức trên, nên $P(x) = x^2 - 2x + 5$

$$P(1) = 4$$

Câu 9. Cho tứ giác ABCD có $\angle C = 50^\circ$, $\angle D = 80^\circ$, $AD = BC$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các AB và CD. Số đo $\angle EFC$ là: 105° (Bồi dưỡng HSG toán Hình học 8 Trang 131)

Câu 10. Cho tam giác nhọn ABC có trực tâm H, trọng tâm I; Giao điểm 3 đường trung trực là O, trung điểm của BC là M. Giá trị biểu thức: $\sqrt{\frac{IO^2 + OM^2}{IH^2 + HA^2}}$ là:



a) Ta có $MO \parallel HA$ (cùng vuông góc với BC)
 $OK \parallel BH$ (cùng vuông góc với AC)
 $\Rightarrow \angle KOM = \angle BHA$ (góc có cạnh tương ứng song song)
 $MK \parallel AB$ (M, K là trung điểm BC và AC)
 $\Rightarrow \angle HAB = \angle OKM$ (góc có cạnh tương ứng song song)
 $\Rightarrow \triangle ABH$ đồng dạng với $\triangle MKO$
 $\Rightarrow \frac{MO}{AH} = \frac{MK}{AB} = \frac{1}{2}$

Xét $\triangle AIH$ và $\triangle MIO$ có $\frac{MO}{AH} = \frac{MI}{AI} = \frac{1}{2}$ và $\angle OMI = \angle HAI$ (so le trong)

$\Rightarrow \triangle AIH$ đồng dạng với $\triangle MIO \Rightarrow \frac{IO}{IH} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{IO}{IH} = \frac{OM}{HA} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \frac{IO^2}{IH^2} = \frac{OM^2}{HA^2} = \frac{IO^2 + OM^2}{IH^2 + HA^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{\frac{IO^2 + OM^2}{IH^2 + HA^2}} = \frac{1}{2}$$

Câu 11. Tam giác ABC vuông tại A , đường phân giác BD . Tia phân giác của góc A cắt BD tại I . Biết $IB = 10\sqrt{5}$ cm, $ID = 5\sqrt{5}$ cm, Diện tích của tam giác ABC là: 600cm^2 (Bồi dưỡng HSG toán Hình học 8 Trang 134)

Câu 12. Cho $\triangle ABC$, có $B < 60^\circ$ phân giác AD

a) Chứng minh $AD < AB$

b) Gọi AM là phân giác của $\triangle ADC$. Chứng minh rằng $BC > 4DM$

Giải

a) Ta có $\angle ADB = C + \frac{A}{2} > \frac{A+C}{2} = \frac{180^\circ - B}{2} = 60^\circ$

$\Rightarrow \angle ADB > B \Rightarrow AD < AB$

b) Gọi $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AD = d$

Trong $\triangle ADC$, AM là phân giác ta có

$$\frac{DM}{CM} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{DM}{CM + DM} = \frac{AD}{AD + AC} \Rightarrow \frac{DM}{CD} = \frac{AD}{AD + AC}$$

$$\Rightarrow DM = \frac{CD \cdot AD}{AD + AC} = \frac{CD \cdot d}{b + d}; CD = \frac{ab}{b + c} \text{ (Vận dụng bài$$

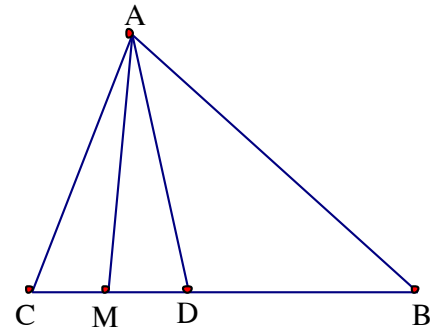
$$1) \Rightarrow DM = \frac{abd}{(b + c)(b + d)}$$

Để c/m $BC > 4DM$ ta c/m $a > \frac{4abd}{(b + c)(b + d)}$ hay $(b + d)(b + c) > 4bd$ (1)

Thật vậy : do $c > d \Rightarrow (b + d)(b + c) > (b + d)^2 \geq 4bd$. Bất đẳng thức (1) được c/m

Câu 13. Cho $\triangle ABC$, trung tuyến AM , các tia phân giác của các góc $\angle AMB$, $\angle AMC$ cắt AB , AC theo thứ tự ở D và E

a) Chứng minh $DE \parallel BC$



b) Cho $BC = a$, $AM = m$. Tính độ dài DE

c) Tìm tập hợp các giao điểm I của AM và DE nếu $\triangle ABC$ có BC cố định, $AM = m$ không đổi

d) $\triangle ABC$ có điều kiện gì thì DE là đường trung bình của nó

Giải

a) MD là phân giác của $\angle AMB$ nên $\frac{DA}{DB} = \frac{MB}{MA}$ (1)

ME là phân giác của $\angle AMC$ nên $\frac{EA}{EC} = \frac{MC}{MA}$ (2)

Từ (1), (2) và giả thiết $MB = MC$ ta suy ra $\frac{DA}{DB} = \frac{EA}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$

b) $DE \parallel BC \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AI}{AM}$. Đặt $DE = x$

$$\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{m - \frac{x}{2}}{m} \Rightarrow x = \frac{2a.m}{a + 2m}$$

c) Ta có: $MI = \frac{1}{2} DE = \frac{a.m}{a + 2m}$ không đổi $\Rightarrow I$ luôn cách M một đoạn không đổi

nên tập hợp các điểm I là đường tròn tâm M , bán kính $MI = \frac{a.m}{a + 2m}$ (Trừ giao điểm của nó với BC)

d) DE là đường trung bình của $\triangle ABC \Leftrightarrow DA = DB \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow \triangle ABC$ vuông ở A

Câu 14. Cho tứ giác $ABCD$ có M là trung điểm CD , N là trung điểm CB . Biết AM , AN cắt BD thành ba đoạn bằng nhau. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình bình hành

Giải

Gọi E, F là giao điểm của AM, AN với BD ; G, H là giao điểm của MN với AD, BD

$MN \parallel BC$ (MN là đường trung bình của $\triangle BCD$)

$\Rightarrow$ Tứ giác $HBFM$ là hình thang có hai cạnh bên đồng quy tại A , N là trung điểm của đáy BF nên theo bổ đề hình thang thì N là trung điểm của đáy MH

$\Rightarrow MN = NH$ (1)

Tương tự: trong hình thang $CDEN$ thì M là trung điểm của $GN \Rightarrow GM = MN$ (2)

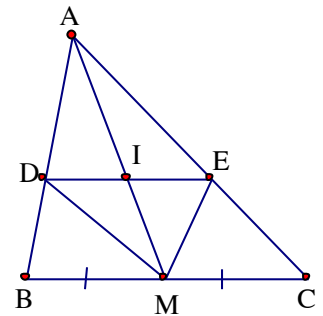
Từ (1) và (2) suy ra $GM = MN = NH$

Ta có $\triangle BNH = \triangle CNM$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle BHN = \angle CMN \Rightarrow BH \parallel CM$ hay $AB \parallel CD$ (a)

Tương tự: $\triangle GDM = \triangle NCM$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle GDM = \angle CNM \Rightarrow GD \parallel CN$ hay $AD \parallel CB$

(b)

Từ (a) và (b) suy ra tứ giác $ABCD$ có các cặp cạnh đối song song nên là hình bình hành



Câu 15. Cho hình chữ nhật ABCD có M, N thứ tự là trung điểm của AD, BC. Gọi E là một điểm bất kỳ thuộc tia đối của tia DC, K là giao điểm của EM và AC. Chứng minh rằng: NM là tia phân giác của KNE

Giải

Gọi H là giao điểm của KN và DC, giao điểm của AC và MN là I thì $IM = IN$

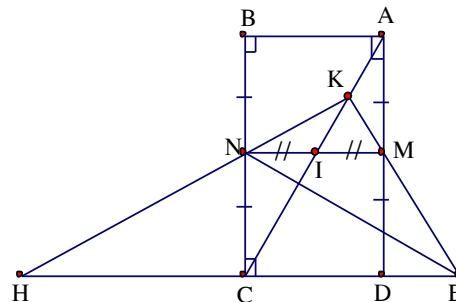
Ta có: $MN \parallel CD$ (MN là đường trung bình của hình chữ nhật ABCD)

$\Rightarrow$ Tứ giác EMNH là hình thang có hai cạnh bên EM và HN đồng quy tại K và I là trung điểm của MN nên C là trung điểm của EH

Trong $\triangle ENH$ thì NC vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên $\triangle ENH$ cân tại N $\Rightarrow$ NC là tia phân giác của $\angle ENH$ mà $NC \perp MN$ (Do $NM \perp BC - MN \parallel AB$)

$\Rightarrow$ NM là tia phân giác góc ngoài tại N của $\triangle ENH$

Vậy NM là tia phân giác của KNE



Câu 16: Một đội tuyển tham dự kỳ thi học sinh giỏi 3 môn Văn, Toán, Ngoại ngữ do thành phố tổ chức đạt được 15 giải. Hỏi đội tuyển học sinh giỏi đó có bao nhiêu học sinh? Biết rằng:

Học sinh nào cũng có giải.

Bất kỳ môn nào cũng có ít nhất 1 học sinh chỉ đạt 1 giải.

Bất kỳ hai môn nào cũng có ít nhất 1 học sinh đạt giải cả hai môn.

Có ít nhất 1 học sinh đạt giải cả 3 môn.

Tổng số học sinh đạt 3 giải, 2 giải, 1 giải tăng dần.

Bài giải:

Gọi số học sinh đạt giải cả 3 môn là a (học sinh)

Gọi số học sinh đạt giải cả 2 môn là b (học sinh)

Gọi số học sinh chỉ đạt giải 1 môn là c (học sinh)

Tổng số giải đạt được là:

$$3 \times a + 2 \times b + c = 15 \text{ (giải).}$$

Vì tổng số học sinh đạt 3 giải, 2 giải, 1 giải tăng dần nên $a < b < c$.

Vì bất kỳ 2 môn nào cũng có ít nhất 1 học sinh đạt giải cả 2 môn nên:

- Có ít nhất 1 học sinh đạt giải cả 2 môn Văn và Toán.

- Có ít nhất 1 học sinh đạt giải cả 2 môn Toán và Ngoại Ngữ.

- Có ít nhất 1 học sinh đạt giải cả 2 môn Văn và Ngoại Ngữ.

Do vậy $b = 3$.

Giả sử $a = 2$ thì b bé nhất là 3, c bé nhất là 4; do đó tổng số giải bé nhất là:

$$3 \times 2 + 2 \times 3 + 4 = 16 > 15 \text{ (loại). Do đó } a < 2, \text{ nên } a = 1.$$

Ta có: $3 \times 1 + 2 \times b + c = 15$ suy ra: $2 \times b + c = 12$.

Nếu $b = 3$ thì $c = 12 - 2 \times 3 = 6$ (đúng).

Nếu $b = 4$ thì $c = 12 - 2 \times 4 = 4$ (loại vì trái với điều kiện $b < c$)

Vậy có 1 bạn đạt 3 giải, 3 bạn đạt 2 giải, 6 bạn đạt 1 giải.

Đội tuyển đó có số học sinh là:

$$1 + 3 + 6 = 10 \text{ (bạn).}$$

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1(3,0 điểm): a.Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì: $7^{n+2} + 8^{2n+1} : 57$

b. Tìm số nguyên tố p sao cho $p+10; p+14$ cũng là nguyên tố.

a. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì: $7^{n+2} + 8^{2n+1} : 57$

Giải:

- Với $n = 1: A_1 = 7^3 + 8^3 = 855 + 57$

- Giả sử $A_k + 57$ nghĩa là $7^{k+2} + 8^{2k+1} : 57$

$$\Rightarrow A_{k+1} = 7^{k+3} + 8^{2k+3} = 7 \cdot 7^{k+2} + 64 \cdot 8^{2k+1} = 7(7^{k+2} + 8^{2k+1}) + 57 \cdot 8^{2k+1}$$

Vì $7^{k+2} + 8^{2k+1}$ (giả thiết qui nạp) và $57 \cdot 8^{2k+1} : 57$

$$\Rightarrow A_{k+1} : 57$$

Vậy theo nguyên lý qui nạp $A = 7^{n+2} + 8^{2n+1} : 57$.

b. Tìm số nguyên tố p sao cho $p+10; p+14$ cũng là nguyên tố.

nếu $p = 2$ (p nguyên tố) $p+10=12$ không nguyên tố (loại)
Nếu $p = 3$ (nguyên tố) $\Rightarrow p+10=13; p+14=17$ nguyên tố
Nếu $p > 3; \exists k \in \mathbb{N}$ suy ra p có dạng $p = 3k+1; p = 3k+2$
Khi $p = 3k+1 \Rightarrow p+14 = 3k+15 = 3(k+5)$ chia hết cho 3 (loại)
Khi $p = 3k+2 \Rightarrow p+10 = 3k+12 = 3(k+4)$ chia hết cho 3 (loại)
Vậy $p=3$

Câu 2 (4,0 điểm):

a. Giải phương trình $(x^2 - 4)^3 - (7x - 10)^3 = (x^2 - 7x + 6)^3$.

Ta có $(x^2 - 4)^3 - (7x - 10)^3 = (x^2 - 7x + 6)^3 \Leftrightarrow (x^2 - 7x + 6)^3 + (7x - 10)^3 + (4 - x)^3 = 0$ đặt $x^2 - 7x + 6 = a$; $7x - 10 = b$; $4 - x = c$ ta có $a + b + c = 0$ và $a^3 + b^3 + c^3 = 0$

Ta chứng minh được $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ nên ta có $3abc = 0$ nên $a = 0$ hoặc $b = 0$; $c = 0$

xét các khả năng ta tìm được $x = 1$; $x = 6$; $x = \frac{10}{7}$; $x = \pm 2$

b. Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ thỏa mãn đồng nhất hệ thức : $xP(x-1) = (x-2)P(x)$ (1) , với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Hướng dẫn

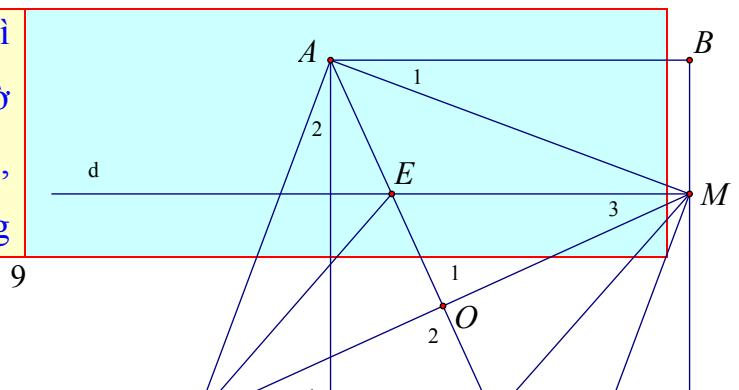
Thay vào đồng nhất ta có $P(0) = P(1) = 0$, tức là đa thức $P(x)$ có các nghiệm là 0 và 1. Suy ra $P(x)$ chia hết cho $x^2 - x$.

Viết lại $P(x) = (x^2 - x)Q(x)$, $Q(x)$ là các đa thức có hệ số thực và thay vào (1) đồng nhất ta có $Q(x) = Q(x-1)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Lần lượt thay các giá trị $x = 0; -1; -2 \dots$ ta nhận được $Q(0) = Q(-1) = Q(-2) \dots$ Do đó $Q(x) = a$ là hằng số .

Vậy $P(x) = (x^2 - x)a$ (a là hằng số tùy ý).

Câu 3 (4,0 điểm):

Cho hình vuông $ABCD$, M là điểm bất kỳ trên cạnh BC , trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa C dựng hình vuông $AMHN$, Qua M dựng đường thẳng d song song



với AB , d cắt AH ở E , cắt DC ở F

a) Chứng minh rằng $BM = ND$

b) Chứng minh rằng N, C, D thẳng hàng

c) $EMFN$ là hình gì?

d) Chứng minh $DF + BM = FM$ và chu vi tam giác MCF không đổi khi M thay đổi trên BC .

Lời giải

a) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow A_1 + MAD = 90^\circ$ (1)

Vì $AMHN$ là hình vuông $\Rightarrow A_2 + MAD = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\Rightarrow A_1 = A_2$

Ta có $\triangle AND = \triangle AMB$ (cgc) $\Rightarrow B = D_1 = 90^\circ, BM = ND$

b) $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow D_2 = 90^\circ \Rightarrow D_1 + D_2 = NDC = 180^\circ$

Nên N, C, D thẳng hàng

c) Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AH và MN của hình vuông $AMHN$

$\Rightarrow O$ là tâm đối xứng của hình vuông $AMHN$

$\Rightarrow AH$ là đường trung trực của đoạn MN , mà $E, F \in AH$

$\Rightarrow EM = EN$ và $FM = FN$ (3)

$\Rightarrow O_1 = O_2 \Rightarrow EM = NF$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow EM = EN = NF = FM \Rightarrow MENF$ là hình thoi (5)

d) Từ (5) suy ra $FM = FN = FD + DN$, mà $DN = MB$ (cmt) $\Rightarrow MF = DF + BM$

Gọi chu vi của $\triangle MCF$ là P và cạnh hình vuông $ABCD$ là a

Ta có: $P = MC + CF + MF = MC + CF + BM + DF$ vì $(MF = DF + MB)$

$= (MC + MB) + (CF + FD) = BC + CD = a + a = 2a$

Hình vuông $ABCD$ cho trước $\Rightarrow a$ không đổi $\Rightarrow P$ không đổi.

Câu 4 (1,0 điểm): Cho 3 số dương a, b, c có tổng bằng 1.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$

$$\text{Từ: } a + b + c = 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \\ \frac{1}{b} = 1 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \\ \frac{1}{c} = 1 + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) \\ &\geq 3 + 2 + 2 + 2 = 9 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$

Hết