

Người làm: Trần Thị Hảo

Zalo: Tran Thi Hao - số đt zalo: 0973734899

Email: haotrandpgl@gmail.com

CĐ4: CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH CHIA HẾT**Dạng 1. Chứng minh chia hết****A. Trắc nghiệm (nếu có)****Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2021 - 2022)**Cho $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022}$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $S : 2^{2022}$

B. $S + 1$ là số chính phương

C. $(S + 1) : 2^{2022}$

D. $S = 2^{2023} + 1$

Lời giảiTa có: $S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022}$

$$2S = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022} + 2^{2023}$$

$$2S - S = (2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022} + 2^{2023}) - (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{2021} + 2^{2022})$$

$$S = 2^{2023} - 2^0$$

$$= 2^{2023} - 1$$

$$\text{Suy ra: } S - 1 = 2^{2023} : 2^{2022}$$

$$\text{Vậy: } S - 1 : 2^{2022}$$

B. Tự luận**Câu 1. (HSG 7 huyện Như Thanh 2021 - 2022)**Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn: $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$ Chứng minh rằng: $a + b + c + d$ chia hết cho 3.**Lời giải**Ta có: $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$

$$a^3 + b^3 = 2c^3 - 16d^3$$

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3c^3 - 15d^3 = 3(c^3 - 5d^3) : 3 \quad (1)$$

Xét hiệu $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - (a + b + c + d)$

$$= (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) + (d^3 - d)$$

$$= (a - 1).a.(a + 1) + (b - 1).b.(b + 1) + (c - 1).c.(c + 1) + (d - 1).d.(d + 1)$$

Mà tổng các tích 3 số nguyên liên tiếp thì chia hết cho 3

$$\Rightarrow [(a - 1).a.(a + 1) + (b - 1).b.(b + 1) + (c - 1).c.(c + 1) + (d - 1).d.(d + 1)] : 3$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 - (a + b + c + d) : 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $a + b + c + d$ chia hết cho 3.**Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2021 - 2022)**Chứng minh rằng nếu $\overline{abcd} : 29$ thì $a + 3b + 9c + 27d$ chia hết cho 29**Lời giải**

Ta có:

$$\overline{abcd} : 29$$

$$\Rightarrow (1000a + 100b + 10c + d) : 29$$

$$\Rightarrow (2000a + 200b + 20c + 2d) : 29$$

$$\Rightarrow [(2001a - a) + (203b - 3b) + (29c - 9c) + (29d - 27d)] : 29$$

$$\Rightarrow [(2001a + 203b + 29c + 29d) - (a + 3b + 9c + 27d)] : 29$$

$$\Rightarrow [(69.29a + 7.29b + 29c + 29d) - (a + 3b + 9c + 27d)] : 29$$

$$\text{Mà } (69.29a + 7.29b + 29c + 29d) = 29.(69a + 7b + c + d) : 29$$

$$\Rightarrow (a + 3b + 9c + 27d) : 29$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Thanh Thủy 2021 - 2022)

Cho p, q là các số nguyên tố lớn hơn 5. Chứng minh rằng $p^2 + 2039q^2$ chia hết cho 24

Lời giải

$$\text{Ta có } p^2 + 2039q^2 = p^2 - q^2 + 2040q^2 = (p^2 - 1) - (q^2 - 1) + 2040q^2$$

Ta thấy $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ và p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p lẻ suy ra $p - 1$ và $p + 1$ là hai số chẵn liên tiếp

$$\text{suy ra } (p - 1)(p + 1) : 8$$

Lại có $(p - 1).p.(p + 1)$ là tích của 3 số tự nhiên liên tiếp

$$\text{suy ra } (p - 1).p.(p + 1) : 3$$

$$\text{Mà } p \not: 3 \Rightarrow (p - 1)(p + 1) : 3$$

$$\text{Vì } (3; 8) = 1 \text{ nên } p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1) : 24$$

$$\text{Tương tự ta có } (q^2 - 1) : 24 \text{ và } (2040q^2) : 24$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 4. (HSG 7 huyện Thanh Ba 2021 - 2022)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương ta có: $4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n$ chia hết cho 300.

Lời giải

$$\text{Ta có } 4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n$$

$$= 4^n.(4^3 + 4^2 - 4 - 1) = 4^n.75$$

$$= 4^{n-1}.4.35 = 300.4^{n-1}$$

Mà 300.4^{n-1} chia hết cho 300 (với mọi n nguyên dương)

Nên $4^{n+3} + 4^{n+2} - 4^{n+1} - 4^n$ chia hết cho 300

Câu 5. (HSG 7 huyện Cửa Lò 2021 - 2022)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $(p^2 - 1) : 24$

Lời giải

Vì P là số nguyên tố lớn hơn 3 nên P là số lẻ và P không chia hết cho 3.

+ Ta chứng minh $(p^2 - 1) : 3$. Thật vậy, vì P không chia hết cho 3 nên có hai trường hợp:

- Nếu $p \equiv 1 \pmod{3}$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow (p^2 - 1) : 3$
- Nếu $p \equiv 2 \pmod{3}$ thì $p^2 \equiv 4 \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow (p^2 - 1) : 3$

+ Ta chứng minh $(p^2 - 1) : 8$. Thật vậy, vì P là số lẻ nên có các trường hợp :

- Nếu $p \equiv 1 \pmod{8}$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow (p^2 - 1) : 8$
- Nếu $p \equiv 3 \pmod{8}$ thì $p^2 \equiv 9 \pmod{8} \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow (p^2 - 1) : 8$
- Nếu $p \equiv 5 \pmod{8}$ thì $p^2 \equiv 25 \pmod{8} \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow (p^2 - 1) : 8$
- Nếu $p \equiv 7 \pmod{8}$ thì $p^2 \equiv 49 \pmod{8} \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow (p^2 - 1) : 8$

+ Như vậy: vì 3 và 8 nguyên tố cùng nhau nên $(p^2 - 1) : (3 \cdot 8)$ hay $(p^2 - 1) : 24$

Câu 6. (HSG 7 huyện Vũ Thư 2020 - 2021)

Cho x, y, z, t là các số nguyên thỏa mãn: $x^3 + y^3 = 7 \cdot (2z^3 - 13t^3)$

Chứng minh rằng: $(x + y + z + t) \vdots 7$

Lời giải

* Chứng minh bài toán phụ: $(n^3 - n) \vdots 7$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$.

Cách 1:

Thật vậy: + Nếu n chia hết cho 3 thì $n^3 - n$ chia hết cho 3.

+ Nếu n chia 3 dư 1 thì n^3 chia 3 dư 1 $\Rightarrow n^3 - n$ chia hết cho 3.

+ Nếu n chia 3 dư 2 thì n^3 chia 3 dư 2 $\Rightarrow n^3 - n$ chia hết cho 3.

$\Rightarrow [(n-1)n(n+1)] \vdots 7 \Rightarrow (n^3 - n) \vdots 7$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$. (Đpcm)

Cách 2:

$$n^3 - n = n \cdot (n^2 - 1) = n(n^2 - n + n - 1) = n[n(n-1) + 1 \cdot (n-1)] = (n-1)n(n+1)$$

Ta có

Do $n \in \mathbb{Z}$ nên $(n-1), n, (n+1)$ là 3 số nguyên liên tiếp

$\Rightarrow$ luôn có một số chia hết cho 3.

$\Rightarrow (n-1)n(n+1) \vdots 7 \Rightarrow (n^3 - n) \vdots 7$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$. (Đpcm)

* Quay trở lại bài toán ban đầu. Điều kiện: $x, y, z, t \in \mathbb{Z}$

$$x^3 + y^3 = 7 \cdot (2z^3 - 13t^3)$$

Ta có:

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 14z^3 - 91t^3 + z^3 + t^3 = 15z^3 - 90t^3 = 3(5z^3 - 30t^3) \text{M}$$

$$(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) - (x + y + z + t) = (x^3 - x) + (y^3 - y) + (z^3 - z) + (t^3 - t)$$

Xét hiệu

$$\Rightarrow (x^3 - x) \text{M}, (y^3 - y) \text{M}, (z^3 - z) \text{M}, (t^3 - t) \text{M}$$

Áp dụng bài toán phụ

$$\Rightarrow [(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) - (x + y + z + t)] \text{M}$$

$$(x^3 + y^3 + z^3 + t^3) \text{M} \Rightarrow (x + y + z + t) \text{M} \quad \text{Đpcm.}$$

Câu 7. (HSG 7 huyện Bát Xát, Lào Cai 2021 - 2022)

Chứng minh rằng số có dạng $\overline{abcabc}$ luôn chia hết cho 11 .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overline{abcabc} = a.10^5 + b.10^4 + c.10^3 + a.10^2 + b.10 + c$$

$$= a.10^2(10^3 + 1) + b.10(10^3 + 1) + c(10^3 + 1)$$

$$= (10^3 + 1)(a.10^2 + b.10 + c)$$

$$= (10000 + 1)(a.10^2 + b.10 + c)$$

$$= 1001.(a.10^2 + b.10 + c)$$

$$= 11.91.(a.10^2 + b.10 + c); 11$$

$$\text{Vậy } \overline{abcabc} : 11$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Bá Thước, Thanh Hóa 2021 - 2022)

Cho x, y là các số nguyên thỏa mãn $\frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3}$. Chứng minh rằng $x^2 - y^2$ chia hết cho 40

Lời giải

Vì x^2 chia cho 8 dư 0, 1, 4 nên $3x^2$ chia cho 8 dư 0, 3, 4

Vì y^2 chia cho 8 dư 0, 1, 4 nên $2y^2$ chia cho 8 dư 0, 2, 4

$$\text{Từ giả thiết } \frac{x^2 - 1}{2} = \frac{y^2 - 1}{3} \Rightarrow 3x^2 - 2y^2 = 1 \text{ nên } 3x^2 - 2y^2 \text{ chia cho 8 dư 1}$$

Do đó x^2 chia cho 8 dư 1 và y^2 chia cho 8 dư 1. Nên $x^2 - y^2$ chia hết cho 5 (1)

Vì x^2 chia hết cho 5 dư 0, 1, 4 nên $3x^2$ chia cho 5 dư 0, 3, 2

Vì y^2 chia hết cho 5 dư 0, 1, 4 nên $2y^2$ chia cho 5 dư 0, 2, 3.

Mặt khác từ $3x^2 - 2y^2 = 1$ nên $3x^2 - 2y^2$ chia cho 5 dư 1

Do đó x^2 chia cho 5 dư 1 và y^2 chia cho 5 dư 1. Nên $x^2 - y^2$ chia hết cho 40 (đpcm)

Câu 9. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy, Thanh Hóa 2021 - 2022)

$$\text{Cho } a, b, c \text{ là ba số nguyên thỏa mãn } \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Chứng minh abc chia hết cho 4

Lời giải

Ta có : $\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow bc = a(b+c)$ (1)

TH1: Nếu a chẵn, suy ra $a(b+c):2$, theo (1) suy ra $(bc):2$. Vậy $(abc):4$.

TH2: Nếu a lẻ. Với b và c là hai số cũng lẻ thì $(b+c):2 \Rightarrow a(b+c):2$

Mà abc không chia hết cho 2 do a, b, c đều lẻ

Suy ra mâu thuẫn

Vậy trong hai số b và c tồn tại ít nhất một số chẵn.

+ Với b chẵn mà a lẻ nên c chẵn (vì bc chẵn nên $a(b+c)$ chẵn suy ra c chẵn, vì a lẻ).

Suy ra abc chia hết cho 4.

+ Với c chẵn, tương tự ta có abc chia hết cho 4.

Câu 10. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2022)

Với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng $7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19.

Lời giải

Ta có: $7.5^{2n} + 12.6^n$
 $= 7.25^n + (19 - 7) \cdot 6^n$
 $= 19.6^n + 7(25^n - 6^n):19$

vì $(25^n - 6^n):(25 - 6)$

nên $7.5^{2n} + 12.6^n$ chia hết cho 19.

Câu 11. (HSG 7 huyện Quảng Trạch 2021 - 2022)

Chứng minh rằng: $10^n + 18n - 1$ chia hết cho 27 với mọi số tự nhiên n .

Lời giải

Cách 1:

Ta có $J = 10^n + 18n - 1 = (10^n - 1) + 18n = 9(111...1 + 2n) = 9.L$ (số 111...1 có n chữ số 1).

Xét biểu thức $L = 111...1 + 2n = (111...1) - n + 3n$

Ta đã biết một số tự nhiên và tổng các chữ số của nó có cùng số dư trong phép chia cho 3.

Số 111...1 (có n chữ số 1) có tổng các chữ số là $1+1+1+...+1 = n$ (vì có n chữ số 1).

Do đó $(111...1 - n):3$

suy ra $L = [(111...1 - n) + 3n]:3$

do đó $9L:27$ hay $J:27$

Vậy $J = 10^n + 18n - 1 = (10^n - 1) + 18n:27.$

Cách 2:

+) Với $\forall n \in \mathbb{N}$, Đặt $A = 10^n + 18n - 1 = (10^n - 1) - 9n + 27n$.

+) Xét $(10^n - 1) - 9n = (10 - 1)(10^{n-1} + 10^{n-2} + 10^{n-3} + \dots + 10^2 + 10 + 1) - 9n$
 $= 9(10^{n-1} + 10^{n-2} + 10^{n-3} + \dots + 10^2 + 10 + 1 - n)$.

$= 9[(10^{n-1} - 1) + (10^{n-2} - 1) + (10^{n-3} - 1) + \dots + (10^2 - 1) + (10 - 1) + (1 - 1)]$.

+) Ta lại có: $(10^{n-1} - 1) = 9(10^{n-2} + 10^{n-3} + \dots + 10^2 + 10 + 1) = 9k_1$ ($k_1 \in \mathbb{N}$)

$(10^{n-2} - 1) = 9(10^{n-3} + 10^{n-4} + \dots + 10^2 + 10 + 1) = 9k_2$ ($k_2 \in \mathbb{N}$)

...

$10^2 - 1 = 9.11$

$10 - 1 = 9.1$

+) Vậy $(10^n - 1) - 9n = 9.9(k_1 + k_2 + \dots + 11 + 1) = 81k$; 27

+) Do đó $A = 10^n + 18n - 1 = (10^n - 1) - 9n + 27n = 81k + 27n$; 27 ($n \in \mathbb{N}$)

Dạng 2. Tìm chữ số tận cùng

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Chư sê, Gia Lai 2020 - 2021)

Cho $N = 0,7.(2007^{2009} - 2013^{1999})$. Chứng minh rằng N là một số nguyên.

Lời giải

$N = 0,7.(2007^{2009} - 2013^{1999})$

Để chứng minh N là một số nguyên ta cần chứng minh $2007^{2009} - 2013^{1999}$ có tận cùng bằng 0

Ta có: $2007^{2009} = 2007. \left[(2007^2)^2 \right]^{502} = 2007. \left[(\dots 9)^2 \right]^{502} = 2007. (\dots 1)$ có tận cùng là chữ số 7.

Ta có: $2013^{1999} = 2013. \left[(2013^2)^2 \right]^{499} = (\dots 7). \left[(\dots 9)^2 \right]^{499} = (\dots 7). (\dots 1)$ có tận cùng là chữ số 7.

Vậy $2007^{2009} - 2013^{1999}$ có tận cùng bằng 0 nên N là một số nguyên.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>