

Người làm: Kiều Phương Thủy
Zalo: Kiều Phương Thủy Số dt: 0976506085
Email: kieuthiphuongthuy@gmail.com

CD6: CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG**Dạng 1. Chứng minh một số (một tổng) là số chính phương****Câu 1. (HSG 7 huyện Nghĩa Hành năm 2021 - 2022)**

Cho 5 số chính phương bất kì có chữ số hàng chục khác nhau còn chữ số hàng đơn vị đều là 6 . Chứng minh rằng tổng các chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó là một số chính phương.

Lời giải

Nếu một số chính phương $M = a^2$ có chữ số hàng đơn vị là 6 thì a là số chẵn,

Do đó $a : 2 \Rightarrow a^2 : 4$.

Theo dấu hiệu chia hết cho 4 thì hai chữ số tận cùng của M phải chia hết cho 4.

Nên 2 chữ số tận cùng của M phải là một trong các số: $16; 36; 56; 76; 96$.

Mà 5 số chính phương bất kì có chữ số hàng chục khác nhau, chữ số hàng đơn vị đều là 6 nên 5 chữ số hàng chục đó chính là: $1; 3; 5; 7; 9$.

Từ đó tổng các chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó là:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 = 5^2 \text{ là số chính phương.}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Tam Dương năm 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và thỏa mãn $b = 3a + c$.

Chứng minh rằng tích $f(1).f(-2)$ là bình phương của một số nguyên.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Nên: $f(1) = a.1^3 + b.1^2 + c.1 + d = a + b + c + d$

$$f(-2) = a(-2)^3 + b(-2)^2 + c(-2) + d = -8a + 4b - 2c + d$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } f(1) - f(-2) &= (a + b + c + d) - (-8a + 4b - 2c + d) = 9a - 3b + 3c \\ &= (9a + 3c) - 3b = 3(3a + c) - 3b = 3b - 3b = 0 \quad (\text{do } b = 3a + c). \end{aligned}$$

Suy ra $f(1) = f(-2)$

Do đó $f(1).f(-2) = [f(1)]^2 = (a + b + c + d)^2$ là bình phương của một số nguyên.

Câu 3. (HSG 7 huyện Vũ Thư năm 2021 - 2022)

Cho đa thức: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các số nguyên). Biết $7a + b + c = 0$.

Chứng minh rằng $f(3).f(-2)$ là số chính phương.

Lời giải

Ta có: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f(3) = 27a + 9b + 3c + d \quad \text{và} \quad f(-2) = -8a + 4b - 2c + d \\ &\Rightarrow f(3) - f(-2) = 35a + 5b + 5c = 5(7a + b + c) = 0 \quad (\text{vì } 7a + b + c = 0) \\ &\Rightarrow f(3) = f(-2) \Rightarrow f(3) \cdot f(-2) = [f(3)]^2 \end{aligned}$$

Vì $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ nên $f(3) \in \mathbb{Z} \Rightarrow [f(3)]^2$ là số chính phương.

Vậy $f(3) \cdot f(-2)$ là số chính phương.

Dạng 2. Chứng minh một số không là số chính phương

Câu 1. (HSG 7 huyện Triệu Sơn năm năm 2021 - 2022)

Chứng minh rằng nếu số tự nhiên $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Lời giải

Giả sử $b^2 - 4ac$ là số chính phương m^2 ($m \in \mathbb{N}$).

$$\begin{aligned} + \text{ Xét } 4a \cdot \overline{abc} &= 4a(100a + 10b + c) = 400a^2 + 40ab + 4ac \\ &= 400a^2 + 20ab + 20ab + b^2 - b^2 + 4ac \\ &= 20a(20a + b) + b(20a + b) - (b^2 - 4ac) = (20a + b) \cdot (20a + b) - (b^2 - 4ac) \\ &= (20a + b)^2 - (b^2 - 4ac) = (20a + b)^2 - m^2 = (20a + b + m)(20a + b - m) \end{aligned}$$

+ Vì $\overline{abc}$ là số nguyên tố suy ra tồn tại một trong hai thừa số $20a + b + m$ hoặc $20a + b - m$ chia hết cho số nguyên tố $\overline{abc}$.

+ Vì $b^2 - m^2 = 4ac > 0 \Rightarrow b > m$ nên:

$$20a + b - m \leq 20a + b + m < 20a + b + b < 100a + 10b + c = \overline{abc}.$$

Suy ra $20a + b + m$ và $20a + b - m$ đều không chia hết cho số nguyên tố $\overline{abc}$.

Do đó điều giả sử là sai.

Vậy nếu số tự nhiên $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Câu 2. (HSG 7 huyện Mường La năm 2021 - 2022)

Cho $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cba}$ với a, b, c là các chữ số bất kì. Chứng minh rằng S không phải là số chính phương.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} S &= \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = (100a + 10b + c) + (100b + 10c + a) + (100c + 10a + b) \\ &= 111a + 111b + 111c = 111(a + b + c) = 37 \cdot 3(a + b + c) \end{aligned}$$

Giả sử S là số chính phương, thì S phải chứa số nguyên tố 37 với số mũ chẵn
 $\Rightarrow 3(a + b + c) : 37 \Rightarrow a + b + c : 37$

Điều này không xảy ra vì a, b, c là các chữ số nên $0 \leq a, b, c \leq 9 \Rightarrow 0 \leq a + b + c \leq 27$.

Vậy $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ không phải là số chính phương.

Dạng 3. Tìm số chính phương

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường năm 2021 - 2022)

A.

B.

C.

D.

Lời giải

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường năm 2021 - 2022)

Lời giải

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com
<https://www.vnteach.com>