

Đề chính thức

Môn thi: TOÁN

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian phát đề)

Ngày thi: 18/3/2017

**Bài 1 (6,0 điểm).**

1. Cho biểu thức:  $P = \frac{2m + \sqrt{16m} + 6}{m + 2\sqrt{m} - 3} + \frac{\sqrt{m} - 2}{\sqrt{m} - 1} + \frac{3}{\sqrt{m} + 3} - 2$

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị tự nhiên của m để P là số tự nhiên.

2. Cho biểu thức:  $P = (a + b)(b + c)(c + a) - abc$  với a, b, c là các số nguyên. Chứng minh rằng nếu  $a + b + c$  chia hết cho 4 thì P chia hết cho 4.

**Bài 2 (5,0 điểm).**

a) Chứng minh rằng: với mọi số thực x, y dương, ta luôn có:  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x + y}$

b) Cho phương trình:  $2x^2 + 3mx - \sqrt{2} = 0$  (m là tham số). Có hai nghiệm  $x_1$  và  $x_2$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:  $M = (x_1 - x_2)^2 + \left( \frac{1 + x_1^2}{x_1} - \frac{1 + x_2^2}{x_2} \right)^2$

**Bài 3 (2,0 điểm)**

Cho x, y, z là ba số dương. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$$

**Bài 4 (7,0 điểm).**

1. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. M là một điểm di động trên cung nhỏ BC của đường tròn đó.

a) Chứng minh  $MB + MC = MA$

b) Gọi H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB, BC, CA. Gọi S, S' lần lượt là diện tích của tam giác ABC, MBC. Chứng minh rằng: Khi M di động ta luôn có đẳng thức:

$$MH + MI + MK = \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}$$

2. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. AD, BE, CF là các đường cao. Lấy M trên đoạn FD, lấy N trên tia DE sao cho  $\angle MAN = \angle BAC$ . Chứng minh MA là tia phân giác của góc  $\angle NMF$

## ĐÁP ÁN

### Bài 1 (6,0 điểm).

1a) Rút gọn được  $P = \frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1}$  (với  $m \geq 0, m \neq 1$ )

1b)

$$P = \frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{m} - 1}$$

Ta có:  $P \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{m} - 1} \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sqrt{m} - 1$  là ước dương của 2  $\Rightarrow m \in \{4; 9\}$  (TMĐK)

Vậy  $m = 4; m = 9$  là giá trị cần tìm.

2)  $a + b + c : 4$  ( $a, b, c \in \mathbb{Z}$ )

Đặt  $a + b + c = 4k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )  $\Rightarrow a + b = 4k - c; b + c = 4k - a; a + c = 4k - b$

Ta có:  $P = (a + b)(b + c)(c + a) - abc = (4k - c)(4k - a)(4k - b) - abc$

$$= (16k^2 - 4ak - ack + ac)(4k - b) - abc$$

$$= 64k^3 - 16bk^2 - 16ak^2 + 4abc - 16ck^2 + 4bck + 4ack - abc - abc$$

$$= 4(16k^3 - 4bk^2 - 4ak^2 + abk - 4ck^2 + bck + ack) - 2abc \quad (*)$$

Giả sử  $a, b, c$  đều chia 2 dư 1  $\Rightarrow a + b + c$  chia 2 dư 1 (1)

Mà:  $a + b + c : 4 \Rightarrow a + b + c : 2$  (theo giả thiết) (2)

Do đó (1) và (2) mâu thuẫn  $\Rightarrow$  Điều giả sử là sai

$\Rightarrow$  Trong ba số  $a, b, c$  ít nhất có một số chia hết cho 2

$\Rightarrow 2abc : 4$  (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*)  $\Rightarrow P : 4$

### Bài 2 (5,0 điểm).

a)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$  (đúng)

b) PT có  $a, c$  trái dấu nên luôn có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$

Ta có:  $x_1 + x_2 = -\frac{3m}{2}$  và  $x_1 \cdot x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$M = (x_1 - x_2)^2 + \left( \frac{1+x_1^2}{x_1} - \frac{1+x_2^2}{x_2} \right)^2 = \dots =$$

$$(x_1 - x_2)^2 \left[ 1 + \frac{(1 - x_1 x_2)^2}{(x_1 x_2)^2} \right] = [(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] \left[ 1 + \frac{(1 - x_1 x_2)^2}{(x_1 x_2)^2} \right]$$

$$= \left( 9 + \frac{9\sqrt{2}}{2} \right) m^2 + 8\sqrt{2} + 8 \geq 8\sqrt{2} + 8$$

Dấu “=” xảy ra khi  $m = 0$

Vậy GTNN của  $M$  là  $8\sqrt{2} + 8$  khi  $m = 0$

### Bài 3 (2,0 điểm)

Áp dụng BĐT Cô si cho các số dương  $x^2$  và  $yz$ , ta có:

$$x^2 + yz \geq 2\sqrt{x^2 yz} = 2x\sqrt{yz} \Rightarrow \frac{1}{x^2 + yz} \leq \frac{1}{2x\sqrt{yz}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x\sqrt{yz}}$$

Tương tự, ta có:  $\frac{1}{y^2 + xz} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y\sqrt{xz}}$  và  $\frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z\sqrt{xy}}$

Suy ra:  $\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{xz}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} \right)$  (1)

Ta có:  $\frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{xz}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{yz} + \sqrt{xz} + \sqrt{xy}}{xyz}$  (2)

Ta có:  $\sqrt{yz} + \sqrt{xz} + \sqrt{xy} \leq x + y + z$  (3)

Thật vậy: (\*)  $\Leftrightarrow 2\sqrt{yz} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{xy} \leq 2x + 2y + 2z$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{z} - \sqrt{x})^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{x})^2 \geq 0$  (BĐT đúng)

Dấu "=" xảy ra khi  $x = y = z$

Từ (2) và (3) suy ra:  $\frac{1}{x\sqrt{yz}} + \frac{1}{y\sqrt{xz}} + \frac{1}{z\sqrt{xy}} \leq \frac{x + y + z}{xyz} = \frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy}$  (4)

Từ (1) và (4) suy ra:  $\frac{1}{x^2 + yz} + \frac{1}{y^2 + xz} + \frac{1}{z^2 + xy} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$

#### Bài 4 (7,0 điểm).

1.a) Cách 1: Trên tia đối của tia MC lấy điểm E sao cho ME = MB

Ta có:  $\triangle BEM$  là tam giác đều  $\Rightarrow BE = BM = EM$

$\triangle BMA = \triangle BEC \Rightarrow MA = EC$

Do đó:  $MB + MC = MA$

Cách 2:

Trên AM lấy điểm E sao cho ME = MB

Ta có:  $\triangle BEM$  là tam giác đều

$\Rightarrow BE = BM = EM$

$\triangle MBC = \triangle EBA$  (c.g.c)  $\Rightarrow MC = AE$

Do đó:  $MB + MC = MA$

1.b) Kẻ AN vuông góc với BC tại N

Vì  $\triangle ABC$  là tam giác đều nên O là trọng tâm của tam giác

$\Rightarrow A, O, N$  thẳng hàng  $\Rightarrow AN = \frac{3}{2}R$

Ta có:  $AN = AB \cdot \sin \angle ABN \Rightarrow AB = \frac{AN}{\sin \angle ABN} = \frac{3}{2}R : \frac{\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$

Ta có:  $\frac{1}{2}MH \cdot AB = S_{ABM} \Leftrightarrow MH = \frac{2S_{ABM}}{AB} = \frac{2S_{ABM}}{R\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}MK \cdot AC = S_{ACM} \Leftrightarrow MK = \frac{2S_{ACM}}{AC} = \frac{2S_{ACM}}{R\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}MI \cdot BC = S_{BCM} \Leftrightarrow MI = \frac{2S_{BCM}}{BC} = \frac{2S_{BCM}}{R\sqrt{3}} = \frac{2S'}{R\sqrt{3}}$

Do đó:  $MH + MK + MI = \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}}(S_{ABM} + S_{ACM}) = \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}} \cdot S_{ABMC}$   
 $= \frac{2S'}{R\sqrt{3}} + \frac{2}{R\sqrt{3}} \cdot (S + S') = \frac{2\sqrt{3}(S + 2S')}{3R}$

2. Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt DE tại K

Tứ giác AEDB nội tiếp  $\Rightarrow \angle DE = \angle BAC$

Mà:  $\angle MKD = \angle DE$  (vì  $MK \parallel BC$ ).

Do đó:  $\angle MKD = \angle MAN \Rightarrow$  Tứ giác AMKN nội tiếp

$\Rightarrow \angle AMN = \angle AKN$

Ta có:  $\angle D_3 = \angle D_4 (= \angle BAC) \Rightarrow \angle D_1 = \angle D_2$

$\triangle DMK$  có DA là phân giác vừa là đường cao nên cân tại D

$\Rightarrow DM = DK$

$\triangle AMD = \triangle AKD$  (c.g.c)  $\Rightarrow \angle AMD = \angle AKD$

Nên:  $\angle AMF = \angle AKN$ . Ta có:  $\angle AMF = \angle AMN (= \angle AKN)$

Vậy: MA là phân giác của góc  $\angle NMF$

