

PHƯƠNG TRÌNH MŨ

LÝ THUYẾT

1. Phương trình mũ cơ bản $a^x = b, (a > 0, a \neq 1)$.

- Nếu $b > 0$ thì phương trình $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$.
- Nếu $b \leq 0$ thì phương trình $a^x = b$ vô nghiệm.

2. Phương trình đưa về cùng cơ số

➤ Cách giải:

Sử dụng tính chất $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) (0 < a \neq 1)$.

3. Phương pháp đặt ẩn phụ: với $0 < a \neq 1, f[a^{g(x)}] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{g(x)} > 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}$.

- **Dạng 1:** Phương trình có dạng: $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p = 0 \quad (1)$
 - Đặt $t = a^{f(x)}, t > 0$ đưa phương trình (1) về dạng phương trình bậc 2: $mt^2 + nt + p = 0$.
 - Giải phương trình tìm nghiệm t và kiểm tra điều kiện $t > 0$.
 - Sau đó thế vào phương trình $t = a^{f(x)}$ tìm nghiệm x .
- **Dạng 2:** $m.a^{f(x)} + n.b^{f(x)} + p = 0$, trong đó $a.b = 1$. Đặt $t = a^{f(x)}, t > 0$ suy ra $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.
- **Dạng 3:** $m.a^{2f(x)} + n.(a.b)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$. Chia hai vế cho $b^{2f(x)}$ và đặt $\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = t > 0$.

4. Phương pháp logarit hóa.

- **Dạng 1:** $a^{g(x)} = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) = \log_a f(x) \end{cases}$ với $0 < a \neq 1$.
- **Dạng 2:** $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b$.

5. Phương pháp hàm số

❖ Định nghĩa

- Hàm số f được gọi là đồng biến trên K khi và chỉ khi $\forall u, v \in (a; b); u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$.
- Hàm số f được gọi là nghịch biến trên $(a; b)$ khi và chỉ khi $\forall u, v \in (a; b); u < v \Rightarrow f(u) > f(v)$.

❖ Định lý, tính chất

- **Định lý.** Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$.

Nếu $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) $\forall x \in (a; b)$ và $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến (nghịch biến) trên khoảng $(a; b)$.

- **Tính chất 1.** Nếu hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng $(a; b)$.

- **Tính chất 2.** Nếu phương trình $f'(x) = 0$ có một nghiệm trên khoảng $(a; b)$ thì phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm trên khoảng $(a; b)$.
- **Tính chất 3.** Nếu hàm số f đồng biến (hoặc nghịch biến) trên khoảng $(a; b)$ thì $\forall u, v \in (a; b); f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.
- **Tính chất 4.** Nếu hàm số f liên tục, đồng biến trên khoảng $(a; b)$ và hàm số g liên tục, nghịch biến (hoặc hàm hằng) trên khoảng $(a; b)$ phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm trên khoảng $(a; b)$.

❖ **Nhận xét**

- Khi bài toán yêu cầu giải phương trình $f(x) = 0$, ta có thể chứng minh $f(x)$ đơn điệu bằng cách khảo sát hàm số, sau đó tìm nghiệm và chứng minh nghiệm đó duy nhất.
- Ta cũng có thể thực hiện các phép biến đổi tương đương đưa về phương trình dạng $f(u) = f(v)$ (trong đó $u = u(x), v = v(x)$) hoặc $f(x) = g(x)$ và sử dụng các tính chất đã nêu trên.
- Khi bài toán yêu cầu giải phương trình $f(x) = m$ thì số nghiệm của phương trình sẽ là số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đường thẳng $y = m$.

6. Phương pháp đánh giá

- **Quy tắc 1.** Giải phương trình $f(x) = g(x)$.
 - **Bước 1:** Xác định $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.
 - **Bước 2:** Chứng minh với mọi $\begin{cases} x > x_0 \\ x < x_0 \end{cases}$ thì phương trình vô nghiệm.
 - Kết luận $x = x_0$ là nghiệm duy nhất.
- **Quy tắc 2.** Giải phương trình $f(x) = g(x)$.
 - Xét trên tập xác định D ta có $\begin{cases} f(x) \leq m, \forall x \in D \\ g(x) \geq m, \forall x \in D \end{cases} \Leftrightarrow f(x) \leq m \leq g(x), \forall x \in D$.
 - Phương trình thỏa mãn khi $f(x) = g(x) = m$.
 - Áp dụng tương tự với bài toán bất phương trình $f(x) \geq g(x)$.
- **Quy tắc 3.** Sử dụng tính chất của hàm số lượng giác.
 - Ta có: $\sin x \in [-1; 1]; \cos x \in [-1; 1]$.
 - Điều kiện để hàm số lượng giác $a \cos x + b \sin x = c$ có nghiệm là $a^2 + b^2 \geq c^2$.
 - Giá trị lượng giác của góc (cung) có liên quan đặc biệt.
- **Quy tắc 4.** Sử dụng tính chất của hàm số mũ, hàm trị tuyệt đối, điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2 ...

VÍ DỤ MINH HỌA**VÍ DỤ 1.** Giải các phương trình sau:

a) $3^{x^2-4x+5} = 9.$

b) $3^{x^2-3x+8} = 9^{2x-1}.$

c) $2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|} = 16^{x^2-1}.$

d) $2^{8-x^2} \cdot 5^{8-x^2} = 0,001 \cdot (10^5)^{1-x}.$

e) $2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1}.$

f) $12 \cdot 3^x + 3 \cdot 15^x - 5^{x+1} = 20.$

Lời giải

a) Ta có: $3^{x^2-4x+5} = 9 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$. Vậy $S = \{1; 3\}.$

b) Ta có: $3^{x^2-3x+8} = 9^{2x-1} \Leftrightarrow 3^{x^2-3x+8} = 3^{4x-2} \Leftrightarrow x^2 - 3x + 8 = 4x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=2 \end{cases}$
Vậy $S = \{2; 5\}.$

c) $2^{\left|\frac{28}{3}x+4\right|} = 16^{x^2-1} \Leftrightarrow \left|\frac{28}{3}x+4\right| = 4(x^2-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ 7x+3 = 3x^2-3 \\ 7x+3 = -3x^2+3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 1 \\ x=3 \vee x=-\frac{2}{3} \\ x=0 \vee x=-\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-\frac{7}{3} \end{cases}. \text{ Vậy } S = \left\{-\frac{7}{3}; 3\right\}.$$

d) $(2.5)^{8-x^2} = 10^{-3} \cdot 10^{5-5x} \Leftrightarrow 10^{8-x^2} = 10^{2-5x} \Leftrightarrow 8-x^2 = 2-5x \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=6 \end{cases}$. Vậy $S = \{-1; 6\}.$

e) $2^x + 2^{x+1} = 3^x + 3^{x+1} \Leftrightarrow 3 \cdot 2^x = 4 \cdot 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{4}$. Vậy $S = \left\{\log_{\frac{3}{2}} \frac{3}{4}\right\}.$

f) $12 \cdot 3^x + 3 \cdot 15^x - 5^{x+1} = 20 \Leftrightarrow 3 \cdot 3^x (5^x + 4) - 5(5^x + 4) = 0$
 $\Leftrightarrow (5^x + 4)(3^{x+1} - 5) = 0 \Leftrightarrow x = \log_3 5 - 1$. Vậy $S = \{\log_3 5 - 1\}.$

VÍ DỤ 2. Giải phương trình sau

a) $3^{x^2-4x+5} = 9.$

b) $4 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0.$

c) $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0.$

d) $9^{\frac{x}{2}} + 9 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+2} - 4 = 0.$

e) $9^{x^2+x-1} - 10 \cdot 3^{x^2+x-2} + 1 = 0.$

f) $(7+4\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 6.$

Lời giảia) Đặt $t = 3^x$ ($t > 0$), khi đó phương trình $9^x - 5 \cdot 3^x + 6 = 0$ tương đương với

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\log_3 2 \\ x=1 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \{\log_3 2; 1\}.$$

b) Đặt $t = 2^x, t > 0$ khi đó phương trình $4.4^x - 9.2^{x+1} + 8 = 0$ tương đương với

$$4t^2 - 18t + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \{2; -1\}.$$

$$\text{c) } 9^x - 5.3^x + 6 = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{3^x} = 2 + \left(\frac{1}{9}\right)^x \Leftrightarrow 3.\left(\frac{1}{3}\right)^x = 2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$$

$$\text{Đặt } t = \left(\frac{1}{3}\right)^x, t > 0. \text{ Phương trình trở thành } 3t = 2 + t^2 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1, \text{ ta được } \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Với } t = 2, \text{ ta được } \left(\frac{1}{3}\right)^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{1}{3}} 2 = -\log_3 2$$

$$\text{Vậy } S = \{-\log_3 2; 0\}.$$

$$\text{d) } 9^{\frac{x}{2}} + 9.\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x+2} - 4 = 0 \Leftrightarrow 3^x + 9.\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} - 4 = 0 \Leftrightarrow 3^x + 3.\left(\frac{1}{3}\right)^x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3^x + 3.\frac{1}{3^x} - 4 = 0 \Leftrightarrow 3^{2x} - 4.3^x + 3 = 0$$

$$\text{Đặt } t = 3^x, t > 0. \text{ Phương trình trở thành } t^2 - 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1, \text{ ta được } 3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{Với } t = 3, \text{ ta được } 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm } x = 0, x = 1.$$

e) Đặt $t = 3^{x^2+x-1} (t > 0)$, khi đó phương trình $9^{x^2+x-1} - 10.3^{x^2+x-2} + 1 = 0$ tương đương với

$$3t^2 - 10t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{x^2+x-1} = 3 \\ 3^{x^2+x-1} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } S = \{-1; 1; 0; 2\}.$$

f) Đặt $t = (2 + \sqrt{3})^x, t > 0$. Khi đó phương trình $(7 + 4\sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 6$ tương đương với

$$t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -3 \text{ (loại)} \end{cases}. \text{ Với } t = 2 \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_{(2+\sqrt{3})} 2$$

$$\text{Vậy } S = \left\{ \log_{(2+\sqrt{3})} 2 \right\}.$$

VÍ DỤ 3. Giải các phương trình sau:

a) $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$.

b) $3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3$.

c) $9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 6$.

d) $2^{x^2+4} = 2^{2(x^2+1)} + \sqrt{2^{2(x^2+2)} - 2^{x^2+3}} + 1$.

Lời giải

$$\text{a) } 6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0 \Leftrightarrow 6 \left(\frac{3}{2} \right)^{2x} - 13 \left(\frac{3}{2} \right)^x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{2} \right)^x = \frac{3}{2} \\ \left(\frac{3}{2} \right)^x = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{b) } 3^{3+3x} + 3^{3-3x} + 3^{4+x} + 3^{4-x} = 10^3 \Leftrightarrow 27 \cdot 3^{3x} + \frac{27}{3^{3x}} + 81 \cdot 3^x + \frac{81}{3^x} = 10$$

$$\Leftrightarrow 27 \cdot \left(3^{3x} + \frac{1}{3^{3x}} \right) + 81 \cdot \left(3^x + \frac{1}{3^x} \right) = 10^3 \quad (1). \text{ Đặt } t = 3^x + \frac{1}{3^x} \stackrel{\text{Côsi}}{\geq} 2\sqrt{3^x \cdot \frac{1}{3^x}} = 2$$

$$\Rightarrow t^3 = \left(3^x + \frac{1}{3^x} \right)^3 = 3^{3x} + 3 \cdot 3^{2x} \cdot \frac{1}{3^x} + 3 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3^{2x}} + \frac{1}{3^{3x}} \Leftrightarrow 3^{3x} + \frac{1}{3^{3x}} = t^3 - 3t$$

$$\text{Khi đó: } (1) \Leftrightarrow 27(t^3 - 3t) + 81t = 10^3 \Leftrightarrow t^3 = \frac{10^3}{27} \Leftrightarrow t = \frac{10}{3} > 2 \quad (N)$$

$$\text{Với } t = \frac{10}{3} \Rightarrow 3^x + \frac{1}{3^x} = \frac{10}{3} \quad (2)$$

$$\text{Đặt } y = 3^x > 0. \text{ Khi đó } (2) \Leftrightarrow y + \frac{1}{y} = \frac{10}{3} \Leftrightarrow 3y^2 - 10y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \quad (N) \\ y = \frac{1}{3} \quad (N) \end{cases}$$

$$\text{Với } y = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1; \text{ Với } y = \frac{1}{3} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = -1. \text{ Vậy } S = \{-1; 1\}.$$

$$\text{c) } 9^{\sin^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 6 \Leftrightarrow 9^{1-\cos^2 x} + 9^{\cos^2 x} = 6 \Leftrightarrow \frac{9}{9^{\cos^2 x}} + 9^{\cos^2 x} - 6 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = 9^{\cos^2 x}, (1 \leq t \leq 9). \text{ Khi đó: } (1) \Leftrightarrow \frac{9}{t} + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

$$\text{Với } t = 3 \Rightarrow 9^{\cos^2 x} = 3 \Leftrightarrow 3^{2\cos^2 x} = 3^1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{d) } 2^{x^2+4} = 2^{2(x^2+1)} + \sqrt{2^{2(x^2+2)} - 2^{x^2+3}} + 1 \Leftrightarrow 8 \cdot 2^{x^2+1} = 2^{2(x^2+1)} + \sqrt{4 \cdot 2^{2(x^2+1)} - 4 \cdot 2^{x^2+1}} + 1$$

Đặt $t = 2^{x^2+1} (t \geq 2)$, phương trình trên tương đương với

$$8t = t^2 + \sqrt{4t^2 - 4t + 1} \Leftrightarrow t^2 - 6t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 3 + \sqrt{10} \quad (\text{vì } t \geq 2).$$

$$\text{Từ đó suy ra } 2^{x^2+1} = 3 + \sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{\log_2 \frac{3 + \sqrt{10}}{2}} \\ x_2 = -\sqrt{\log_2 \frac{3 + \sqrt{10}}{2}} \end{cases}$$

VÍ DỤ 4. Giải các phương trình sau:

a) $3^{5^x} = 5^{3^x}$

b) $3^x \cdot 2^{x^2} = 1$

c) $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$

d) $2^{x^2-4} = 7^{x-2}$

Lời giải

a) $3^{5^x} = 5^{3^x} \Leftrightarrow \log_3(3^{5^x}) = \log_3(5^{3^x}) \Leftrightarrow 5^x = 3^x \log_3 5 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = \log_3 5 \Leftrightarrow x = \log_{\left(\frac{5}{3}\right)}(\log_3 5)$

Phương trình có một nghiệm $x = \log_{\left(\frac{5}{3}\right)}(\log_3 5)$.

b) $3^x \cdot 2^{x^2} = 1 \Leftrightarrow \log_2(3^x \cdot 2^{x^2}) = \log_2 1 \Leftrightarrow \log_2 3^x + \log_2 2^{x^2} = 0 \Leftrightarrow x \log_2 3 + x^2 = 0$

$\Leftrightarrow x(\log_2 3 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\log_2 3 \end{cases}$. Phương trình có hai nghiệm: $x = 0$, $x = -\log_2 3$.

c) $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500 \Leftrightarrow 5^x \cdot 2^{\frac{3x-1}{x}} = 5^3 \cdot 2^2 \Leftrightarrow 5^{x-3} \cdot 2^{\frac{x-3}{x}} = 1 \Leftrightarrow \log_2 \left(5^{x-3} \cdot 2^{\frac{x-3}{x}} \right) = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 5^{x-3} + \log_2 2^{\frac{x-3}{x}} = 0 \Leftrightarrow (x-3)\log_2 5 + \frac{x-3}{x} \log_2 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -\log_5 2 \end{cases}$

Phương trình có hai nghiệm: $x = 3$, $x = -\log_5 2$.

d) $2^{x^2-4} = 7^{x-2} \Leftrightarrow \log_2 2^{x^2-4} = \log_2 7^{x-2} \Leftrightarrow (x^2-4)\log_2 2 = (x-2)\log_2 7$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2-\log_2 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \log_2 7 - 2 \end{cases}$

Phương trình có hai nghiệm: $x = 2$, $x = \log_2 7 - 2$.

VÍ DỤ 5. Giải các phương trình sau:

a) Giải phương trình $3^x + 4^x = 5^x$.

b) Gọi S là tập hợp mọi nghiệm thực của phương trình $2^{x^2-3x+2} - 2^{x^2-x-2} = 2x-4$. Số phần tử của S là.

c) Tìm tập hợp các giá trị của m để phương trình $6^x + (3-m) \cdot 2^x - m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$.

Lời giải

a) $3^x + 4^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1 = 0 \quad (1)$

Xét hàm số $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x - 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Ta có: $f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln \frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln \frac{4}{5} < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) = 0$ có tối đa một nghiệm trên tập số thực

Mà $f(2) = 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = 2$.

$$\text{b) } 2^{x^2-3x+2} - 2^{x^2-x-2} = 2x-4 \quad (1) \Leftrightarrow 2^{x^2-3x+2} + x^2 - 3x + 2 = 2^{x^2-x-2} + x^2 - x - 2$$

Xét hàm số $f(u) = 2^u + u$

Ta có: $f'(u) = 2^u \cdot \ln 2 + 1 > 0, \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số $f(u) = 2^u + u$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow f(x^2 - 3x + 2) = f(x^2 - x - 2) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = x^2 - x - 2 \Leftrightarrow x = 2$$

Vậy S có 1 phần tử.

$$\text{c) } 6^x + (3-m) \cdot 2^x - m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{6^x + 3 \cdot 2^x}{2^x + 1}$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{6^x + 3 \cdot 2^x}{2^x + 1}, \forall x \in (0;1) \text{ có } f'(x) = \frac{12^x \cdot \ln 3 + 6^x \cdot \ln 6 + 3 \cdot 2^x \cdot \ln 2}{(2^x + 1)^2} > 0, \forall x \in (0;1)$$

$\Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0;1)$. Ta có bảng biến thiên:

x	0	1
y'	+	
y	2	4

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm khi $2 < m < 4$. Vậy $m \in (2;4)$.

VÍ DỤ 6. Giải các phương trình sau:

a) Giải phương trình $3^{x+1} + 4^{x+1} = 3^{2x+1} - 4^{2x+1}$.

b) Giải phương trình $2^{x^2+1} = 2 - \sqrt{x}$.

c) Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a > 0$ và $a \neq 1$, biết phương trình $a^x - \frac{1}{a^x} = 2 \cos(bx)$ có 7 nghiệm phân biệt. Tìm số nghiệm thực phân biệt của phương trình:

$$a^{2x} - 2a^x (\cos bx + 2) + 1 = 0.$$

Lời giải

$$\text{a) } 3^{x+1} + 4^{x+1} = 3^{2x+1} + 4^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{x+1} - 3^{2x+1} = 4^{2x+1} - 4^{x+1} \quad (1)$$

Nhận xét $x = 0$ là nghiệm của phương trình (1)

$$\text{Với } x > 0, \text{ ta có: } x+1 < 2x+1 \Rightarrow \begin{cases} 3^{x+1} < 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{x+1} - 3^{2x+1} < 0 \\ 4^{x+1} < 4^{2x+1} \Leftrightarrow 4^{2x+1} - 4^{x+1} > 0 \end{cases} \text{ do đó VT} < 0 < \text{VP nên}$$

phương trình (1) vô nghiệm

$$\text{Với } x < 0, \text{ ta có: } x+1 > 2x+1 \Rightarrow \begin{cases} 3^{x+1} > 3^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{x+1} - 3^{2x+1} > 0 \\ 4^{x+1} > 4^{2x+1} \Leftrightarrow 4^{2x+1} - 4^{x+1} < 0 \end{cases} \text{ do đó VT} > 0 > \text{VP nên}$$

phương trình (1) vô nghiệm. Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất.

b) Điều kiện xác định: $x \geq 0$

$$x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geq 1 \Leftrightarrow 2^{x^2+1} \geq 2 \text{ hay VT} \geq 2$$

$$\sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{x} \leq 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{x} \leq 2 \text{ hay VP} \leq 2$$

$$\text{Suy ra VT} \geq 2 \geq \text{VP}, \text{ do đó phương trình có nghiệm khi } \begin{cases} \text{VT} = 2 \\ \text{VP} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2+1} = 2 \\ 2 - \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy $x = 0$ là nghiệm duy nhất.

$$\text{c) Ta có } a^{2x} - 2a^x(\cos bx + 2) + 1 = 0 \Leftrightarrow a^x - 2 + \frac{1}{a^x} = 2\left(\cos 2\frac{bx}{2} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(a^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{x}{2}}}\right)^2 = 4\cos^2 \frac{bx}{2} \Leftrightarrow \left(a^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{x}{2}}}\right)^2 = 4\cos^2 \frac{bx}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{x}{2}}} = 2\cos \frac{bx}{2} & (1) \\ a^{\frac{x}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{x}{2}}} = -2\cos \frac{bx}{2} & (2) \end{cases}$$

Nếu phương trình (1) và phương trình (2) có nghiệm chung là x_0 thì $2\cos \frac{bx_0}{2} = -2\cos \frac{bx_0}{2}$

$$\Rightarrow \cos \frac{bx_0}{2} = 0 \Rightarrow a^{\frac{x_0}{2}} - \frac{1}{a^{\frac{x_0}{2}}} = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow \cos \frac{bx_0}{2} = 1 \text{ (Vô lí)}$$

Do đó phương trình (1) và phương trình (2) không có nghiệm chung

Mặt khác theo giả thiết phương trình (1) và phương trình (2) đều có 7 nghiệm phân biệt

Vậy phương trình đã cho có 14 nghiệm phân biệt.

PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT

LÝ THUYẾT

1. Phương trình logarit có dạng $\log_a x = b$ ($a > 0, a \neq 1$).

- Nếu $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.

2. Phương trình đưa về cùng cơ số

- Cho $0 < a \neq 1$. Khi đó:

- $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \ (g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}$.

- $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$ (mũ hóa).

3. Phương pháp đặt ẩn phụ:

- Phương trình có dạng $P(\log_a f(x)) = 0$ với $0 < a \neq 1$

$$P(\log_a f(x)) = 0 \xrightarrow{\text{Đặt } t = \log_a f(x)} P(t) = 0$$

4. Phương pháp đánh giá

- **Quy tắc 1.** Giải phương trình $f(x) = g(x)$.

- **Bước 1:** Xác định $x = x_0$ là một nghiệm của phương trình.

- **Bước 2:** Chứng minh với mọi $\begin{cases} x > x_0 \\ x < x_0 \end{cases}$ thì phương trình vô nghiệm.

- Kết luận $x = x_0$ là nghiệm duy nhất.

- **Quy tắc 2.** Giải phương trình $f(x) = g(x)$.

- Xét trên tập xác định D ta có $\begin{cases} f(x) \leq m, \forall x \in D \\ g(x) \geq m, \forall x \in D \end{cases} \Leftrightarrow f(x) \leq m \leq g(x), \forall x \in D$.

- Phương trình thỏa mãn khi $f(x) = g(x) = m$.

- Áp dụng tương tự với bài toán bất phương trình $f(x) \geq g(x)$.

- **Quy tắc 3.** Sử dụng tính chất của hàm số lượng giác.

- Ta có: $\sin x \in [-1; 1]; \cos x \in [-1; 1]$.

- Điều kiện để hàm số lượng giác $a \cos x + b \sin x = c$ có nghiệm là $a^2 + b^2 \geq c^2$.

- Giá trị lượng giác của góc (cung) có liên quan đặc biệt.

- **Quy tắc 4.** Sử dụng tính chất của hàm số mũ, hàm trị tuyệt đối, điều kiện có nghiệm của phương trình bậc 2 ...

❖ Ngoài ra, chúng ta có thể sử dụng phương pháp hàm số như dạng bài tập phương trình mũ. Việc sử dụng linh hoạt các phương pháp sẽ giúp các em tối ưu hơn trong việc giải toán.

VÍ DỤ MINH HỌA

VÍ DỤ 1. Giải các phương trình sau:

a) $\ln(x^2 - 1) = \ln x$

b) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11.$

c) $\log_{\sqrt{3}} x \cdot \log_3 x \cdot \log_9 x = 8.$

d) $\log_2(x^2 - 1) = 1 + \log_2 x.$

e) $\log_2 x^2 = 2 \log_2(3x + 4).$

f) $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) = 3.$

Lời giải

a) Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

Với $x > 1$: $\ln(x^2 - 1) = \ln x \Leftrightarrow \ln \frac{x^2 - 1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ (loại)}$

b) Điều kiện: $x > 0.$

$$\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 x = 11$$

$$\Leftrightarrow \frac{11}{6} \log_2 x = 11 \Leftrightarrow \log_2 x = 6 \Leftrightarrow x = 64.$$

c) Điều kiện: $x > 0.$

$$\log_{\sqrt{3}} x \cdot \log_3 x \cdot \log_9 x = 8 \Leftrightarrow 2 \log_3 x \cdot \log_3 x \cdot \frac{1}{2} \log_3 x = 8 \Leftrightarrow (\log_3 x)^3 = 8 \Leftrightarrow \log_3 x = 2 \Leftrightarrow x = 9.$$

d) Điều kiện: $0 < x < 1.$

$$\log_2(x^2 - 1) = 1 + \log_2 x \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) = \log_2 2x \Leftrightarrow x^2 - 1 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Vậy $S = \{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}.$

e) Điều kiện: $x > -\frac{4}{3}, x \neq 0.$

$$\log_2 x^2 = 2 \log_2(3x + 4) \Leftrightarrow x^2 = (3x + 4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3x + 4 \\ x = -3x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

So sánh điều kiện ta có phương trình có một nghiệm $x = -1.$

f) Điều kiện: $x > 1.$

Ta có: $\log_2(x - 1) + \log_2(x + 1) = 3 \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 1) = 3 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3.$

Vậy $S = \{3\}.$

VÍ DỤ 2. Giải các phương trình sau:

a) $\log_3^2 x - 2\log_3 x - 7 = 0$

b) $2\log_2 x + 3\log_x 2 = 7.$

c) $\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5.$

d) Tìm tất cả các giá trị của tham m để phương trình $\log_2^2(2x) - 2m\log_2(x) + m - 1 = 0$ có tích hai nghiệm của phương trình bằng 16.

Lời giải

a) Điều kiện: $x > 0$. Đặt $\log_3 x = t, (t \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow x = 3^t$

$$\text{Phương trình } \log_3^2 x - 2\log_3 x - 7 = 0 \text{ trở thành } t^2 - 2t - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 - 2\sqrt{2} \\ t = 1 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 - 2\sqrt{2} \Rightarrow \log_3 x = 1 - 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 3^{1-2\sqrt{2}}$$

$$\text{Với } t = 1 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \log_3 x = 1 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = 3^{1+2\sqrt{2}}$$

b) Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$. Đặt $\log_2 x = t, t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Phương trình } 2\log_2 x + 3\log_x 2 = 7 \text{ trở thành: } 2t + 3 \cdot \frac{1}{t} = 7 \Leftrightarrow 2t^2 - 7t + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 3 \Rightarrow \log_2 x = 3 \Leftrightarrow x = 8$$

$$\text{Với } t = \frac{1}{2} \Rightarrow \log_2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

c) Điều kiện: $x > 0$. Ta có: $\log_2^2(4x) - \log_{\sqrt{2}}(2x) = 5 \Leftrightarrow (1 + \log_2(2x))^2 - 2\log_2(2x) - 5 = 0$

$$\Leftrightarrow \log_2^2(2x) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(2x) = 2 \\ \log_2(2x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{1}{8} \end{cases}. \text{ Vậy } S = \left\{ 2; \frac{1}{8} \right\}.$$

d) Điều kiện xác định: $x > 0$

Đặt $t = \log_2 x$. Phương trình trở thành $(1+t)^2 - 2mt + m - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2(1-m)t + m = 0 \quad (1)$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm $x_1; x_2$ khi phương trình (1) có 2 nghiệm $t_1; t_2$.

$$\text{Khi đó } \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ m > \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Theo

giả

thiết

$$x_1 x_2 = 16 \Rightarrow \log_2 x_1 x_2 = \log_2 16 \Rightarrow t_1 + t_2 = 4 \Rightarrow -\frac{2(1-m)}{1} = 4 \Rightarrow m = 3 \text{ (thỏa mãn)}.$$

VÍ DỤ 3. Giải các phương trình sau:

- Giải phương trình $\log_3 x + \log_4 (x+1) = 2$.
- Tìm số nghiệm của phương trình $\log_3 (9 - \sqrt{x-1}) = \log_2 (x^2 - 2x + 5)$.
- Tìm số nghiệm của phương trình $\log_2 (\sqrt{x-2} + 4) \leq \log_3 \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + 8 \right)$.
- Có tất cả bao nhiêu cặp số thực $(x; y)$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện

$$\begin{cases} 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)} \\ 4|y| - |y-1| + (y+3)^2 \leq 8 \end{cases}$$

Lời giải

a) Nhận xét $x = 3$ là nghiệm của phương trình

Với $x > 3$, ta có $\begin{cases} \log_3 x > 1 \\ \log_4 (x+1) > 1 \end{cases} \Rightarrow \log_3 x + \log_4 (x+1) > 2$ hay VT > VP nên phương trình vô nghiệm

Với $x < 3$, ta có $\begin{cases} \log_3 x < 1 \\ \log_4 (x+1) < 1 \end{cases} \Rightarrow \log_3 x + \log_4 (x+1) < 2$ hay VT < VP nên phương trình vô nghiệm. Vậy $x = 3$ là nghiệm duy nhất.

b) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 9-\sqrt{x-1} > 0 \\ x^2-2x+5 > 0 \text{ (TM)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x < 82 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 82$

$$\text{VT} = \log_3 (9 - \sqrt{x-1}) \leq \log_3 9 = 2$$

$$\text{VP} = \log_2 (x^2 - 2x + 5) = \log_2 [(x-1)^2 + 4] \geq \log_2 4 = 2$$

Suy ra $\text{VT} \leq 2 \leq \text{VP}$. Do đó phương trình có nghiệm khi $\begin{cases} \text{VT} = 2 \\ \text{VP} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ x-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$

Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất.

c) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$. $\text{VT} = \log_2 (\sqrt{x-2} + 4) \geq \log_2 (4) = 2$

$$\text{Ta có } x \geq 2 \Leftrightarrow x-1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x-1}} + 8 \leq 9$$

$$\text{VP} = \log_3 \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + 8 \right) \leq \log_3 9 = 2$$

Suy ra $\text{VT} \geq 2 \geq \text{VP}$. Do đó phương trình có nghiệm khi $\begin{cases} \text{VT} = 2 \\ \text{VP} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất.

$$\text{d) Ta có: } \begin{cases} 3^{|x^2-2x-3|-\log_3 5} = 5^{-(y+4)} & (1) \\ 4|y|-|y-1|+(y+3)^2 \leq 8 & (2) \end{cases}$$

Biến đổi phương trình (1) ta được $3^{|x^2-2x-3|} = 5^{-y-3}$

$$\text{Do } |x^2-2x-3| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 3^{|x^2-2x-3|} \geq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 5^{-y-3} \geq 1 \Leftrightarrow -y-3 \geq 0 \Leftrightarrow y \leq -3$$

Với $y \leq -3$, ta có bất phương trình (2) $\Leftrightarrow -4y+y-1+(y+3)^2 \leq 8 \Leftrightarrow y^2+3y \leq 0 \Leftrightarrow y \geq -3$

$$\Rightarrow y = -3 \Rightarrow |x^2-2x-3| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Vậy có hai cặp $(x; y)$ thỏa mãn $(3; -3), (-1; -3)$.

VÍ DỤ 4. Giải các phương trình sau:

- e) Tìm số nghiệm của phương trình $\log_3(9-\sqrt{x-1}) = \log_2(x^2-2x+5)$. Biết phương trình $\log_5 x = \log_7(x+2)$ có nghiệm duy nhất $x = a$, tính giá trị $\log_5(7a^2)$.
- f) Tìm số nghiệm của phương trình biểu thức $x + 2 \cdot 3^{\log_2 x} = 3$.
- g) Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $x^3 - 3x + 2 + \log_3 m = 0$ có hai nghiệm phân biệt?
- h) Tìm tất cả các giá trị thực của m để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x - \log_2 x - 3} = m(\log_2 x - 3)$ có nghiệm thuộc $[32; +\infty)$.
- i)

Lời giải

$$\text{a) } \log_5 x = \log_7(x+2) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 x = t \\ \log_7(x+2) = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5^t \\ x+2 = 7^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5^t & (1) \\ 5^t + 2 = 7^t & (2) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } (2) \Leftrightarrow \left(\frac{5}{7}\right)^t + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^t = 1. \text{ Xét hàm số } f(t) = \left(\frac{5}{7}\right)^t + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^t, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$f'(t) = \left(\frac{5}{7}\right)^t \ln \frac{5}{7} + 2 \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^t \ln \frac{1}{7} < 0, \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Hàm số } f(t) \text{ nghịch biến trên } \mathbb{R}$$

Mà $f(t) = 1 \Leftrightarrow f(t) = f(1)$ nên $t = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình (2)

Từ (1) ta có $x = 5$

$$\text{Do đó } \log_5(7a^2) = \log_5 7 + \log_5 a^2 = \log_5 7 + 2\log_5 a = \log_5 7 + 2\log_5 5 = 2 + \log_5 7.$$

b) Điều kiện xác định: $x > 0$

$$\text{Ta có: } x + 2 \cdot 3^{\log_2 x} = 3 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^{\log_2 x} = 3 - x. \text{ Xét hàm số } f(x) = 2 \cdot 3^{\log_2 x}, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \cdot 3^{\log_2 x} \cdot \log_2 3 > 0, \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow \text{Hàm số } f(x) \text{ đồng biến trên khoảng } (0; +\infty) \quad (1)$$

Xét hàm số $g(x) = 3 - x, \forall x \in (0; +\infty)$

$g'(x) = -1 < 0, \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow$ Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ phương trình $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất một nghiệm

Mà $f(1) = g(1)$ nên $x = 1$ là nghiệm duy nhất.

c) Điều kiện xác định: $m > 0$

Ta có: $x^3 - 3x + 2 + \log_3 m = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x - 2 = \log_3 m$

Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 3x - 2$ có $f'(x) = -3x^2 + 3, f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-4	0		$-\infty$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì hai đồ thị $y = -x^3 + 3x + 2$ và $y = \log_3 m$ phải cắt nhau tại 2 điểm.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $\begin{cases} \log_3 m = -4 \\ \log_3 m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3^{-4} \\ m = 3^0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{81} \\ m = 1 \end{cases}$. Vậy $m \in \left\{ \frac{1}{81}; 1 \right\}$.

d) Đặt $\log_2 x = t$ vì $x \geq 32 \Rightarrow t \geq 5$

Ta có phương trình: $\sqrt{t^2 - t - 3} = m(t - 3) \Leftrightarrow m = \frac{\sqrt{t^2 - t - 3}}{t - 3}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - t - 3}}{t - 3}, \forall t \in [5; +\infty)$ có $f'(t) = \frac{-5t + 9}{2(t - 3)^2 \sqrt{t^2 - t - 3}} < 0, \forall t \in [5; +\infty)$

Ta có bảng biến thiên:

t	5	$+\infty$
$f'(t)$		$-$
$f(t)$	$\sqrt{3}$	1

Dựa vào bảng biến thiên, phương trình có nghiệm khi $1 < m \leq \sqrt{3}$.