

Người làm: Nguyễn Thị Ngọc Hà

Zalo: Nguyễn Thị Ngọc Hà

- số đt zalo: 0946153658

Email:

CĐ2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT

Dạng 1. Tìm x thông thường

Câu 1. (Đề 66 - HSG 7 huyện Thái Thụy, 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$.

Lời giải:

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{5} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{20}$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{3}{20} : \frac{1}{3}$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{9}{20}$$

$$x = \frac{9}{20} + \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{19}{20}.$$

$$\text{Vậy } x = \frac{9}{20}.$$

Câu 3. (Đề 72 - HSG 7 huyện Bá Thước, THCS thị trấn Cảnh Nằng - 2022 - 2023)

Tìm x , biết:

a) $(x - 2034).5 = -105$

b) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$

Lời giải:

a) $(x - 2034) \cdot 5 = -105$

$$x - 2034 = (-105) : 5$$

$$x - 2034 = -21$$

$$x = -21 + 2034$$

$$x = 2013$$

Vậy $x = 2013$.

b) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = \frac{5}{8}$

$$\frac{1}{2}x = \frac{5}{8} + \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2}x = \frac{11}{8}$$

$$x = \frac{11}{8} : \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$$

Vậy $x = \frac{11}{4}$.

Dạng 2. Đưa về dạng tích bằng 0

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (HSG 7 Yên Thế, Bắc Giang 2022 - 2023)

Giá trị của x thỏa mãn đẳng thức $\frac{x-2}{2021} + \frac{x-1}{2022} = \frac{x}{2023} + \frac{x+1}{2024}$ là:

A. -2023.

B. -2022.

C. 2023.

D. 2022.

Lời giải:

Chọn C.

$$\frac{x-2}{2021} + \frac{x-1}{2022} = \frac{x}{2023} + \frac{x+1}{2024}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x-2}{2021} - 1 \right) + \left(\frac{x-1}{2022} - 1 \right) = \left(\frac{x}{2023} - 1 \right) + \left(\frac{x+1}{2024} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{x-2023}{2021} + \frac{x-2023}{2022} = \frac{x-2023}{2023} + \frac{x-2023}{2024}$$

$$\Rightarrow (x - 2023) \left(\frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} \right) = 0.$$

$$\text{Vì } \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} \neq 0 \text{ nên } x - 2023 = 0 \Rightarrow x = 2023.$$

Vậy $x = 2023$.

B. Tự luận

Câu 1. (Đề 90 - HSG 7 Hưng Hà, Tây Đô 2022 - 2023)

Tìm số nguyên x sao cho: $(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+1}$.

Lời giải

$$(x+2)^{n+1} = (x+2)^{n+1}$$

$$\Rightarrow (x+2)^{n+1} - (x+2)^{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)^{n+1} [1 - (x+2)^0] = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)^{n+1} = 0 \text{ hoặc } 1 - (x+2)^0 = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ hoặc } x + 2 = 1 \text{ hoặc } x + 2 = -1$$

$$x \in \{-2; -1; -3\}$$

Vậy

Câu 2. (Đề 71 - HSG 7 Yên Bái, Yên Bình 2022 - 2023)

Tìm x biết: $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$

Lời giải

$$(2x-15)^5 = (2x-15)^3 \Rightarrow (2x-15)^3 \cdot [(2x-15)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow (2x-15)^3 = 0 \text{ hoặc } (2x-15)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x-15 = 0 \text{ hoặc } 2x-15 = 1 \text{ hoặc } 2x-15 = -1.$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{2} \text{ hoặc } x = 8 \text{ hoặc } x = 7.$$

$$x \in \left\{ \frac{15}{2}; 8; 7 \right\}$$

Vậy

Câu 3. (Đề 78 - HSG 7 Sông Lô, Vĩnh Phúc, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $(2x-15)^{2023} = (2x-15)^{2021}$.

Lời giải

$$\begin{aligned}(2x-15)^{2023} &= (2x-15)^{2021} \\ \Rightarrow (2x-15)^{2023} &= (2x-15)^{2021} \\ \Rightarrow (2x-15)^{2021} \cdot [(2x-15)^2 - 1] &= 0 \\ \Rightarrow (2x-15)^{2021} = 0 &\text{ hoặc } (2x-15)^{2021} = 1 \\ \Rightarrow 2x-15=0 &\text{ hoặc } 2x-15=1 \text{ hoặc } 2x-15=-1. \\ \Rightarrow 2x=15 &\text{ hoặc } 2x=16 \text{ hoặc } 2x=14. \\ \Rightarrow x=\frac{15}{2} &\text{ hoặc } x=8 \text{ hoặc } x=7. \\ \Rightarrow x \in \left\{ \frac{15}{2}; 8; 7 \right\} \\ \text{Vậy } x \in \left\{ \frac{15}{2}; 8; 7 \right\}\end{aligned}$$

Dạng 3. Sử dụng tính chất lũy thừa

A. Trắc nghiệm

Câu 1. (Đề 69 - HSG 7 thị xã Kỳ Anh, 2022 - 2023)

Cho biết: $(0,1)^{22} \cdot x = (0,001)^{23}$. Tìm x dưới dạng lũy thừa của số hữu tỉ?

Lời giải

$$\begin{aligned}\text{Kết quả: } (0,1)^{25}. \\ (0,1)^{22} \cdot x &= (0,001)^{23} \Rightarrow (0,1)^{44} \cdot x = (0,1)^{69} \Rightarrow x = (0,1)^{69} : (0,1)^{44} = (0,1)^{25}. \\ \text{Vậy } x &= (0,1)^{25}.\end{aligned}$$

B. Tự luận

Câu 1. (Đề 89 - HSG 7 Hưng Hà, Thái Phương, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $5^x + 25 \cdot 5^x \cdot 5^1 + 125 \cdot 5^x \cdot 5^2 = 81275$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 5^x + 25 \cdot 5^x \cdot 5^1 + 125 \cdot 5^x \cdot 5^2 = 81275$$

$$5^x (1 + 25 \cdot 5 + 125 \cdot 25) = 81275$$

$$5^x \cdot 3251 = 81275$$

$$5^x = 25$$

$$5^x = 5^2$$

$$\Rightarrow x = 2$$

Vậy $x = 2$.

Câu 2. (Đề 70 - HSG 7 Thường Xuân, 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện: $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n = 2^{n+11}$.

Lời giải

$$\text{Đặt: } S = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n$$

$$2S = 2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1}$$

$$2S - S = (2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1}) - (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n)$$

$$S = n.2^{n+1} - 2^3 - (2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n-1} + 2^n)$$

$$\text{Đặt: } T = 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$$

$$2T = 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n-1} + 2^n + 2^{n+1}$$

$$2T - T = 2^{n+1} - 2^3$$

$$T = 2^{n+1} - 2^3$$

$$\text{Suy ra: } S = n.2^{n+1} - 2^3 - (2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + \dots + 2^{n-1} + 2^n) = n.2^{n+1} - 2^3 - (2^{n+1} - 2^3) = (n-1)2^{n+1}$$

$$\Rightarrow (n-1)2^{n+1} = 2^{n+11} \Rightarrow (n-1)2^{n+1} = 2^{10}.2^{n+1} \Rightarrow n-1 = 1024 \Rightarrow n = 1025.$$

Vậy $n = 1025$.

Câu 3. (Đề 71 - HSG 7 Yên Bình, 2022 - 2023)

Tìm x , biết:

a) $2^{x+2} - 2^x = 96$

b) $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$

Lời giải

a) $2^{x+2} - 2^x = 96$

$$2^x(2^2 - 1) = 96$$

$$2^x = 32$$

$$2^x = 2^5$$

$$x = 5.$$

Vậy $x = 5$.

b) $(2x-15)^5 = (2x-15)^3$

$$(2x-15)^3 \cdot [(2x-15)^2 - 1] = 0$$

$$\Rightarrow (2x-15)^3 = 0 \quad \text{hoặc} \quad (2x-15)^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 15 = 0 \text{ hoặc } 2x - 15 = 1 \text{ hoặc } 2x - 15 = -1.$$

$$\Rightarrow x = \frac{15}{2} \text{ hoặc } x = 8 \text{ hoặc } x = 7.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{15}{2}; 8; 7 \right\}.$$

Câu 4. (Đề 73 - HSG 7 Sóc Sơn, 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $5^{2x+3} \cdot 5^{3x} - \underbrace{1000\dots 0}_{\text{Có 2023 số 0}} : 2^{2023} = 0.$

Lời giải

$$5^{2x+3} \cdot 5^{3x} - \underbrace{1000\dots 0}_{\text{Có 2023 số 0}} : 2^{2023} = 0$$

$$\Rightarrow 5^{5x+3} - 10^{2023} : 2^{2023} = 0$$

$$\Rightarrow 5^{5x+3} - (10 : 2)^{2023} = 0$$

$$\Rightarrow 5^{5x+3} = 5^{2023}$$

$$\Rightarrow 5x + 3 = 2023$$

$$\Rightarrow 5x = 2020$$

$$\Rightarrow x = 404.$$

$$\text{Vậy } x = 404.$$

Câu 5. (Đề 74 - HSG Hà Đông, Trường Lê Quý Đôn), 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $5^{2x-1} = 5^{2x-3} + 125 \cdot 24.$

Lời giải

Ta có: $5^{2x-1} = 5^{2x-3} + 125 \cdot 24$

$$\Rightarrow 5^{2x-3} (5^2 - 1) = 5^3 \cdot 24$$

$$\Rightarrow 5^{2x-3} = 5^3$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = 3$$

$$\Rightarrow x = 3.$$

$$\text{Vậy } x = 3.$$

Câu 6. (Đề 79 - HSG 7 Yên Thế, Bắc Giang, 2022 - 2023)

Tìm bộ số x, y, z thỏa mãn $(2x - y + z)^{2022} + |y^2 - z| + (z - 4)^{12} = 0$.

Lời giải

Vì $(2x - y + z)^{2022} \geq 0$ với mọi x, y, z . (1)

$|y^2 - z| \geq 0$ với mọi y, z . (2)

$(z - 4)^{12} \geq 0$ với mọi z . (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow (2x - y + z)^{2022} + |y^2 - z| + (z - 4)^{12} \geq 0$ với mọi x, y, z .

Dấu “=” xảy ra khi: $2x - y + z = 0$; $y^2 - z = 0$ và $z - 4 = 0$.

Từ $z - 4 = 0 \Rightarrow z = 4$, mà $y^2 - z = 0 \Rightarrow y^2 = z$ hay $y^2 = 4 \Rightarrow y = 2$ hoặc $y = -2$.

+) Với $z = 4; y = 2$ mà $2x - y + z = 0 \Rightarrow x = -1$.

+) Với $z = 4; y = -2$ mà $2x - y + z = 0 \Rightarrow x = -3$.

Vậy bộ số (x, y, z) thỏa mãn là $(-1; 2; 4)$ và $(-3; -2; 4)$.

Câu 7. (Đề 84 - HSG 7 Hưng Hà, trường Lê Quý đôn, 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $(2x - 1)^{2022} + \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2022} + |x + y - z| = 0$.

Lời giải

Ta có: $(2x - 1)^{2022} \geq 0; \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2022} \geq 0; |x + y - z| \geq 0$ với mọi x, y, z .

$\Rightarrow (2x - 1)^{2022} + \left(y - \frac{2}{5}\right)^{2022} + |x + y - z| \geq 0$ với mọi x, y, z .

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $(2x - 1)^{2022} = 0$ và $\left(y - \frac{2}{5}\right)^{2022} = 0$ và $|x + y - z| = 0$.

$\Rightarrow 2x - 1 = 0$ và $y - \frac{2}{5} = 0$ và $x + y - z = 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{2}{5}$ và $z = \frac{9}{10}$.

Vậy $x = \frac{1}{2}; y = \frac{2}{5}; z = \frac{9}{10}$.

Câu 8. (Đề 85 - HSG 7 Hưng Hà, Thái Hưng, 2022 - 2023)

Tìm $x, y \in \mathbb{N}$, biết: $36 - y^2 = 8(x - 2022)^2$.

Lời giải

Ta có: $36 - y^2 = 8(x - 2022)^2 \Rightarrow y^2 + 8(x - 2022)^2 = 36$

Vì $y^2 \geq 0$ nên $8(x - 2022)^2 \leq 36 \Rightarrow (x - 2022)^2 \leq \frac{36}{8}$.

Vì $0 \leq (x - 2022)^2, x \in \mathbb{N}$ và $(x - 2022)^2 \leq \frac{36}{8}$ nên:

$(x - 2022)^2 = 4$ hoặc $(x - 2022)^2 = 1$ hoặc $(x - 2022)^2 = 0$

+ Với $(x - 2022)^2 = 4 \Rightarrow |x - 2022| = 2 \Rightarrow x = 2024$ hoặc $x = 2020$

$36 - y^2 = 8 \cdot 4 \Rightarrow y^2 = 36 - 32 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = 2$ hoặc $y = -2$ (loại vì $y \in \mathbb{N}$).

+ Với $(x - 2022)^2 = 1 \Rightarrow x = 2023$ hoặc $x = 2021$.

$36 - y^2 = 8 \cdot 1 \Rightarrow y^2 = 36 - 8 = 28$ (loại).

+ Với $(x - 2022)^2 = 0 \Rightarrow x = 2022$ và $y^2 = 36 \Rightarrow y = 6$ hoặc $y = -6$ (loại vì $y \in \mathbb{N}$).

Vậy các cặp số tự nhiên x, y cần tìm là: $(2024; 2); (2020; 2); (2022; 6)$.

Câu 9. (đề 71 - HSG 7 huyện Yên Bình, Yên Bái 2022 - 2023)

Tìm x biết: $(x - 1)^3 = 125$

Lời giải

$$(x - 1)^3 = 125 \Rightarrow (x - 1)^3 = 5^3 \Rightarrow x - 1 = 5 \Rightarrow x = 6$$

Vậy $x = 6$.

Dạng 4. Tìm ẩn dạng phân thức

Câu 1. (Đề 75 - HSG 7 huyện Tiên Du, Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm x , biết $\frac{1 - x}{-9} = \frac{-25}{1 - x}$.

Lời giải:

$$\frac{1 - x}{-9} = \frac{-25}{1 - x} \text{ . Điều kiện : } x \neq 1$$

$$\text{Suy ra } (1 - x)^2 = (-9) \cdot (-25) \Rightarrow (1 - x)^2 = 15^2$$

$$\text{Suy ra } 1 - x = 15 \text{ hoặc } 1 - x = -15 \text{ .}$$

$$\text{Xét } 1 - x = 15 \Rightarrow x = -14 \text{ (tm)}$$

$$\text{Xét } 1 - x = -15 \Rightarrow x = 16 \text{ (tm)}$$

$$\text{Vậy } x \in \{-14; 16\}$$

Dạng 5. Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. (Đề 69 - HSG 7 thị xã Kỳ Anh, 2022 - 2023)

Tính tổng tất cả các giá trị của x thỏa mãn: $|x + 2015| = |-2023|$.

Lời giải

Kết quả: -4030.

$$|x + 2015| = |-2023| \Rightarrow |x + 2015| = 2023$$

$$\Rightarrow x + 2015 = 2023 \text{ hoặc } x + 2015 = -2023$$

$$\Rightarrow x = 2023 - 2015 \text{ hoặc } x = -2023 - 2015$$

$$\Rightarrow x = 8 \text{ hoặc } x = -4038.$$

B. TỰ LUẬN

Câu 1. (Đề 62 - HSG 7 huyện Hương Trà, 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \left| |3x - 3| + 2x + (-1)^{2022} \right| = 3x + 2023^0.$$

Lời giải

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \left| |3x - 3| + 2x + (-1)^{2022} \right| = 3x + 2023^0 \Rightarrow \left| |3x - 3| + 2x + 1 \right| = 3x + 1 \quad (*)$$

$$\text{Điều kiện để } x \text{ thỏa mãn bài toán là: } 3x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{-1}{3}.$$

$$\text{Khi đó } x \geq \frac{-1}{3} \Rightarrow 2x + 1 \geq 0 \text{ nên } (*) \text{ trở thành:}$$

$$\Rightarrow |3x - 3| + 2x + 1 = 3x + 1 \Rightarrow |3x - 3| = x \quad (x \geq 0).$$

$$\text{Nếu } x \geq 1 \text{ ta có } 3x - 3 = x \text{ nên } x = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Nếu } 0 \leq x < 1 \text{ ta có } 3 - 3x = x \text{ nên } x = \frac{3}{4} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{3}{2}; \frac{3}{4} \right\}.$$

Câu 2. (Đề 68 - HSG 7 huyện Nông Công, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left(\frac{31}{10} - |x+2|\right) : \left(\frac{19}{10} - \frac{7}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1$

Lời giải

Ta có: $\left(\frac{31}{10} - |x+2|\right) : \left(\frac{19}{10} - \frac{7}{5}\right) + \frac{4}{5} = 1 \Rightarrow \frac{31}{10} - |x+2| = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{10} = \frac{1}{10}$

$$\Rightarrow |x+2| = \frac{31}{10} - \frac{1}{10} = 3$$

$$\Rightarrow x+2=3 \text{ hoặc } x+2=-3 \Rightarrow x=1 \text{ hoặc } x=-5.$$

$$\text{Vậy } x=1 \text{ hoặc } x=-5.$$

Câu 3. (Đề 72 - HSG 7 huyện Bá Thước, 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $|x - 0,25| + \frac{1}{2} = 1,25.$

Lời giải

$$|x - 0,25| + \frac{1}{2} = 1,25 \Rightarrow |x - 0,25| = 0,75$$

$$\Rightarrow x - 0,25 = 0,75 \text{ hoặc } x - 0,25 = -0,75$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -0,5.$$

$$\text{Vậy } x \in \{1; -0,5\}.$$

Câu 4. (Đề 75 - HSG 7 huyện Tiên Du, Bắc Ninh, 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} : |2x - 1| = -\frac{2}{3}.$

Lời giải

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} : |2x - 1| = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} : |2x - 1| = \frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{1}{3} : |2x - 1| = 1$$

$$|2x - 1| = \frac{1}{3}$$

$$\text{Suy ra } 2x - 1 = \frac{1}{3} \text{ hoặc } 2x - 1 = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{- Xét } 2x - 1 = \frac{1}{3} \text{ suy ra } x = \frac{2}{3}.$$

$$\text{- Xét } 2x - 1 = -\frac{1}{3} \text{ suy ra } x = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right\}.$$

Câu 5. (Đề 78 - HSG 7 huyện Sông Lô, Vĩnh Phúc, 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } 2024x - |1011x + 2| = |1012x + 3|. \quad (*)$$

Lời giải

$$2024x - |1011x + 2| = |1012x + 3|$$

$$\Rightarrow |1011x + 2| + |1012x + 3| = 2024x \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } |1011x + 2| \geq 0 \text{ và } |1012x + 3| \geq 0, \text{ với mọi } x$$

$$\Rightarrow |1011x + 2| + |1012x + 3| \geq 0 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \Rightarrow 2024x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\text{Khi đó: } |1011x + 2| = 1011x + 2 \text{ và } |1012x + 3| = 1012x + 3.$$

Ta có:

$$2024x - |1011x + 2| = |1012x + 3| \Rightarrow 1011x + 2 + 1012x + 3 = 2024x$$

$$\Rightarrow 1011x + 1012x - 2024x = -5 \Rightarrow -x = -5 \Rightarrow x = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } x = 5.$$

Câu 6. (Đề 83 - HSG 7 huyện Hưng Hà, Phạm Đôn Lễ, 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{|6-3x|+1}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{|6-3x|+1}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot (|6-3x|+1) = 3 \cdot (|x-2|+2)$$

$$\Rightarrow 2|6-3x|+2 = 3|x-2|+6$$

$$\Rightarrow 2|6-3x|-3|x-2| = 6-2$$

$$\Rightarrow 2.3|2-x|-3|x-2|=4$$

$$\Rightarrow 6|x-2|-3|x-2|=4$$

$$\Rightarrow 3|x-2|=4$$

$$\Rightarrow |x-2|=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow x-2=\frac{4}{3} \text{ hoặc } x-2=-\frac{4}{3}$$

$$\text{TH1: } x-2=\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow x=\frac{4}{3}+2$$

$$\Rightarrow x=\frac{10}{3}(\text{tm})$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{10}{3}; \frac{2}{3} \right\}.$$

$$\text{TH2: } x-2=-\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow x=2-\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow x=\frac{2}{3}(\text{tm})$$

Câu 7. (Đề 90 - HSG 7 huyện Hưng Hà, Tây Đô, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|x^2 + |x-1|| = x^2 + 2$. (1)

Lời giải

Vì $x^2 + |x-1| > 0$ với mọi x

Từ (1) $\Rightarrow x^2 + |x-1| = x^2 + 2$ hay $|x-1| = 2$.

TH1: $x-1=2 \Rightarrow x=3$.

TH2: $x-1=-2 \Rightarrow x=-1$.

KL: $x=3$ hoặc $x=-1$.

Câu 8. (Đề 87 - HSG 7 huyện Hưng Hà, Thống Nhất, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|2x-3|-|3x+2|=-4$.

Lời giải

Ta có: $2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$.

$$3x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$$

TH1: $x \leq -\frac{2}{3}$

$$|2x-3|-|3x+2|=-4 \Rightarrow 3-2x+3x+2=-4 \Rightarrow x=-9 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{TH2: } \frac{-2}{3} < x < \frac{3}{2}$$

$$|2x - 3| - |3x + 2| = -4 \Rightarrow 2x - 3 + 3x + 2 = -4 \Rightarrow x = \frac{-3}{5} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{TH3: } \frac{3}{2} \leq x$$

$$|2x - 3| - |3x + 2| = -4 \Rightarrow 2x - 3 - 3x - 2 = -4 \Rightarrow x = -1 \text{ (loại).}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ -9; \frac{-3}{5} \right\}.$$

Câu 9. (Đề 72 - HSG 7 huyện Hưng Hà, Thống Nhất, 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho: $2^a + 7 = |b - 5| + b - 5$.

Lời giải

Nhận xét: Với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$.

Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$. Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Áp dụng nhận xét trên thì $|b - 5| + b - 5$ là số chẵn với $b - 5 \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $2^a + 7$ là số chẵn $\Rightarrow 2^a$ lẻ khi $a = 0$.

Khi đó $|b - 5| + b - 5 = 8$.

+ Nếu $b < 5$, ta có: $-(b - 5) + b - 5 = 8 \Rightarrow 0 = 8$ (loại).

+ Nếu $b \geq 5$, ta có: $2(b - 5) = 8 \Rightarrow b - 5 = 4 \Rightarrow b = 9$ (thỏa mãn).

Vậy $(a; b) = (0; 9)$.

Câu 10. (Đề 75 - HSG 7 Tiên Du, Bắc Ninh, 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số tự nhiên m và n thỏa mãn $2^m + 2021 = |n - 2020| + |n - 2022|$.

Lời giải

Với các số tự nhiên m và n thỏa mãn $2^m + 2021 = |n - 2020| + |n - 2022|$.

Ta xét ba trường hợp sau:

* Trường hợp 1: $n \geq 2022$, ta có:

$$2^m + 2021 = 2n - 4042$$

$$2^m - 2n = -6063$$

Vì -6063 là số lẻ, $2n$ là số chẵn nên 2^m là số lẻ. Suy ra $m = 0 \Rightarrow n = 3032$.

* Trường hợp 2: $2020 \leq n < 2022$, ta có:

$$2^m + 2021 = n - 2020 + 2022 - n$$

$$2^m + 2021 = 2$$

$$2^m = -2019 \text{ (vô lý)}$$

* Trường hợp 3: $n < 2022$, ta có:

$$2^m + 2021 = 4042 - 2n$$

$$2^m + 2n = 2021$$

Vì 2021 là số lẻ, $2n$ là số chẵn nên 2^m là số lẻ. Suy ra $m = 0 \Rightarrow n = 1010$

Vậy $m = 0; n = 3032$ hoặc $m = 0; n = 1010$.

Câu 11. (Đề 85 - HSG 7 Hưng Hà, trường THCS Thái Hưng, 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{2}{3}\right| + |x^2 + xz| = 0$.

Lời giải

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{2}{3}\right| + |x^2 + xz| = 0$$

Áp dụng tính chất $|A| \geq 0$ ta có:

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| = 0; \left|y + \frac{2}{3}\right| = 0; |x^2 + xz| = 0$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = 0; y + \frac{2}{3} = 0; x(x + z) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}; y = -\frac{2}{3}; z = -x = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{2}{3}; z = -\frac{1}{2}.$

Câu 12. (Đề 90 - HSG 7 Hưng Hà, trường THCS Tây Đô, 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho: $2^a + 37 = |b - 45| + b - 45$.

Lời giải

Nhận xét: Với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$.

Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$. Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với $\forall x \in \mathbb{Z}$.

Áp dụng nhận xét trên thì $|b - 45| + b - 45$ là số chẵn với $b \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $2^a + 37$ là số chẵn $\Rightarrow 2^a$ lẻ khi $a = 0$.

Khi đó $|b - 45| + b - 45 = 38$.

+ Nếu $b < 45$, ta có $-(b - 45) + b - 45 = 38 \Rightarrow 0 = 38$ (loại).

+ Nếu $b \geq 45$, ta có $2(b - 45) = 38 \Rightarrow b - 45 = 19 \Rightarrow b = 64$. (thỏa mãn)

Vậy $(a; b) = (0; 64)$.

Dạng 6. Sử dụng công thức tính tổng có quy luật

Câu 1. (Đề 64 - HSG 7 huyện Cẩm Khê, 2022 - 2023)

Tìm x biết $\left|x - \frac{1}{3}\right| + \left|x - \frac{1}{15}\right| + \left|x - \frac{1}{35}\right| + \left|x - \frac{1}{63}\right| + \dots + \left|x - \frac{1}{483}\right| = -12x$.

Lời giải

Nhận xét: vế trái của biểu thức luôn dương nên vế phải lớn hơn 0 suy ra $12x < 0$ hay $x < 0$.

Với $x < 0$ ta có:

$$\begin{aligned} & \left|x - \frac{1}{3}\right| + \left|x - \frac{1}{15}\right| + \left|x - \frac{1}{35}\right| + \left|x - \frac{1}{63}\right| + \dots + \left|x - \frac{1}{483}\right| = -12x \\ & \Rightarrow -x + \frac{1}{3} - x + \frac{1}{15} - x + \frac{1}{35} - x + \frac{1}{63} - \dots - x + \frac{1}{483} = -12x \\ & \Rightarrow -11x + \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{21 \cdot 23}\right) = -12x \\ & \Rightarrow -11x + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{23}\right) = -12x \\ & \Rightarrow x = \frac{-11}{23} \text{ (TM).} \end{aligned}$$

Vậy $x = \frac{-11}{23}$.

Câu 2. (Đề 65 - HSG 7 huyện Quan Sơn, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left|x + \frac{1}{1 \cdot 5}\right| + \left|x + \frac{1}{5 \cdot 9}\right| + \left|x + \frac{1}{9 \cdot 13}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{397 \cdot 401}\right| = 101x$

Lời giải

$$\text{Ta có } \left| x + \frac{1}{1 \cdot 5} \right| \geq 0; \left| x + \frac{1}{5 \cdot 9} \right| \geq 0; \left| x + \frac{1}{9 \cdot 13} \right| \geq 0; \dots;$$

$$\text{Nên } \left| x + \frac{1}{1 \cdot 5} \right| + \left| x + \frac{1}{5 \cdot 9} \right| + \left| x + \frac{1}{9 \cdot 13} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{397 \cdot 401} \right| \geq 0 \Rightarrow 101x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \Rightarrow x + \frac{1}{1 \cdot 5} > 0; x + \frac{1}{5 \cdot 9} > 0; \dots; x + \frac{1}{397 \cdot 401} > 0$$

$$\text{Nên ta có: } x + \frac{1}{1 \cdot 5} + x + \frac{1}{5 \cdot 9} + x + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + x + \frac{1}{397 \cdot 401} = 101x$$

$$\Rightarrow 100x + \left(\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{397 \cdot 401} \right) = 101x \Rightarrow 100x + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{401} \right) = 101x \Rightarrow x = \frac{100}{401}.$$

$$\text{Vậy } x = \frac{100}{401}.$$

Câu 3. (Đề 71 - HSG 7 huyện Yên Bình, Yên Bái 2022 - 2023)

Tìm x , biết $x + 2x + 3x + \dots + 2022x = 2022 \cdot 2023$.

Lời giải

$$x + 2x + 3x + \dots + 2022x = 2022 \cdot 2023$$

$$\Rightarrow x \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 2022) = 2022 \cdot 2023$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{(1 + 2022) \cdot 2022}{2} = 2022 \cdot 2023$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{2023 \cdot 2022}{2} = 2022 \cdot 2023$$

$$\Rightarrow x = 2.$$

Vậy $x = 2$.

Câu 4. (Đề 72 - HSG 7 huyện Bá Thước, 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014} \right) x = \frac{2013}{1} + \frac{2012}{2} + \dots + \frac{2}{2012} + \frac{1}{2013}$.

Lời giải

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014} \right) \cdot x = \frac{2013}{1} + \frac{2012}{2} + \dots + \frac{2}{2012} + \frac{1}{2013}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014} \right) \cdot x = \frac{2012}{2} + 1 + \frac{2011}{3} + 1 \dots + \frac{2}{2012} + 1 + \frac{1}{2013} + 1 + 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014} \right) \cdot x = \frac{2014}{2} + \frac{2014}{3} + \dots + \frac{2014}{2012} + \frac{2014}{2013} + \frac{2014}{2014}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014} \right) \cdot x = 2014 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} + \frac{1}{2014} \right)$$

$$\Rightarrow x = 2014.$$

Vậy $x = 2014$.

Câu 5. (Đề 76 - HSG 7 huyện Cẩm Thủy, Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left| x + \frac{1}{101} \right| + \left| x + \frac{2}{101} \right| + \left| x + \frac{3}{101} \right| + \dots + \left| x + \frac{100}{101} \right| = 101x.$

Lời giải

$$\text{Vì } \left| x + \frac{1}{101} \right| + \left| x + \frac{2}{101} \right| + \left| x + \frac{3}{101} \right| + \dots + \left| x + \frac{100}{101} \right| > 0 \quad \text{nên } 101x > 0.$$

Suy ra: $x > 0$.

$$\left| x + \frac{1}{101} \right| + \left| x + \frac{2}{101} \right| + \left| x + \frac{3}{101} \right| + \dots + \left| x + \frac{100}{101} \right| = 101x$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{101} \right) + \left(x + \frac{2}{101} \right) + \left(x + \frac{3}{101} \right) + \dots + \left(x + \frac{100}{101} \right) = 101x$$

$$\Rightarrow (x + x + \dots + x) + \left(\frac{1}{101} + \frac{2}{101} + \frac{3}{101} + \dots + \frac{100}{101} \right) = 101x$$

$$\Rightarrow 100x + (1 + 2 + 3 + \dots + 100) = 101x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{101} \cdot \frac{(1+100) \cdot [(100-1):1 + 1]}{2} = x$$

$$\Rightarrow x = 50 \text{ (tm)}.$$

Vậy $x = 50$.

Câu 6. (Đề 80 - HSG 7 huyện Hưng Hà, 2022 - 2023)

Tìm x , biết:

$$\left| x + \frac{1}{2021} \right| + \left| x + \frac{2}{2021} \right| + \left| x + \frac{3}{2021} \right| + \dots + \left| x + \frac{2020}{2021} \right| = 2021x.$$

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0$ suy ra:

$$x + \frac{1}{2021} + x + \frac{2}{2021} + x + \frac{3}{2021} + \dots + x + \frac{2020}{2021} = 2021x$$

$$\Rightarrow 2020x + \frac{1+2+3+\dots+2020}{2021} = 2021x$$

$$\Rightarrow 2020x + \frac{2020 \cdot 2021}{2 \cdot 2021} = 2021x$$

$$\Rightarrow x = 1010.$$

Vậy $x = 1010$.

Câu 7. (Đề 82 - HSG 7 huyện Hưng Hà, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\frac{x+1}{2023} + \frac{x+2}{2022} + \frac{x+3}{2021} + \frac{x+4}{2020} = -4$ (1)

Lời giải

$$(1) \Rightarrow \left(\frac{x+1}{2023} + 1 \right) + \left(\frac{x+2}{2022} + 1 \right) + \left(\frac{x+3}{2021} + 1 \right) + \left(\frac{x+4}{2020} + 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x+2024}{2023} + \frac{x+2024}{2022} + \frac{x+2024}{2021} + \frac{x+2024}{2020} = 0$$

$$\Rightarrow (x+2024) \left(\frac{1}{2023} + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2020} \right) = 0$$

$$\Rightarrow x+2024 = 0 \quad (\text{vì } \frac{1}{2023} + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2020} \neq 0) \Rightarrow x = -2024.$$

Vậy $x = -2024$.

Câu 8. (Đề 83 - HSG 7 huyện Hưng Hà, Phạm Đôn Lễ, 2022 - 2023)

x , biết: $\frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2022}{2024}$.

Tìm

Lời giải

$$\frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left(\frac{x+1}{2(x+1)} - \frac{2}{2 \cdot (x+1)} \right) = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow x = 2023.$$

Vậy $x = 2023$.

Dạng 7. Tổng các biểu thức không âm bằng 0

Câu 1. (Đề 61 - HSG 7 huyện Hưng Hà, 2022 - 2023)

Cho $(x-1)^{2020} + |y-3| + (x-y+z+3)^{2022} = 0$. Chứng minh: $8x - 2y + z = 1$.

Lời giải

Vì $(x-1)^{2022} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}; |y-3| \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}; (x-y+z+3)^{2022} \geq 0 \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Do đó $(x-1)^{2020} + |y-3| + (x-y+z+3)^{2022} = 0$ khi và chỉ khi:

$$(x-1)^{2022} = 0 \quad \text{và} \quad |y-3| = 0 \quad \text{và} \quad (x-y+z+3)^{2022} = 0$$

$$\Rightarrow x-1=0 \quad \text{và} \quad y-3=0 \quad \text{và} \quad x-y+z+3=0$$

$$\Rightarrow x=1 \quad \text{và} \quad y=3 \quad \text{và} \quad z=-1.$$

Suy ra: $8x - 2y + z = 8.1 - 2.3 - 1 = 1$ (đpcm).

Câu 2. (Đề 64 - HSG 7 huyện Cẩm Khê, 2022 - 2023)

Tính giá trị của biểu thức: $C = 2x^4 + 15y^{2023} + 2006$ tại x, y thỏa mãn: $\sqrt{(y+1)^4} + (2-x)^2 = 0$

Lời giải

Vì $\sqrt{(y+1)^4} \geq 0$ với mọi y , $(2-x)^2 \geq 0$ với mọi x do đó để $\sqrt{(y+1)^4} + (2-x)^2 = 0$ thì

$$\sqrt{(y+1)^4} = 0 \quad \text{và} \quad (2-x)^2 = 0 \Rightarrow y+1=0 \quad \text{và} \quad 2-x=0.$$

$$\Rightarrow y = -1; x = 2 \quad \text{suy ra} \quad C = 2.2^4 + 15.(-1)^{2023} + 2006 = 2023.$$

Vậy $C = 2023$.

Câu 3. (Đề 86 - HSG 7 huyện Hưng Hà, Thái Hưng, 2022 - 2023)

Tìm x, y, z biết: $\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{2}{3}\right| + |x^2 + xz| = 0$

Lời giải

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y + \frac{2}{3}\right| + |x^2 + xz| = 0$$

Áp dụng tính chất $|A| \geq 0$ ta có:

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| = 0 \quad \text{và} \quad \left|y + \frac{2}{3}\right| = 0 \quad \text{và} \quad |x^2 + xz| = 0$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{và} \quad y + \frac{2}{3} = 0 \quad \text{và} \quad x(x+z) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{và} \quad y = -\frac{2}{3} \quad \text{và} \quad z = -x = -\frac{1}{2}.$$

Vậy $x = \frac{1}{2}; y = -\frac{2}{3}; z = -\frac{1}{2}.$

Dạng 8. Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu

Câu 1. (Đề 88 - HSG 7 Hưng Hà, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|x+5| + |x-3| = 9. \quad (*)$

Lời giải

Ta có:

$$x+5=0 \Rightarrow x=-5$$

$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

Bảng xét dấu:

x	-5		3	
$x+5$	-	0	+	+
$x-3$	-	-	0	+

+ Với $x < -5$ (*) trở thành:

$$-x-5+3-x=9 \Rightarrow -2x-2=9 \Rightarrow -2x=9+2 \Rightarrow -2x=11 \Rightarrow x=-\frac{11}{2} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

+ Với $-5 \leq x < 3$ (*) trở thành:

$$x+5+3-x=9 \Rightarrow 8=9 \Rightarrow x \in \emptyset \quad (\text{vô lý}).$$

+ Với $x \geq 3$ (*) trở thành:

$$x+5+x-3=9 \Rightarrow 2x+2=9 \Rightarrow 2x=9-2 \Rightarrow 2x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{2} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy $x \in \left\{ -\frac{11}{2}; \frac{7}{2} \right\}.$

Câu 2. (Đề 89 - HSG 7 Hưng Hà, Thái Phương, 2022 - 2023)

Cho $\frac{6}{(x-2022)^2+2} = |y-2023|+3.$ Tính $x+y.$

Lời giải

$$\frac{6}{(x-2022)^2+2} = |y-2023|+3$$

$$(x - 2022)^2 \geq 0; \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x - 2022)^2 + 2 \geq 0 + 2 = 2.$$

$$\frac{1}{(x - 2022)^2 + 2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{6}{(x - 2022)^2 + 2} \leq \frac{6}{2} = 3 \quad (1)$$

$$|y - 2023| \geq 0; \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow |y - 2023| + 3 \geq 0 + 3 = 3 \quad (2)$$

$$\frac{6}{(x - 2022)^2 + 2} = |y - 2023| + 3 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $x - 2022 = 0$ và $y - 2023 = 0$
 $\Rightarrow x = 2022; y = 2023.$

Suy ra $x + y = 2022 + 2023 = 4045.$

Vậy $x + y = 4045.$

Dạng 9: Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn

Câu 1. (Đề 79 - HSG 7 Yên Thế, Bắc Giang, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|x - 2020| + |x - 2021| + |x - 2022| + |x - 2023| = 4.$

Lời giải

Ta có:

$$|x - 2020| + |x - 2021| + |x - 2022| + |x - 2023| = |x - 2020| + |x - 2021| + |2022 - x| + |2023 - x|$$

$$\leq |x - 2020 + 2023 - x| + |x - 2021 + 2022 - x| = 4.$$

Dấu "=" xảy ra khi: $(x - 2020)(2023 - x) \geq 0$ và $(x - 2021)(2022 - x) \geq 0$
 $\Rightarrow 2020 \leq x \leq 2023$ và $2021 \leq x \leq 2022 \Rightarrow 2021 \leq x \leq 2022.$

Vậy $2021 \leq x \leq 2022.$

Câu 2. (Đề 81 - HSG 7 Yên Thế, Bắc Giang, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|2022 - x| + |2023 - x| + |2024 - x| = 2.$

Lời giải

Ta có $|2022 - x| + |2024 - x| = |x - 2022| + |2024 - x| \geq |x - 2022 + 2024 - x| = 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow |2022 - x| + |2024 - x| \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Dấu "=" xảy ra khi $(x - 2022)(2024 - x) \geq 0 \quad (*)$

Giải (*):

$$\text{TH1: } x - 2022 \geq 0 \text{ và } 2024 - x \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq 2022 \text{ và } x \leq 2024.$$

$$\Rightarrow 2022 \leq x \leq 2024.$$

$$\text{TH2: } x - 2022 \leq 0 \text{ và } 2024 - x \leq 0$$

$$\text{hoặc } \Rightarrow x \leq 2022 \text{ và } x \geq 2024 \text{ (loại)}$$

$$\text{Ta có: } |2023 - x| \geq 0 \quad \forall x \quad (2)$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 2023$.

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow |2022 - x| + |2023 - x| + |2024 - x| \geq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy để $|2022 - x| + |2023 - x| + |2024 - x| = 2$ thì (1) và (2) xảy ra dấu “=” khi:

$$2022 \leq x \leq 2024 \text{ và } x = 2024 \Rightarrow x = 2024.$$

Vậy $x = 2024$

Câu 3. (Đề 86 - HSG 7 Hưng Hà, Lý Nam Đế, 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{3} \right| + \left| x + \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}.$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \left| x + \frac{1}{4} \right| = \left| -x - \frac{1}{4} \right| \geq -x - \frac{1}{4}$$

$$\left| x + \frac{1}{3} \right| = 0; \quad \left| x + \frac{1}{2} \right| \geq x + \frac{1}{2}$$

$$\text{Do đó: } A \geq x + \frac{1}{2} + 0 - x - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi: } x + \frac{1}{4} \leq 0; \left| x + \frac{1}{3} \right| = 0 \text{ và } x + \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\text{Suy ra: } x = -\frac{1}{3}.$$

Vậy $A = \frac{1}{4}$ khi $x = -\frac{1}{3}$.

Câu 4. (Đề 77 - HSG 7 Nga Sơn, Thanh Hóa, 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $(x+y)^4 = 40x + 41$.

Lời giải

Do x, y nguyên dương nên $40x < 41x, 41 \leq 41y$. Khi đó, ta có :

$$(x+y)^4 = 40x + 41 < 41x + 41y = 41(x+y)$$

$$\Rightarrow (x+y)^3 < 41 < 64 = 4^3 \Rightarrow x+y < 4. \quad (1)$$

$$\text{Do } x \text{ nguyên dương nên } 40x + 41 \geq 40.1 + 41 = 81 \Rightarrow (x+y)^4 \geq 81 \Rightarrow x+y \geq 3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $x+y=3$ mà $x, y \in \mathbb{N}^*$ nên $(x; y) \in \{(1; 2), (2; 1)\}$.

Thử lại được : $x=1; y=2$.

Vậy $x=1; y=2$.

Dạng 10: Tìm ẩn với điều kiện nguyên

A. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. (Đề 69 - HSG 7 thị xã Kỳ Anh, 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên dương n mà khi thay vào $A = \frac{3n+2}{n-1}$ thì A nhận được giá trị nguyên. Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của n vừa tìm được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Kết quả: 8.

$$A = \frac{3n+2}{n-1} = 3 + \frac{5}{n-1} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{n-1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 5; n-1 \Rightarrow n-1 \in U(5)$$

$$\Rightarrow n-1 \in \{1; -1; 5; -5\}$$

$$\Rightarrow n \in \{2; 0; 6; -4\}$$

Ta tìm được các giá trị n là: $6; -4; 2; 0$.

Mà n nguyên dương nên $n=6; n=2$.

B. TỰ LUẬN

Câu 1. (Đề 62 - HSG 7 Hương Trà, 2022 - 2023)

Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức: $B = \frac{8-x}{x-3} (x \neq 3)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$B = \frac{8-x}{x-3} = \frac{5-(x-3)}{x-3} = \frac{5}{x-3} - \frac{x-3}{x-3} = \frac{5}{x-3} - 1$$

Ta có:

$$B \Rightarrow \frac{5}{x-3}$$

có giá trị nhỏ nhất nhỏ nhất.

$$\Rightarrow x-3$$

là số nguyên âm lớn nhất.

$$\Rightarrow x-3 = -1$$

$$\Rightarrow x = 2$$

$$B_{\min} = \frac{5}{2-3} - 1 = -6$$

Vậy khi $x = 2$.

Câu 2. (Đề 63 - HSG 7 MỸ ĐỨC, 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $3xy + 2x - 5y = 6$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} 3xy + 2x - 5y = 6 &\Rightarrow x(3y+2) - 5y = 6 \Rightarrow 3x(3y+2) - 15y = 18 \\ &\Rightarrow 3x(3y+2) - 15y - 10 = 18 - 10 \Rightarrow 3x(3y+2) - 5(3y+2) = 8 \Rightarrow (3x-5)(3y+2) = 8. \\ x, y \in \mathbb{Z} &\Rightarrow (3x-5) \in \mathbb{Z}; (3y+2) \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow 3y+2 \in U(8) = \{1; -1; 2; -2; 4; -4; 8; -8\} \end{aligned}$$

$$\text{Mà } 3y+2 \text{ là số chia cho 3 dư } 2 \Rightarrow 3y+2 \in \{-1; 2; -4; 8\}.$$

Ta có bảng sau:

$3y+2$	-4	-1	2	8
$3x-5$	-2	-8	4	1
y	-2	-1	0	2
x	1	-1	3	2

$$(x; y) \in \{(1; -2), (-1; -1), (3; 0), (2; 2)\}.$$

Vậy

Câu 3. (Đề 63 - HSG 7 MỸ ĐỨC, 2022 - 2023)

Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn: $25 - b^2 = 8(a - 2023)^2$

Lời giải

$$25 - b^2 = 8(a - 2023)^2$$

Vì $b^2 \geq 0$ suy ra:

$$8(a - 2023)^2 \leq 25 \Rightarrow 8(a - 2023)^2 + b^2 = 25 \Rightarrow (a - 2023)^2 \leq \frac{25}{8}.$$

Mặt khác $(a - 2023)^2$ là số chính phương nên $(a - 2023)^2 = 0$ hoặc $(a - 2023)^2 = 1$.

Nếu $(a - 2023)^2 = 0 \Rightarrow a = 2023$.

Khi đó: $25 - b^2 = 8(a - 2023)^2 \Rightarrow 25 - b^2 = 8 \cdot 0 \Rightarrow b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$ (do $b \in \mathbb{N}$).

Nếu $(a - 2023)^2 = 1 \Rightarrow a - 2023 = 1$ hoặc $a - 2023 = -1$

$\Rightarrow a = 2024$ hoặc $\Rightarrow a = 2022$.

Khi đó: $25 - b^2 = 8(a - 2023)^2 \Rightarrow 25 - b^2 = 8 \cdot 1 \Rightarrow b^2 = 17$ (không thỏa mãn).

Vậy $a = 2023$ và $b = 5$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 4. (Đề 64 - HSG 7 CẨM KHÊ, 2022 - 2023)

$$P = \frac{4049 - 2x}{x - 2023} \quad (x \neq 2023).$$

Cho biểu thức: Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất, tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{4049 - 2x}{x - 2023} = \frac{3 - 2(x - 2023)}{x - 2023} = \frac{3}{x - 2023} - 2 \quad (x \neq 2023)$$

Biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi $\frac{3}{x - 2023}$ có giá trị nhỏ nhất.

$\Rightarrow x - 2023$ là số âm lớn nhất (vì x nguyên) $\Rightarrow x - 2023 = -1 \Rightarrow x = 2022$ (TM).

Khi đó giá trị nhỏ nhất của P là -5 khi $x = 2022$.

Vậy GTNN của P là -5 khi $x = 2022$.

Câu 5. (Đề 62 - HSG 7 HƯƠNG TRÀ, 2022 - 2023)

Cho hai biểu thức $P = \frac{4x-7}{x-2}; Q = \frac{3x^2-9x+2}{x-3}$.

Tính giá trị nguyên của x để mỗi biểu thức có giá trị nguyên.

Lời giải

* Ta có: $P = \frac{4x-7}{x-2} = 4 + \frac{1}{x-2} \quad (x \neq 2)$

$$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-2 \in \mathbb{Z} \text{ để } P \text{ thì } \frac{1}{x-2} \text{ nguyên} \Rightarrow x-2 \in U(1) \Rightarrow x-2 \in \{1; -1\} \Rightarrow x \in \{3; 1\}.$$

Với

* Ta có: $Q = \frac{3x^2-9x+2}{x-3} \quad (x \neq 3)$

$$Q = \frac{3x^2-9x+2}{x-3} = \frac{3x(x-3)+2}{x-3} = 3x + \frac{2}{x-3}$$

$$\text{Để } Q \text{ nguyên thì } \frac{2}{x-3} \text{ nguyên} \Rightarrow x-3 \in U(2) = \{1; -1; 2; -2\} \Rightarrow x \in \{4; 2; 5; 1\}.$$

$$\text{Vậy để } Q \text{ nguyên thì } x \in \{4; 2; 5; 1\}.$$

Câu 6. (Đề 64 - HSG 7 huyện Cẩm Khê, 2022 - 2023)

Tìm các số a, b, c nguyên dương thỏa mãn: $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b$ và $a+3 = 5^c$.

Lời giải:

Ta có:

$$a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 5^b = a^3 + 3a^2 + 5 = a^2 \cdot (a+3) + 5 > a+3 = 5^c$$

$$\Rightarrow 5^b > 5^c \Rightarrow b > c$$

$$\Rightarrow 5^b : 5^c$$

$$\Rightarrow (a^3 + 3a^2 + 5) : (a+3)$$

$$\Rightarrow a^2(a+3) + 5 : (a+3)$$

$$\text{Vi } a^2(a+3) : a+3 \Rightarrow 5 : a+3 \Rightarrow a+3 \in U(5) \Rightarrow a+3 \in \{1; -1; 5; -5\} \quad (1)$$

$$\text{Do } a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a+3 \geq 4 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow a+3 = 5 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 5 = 5^5.$$

$$25 = 5^b \Rightarrow b = 2.$$

$$2+3 = 5^c \Rightarrow c = 1.$$

Vậy $a=2, b=2, c=1$.

Câu 7. (Đề 65 - HSG 7 huyện Quan Sơn, 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $10^x + 6y = 2023$.

Lời giải

Với $x, y \in \mathbb{Z}$ và $10^x + 6y = 2023 \Rightarrow 10^x = 2023 - 6y$ là số nguyên.

Suy ra: 10^x là số nguyên, từ đó $x \in \mathbb{N}$.

Khi đó: $10^x = 2023 - 6y$ là một số lẻ (vì $2023 \not\vdots 2; 6y \vdots 2 \Rightarrow 10^x \not\vdots 2$).

Suy ra $x=0$.

$$10^0 + 6y = 2023 \Rightarrow 6y = 2022 \Rightarrow y = 2022 : 6 = 337.$$

Vậy $(x; y) = (0; 337)$.

Câu 8. (Đề 66 - HSG 7 huyện Thái Thụy, 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $|x - 2022| + |x - 2023| + 3(x - y)^2 = 2(x - y)^2 + 1$.

Lời giải

Ta có: $2(x - y)^2 + 1 \geq 1$ với mọi x, y .

Có $|x - 2022| \geq 0; |x - 2023| \geq 0; 3(x - y)^2 \geq 0$.

Suy ra: $|x - 2022| + |x - 2023| + 3(x - y)^2 \geq 0$ với mọi x, y .

$$\Rightarrow |x - 2022| + |x - 2023| + 3(x - y)^2 = |x - 2022| + |x - 2023| + 3(x - y)^2.$$

Kết hợp với bài ra ta có: $|x - 2022| + |x - 2023| + 3(x - y)^2 = 2(x - y)^2 + 1$

$$\Rightarrow |x - 2022| + |x - 2023| + (x - y)^2 = 1$$

Sử dụng bất đẳng thức chứa dấu giá trị tuyệt đối $|a + b| \geq |a - b|$, ta có:

$$|x - 2022| + |x - 2023| \geq |x - 2022 - x + 2023| = 1; (x - y)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x, y.$$

$$\Rightarrow |x - 2022| + |x - 2023| + (x - y)^2 \geq 1$$

Dấu “=” xảy ra khi: $x = y$ và $2022 \leq x \leq 2023$.

Vì x, y nguyên nên ta tìm được các cặp giá trị $(x; y)$ là $(2022; 2022); (2023; 2023)$.

Câu 9. (Đề 67 - HSG 7 Đồng Nai - Trường Thcs - THPT Tri Thức, 2022 - 2023)

Cho $\frac{1}{27} \cdot 9^n = 3^n$.
Tìm n nguyên dương thỏa mãn

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{27} \cdot 9^n = 3^n \Rightarrow \frac{1}{3^3} \cdot 3^{2n} = 3^n \Rightarrow 3^{2n-3} = 3^n \Rightarrow 2n-3=n \Rightarrow n=3$.

Vậy $n=3$.

Câu 10. (Đề 72 - HSG 7 Đồng Nai - Trường Thcs - THPT Tri Thức, 2022 - 2023)

Cho $C = \frac{22-3x}{4-x}$.
Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức C có giá trị lớn nhất.

Lời giải

Biến đổi $C = \frac{22-3x}{4-x} = \frac{3(4-x)+10}{4-x} = 3 + \frac{10}{4-x}$.

C có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{10}{4-x}$ có giá trị lớn nhất.

Có $x \in \mathbb{Z}$, ta xét các trường hợp sau:

Với $x > 4 \Rightarrow 4-x < 0$ thì $\frac{10}{4-x} < 0$ (1)

Với $x < 4 \Rightarrow 4-x > 0$.

Phân số $\frac{10}{4-x}$ có tử và mẫu đều dương, tử không đổi nên có giá trị lớn nhất khi mẫu nhỏ nhất

Có $x \in \mathbb{Z}$ suy ra $4-x \in \mathbb{Z}$

Suy ra $4-x$ là số nguyên dương nhỏ nhất $\Rightarrow 4-x=1 \Rightarrow x=3$.

Khi đó $\frac{10}{4-x}$ có giá trị là 10 (2)

Từ (1) và (2), phân số $\frac{10}{4-x}$ lớn nhất bằng 10.

Vậy giá trị lớn nhất của C bằng 13 khi và chỉ khi $x=3$.

Câu 11. (Đề 73 - HSG 7 Đồng Nai - Trường Thcs - THPT Tri Thức, 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x + 5y + xy = 2$.

Lời giải

$$x + 5y + xy = 2 \Rightarrow (x + yx) + (5y + 5) = 7 \Rightarrow (x + 5)(y + 1) = 7$$

$$\Rightarrow (x + 5)(y + 1) = 1 \cdot 7 = 7 \cdot 1 = (-1) \cdot (-7) = (-7) \cdot (-1)$$

$x + 5$	1	7	- 1	- 7
x	- 4	2	- 6	- 12
$y + 1$	7	1	- 7	- 1
y	6	0	- 8	- 2

Vậy có 4 cặp số nguyên cặp $(x; y)$ thỏa mãn: $x + 5y + xy = 2$ là:
 $(-4; 6); (2; 0); (-6; -8); (-12; -2)$.

Câu 12. (Đề 75 - HSG 7 Tiên Du, Bắc Ninh, 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số nguyên dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ và b (n là số nguyên dương nào đó) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $b > a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > 1$

ii) $\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = 2 \left(1 - \frac{1}{b}\right)$

Lời giải

Vì $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ và b thỏa mãn đồng thời hai điều kiện $b > a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > 1$.

Suy ra $b \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{b} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - \frac{1}{b} \geq 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{b}\right) \geq \frac{4}{3}$ (*)

Lại có: $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{a_1} < \frac{1}{a_2} < \frac{1}{a_3} < \dots < \frac{1}{a_n} < 1$.

$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{1}{a_1} < 1; 0 < 1 - \frac{1}{a_2} < 1; \dots; 0 < 1 - \frac{1}{a_n} < 1$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) < 1$$
 (**)

$$\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{a_3}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) = 2 \left(1 - \frac{1}{b}\right)$$

Từ (*) và (**) suy ra điều mâu thuẫn với

Vậy không tồn tại các số nguyên dương thỏa mãn bài ra.

Câu 13. (Đề 83 - HSG 7 Hưng Hà, trường THCS Phạm Đôn Lễ, 2022 - 2023)

$$A = \frac{14 - x}{4 - x}$$

Với giá trị nguyên nào của x thì biểu thức có giá trị lớn nhất? Tìm giá trị đó.

Lời giải

$$A = 1 + \frac{10}{4 - x} \Rightarrow \frac{10}{4 - x} \text{ lớn nhất}$$

$$\text{Xét } x > 4 \text{ thì } \frac{10}{4 - x} < 0.$$

$$\text{Xét } x < 4 \text{ thì } \frac{10}{4 - x} > 0.$$

$$\Rightarrow A \text{ lớn nhất.}$$

$$\Rightarrow 4 - x \text{ nhỏ nhất.}$$

$$\Rightarrow x = 3.$$

Vậy với $x = 3$ thì A có giá trị lớn nhất.

Câu 14. (Đề 87 - HSG 7 Hưng Hà, trường THCS Thống Nhất, 2022 - 2023)

$$Q = \frac{27 - 2x}{12 - x}$$

Cho x là số nguyên. Tìm các số nguyên x để Q có giá trị nguyên?

Lời giải

$$Q = \frac{27 - 2x}{12 - x} = \frac{2(12 - x) + 3}{12 - x} = 2 + \frac{3}{12 - x} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{12 - x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 3 \mid 12 - x \Rightarrow 12 - x \in U(3)$$

$$\Rightarrow 12 - x \in \{1; 3; -1; -3\}$$

$$\Rightarrow x \in \{11; 9; 13; 15\}$$

Vậy $x \in \{11; 9; 13; 15\}$.

Câu 15. (Đề 90 - HSG 7 Hưng Hà, trường THCS Tây Đô, 2022 - 2023)

Tìm giá trị nguyên của x để biểu thức $M = \frac{2016x - 2016}{3x + 2}$ có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$$M = \frac{2016x - 2016}{3x + 2} = \frac{672(3x + 2) - 2016 - 1344}{3x + 2} = 672 - \frac{3360}{3x + 2}.$$

M nhỏ nhất khi $\frac{3360}{3x + 2}$ lớn nhất.

$$\text{Xét } 3x + 2 < 0 \text{ thì } \frac{3360}{3x + 2} < 0. \quad (1)$$

$$\text{Xét } 3x + 2 > 0 \text{ thì } \frac{3360}{3x + 2} > 0.$$

$\frac{3360}{3x + 2}$ lớn nhất khi $3x + 2$ nhỏ nhất.

Mà x nguyên, $3x + 2$ dương và $3x + 2$ chia 3 dư 2 nên $3x + 2 = 2$ nên $x = 0$.

$$\text{Khi đó: } \frac{3360}{3x + 2} = \frac{3360}{3 \cdot 0 + 2} = 1680. \quad (2)$$

So sánh (1) và (2) thì $\frac{3360}{3x + 2}$ có giá trị lớn nhất bằng 1680.

Vậy $M_{\min} = -1008$ khi $x = 0$.

Câu 16. (Đề 70 - HSG 7 Sông Lô, Vĩnh Phúc, 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + x = 3^{2020 \cdot y} + 1$.

Lời giải

+) Trường hợp $y < 0$, ta có:

$VP = x^2 + x = x(x + 1)$ là số nguyên.

$VT = 3^{2020 \cdot y} + 1$ không là số nguyên (vì $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ với $a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$).

$\Rightarrow$ Trường hợp này loại.

+) Trường hợp $y = 0$, ta có: $x^2 + x = 3^{2020 \cdot 0} + 1 \Rightarrow x(x + 1) = 2 = 1 \cdot 2 = (-2)(-1)$.

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x < x + 1 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$.

Khi $x=1$ thì $y=0$; khi $x=-2$ thì $y=0$.

+) Trường hợp $y > 0$, ta có:

$VP = x^2 + x = x(x+1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên $x^2 + x$ chia hết cho 3 hoặc chia cho 3 dư 2.

$VT = 3^{2020, y} + 1$ chia cho 3 dư 1.

$\Rightarrow$ Trường hợp này loại.

Vậy cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là: $(1; 0); (-2; 0)$.

Câu 17. (Đề 72 - HSG 7 Bá Thước, THCS thị trấn Cành Nàng, 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2$.

Lời giải

+ Với $x=1$, ta có $1! = y^2 \Rightarrow 1 = y^2 (y \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y \in \{1; -1\}$.

+ Với $x=2$, ta có $1! + 2! = y^2 \Rightarrow 3 = y^2 \Rightarrow \forall y \in \mathbb{Z}$ nên không tìm được giá trị của y thỏa mãn đề bài.

+ Với $x=3$, ta có $1! + 2! + 3! = y^2 \Rightarrow 9 = y^2 (y \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y \in \{3; -3\}$.

+ Với $x \geq 4$, ta có $1! + 2! + 3! + \dots + x! = 33 + 5! + 6! + \dots + x!$ có chữ số tận cùng là 3 (Vì $5!, 6!, \dots, x!$ đều có chữ số tận cùng là 0) nên không phải là số chính phương, còn y^2 lại là số chính phương $\Rightarrow$ không tìm được giá trị của y thỏa mãn đề bài.

Vậy các cặp số nguyên x, y thỏa mãn là: $(x, y) \in \{(1; 1); (1; -1); (3; 3); (3; -3)\}$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>